Pannon Egyetem
Villamosmérnöki és Információs Tanszék

Számítógép Architektúrák II.
(MIVIB344ZV)

1. előadás: Boole-algebra, logikai függvények (ismétlés)

Előadó: Dr. Vörösházi Zsolt
voroshazi.zsolt@mik.uni-pannon.hu

Kapcsolódó jegyzet, segédanyag:

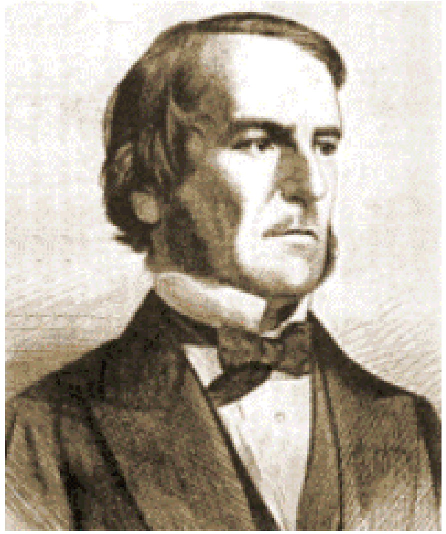
- Angol nyelvű könyv: http://www.virt.uni-pannon.hu → Oktatás → Tantárgyak → Számítógép Architektúrák II.
- (chapter01.pdf)

- Fóliák, óravázlatok .ppt (.pdf)
- Feltöltésük folyamatosan

További ajánlott irodalom

- 🕮 Dr. Holczinger, Dr. Göllei. Dr. Vörösházi: Digitális Technika I. (TAMOP 4.1.2A - 2012) : Digitalis_technika_I_TAMOP
- 🕮 Dr. Holczinger, Dr. Göllei. Dr. Vörösházi: Digitális Technika II. (TAMOP 4.1.2A - 2013) : Digitalis_technika_II_TAMOP

Boole-algebra



(1815-1864)

- „Logikai operátorok” algebrája
- George Boole: először mutatott hasonlóságot az általa vizsgált **logikai operátorok** és a már jól ismert **aritmetikai operátorok** között.
- HW tervezés alacsonyabb absztrakciós szintjén rendkívül fontos szerepe van (specifikáció + logikai egyszerűsítés = „minimalizálás”)

Boole-algebra elemei

- A vizsgált 3 alapművelet: AND, OR, NOT
- Tulajdonságaik (AND, OR esetén):
  - ***Kommutatív***: $A+B=B+A$, $A \cdot B=B \cdot A$
  - ***Asszociatív***: $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$
    $A \cdot (B \cdot C)=(A \cdot B) \cdot C=A \cdot B \cdot C$
  - ***Disztributív***: $A \cdot (B+C)=A \cdot B+A \cdot C$,
    $A+(B \cdot C)=(A+B) \cdot (A+C)$
- Operátor precedencia (csökkenő sorrendben):
  - NOT
  - AND
  - OR
- *átzárójelezhetőség*!

Bizonyítás: Disztributivitás

$$A+(B \cdot C) \overset{?}{=} (A+B) \cdot (A+C)$$

A	B	C	B · C	A+(B · C)
0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	**0**
0	1	0	0	**0**
0	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
1	0	1	0	**1**
1	1	0	0	**1**
1	1	1	1	**1**

A	B	C	A+B	A+C	(A+B) · (A+C)
0	0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	1	**0**
0	1	0	1	0	**0**
0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	1	1	**1**
1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	1	1	**1**
1	1	1	1	1	**1**

Mivel a mindkét oldal kimeneti kombinációi azonosak, ezért egyenlőség áll fenn!

Boole algebra azonosságai = axiómák

1.) $\overline{\overline{A}} = A$ NOT

2.) $A + 0 = A$
3.) $A + 1 = 1$
4.) $A + A = A$
5.) $A + \overline{A} = 1$

$\Big\}$ OR

6.) $A \cdot 1 = A$
7.) $A \cdot 0 = 0$
8.) $A \cdot A = A$
9.) $A \cdot \overline{A} = 0$

$\Big\}$ AND

10.) $A + A \cdot B = A$ *
11.) $A \cdot (A + B) = A$ *

$\Big\}$ Elnyelési tul.

12.) $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$

13.) $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

14.) $A + \overline{A} \cdot B = A + B$ *

15.) $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

De-Morgan azonosságok:

16) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
17.) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

$\Big\}$ DUALITÁS

Példa-1: Boole-algebrai azonosság igazolása igazságtáblával

- De-Morgan (17.) NAND: $\overline{A \cdot B} \overset{?}{=} \overline{A} + \overline{B}$

A	B	A·B	NOT (A·B)
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

A	B	NOT A	NOT B	NOT(A) + NOT(B)
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Dualitás elve

- Példa-2: Hasonló módon bizonyítsa be De-Morgan NOR (16.) azonosságot is igazságtábla segítségével!

Példa-3: Boole algebrai egyszerűsítések

- Igaz-e a következő állítás:

$$\overline{A\cdot(B+C\cdot(B+\overline{A}))}\overset{?}{=}\overline{A}+\overline{B}$$

- Megoldás: Belső zárójelek felbontása → egyszerűsítés

$$\overline{A\cdot(B+C\cdot(B+\overline{A}))}\overset{diszt}{=}\overline{A\cdot(\underbrace{B+C\cdot B}_{B\cdot(1+C)}+C\cdot\overline{A})}=$$

$$\overline{A\cdot(B+C\cdot\overline{A})}=\overline{A\cdot B+A\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot C}_{0}}=\overline{A\cdot B}\overset{DM}{=}\overline{A}+\overline{B}$$

☺

Logikai hálózatok csoportosítása

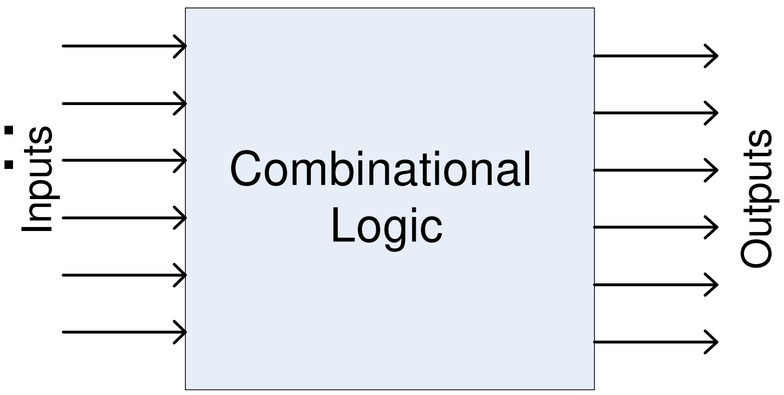
Kétféle hálózatot különböztetünk meg:

- **(K.H.)** **Kombinációs logikai** **hálózat**ról beszélünk: ha a mindenkori kimeneti kombinációk létrehozásához *elég a bemeneti („elsődleges”) kombinációk* pillanatnyi értéke.

- **(S.H.)** **Sorrendi (szekvenciális) logikai** **hálózat**ról beszélünk**:** ha a mindenkori kimeneti kombinációt, nemcsak *a pillanatnyi* bemeneti kombináció, hanem *a korábban fennállt <u>állapot</u> kombinációk* és azok <u>sorrendje</u> is befolyásolja. (Ezen *„másodlagos” kombinációk* segítségével az ilyen hálózatok képessé vállnak arra, hogy az ugyanolyan bemeneti kombinációkhoz **más-más kimeneti** kombinációt szolgáltassanak.)

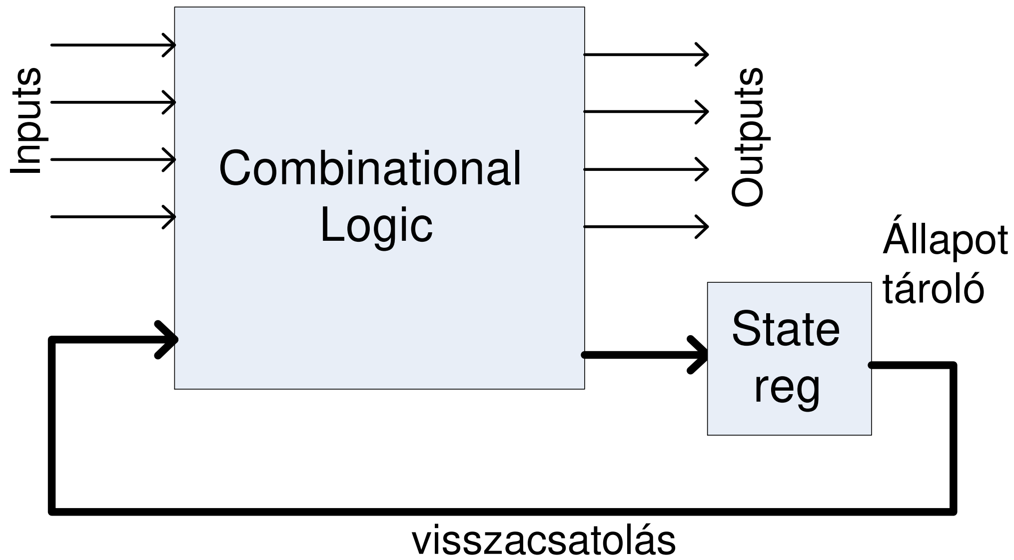
Kombinációs vs. **sorrendi** logikai hálózatok felépítése

- Kombinációs hálózat:



Függvény = egyértelmű hozzárendelés!

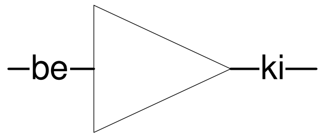
- Sorrendi hálózat:

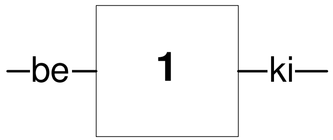


Egyváltozós logikai függvények:

- Jelmásoló („buffer” - jel-erősítő):

be	ki
0	0
1	1





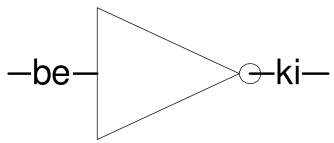
Nemzetközi szabvány

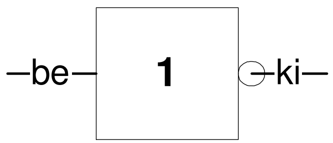
Magyar szabvány

- Negálás - Inverter (NOT):

$\overline{A}$

be	ki
0	1
1	0



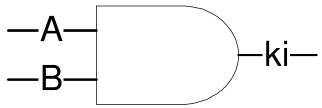


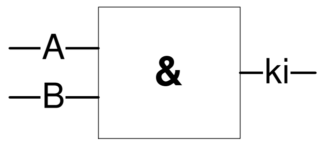
Kétváltozós logikai függvények:

- ÉS (AND):

$$A \cdot B$$

A	B	ki
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

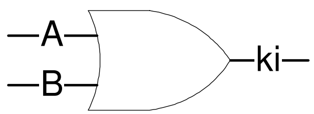


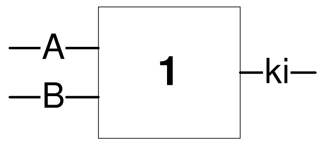


- VAGY (OR):

$$A + B$$

A	B	ki
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

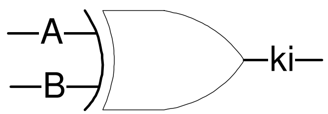


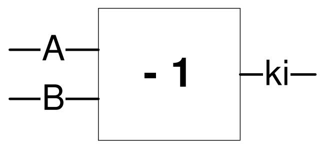


- Antivalencia (XOR):

$$A \oplus B$$

A	B	ki
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0





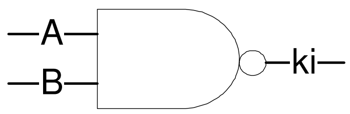
Kétváltozós log.függv. (folyt.):

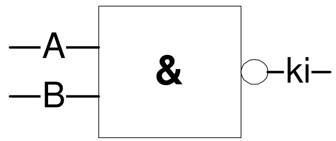
Univerzálisan teljes rendszert a NAND illetve NOR függvény alkot!

- NEM-ÉS (NAND):

$$\overline{A \cdot B}$$

A	B	ki
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

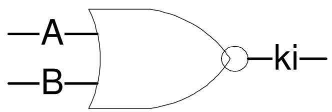


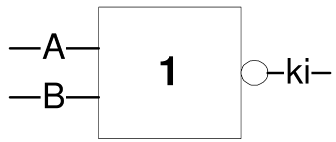


- NEM-VAGY (NOR):

$$\overline{A + B}$$

A	B	ki
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

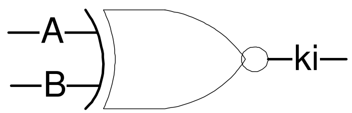


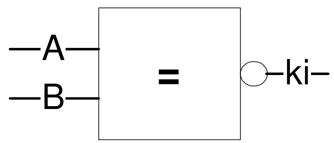


- Ekvivalencia (NXOR):

$$A \odot B$$

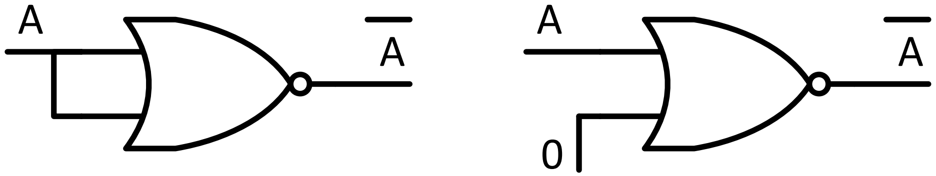
A	B	ki
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



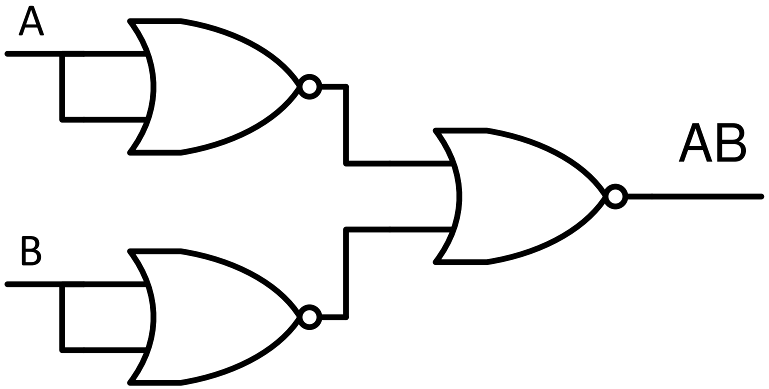


Definíció: Funkcionális teljesség

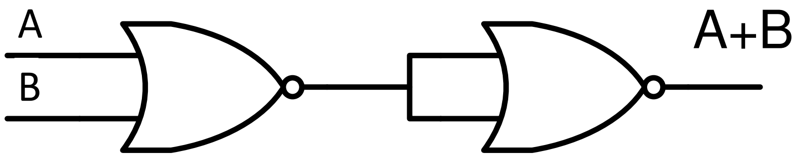
- NOR → INV



- NOR → AND



- NOR → OR



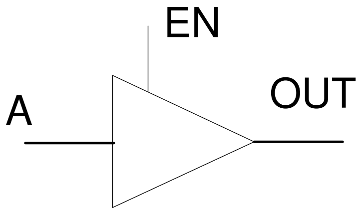
Funkcionálisan teljes / univerzális áramköri elemek:

- **<u>Logikai</u> hálózatok esetén a CMOS VLSI technológiában a NAND, illetve NOR kapuk.**
- **(<u>Aritmetikai</u> egységek esetében ilyen univerzális építőelem az ‚összeadó')**

Gyakorlás: Bizonyítsad be NAND kapu esetén is!

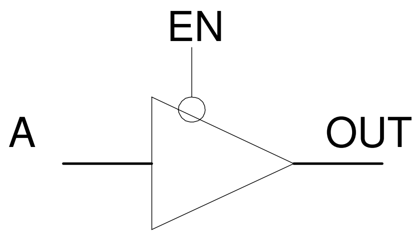
Tri-State Buffer:

- buszok esetén használatos: kommunikációs irány változhat
  - Driver: egyirányú kommunikációra
  - Transceiver: kétirányú kommunikációra
- 3 állapota lehet:
  - magas: **'1'**
  - alacsony: **'0'** (normál TTL szintek)
  - nagy impedanciás állapot: **'Z'** – mindkét kimeneti tranzisztor zár



High-true enable

A	EN	OUT
0	1	0
1	1	1
X	0	Z



Low-true enable

Smart áramkörök ☺