

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσέκας Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

Άσκηση 1

(α) Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

$$E[X(n, \theta)] = E\{A(\theta)[u(n) - u(n - 100)]\}$$

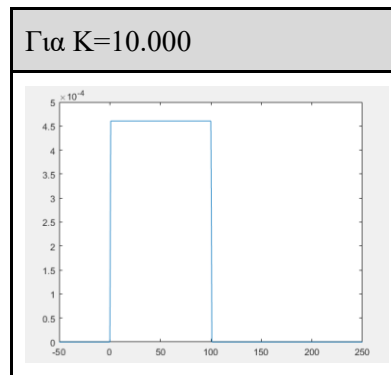
Δεδομένου Δεδομένου ότι $A(\theta)$ έχει ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$, η αναμενόμενη τιμή της $A(\theta)$ είναι μηδέν.

Έτσι, η στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας γίνεται:

$$E[X(n, \theta)] = 0 \times [u(n) - u(n - 100)] = 0$$

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $rand(\cdot)$ της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

Απάντηση: Όσο το K αυξάνεται επιβεβαιώνεται ο νόμος των μεγάλων αριθμών και η εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής τείνει να βελτιώνεται.

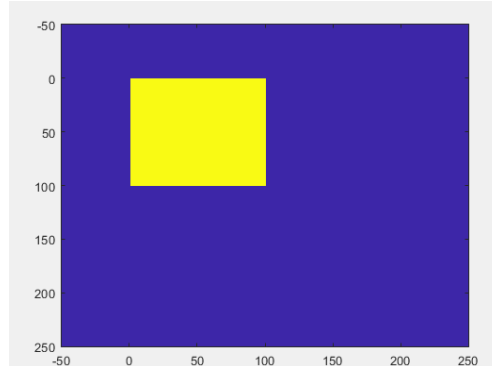


(γ) Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός K των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσεκάς Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

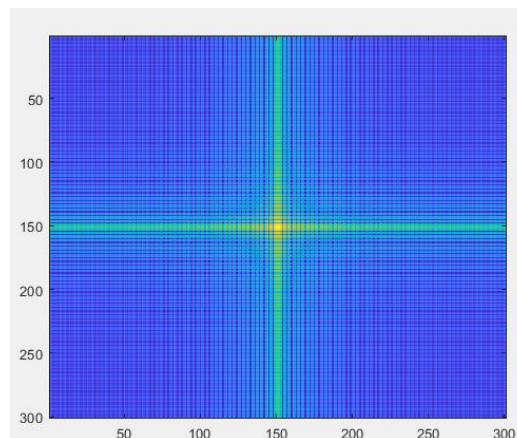


(δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία “λευκή”; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

1. **Απάντηση:** Για να είναι μια διαδικασία λευκή, πρέπει απαραίτητα κάθε δείγμα να σχετίζεται μόνο με τον εαυτό του, δηλαδή περιμένω διαγώνιο με άσσους και μηδενικά παντού αλλού. Επομένως, η διαδικασία αυτή δεν είναι λευκή.

(ε) Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K ;

Απάντηση:



Άσκηση 2

(α) Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

$$E[X(n, \theta)] = E\{A(\theta)[u(n) - u(n - 100)]\} = 0$$

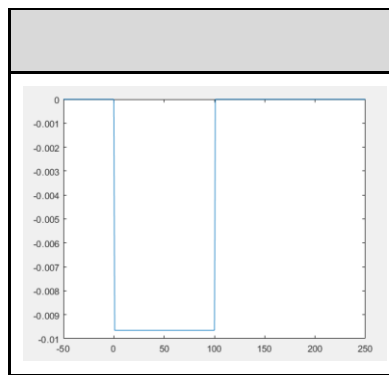
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

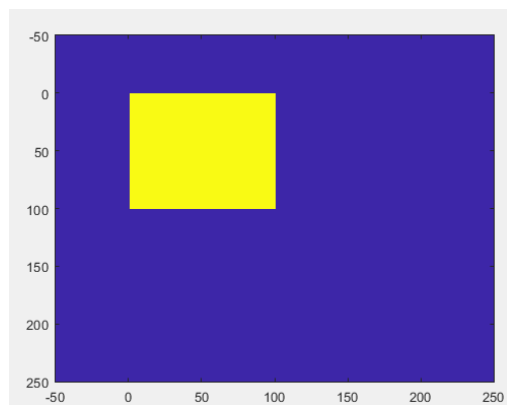
Ον/μο:	Μπερτσέκας Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\text{randn}(\cdot)$ της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

Απάντηση: Τα συμπεράσματα μας είναι ίδια με αυτά της προηγούμενης Άσκησης.



(γ) Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός K των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;



(δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία “λευκή”; Αιτιολογίστε την απάντησή σας.

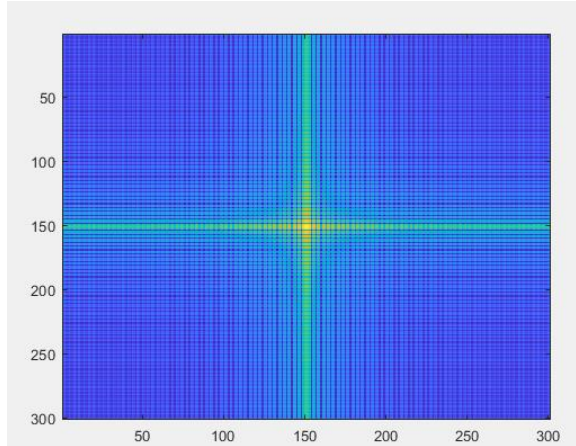
Απάντηση: Όχι για τους ίδιους λόγους με πριν

(ε) Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K ;

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσεκάς Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

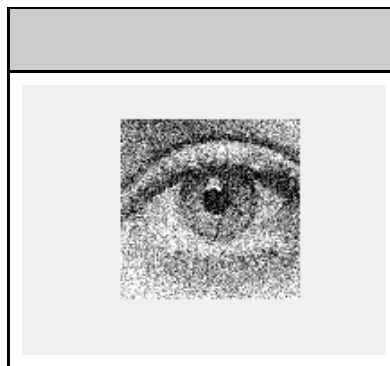


Απάντηση:

Ασκηση 3

(α) Χρησιμοποιήστε αποδοτικά τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και αποκαλύψτε την εικόνα που κρύβεται στην ακολουθία. Εκτιμήστε την διασπορά του θορύβου καθώς και την κατανομή του.

Απάντηση: Ο θόρυβος είναι μάλλον λευκός με διασπορά 4.0500.



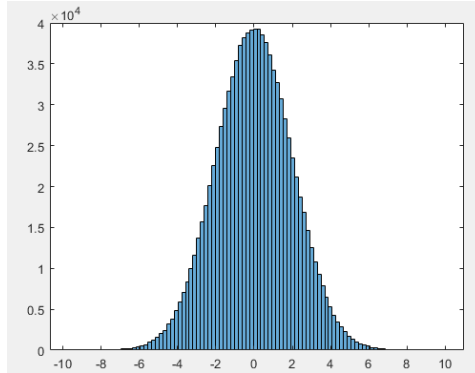
(β) Χρησιμοποιώντας την εικόνα που αποκαλύψατε, επιβεβαιώστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Απάντηση: Αποδεικνύουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα πειραματικά αφού βλέπουμε ότι μια σειρά συναρτήσεων (ο θόρυβος) συγκλίνει προς την κανονική κατανομή.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

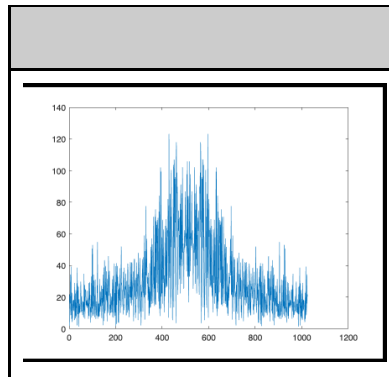
Ον/μο:	Μπερτσέκας Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----



Άσκηση 4

(α) Τι είδους διαδικασία περιγράφει η Σχέση (2); Χρησιμοποιώντας $\omega_0 = 0.25$ και τη συνάρτηση $randn(\cdot)$, δημιουργήστε μερικές υλοποιήσεις της. Υπολογίστε τα φασματικά χαρακτηριστικά του χρωματισμένου θορύβου. Συμφωνούν με τα θεωρητικά αναμενόμενα;

Απάντηση:



(β) Ποιά η λειτουργία του Συστήματος Λεύκανσης; Καταγράψτε την απάντησή σας.

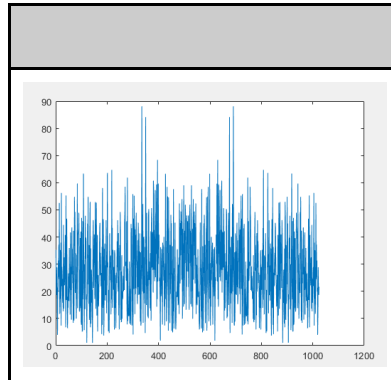
Απάντηση:

Προσπαθούμε να εξισορροπήσουμε την ενέργεια του θορύβου σε όλες τις συχνότητες.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσέκας Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

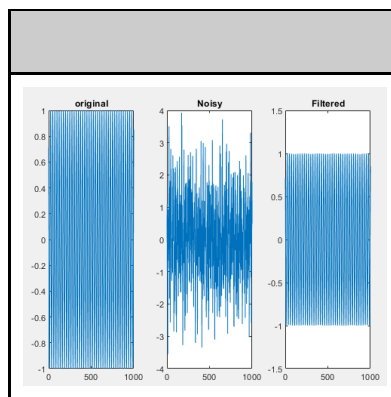


(γ) Η πηγή του σήματος της Σχέσης (1) είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Είναι στοχαστική αφού περιέχει την τυχαία μεταβλητή φ

(δ) Αν η πηγή του σήματος είναι στοχαστική, είναι ασθενώς στάσιμη πρώτης ή δεύτερης τάξης; Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `rand()`, δημιουργείστε υλοποιήσεις της και προσπαθήστε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας και πειραματικά. Καταγράψτε τα πειράματα που κάνατε και τα αποτελέσματά σας.

Απάντηση: Ασθενώς δεύτερης τάξης



(ε) Εκφράστε την έξοδο του FIR φίλτρου Wiener μήκους M συναρτήσει των συντελεστών της κρουστικής του απόκρισης και του χρωματισμένου θορύβου.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσεκάς Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

Απάντηση:

(στ) Σχεδιάστε το βέλτιστο FIR φίλτρο Wiener μήκους 2 και υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Απάντηση:

```
ans =  
  
2.8984e-14
```

(ζ) Επαναλάβετε την Ερώτηση 5 για φίλτρα μήκους 3, 4, 5, 6, υπολογίστε τα αντίστοιχα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Τι παρατηρείτε;

M = 3	M = 4	M = 5	M = 6
<pre>w norm 0.0316 rms 2.4957e-10</pre>	<pre>w norm 0.0609 rms 3.1486e-09</pre>	<pre>w norm 0.0962 rms 4.3985e-09</pre>	<pre>w norm 0.1293 rms 1.4865e-08</pre>

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ο κώδικας που χρησιμοποιήσατε για την υλοποίηση

ΑΣΚΗΣΗ 1

```
clear;clc;close all  
K = 10000;  
n = [-50:250]';  
A = rand(1,K);  
x = A .* ((n > 0) - (n - 100 > 0));  
  
Acor = x*x'/K;  
Sd = 20*log10(fftshift(abs(fft2(Acor))));
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσέκας Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

```
%%  
plot(n,mean(x,2))  
figure; imagesc(n,n,Acor)  
figure; imagesc(Sd)  
  
ΑΣΚΗΣΗ 2  
  
clear;clc;close all  
K = 10000;  
n = [-50:250]';  
A = randn(1,K);  
x = A .* ((n > 0) - (n - 100 > 0));  
  
Acor = x*x'/K;  
Sd = 20*log10(fftshift(abs(fft2(Acor))));  
%%  
plot(n,mean(x,2))  
figure; imagesc(n,n,Acor)  
figure; imagesc(Sd)
```

```
ΑΣΚΗΣΗ 3  
  
clear; clc; close all  
  
load eye.mat  
  
% first image  
figure;  
imshow(I(:,:,1))  
  
% mean image  
approx = mean(I,3);  
figure  
imshow(approx);  
  
% noise added to each image  
noise = I - repmat(approx,[1,1,size(I,3)]);  
  
%calculate the noise statistics  
mean_noise = mean(noise(:));  
std_noise = std(noise(:));  
  
% noise distribution  
figure;  
histogram(noise(:),100);  
  
K = length(I(:,:,1))^2; %the number of noise samples for each image  
%equals the number of pixels  
for j=1:100
```


ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσέκας Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

```
%for each image create a sample to check the c.l.theorem
sample(j) = sum(sum(noise(:, :, j)-mean_noise))/(std_noise*sqrt(K));
end
```

```
% check the central limit theorem from the above
% each random variable generated from above is a sample
mean_ = mean(sample);
std_ = std(sample);
```

```
figure;
histogram(sample(:),50); % looks more or less like a gaussian
```

ΑΣΚΗΣΗ 4 (για N=3)

```
clear
close all
clc

n=0:1000;
phi = rand(1)*2*pi;
s = sin(0.25*n+phi);

w = randn(1,length(n));
v = filter(1,[1,-0.6],w);
x = s + w;

%find the autocorrelation
%v1 = v(1:end-1);
%v2 = v(2:end);

v1 = v(1:end-2);
v2 = v(2:end-1);
v3 = v(3:end);

V = [v3;v2;v1];
Rvv = V*V'/length(v1);

%find the crosscorrelation
rwv = zeros(3,1);
%rwv(1) = sum(v(2:end) .* w(2:end));
%rwv(2) = sum(v(1:end-1) .* w(2:end));

rwv(1) = sum(v(3:end) .* w(3:end));
rwv(2) = sum(v(2:end-1) .* w(3:end));
rwv(3) = sum(v(1:end-2) .* w(3:end));
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσέκας Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

```
% Normalize rsx
rwv = rwv / (length(v) - 1);

% Wiener filter coefficients
hW = Rvv\rwv;
% hW = [    ]

%apply to colored noise to make it white again
w_hat = filter(hW,1,v);

w_norm = norm(w-w_hat); %to minimize

x_hat = x-w_hat;

subplot(131);plot(s);title('original');
subplot(132);plot(x);title('Noisy');
subplot(133);plot(x_hat);title('Filtered');
disp('w norm');
disp(w_norm);
disp('rms');
rms = mean((s - x_hat)).^2;

disp(rms);
```

ΑΣΚΗΣΗ 4 (για N=4)

```
w = randn(1,length(n));
v = filter(1,[1,-0.6],w);
x = s + w;

%find the autocorrelation
v1 = v(1:end-3);
v2 = v(2:end-2);
v3 = v(3:end-1);
v4= v(4:end);

V = [v4;v3;v2;v1];
Rvv = V*V'/length(v1);

%find the crosscorrelation
rwv = zeros(4,1);
rwv(1) = sum(v(4:end) .* w(4:end));
rwv(2) = sum(v(3:end-1) .* w(4:end));
rwv(3) = sum(v(2:end-2) .* w(4:end));
rwv(4) = sum(v(1:end-3) .* w(4:end));

% Normalize rsx
rwv = rwv / (length(v) - 1);
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσέκας Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

```
% Wiener filter coefficients
hW = Rvv\rwv;
% hW = [    ]

%apply to colored noise to make it white again
w_hat = filter(hW,1,v);

w_norm = norm(w-w_hat); %to minimize

x_hat = x-w_hat;

subplot(131);plot(s);title('original');
subplot(132);plot(x);title('Noisy');
subplot(133);plot(x_hat);title('Filtered');

disp('w norm');
disp(w_norm);
disp('rms');
rms = mean((s - x_hat)).^2;

disp(rms);
```

ΑΣΚΗΣΗ 4 (για N=5)

```
clear
close all
clc

n=0:1000;
phi = rand(1)*2*pi;
s = sin(0.25*n+phi);

w = randn(1,length(n));
v = filter(1,[1,-0.6],w);
x = s + w;

%find the autocorrelation
v1 = v(1:end-4);
v2 = v(2:end-3);
v3 = v(3:end-2);
v4= v(4:end-1);
v5 = v(5:end);

V = [v5;v4;v3;v2;v1];
Rvv = V*V'/length(v1);

%find the crosscorrelation
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσέκας Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

```
rwv = zeros(5,1);
rwv(1) = sum(v(5:end) .* w(5:end));
rwv(2) = sum(v(4:end-1) .* w(5:end));
rwv(3) = sum(v(3:end-2) .* w(5:end));
rwv(4) = sum(v(2:end-3) .* w(5:end));
rwv(5) = sum(v(1:end-4) .* w(5:end));

% Normalize rsx
rwv = rwv / (length(v) - 1);

% Wiener filter coefficients
hW = Rvv\rwv;
% hW = [    ]

%apply to colored noise to make it white again
w_hat = filter(hW,1,v);

w_norm = norm(w-w_hat); %to minimize

x_hat = x-w_hat;

subplot(131);plot(s);title('original');
subplot(132);plot(x);title('Noisy');
subplot(133);plot(x_hat);title('Filtered');

disp('w norm');
disp(w_norm);
disp('rms');
rms = mean((s - x_hat)).^2;

disp(rms);
```

ΑΣΚΗΣΗ 4 (για N=6)

```
clear
close all
clc

n=0:1000;
phi = rand(1)*2*pi;
s = sin(0.25*n+phi);

w = randn(1,length(n));
v = filter(1,[1,-0.6],w);
x = s + w;

%find the autocorrelation
v1 = v(1:end-5);
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Μπερτσέκας Παρασκευάς- Σωτήριος	ΑΜ:	1093445	Έτος:	3ο
--------	---------------------------------------	-----	---------	-------	----

```
v2 = v(2:end-4);
v3 = v(3:end-3);
v4= v(4:end-2);
v5 = v(5:end-1);
v6 = v(6:end);

V = [v6;v5;v4;v3;v2;v1];
Rvv = V*V'/length(v1);

%find the crosscorrelation
rwv = zeros(6,1);
rwv(1) = sum(v(6:end) .* w(6:end));
rwv(2) = sum(v(5:end-1) .* w(6:end));
rwv(3) = sum(v(4:end-2) .* w(6:end));
rwv(4) = sum(v(3:end-3) .* w(6:end));
rwv(5) = sum(v(2:end-4) .* w(6:end));
rwv(6) = sum(v(1:end-5) .* w(6:end));

% Normalize rsx
rwv = rwv / (length(v) - 1);

% Wiener filter coefficients
hW = Rvv\rwv;
% hW = [    ]

%apply to colored noise to make it white again
w_hat = filter(hW,1,v);

w_norm = norm(w-w_hat); %to minimize

x_hat = x-w_hat;

subplot(131);plot(s);title('original');
subplot(132);plot(x);title('Noisy');
subplot(133);plot(x_hat);title('Filtered');

disp('w norm');
disp(w_norm);
disp('rms');
rms = mean((s - x_hat)).^2;

disp(rms);
```