

V47

Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern

Durchführung: 12.11.2018

Abgabe: 26.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	1
2	Theorie	1
2.1	Klassische Physik	1
2.2	Einstein-Modell	2
2.3	Debye-Modell	3
3	Aufbau	4
4	Durchführung	6
5	Auswertung	6
5.1	Fehlerrechnung und Methoden der Auswertung	6
5.2	Bestimmung von C_p und C_V	6
5.3	Bestimmung der Debye-Temperatur θ_D	7
5.4	Bestimmen der Debye-Temperatur	11
5.5	Theoretische Bestimmung der Debye-Temperatur	11
6	Diskussion	14
	Literatur	14

1 Zielsetzung

In diesem Experiment wird die Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Kupfer bestimmt. Aus den gewonnenen Ergebnissen wird ein Wert für die Debye-Temperatur θ_D ermittelt, welcher anschließend mit einem theoretischen Wert für diese Temperatur verglichen wird, welche aus dem Debye'schen Ansatz stammt.

2 Theorie

Zunächst werden die unterschiedlichen Modelle für die Bestimmung der Molwärme vorgestellt. Jedes dieser Modelle trifft Annahmen, welche die Ermittlung dieser stark vereinfachen. Am Ende des jeweiligen Unterkapitels werden die Grenzen der jeweiligen Annahmen diskutiert.

2.1 Klassische Physik

In der klassischen Physik kann die mittlere Energie eines Atoms pro Freiheitsgrad $\langle u_i \rangle$ einer festen Energie zugeordnet werden. Diese beträgt bei einer Temperatur T :

$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

Hier bezeichnet k_B die Boltzmann-Konstante. Dies ist möglich, da sich nach dem Äquipartitionstheorem die zugeführte Wärmeenergie gleichmäßig verteilt.

In einem Festkörper sind die einzelnen Atome durch die vorliegenden Potentiale ihrer Nachbarn an einem festen Ort näherungsweise fixiert. Sie können dennoch in drei Richtungen, welche jeweils orthogonal aufeinander stehen, schwingen. Die Atome verfügen sowohl über kinetische als auch über potentielle Energie. Bei einer harmonischen Schwingung sind diese im Mittel identisch. Daher folgt für die mittlere Energie $\langle u \rangle$ pro Atom:

$$\langle u \rangle = 6 \langle u_i \rangle = 3k_B T. \quad (1)$$

Wird diese Betrachtung auf ein Mol des jeweiligen Festkörpers extrapoliert, so ergibt sich für die spezifische Molwärme bei konstantem Volumen:

$$U = 3k_B T \cdot N_L = 3RT, \\ C_V = \left(\frac{\delta U}{\delta T} \right)_V = 3R.$$

Dabei bezeichnet N_L die Loschmidt'sche Zahl und R die allgemeine Gaskonstante. Es ist erkennbar, dass nach der klassischen Physik weder eine Material- noch eine Temperaturabhängigkeit der Molwärme existiert. In der Praxis wird aber ein Zusammenhang

zwischen der Molwärme und diesen Größen gemessen. Bei Betrachtung des Grenzfalles ($T \gg \theta_D$) jedoch, wird eine asymptotische Näherung an den Grenzwert der klassischen Theorie gemessen.

Es ist erkennbar, dass eine klassische Vorgehensweise nicht ausreichend ist, um die Molwärme eines Festkörpers hinreichend genau beschreiben zu können.

2.2 Einstein-Modell

In diesem Modell werden die Schwingungsenergien und damit die Schwingungsfrequenzen der einzelnen Atome quantisiert. Mit der Annahme, dass alle Oszillatoren nur mit einer einheitlichen Frequenz ω schwingen und wird ihre Energie als ein Vielfaches von $\hbar\omega$ angenommen.

Für die Oszillatoren gilt im thermodynamischen Gleichgewicht gemäß der Boltzmann-Verteilung, dass dieser mit einer relativen Wahrscheinlichkeit $W(n)$ die Energie eines ganzzahligen Vielfaches von $\hbar\omega$ besitzt:

$$W(n) = \exp\left(\frac{-n\hbar\omega}{k_B T}\right). \quad (2)$$

Für den Erwartungswert der mittleren Energie eines Atoms des Festkörpers $\langle u \rangle_{\text{Einstein}}$ gilt daher:

$$\langle u \rangle_{\text{Einstein}} = \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega W(n)}{Z} \right), \quad (3)$$

$$= \left(\frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} \right) < k_B T. \quad (4)$$

Hierbei bezeichnet Z die Summe aller möglichen Zustände.

Analog zu dem klassischen Fall wird die Molwärme berechnet, indem die mittlere Energie nach der Temperatur abgeleitet wird:

$$C_{V_{\text{Einstein}}} = 3R \frac{\hbar^2 \omega^2}{k_B^2 T^2} \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1\right)^2}. \quad (5)$$

Da $C_{V_{\text{Einstein}}}$ von der Temperatur abhängt, stellt dies eine Erweiterung des vorherigen klassischen Modells da. Dennoch ist durch die zuvor getroffene Annahme einer einheitlichen Schwingung bei einer bestimmten Frequenz eine starke Einschränkung der möglichen Schwingungen. Daher treten in der Praxis bei sehr tiefen Temperaturen große Abweichungen zu den Werten, welche aus diesem Modell hervorgehen, auf. Für hohe Temperaturen folgt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_{V,\text{Einstein}} = 3R \quad (6)$$

Für tiefe Temperaturen gilt:

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_{V,\text{Einstein}} = 0 \quad (7)$$

2.3 Debye-Modell

In dem Debye-Modell wird eine spektrale Geschwindigkeitsverteilung angenommen. Dann gilt für die Molwärme bei konstantem Volumen:

$$C_{V,\text{Debye}} = \frac{d}{dT} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega Z(\omega) \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}. \quad (8)$$

Dabei ist $Z(\omega)$ die spektrale Verteilung der Eigenschwingungen aller Oszillatoren eines Kristalls. Da eine genaue Beschreibung dieser Verteilung je nach dem Verhalten des Kristalls, schnell hinreichend kompliziert werden kann, wird diese lediglich approximiert. Dazu wird die Annahme vorgenommen, dass die Phasengeschwindigkeit einer Welle unabhängig von ihrer Ausbreitungsrichtung und Frequenz ist.

Durch Abzählung der Eigenschwingungen der Oszillatoren des Kristalls in einem Würfel der Kantenlänge L kann so die spektrale Dichte innerhalb eines Frequenzintervalls wie folgt berechnet werden:

$$Z(\omega)d\omega = \frac{L^3}{2\pi} \omega^2 \left(\frac{1}{v^3} \right) d\omega. \quad (9)$$

Ein Kristall besitzt nur eine endliche Dimension. Daher existieren nur endlich viele Eigenschwingungen, nämlich die Anzahl der Atome N_L in jede Raumrichtung:

$$\int_0^{\omega_D} Z(\omega)d\omega = 3N_L, \quad (10)$$

$$\omega_D = \frac{6\pi^2 v^3 N_L}{L^3}. \quad (11)$$

Die oberste Frequenz wird dabei Debye-Frequenz genannt ω_D . Damit folgt:

$$Z(\omega)d\omega = \frac{9N_L \omega^2}{\omega_D^3} d\omega, \quad x = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad \frac{\Theta_D}{T} = \frac{\hbar\omega_D}{k_B T}.$$

Dabei ist Θ_D die Debye-Temperatur, die materialspezifisch ist. Daraus ergibt sich für die Molwärme in dem Debye-Modell die sogenannte Debye-Funktion, welche allgemein für jeden Festkörper gültig ist:

$$C_{V_{\text{Debye}}} = 9R \frac{\Theta_D^3}{T^3} \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^4 \exp(x)}{(\exp(x) - 1)^2} dx. \quad (12)$$

Für den Grenzfall ($x \ll 1$), d.h. für große Temperaturen, geht diese Funktion wieder in das klassische Modell über. Für tiefe Temperaturen dagegen ist die Debye-Funktion proportional zu T^3 . Diese Beschreibung ist wesentlich besser als die des Einstein-Modells, da diese für tiefe Temperaturen ein exponentiellen Zusammenhang zwischen der Molwärme und der Temperatur aufweist.

Für eine exakte Beschreibung der Molwärme muss einerseits noch der Beitrag der Leitungselektronen zur Molwärme berücksichtigt werden. Dieser besonders bei tiefen Temperaturen von Bedeutung ist und aus der Fermi-Dirac-Statistik ergibt sich, dass er proportional zu T ist. Andererseits muss bei der Berechnung des Frequenzspektrums bei der Dispersionsrelation zwischen Longitudinal- und Transversalwellen unterschieden werden.

3 Aufbau

In der Abbildung 1 wird der Aufbau des Experiments schematisch dargestellt. In dem Dewar-Gefäß befindet sich der Rezipient, ein Kupfer-Zylinder mit einer Heizwicklung und zwei Pt-100-Messwiderstände. An diesen Widerständen ist jeweils ein Widerstandsmessgerät angeschlossen, um die Temperaturen des Gehäuses und der Probe zu messen.

Über die Pt-100-Widerstände kann die anliegende Temperatur gemäß der monotonen Funktion

$$T_i = 0,00134R_i^2 + 2,296R_i - 243,02 \quad (13)$$

berechnet werden. Dabei ist der jeweilige Widerstand R_i in Ohm und die Temperatur T_i in Grad Celsius gegeben.

Die Heizwicklung ist über Kabel mit einem Konstantstromgerät, der Heizspannungs- und einem Heizstrommessgerät verbunden. Des Weiteren kann der Rezipient mit Hilfe einer Vakuumpumpe evakuiert werden. Durch Öffnung des Absperrhahns ist es möglich diesen mit Helium zu füllen.

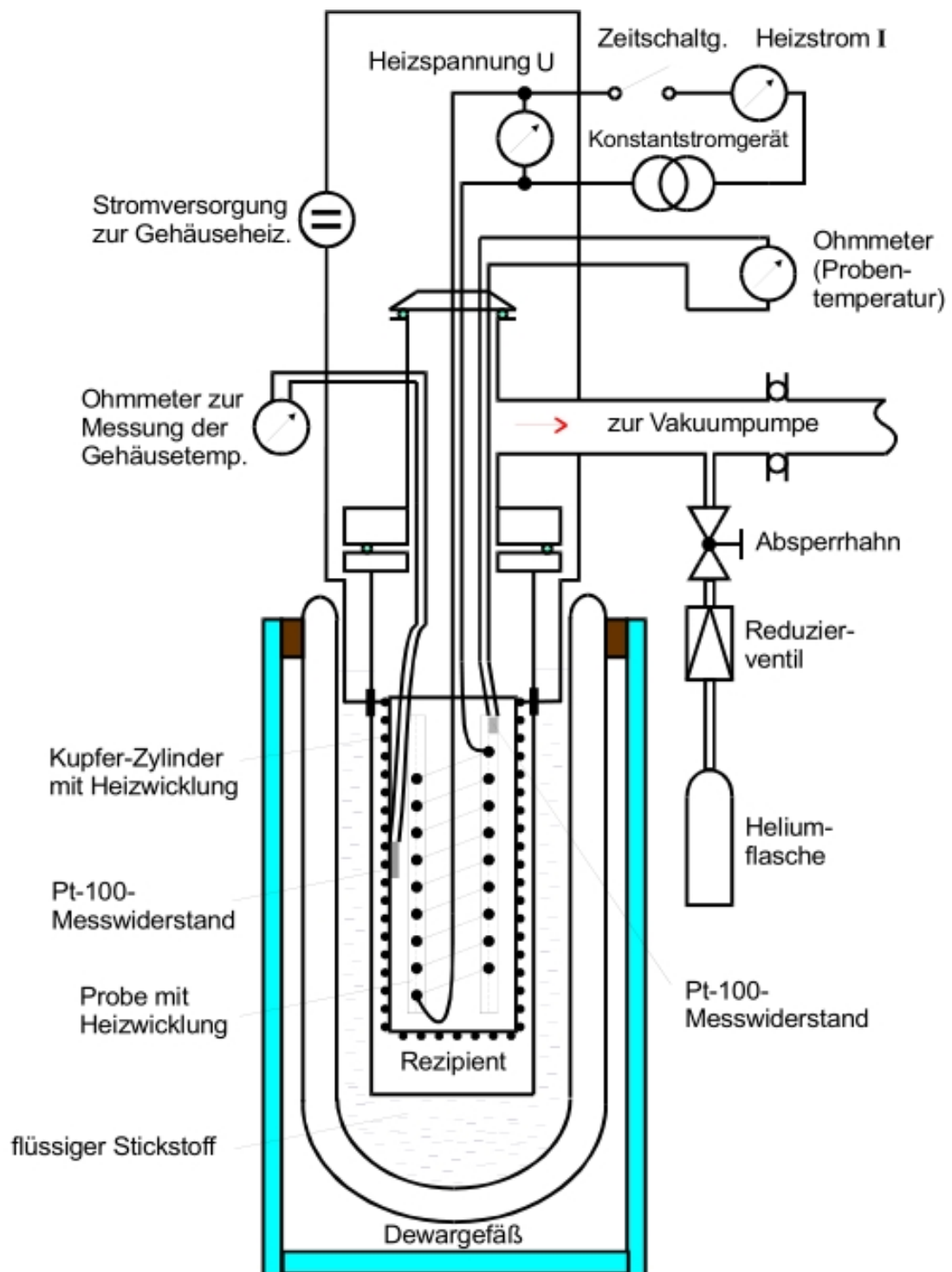


Abbildung 1: Schematischer Aufbau des Versuchs [1].

4 Durchführung

Zunächst wird die der Rezipient mit Hilfe der Vakuumpumpe evakuiert, um diesen anschließend auf eine Temperatur von 80 K zu kühlen. Dazu wird er bei Umgebungsdruck mit Helium und das Dewar-Gefäß mit flüssigem Stickstoff gefüllt. Sobald die Probe abgekühlt ist, wird der Rezipient ein weiteres Mal evakuiert.

Nun werden die Probe und das Gehäuse aufgeheizt, indem die Heizströme hoch geregelt werden. Ihre Masse beträgt $m = 342$ g. Bei der Erwärmung werden der Heizstrom I , die anliegende Heizspannung U , die Widerstände der Probe und des Gehäuses und die Messdauer t gemessen, um daraus die hinzugeführte elektrische Energie zu bestimmen. Diese sollte dabei so groß sein, dass die Temperaturerhöhung zwischen 7 K und 11 K beträgt.

Da bei diesem Versuch zusätzliche Einflüsse, die zu Energieverlusten und Energiezuführung führen, wie zum Beispiel Konvektion, Wärmestrahlung und Wärmeleitung, vermieden werden müssen, ist es besonders wichtig, dass das Gehäuse und die Probe eine möglichst identische Temperatur aufweisen.

5 Auswertung

5.1 Fehlerrechnung und Methoden der Auswertung

Alle Berechnungen wurden in *Python* mit dem Paket NumPy [4] gemacht. Die Fehlerrechnung wurde mit dem Paket Uncertainties [3] ebenfalls in *Python* durchgeführt.

5.2 Bestimmung von C_p und C_V

Zunächst wird C_p bestimmt- Mithilfe der elektrisch erzeugten Wärme die in die Probe gegeben wird, lässt sich für C_p die Gleichung

$$C_p = \frac{U \cdot I \cdot t_H \cdot M}{\Delta T \cdot m} \quad (14)$$

herleiten. U und I sind hierbei die angelegte Spannung und die angelegte Stromstärke an der Probe zum Heißen. t_H ist die Heizdauer und M die Molmasse. Der Nenner setzt sich zusammen aus ΔT , der Temperaturänderung, und der Masse der Probe m . Von diesen Größen sind U und I mit je 10 % der Skala, t_H mit ± 5 s und ΔT mit 0,2 % fehlerbehaftete Größen. Diese Fehler beziehen sich auf die gemessene Pt-100-Widerstände, die linear mit der Temperatur zusammenhängen. Für die Gleichung 14 lässt sich mithilfe der Fehlerformel

$$\sigma(C_p) = \sqrt{\left(\frac{It_H M}{\Delta T m} \sigma(U)\right)^2 + \left(\frac{Ut_H M}{\Delta T m} \sigma(I)\right)^2 + \left(\frac{UIM}{\Delta T m} \sigma(t_H)\right)^2 + \left(-\frac{UIt_H M}{\Delta T^2 m} \sigma(\Delta T)\right)^2} \quad (15)$$

der Fehler $\sigma(C_p)$ bestimmen. Der Wert von m wird der Quelle [1] entnommen. Ist C_p berechnet lässt sich mit der Formel

$$C_p - C_V = 9 \cdot \alpha^2 \cdot \kappa \cdot V_0 \cdot T \Leftrightarrow C_V = C_p - 9 \cdot \alpha^2 \cdot \kappa \cdot V_0 \cdot T \quad (16)$$

C_V bestimmen. κ ist hierbei das Kompressionsmodul, T die Temperatur, ρ die Dichte und α der temperaturabhängige Ausdehnungskoeffizient. Werte für $\kappa = 137,8 \text{ GPa}$, $\rho = 8960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und $M = 0,0635 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ werden der Quelle [2] entnommen. Für α stammen die Werte ebenfalls wie m aus Quelle [1]. V_0 , das Molvolumen, ist definiert durch $\frac{M}{\rho} = 7,09 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$. Der Fehler auf C_V , $\sigma(C_V)$ kann mit

$$\sigma(C_V) = \sqrt{(\sigma(C_p))^2 + (-9\alpha^2 \kappa V_0 \sigma(T))^2 + (-18\alpha \kappa V_0 T \sigma(\alpha))^2} \quad (17)$$

bestimmt werden. Alle Werte sind in den Tabellen 1 und 2 dargestellt. Die Ergebnisse in den Abbildungen 2a und 2b. Die α -Werte werden mit einem Polynom vierten Grades gefittet. Das Polynom hat die Parameter:

$$\begin{aligned} x_0 &= (-1,133 \pm 0,062) \cdot 10^{-5} \\ x_1 &= (4,068 \pm 0,161) \cdot 10^{-7} \\ x_2 &= (-2,529 \pm 0,146) \cdot 10^{-9} \\ x_3 &= (7,393 \pm 0,554) \cdot 10^{-12} \\ x_4 &= (-8,163 \pm 0,746) \cdot 10^{-15} \end{aligned}$$

Die Fehler von α werden nicht weiter berücksichtigt, da diese vernachlässigbar klein sind.

5.3 Bestimmung der Debye-Temperatur θ_D

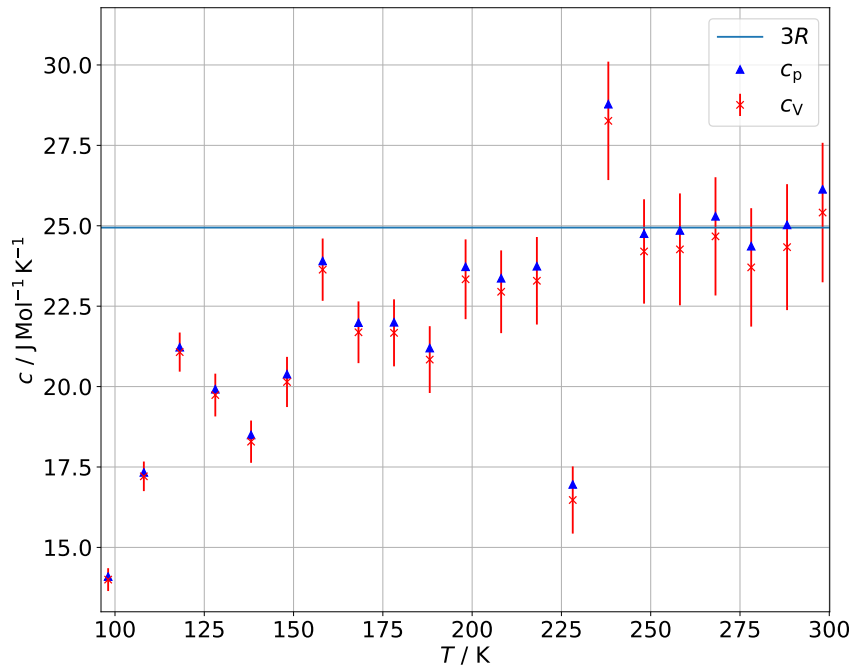
Zur Bestimmung der Debye-Temperatur werden die Molwärmen C_V unter 170 K betrachtet. Die Werte für $\frac{\theta_D}{T}$ können für die entsprechenden C_V -Werte mit der Debye-Funktion aus Quelle [1] berechnet werden. Diese sind in Tabelle 3 dargestellt. Durch Multiplikation kann so die Debye-Temperatur bestimmt werden.

Tabelle 1: Übersicht über die Messwerte sowie die daraus bestimmte Größe c_p

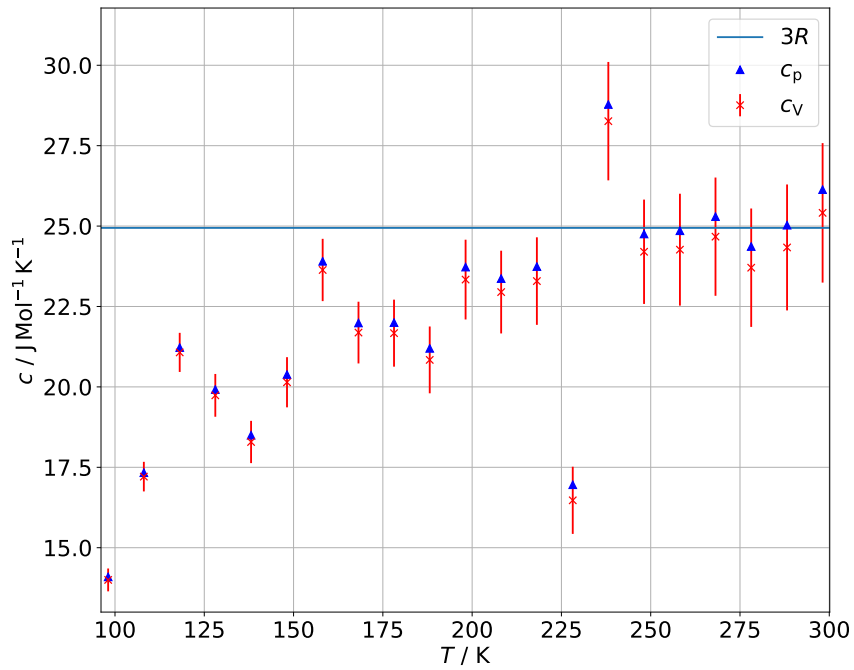
$T_{\text{Probe},1} / \text{K}$	$T_{\text{Probe},2} / \text{K}$	$\Delta T / \text{K}$	U / V	I / mA	t_{H} / s	$C_p / \text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
93.1 ± 0.1	103.1 ± 0.1	10.0 ± 0.2	15.8	150.8	317 ± 5	14.1 ± 0.4
103.1 ± 0.1	113.1 ± 0.2	10.0 ± 0.2	15.9	165.5	354 ± 5	17.3 ± 0.5
113.1 ± 0.2	123.2 ± 0.2	10.1 ± 0.3	17.5	176.6	372 ± 5	21.2 ± 0.6
123.2 ± 0.2	133.0 ± 0.2	9.9 ± 0.3	19.4	184.6	295 ± 5	19.9 ± 0.7
133.0 ± 0.2	143.2 ± 0.2	10.2 ± 0.3	19.2	185.0	285 ± 5	18.5 ± 0.7
143.2 ± 0.2	153.1 ± 0.3	10.0 ± 0.3	19.5	185.2	302 ± 5	20.4 ± 0.8
153.1 ± 0.3	163.2 ± 0.3	10.0 ± 0.4	20.7	196.2	317 ± 5	23.9 ± 1.0
163.2 ± 0.3	173.2 ± 0.3	10.1 ± 0.4	20.7	196.8	292 ± 5	22.0 ± 1.0
173.2 ± 0.3	183.1 ± 0.3	9.9 ± 0.4	20.7	197.0	286 ± 5	22.0 ± 1.0
183.1 ± 0.3	193.2 ± 0.3	10.1 ± 0.5	20.7	196.8	284 ± 5	21.2 ± 1.0
193.2 ± 0.3	203.1 ± 0.4	9.9 ± 0.5	20.7	197.1	311 ± 5	23.7 ± 1.2
203.1 ± 0.4	213.1 ± 0.4	10.0 ± 0.5	20.8	197.2	306 ± 5	23.4 ± 1.3
213.1 ± 0.4	223.1 ± 0.4	10.0 ± 0.6	18.9	199.3	340 ± 5	23.7 ± 1.4
223.1 ± 0.4	233.2 ± 0.4	10.1 ± 0.6	20.6	179.1	249 ± 5	17.0 ± 1.0
233.2 ± 0.4	243.1 ± 0.4	9.9 ± 0.6	20.7	195.1	378 ± 5	28.8 ± 1.8
243.1 ± 0.4	253.2 ± 0.5	10.2 ± 0.6	20.7	195.6	334 ± 5	24.8 ± 1.6
253.2 ± 0.5	263.2 ± 0.5	9.9 ± 0.7	20.7	195.8	328 ± 5	24.9 ± 1.7
263.2 ± 0.5	273.1 ± 0.5	10.0 ± 0.7	20.7	195.9	335 ± 5	25.3 ± 1.8
273.1 ± 0.5	283.1 ± 0.5	10.0 ± 0.7	20.7	195.9	324 ± 5	24.4 ± 1.8
283.1 ± 0.5	293.2 ± 0.6	10.1 ± 0.8	20.7	196.0	334 ± 5	25.0 ± 2.0
293.2 ± 0.6	303.1 ± 0.6	9.8 ± 0.8	20.7	196.1	341 ± 5	26.1 ± 2.2

Tabelle 2: Übersicht über die für die Rechnung notwendigen Größen sowie die daraus bestimmten Werte für c_V . Werte bis 170 K sind durch eine Linie abgetrennt.

\bar{T} / K	$\alpha_{\bar{T}} / 10^{-6} \text{K}^{-1}$	$C_p / \text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	$C_V / \text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
98.08 ± 0.10	10	14.1 ± 0.4	14.0 ± 0.4
108.08 ± 0.11	11	17.3 ± 0.5	17.2 ± 0.5
118.12 ± 0.13	12	21.2 ± 0.6	21.1 ± 0.6
128.09 ± 0.14	13	19.9 ± 0.7	19.7 ± 0.7
138.10 ± 0.16	13	18.5 ± 0.7	18.3 ± 0.7
148.16 ± 0.17	14	20.4 ± 0.8	20.1 ± 0.8
158.15 ± 0.19	14	23.9 ± 1.0	23.6 ± 1.0
168.18 ± 0.20	14	22.0 ± 1.0	21.7 ± 1.0
178.13 ± 0.22	14	22.0 ± 1.0	21.7 ± 1.1
188.13 ± 0.23	15	21.2 ± 1.0	20.8 ± 1.1
198.17 ± 0.25	15	23.7 ± 1.2	23.3 ± 1.3
208.13 ± 0.26	15	23.4 ± 1.3	22.9 ± 1.4
218.13 ± 0.28	15	23.7 ± 1.4	23.3 ± 1.5
228.17 ± 0.29	16	17.0 ± 1.0	16.5 ± 1.2
238.13 ± 0.31	16	28.8 ± 1.8	28.3 ± 2.0
248.14 ± 0.32	16	24.8 ± 1.6	24.2 ± 1.9
258.18 ± 0.34	16	24.9 ± 1.7	24.3 ± 2.0
268.14 ± 0.35	16	25.3 ± 1.8	24.7 ± 2.2
278.14 ± 0.37	16	24.4 ± 1.8	23.7 ± 2.3
288.18 ± 0.39	17	25.0 ± 2.0	24.3 ± 2.5
298.13 ± 0.40	17	26.1 ± 2.2	25.4 ± 2.8



(a) C_V mit Fehlerbalken



(b) C_p mit Fehlerbalken

Abbildung 2: Darstellungen der spezifischen Wärmekapazitäten C_V und C_p jeweils mit Fehlerbalken.

5.4 Bestimmen der Debye-Temperatur

Zur Bestimmung der Debye-Temperatur werden die aus Quelle [1] entnommenen Werte für $\frac{\theta_D}{T}$ in dem auf die bis 170 K passenden Bereich mit einem Polynom 1. Ordnung gefittet. Es ergeben sich folgende Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= 7,043 \text{ mol K J}^{-1} \\ a_1 &= -0,244 \text{ mol}^2 \text{ K}^2 \text{ J}^{-2} \end{aligned}$$

Der Fit ist in Abbildung 3 dargestellt. Die Werte für $\frac{\theta_D}{T}$ werden nun durch Auswerten der Fit-Funktion an den entsprechenden C_V -Werten bestimmt. Die so bestimmten $\frac{\theta_D}{T}$ -Werte werden mit dem entsprechenden \bar{T} multipliziert, um die Debye-Temperaturen θ_D zu bestimmen. Die resultierenden Werte sind in Tabelle 3 eingetragen, die Fehler berechnen sich zu:

$$\sigma_{\theta_D} = \sigma_T \cdot \frac{\theta_D}{T}. \quad (18)$$

Mittelwertbildung wie eingangs beschrieben liefert folgende Werte:

$$\begin{aligned} \theta_{D,arith.} &= (292 \pm 4) \text{ K} \\ \theta_{D,gew.} &= (270 \pm 18) \text{ K}. \end{aligned}$$

Als Gewichte wurden dabei die absoluten Kehrwerte der Differenzen zwischen Zylinder- und Proben temperatur, normiert auf 1, gewählt. Die Gewichte berechnen sich also nach

$$w_i = \left\{ (\bar{T}_{\text{Zyl},i} - \bar{T}_{\text{Probe},i}) \sum_i^N (\bar{T}_{\text{Zyl},i} - \bar{T}_{\text{Probe},i})^{-1} \right\}^{-1}. \quad (19)$$

5.5 Theoretische Bestimmung der Debye-Temperatur

Unter Zuhilfenahme der Formel 11 kann man die Debye-Temperatur berechnen. Zunächst müssen die Größen L^3 und N_L bestimmt werden. Für die Geschwindigkeiten $v_l = 4,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ und $v_{tr} = 2,26 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ werden die Werte aus Quelle [1] genutzt. Für die Teilchenzahl N_L gilt

$$N_L = \frac{m}{M} \cdot N_A \quad (20)$$

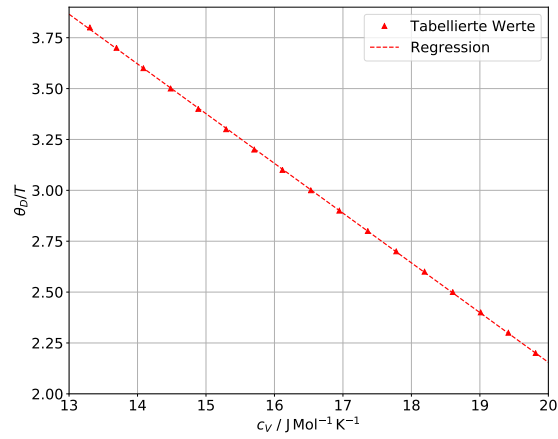


Abbildung 3: Fit der Debye-Funktion.

mit N_A als Avogadro-Konstante. Das Volumen L^3 lässt sich über

$$L^3 = V = V_0 \cdot \frac{m}{M} \quad (21)$$

berechnen. Daraus folgt die Debye-Frequenz $\omega_D = 43 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$. Mit ω_D und der Formel

$$\theta_D = \hbar \cdot \omega_D \quad (22)$$

lässt sich nun θ_D bestimmen. Dieser Wert liegt bei $\theta_D = 332,48 \text{ K}$.

Tabelle 3: Übersicht über die für die Rechnung notwendigen Größen sowie die daraus bestimmten Werte für θ_D . Es sind weiterhin die für die spätere Berechnung des gewichteten Mittelwertes notwendigen Werte eingetragen.

\bar{T} / K	$T_{\text{zyl.},1} / \text{K}$	$T_{\text{zyl.},2} / \text{K}$	$\bar{T}_{\text{zyl.}} / \text{K}$	$C_V / \text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	θ_D / K
98.08 ± 0.10	92.4 ± 0.1	103.3 ± 0.1	97.8 ± 0.1	14.0 ± 0.4	355 ± 9
108.08 ± 0.11	103.3 ± 0.1	112.4 ± 0.2	107.8 ± 0.1	17.2 ± 0.5	307 ± 12
118.12 ± 0.13	112.4 ± 0.2	124.1 ± 0.2	118.2 ± 0.1	21.1 ± 0.6	224 ± 18
128.09 ± 0.14	124.1 ± 0.2	134.2 ± 0.2	129.2 ± 0.1	19.7 ± 0.7	284 ± 21
138.10 ± 0.16	134.2 ± 0.2	142.9 ± 0.2	138.6 ± 0.2	18.3 ± 0.7	355 ± 23
148.16 ± 0.17	142.9 ± 0.2	152.7 ± 0.3	147.8 ± 0.2	20.1 ± 0.8	314 ± 29
158.15 ± 0.19	152.7 ± 0.3	163.4 ± 0.3	158.0 ± 0.2	23.6 ± 1.0	200 ± 38
168.18 ± 0.20	163.4 ± 0.3	174.2 ± 0.3	168.8 ± 0.2	21.7 ± 1.0	293 ± 41

6 Diskussion

Zur Bestimmung der relativen Fehler der Ergebnisse wird die Formel

$$\tilde{x} = \frac{|x_t - x_e|}{|x_t|} \cdot 100\%$$

genutzt. x_e ist hierbei der experimentell bestimmte Wert und x_t der theoretisch berechnete Wert. Der gewichtete Mittelwert der experimentell bestimmten Debye-Temperatur liegt bei (270 ± 40) K und weichen damit um 18,79% vom Theoriewert ab. Diese Abweichung lässt sich durch die hohe Stromstärke der Apparatur erklären. Das Stromgerät hat bei Werten über 180 mA starke Schwankungen die zu den großen Fehlern führen. Zudem kann Konvektion als weitere Möglichkeit des Wärmetransportes nicht ganz ausgeschlossen werden, da der Rezipient nie ganz evakuiert werden kann. Bis auf einige wenige Werte ist jedoch gut die "3R-Grenze" in den Messwerten höher als 150 K zu erkennen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern*. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/MASTER/SKRIPT/V47.pdf>.
- [2] GoodFellow. *Kupfer (Cu) - Materialinformation*. Stand: 24.01.18. URL: <http://www.goodfellow.com/G/Kupfer.html>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.