

Fortgeschrittenenpraktikum der Fakultät Physik

## **Versuch 47: Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern**

Luca Dietrich (luca.dietrich@tu-dortmund.de)  
Cihad Gözsüz (cihad.goezsuez@tu-dortmund.de)

Durchführung: 21.04.2021

Abgabe: 28.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Dulong-Petit-Gesetz . . . . .	3
2.2	Einstein-Gesetz . . . . .	4
2.3	Debye-Gesetz . . . . .	4
2.4	Weitere Anmerkungen . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Aufbau und Durchführung</b>	<b>6</b>
3.1	Aufbau . . . . .	6
3.2	Durchführung . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1	Bestimmung von $C_p$ und $C_V$ . . . . .	8
4.2	Experimentelle Bestimmung der Debye-Temperatur . . . . .	13
4.3	Theoretische Bestimmung der Debye-Temperatur . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>16</b>
	<b>Literatur</b>	<b>18</b>

# 1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es die Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Kupfer zu messen. Diese wird mit den Vorhersagen vom klassischen Dulong-Petit-Gesetz sowie mit dem Einstein- und dem Debye-Gesetz zur Molwärme verglichen. Zusätzlich wird ein Wert für die Debye-Temperatur  $\theta_D$  bestimmt und mit dem Theoriewert verglichen.

## 2 Theorie

Die Molwärme ist bei Festkörpern ein Maß für die Fähigkeit Wärme aufzunehmen und abzugeben. Sie wird definiert als die Energie, die in Form von Wärme zugeführt werden muss, um den Festkörper um  $1^\circ\text{C}$  zu erwärmen:

$$C = \frac{\delta Q}{\delta T}.$$

Die spezifische Wärmekapazität ist die Molwärme pro Masse.

Um die Molwärme zu bestimmen werden verschiedene Modelle zur Näherung verwendet. Diese sind zum einen das klassische Dulong-Petit-Gesetz und die quantenmechanischen Modelle von Einstein und Debye.

### 2.1 Dulong-Petit-Gesetz

Atome in einem Festkörper sind durch Gitterkräfte an festen Stellen gebunden. Sie besitzen jedoch drei Freiheitsgrade, in die sie schwingen können. Im Mittel ist deren kinetische Energie gleich der potentiellen Energie. Die Energie pro Freiheitsgrad im klassischen Modell ist gegeben durch  $E = \frac{1}{2}k_B T$ . Dabei ist  $k_B$  die Boltzmann-Konstante und  $T$  die Temperatur. Die mittlere Energie eines Atoms in drei Dimensionen beträgt also

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{3}{2}k_B T + \frac{3}{2}k_B T = 3k_B T. \quad (1)$$

Bei einem Mol in einem Festkörper ist die innere Energie

$$U = 3 \cdot N_L \cdot k_B \cdot T. \quad (2)$$

Hierbei steht  $N_L$  für die Loschmidt-Zahl. Somit ist die klassische spezifische Molwärme gegeben durch eine Konstante:

$$C_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_V = 3N_L k_B = 3R \quad (3)$$

In der klassischen Betrachtung ist die Molwärme also sowohl Material als auch Temperaturunabhängig. Diese Eigenschaft nennt man das Dulong-Petit-Gesetz.

## 2.2 Einstein-Gesetz

Das Modell von Albert Einstein befasst sich mit einer quantenmechanischen Näherung zur Bestimmung der Molwärme. In dem Einstein-Modell ist die Annahme, dass alle Gitterschwingungen mit der gleichen Frequenz  $\omega$  schwingen. Diese Gitterschwingungen werden des Weiteren auch gequantelt betrachtet und besitzen demnach ein Vielfaches von  $\hbar\omega$  als Energie. Diese gequantelten Gitterschwingungen werden auch Phononen genannt.

Die Energien sind im Festkörper boltzmann-verteilt. Dadurch kann die Wahrscheinlichkeit, dass ein Phonon bei thermischem Gleichgewicht bei der Temperatur  $T$  die Energie  $n\hbar\omega$  besitzt, einfach mit der Formel

$$W(n) = \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}\right) \quad (4)$$

berechnet werden.

Der Erwartungswert  $X$  der Energie wird berechnet, indem die über alle  $n$  zwischen 0 und  $\infty$  mit den entsprechenden  $W(n)$  Koeffizienten summiert wird. Diese Rechnung ergibt

$$X_{\text{Einstein}} = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}. \quad (5)$$

Die mittlere Energie im Einstein-Modell beträgt also

$$\langle u \rangle_{\text{Einstein}} = \frac{X}{Z} = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}. \quad (6)$$

Die Zustandssumme  $Z$  gibt dabei die Summe der gesamten Zustände an. Abschließend ergibt sich die Molwärme zu

$$(C_V)_{\text{Einstein}} = 3R \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1\right)^2}. \quad (7)$$

Es ist festzustellen, dass die Molwärme im Einstein-Modell gegen den klassischen Wert  $3R$  bei hohen Temperaturen konvergiert. Bei niedrigen Temperaturen also  $T \rightarrow 0$  läuft die Molwärme jedoch gegen 0.

## 2.3 Debye-Gesetz

Im Vergleich zum Einstein-Modell, wird im debyeschem Modell angenommen, dass Phononen bis zu einer Grenzfrequenz  $\omega_D$  eine Verteilung von Frequenzen besitzen können. Eine Grenzfrequenz existiert, weil ein Festkörper eine endlich große Dimension und somit auch nur endlich viele Eigenschwingungen hat. Diese Grenzfrequenz wird Debye-Frequenz genannt. Es wird auch angenommen, dass bis zu der Grenzfrequenz eine lineare Dispersionsrelation, also  $\omega = \nu_s k$ , gegeben ist. Die Anzahl der Eigenschwingungen beträgt

$3N_L$  wobei  $N_L$  die Loschmidt-Konstante darstellt. Die Loschmidt-Konstante gibt die Anzahl  $N$  der Moleküle pro Volumen  $V$  eines idealen Gases bei einer Temperatur von  $T = 273,15 \text{ K}$  und einem Druck von  $p = 101,325 \text{ kPa}$  an also:

$$N_L = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_B T}. \quad (8)$$

Wird die Frequenzverteilung  $Z(\omega)$  bis zu der Grenzfrequenz  $\omega_D$  integriert, so sollte also  $3N_L$  rauskommen

$$\int_0^{\omega_D} Z(\omega) d\omega = 3N_L. \quad (9)$$

Um Einblicke aus diesem Integral zu erhalten, ist es nützlich die Zustandsdichte  $Z(\omega)$  im  $k$ -Raum zu schreiben. Das geht über die Umformung

$$Z(\omega) d\omega = Z(k) dk \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow Z(\omega) = Z(k) \frac{dk}{d\omega} \quad (11)$$

Die Zustandsdichte im  $k$ -Raum ist im dreidimensionalen Fall immer

$$Z(k) = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k^3}{3} = \frac{V}{8\pi^3} \frac{4\pi k^3}{3} \quad (12)$$

also ist die Zustandsdichte im Frequenzraum

$$Z(\omega) d\omega = \frac{L^3}{2\pi^2} \omega^2 \left( \frac{1}{\nu_{ges}^3} \right) d\omega = \frac{L^3}{2\pi^2} \omega^2 \left( \frac{1}{\nu_l^3} + \frac{2}{\nu_{tr}^3} \right) d\omega \quad (13)$$

$$Z(\omega) d\omega = \frac{9N_L}{\omega_D^3} \omega^2 d\omega. \quad (14)$$

Die Gesamtenergie  $U$  ergibt sich dann durch das Integrieren über alle Frequenzen

$$U = \int_0^{\omega_D} \frac{Z(\omega) \hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} - 1\right)} d\omega. \quad (15)$$

Abschließend ergibt sich die Molwärme zu

$$C_{V, \text{Debye}} = \frac{d}{dT} \frac{9N_L}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} - 1\right)} d\omega. \quad (16)$$

Damit lässt sich die innere Energie wie folgt berechnen:

$$U = \int_0^{\omega_D} Z(\omega) \langle n(\omega) \rangle \hbar \omega d\omega = \int_0^{\omega_D} \frac{Z(\omega) \hbar \omega d\omega}{\left( \exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} - 1\right) \right)}. \quad (17)$$

wobei  $\langle n(\omega) \rangle$  die Bose-Einstein-Statistik angibt. Die Ableitung nach  $T$  der inneren Energie ergibt die Lösung für die Molwärme. Die Molwärme im Debye-Modell hat die Form

$$C_{V,\text{Debye}} = \frac{d}{dT} \frac{9N_L}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 d\omega}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1\right)} \quad (18)$$

Durch Einsetzen der Substitution

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad (19)$$

$$\frac{\theta_D}{T} = \frac{\hbar\omega_D}{k_B T} \quad (20)$$

wird die Molwärme zu

$$C_{V,\text{Debye}} = 9R \left(\frac{\theta_D}{T}\right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{x^4 \exp(x)}{(\exp(x) - 1)^2} dx. \quad (21)$$

Das  $\theta_D$  wird die Debye-Temperatur genannt. Die Debye-Temperatur  $\theta_D$  ist ein materialabhängiger Parameter. Sie gibt im Debye Modell die Temperatur an, bei der alle Zustände, die möglich sind, besetzt werden. Die Molwärme im Debye-Modell bei großen Temperaturen also  $x \ll 1$  konvergiert gegen  $3R$ , die klassische Näherung. Bei kleinen Temperaturen ist die Molwärme jedoch proportional zu  $T^3$ .

## 2.4 Weitere Anmerkungen

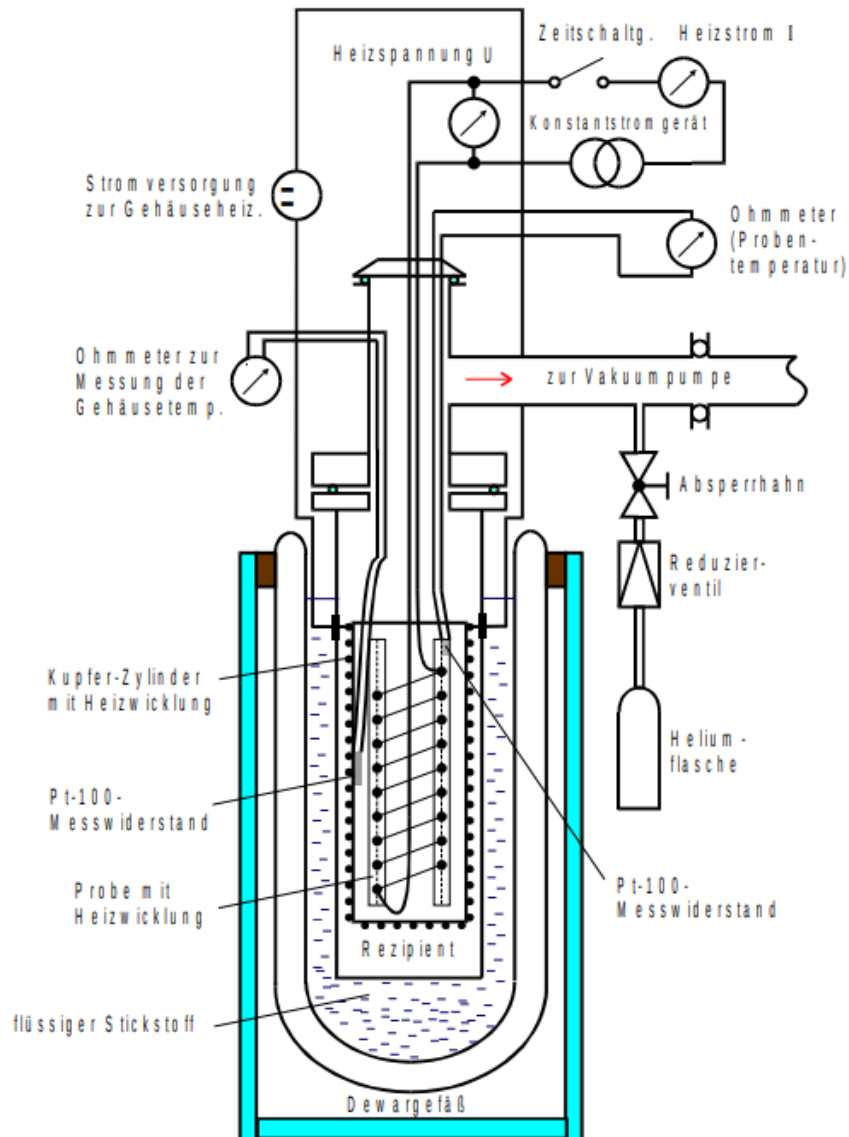
Es ist wichtig zu erwähnen, dass die Leitungselektronen im Festkörper ebenfalls einen Beitrag zur Molwärme leisten. Vor allem bei niedrigen Temperaturen spielt der Einfluss der Leitungselektronen eine größere Rolle. Die Elektronen sind nach der Fermi-Dirac-Statistik verteilt. Daraus folgt, dass der Einfluss auf die Molwärme der Leitungselektronen proportional zu  $T$  sein muss.

# 3 Aufbau und Durchführung

## 3.1 Aufbau

Der Aufbau des Experiments ist in Abbildung 1 dargestellt. Für den Versuch wird ein Dewar-Gefäß verwendet, in dem im Laufe des Experiments flüssiger Stickstoff gefüllt wird, damit der Rezipient gekühlt werden kann. Im Rezipienten befindet sich die zu untersuchende Kupferprobe. In der Kupferprobe befindet sich eine Heizwicklung, womit die Probe erhitzt werden kann. Um die Kupferprobe befindet sich noch ein Kupfer-Zylinder, der ebenfalls über eine Heizwicklung verfügt. Beide Heizwicklungen können jeweils getrennt voneinander über eine Stromversorgung bzw. ein Konstantstromgerät mit elektrischer Energie versorgt werden. Zusätzlich befindet sich im Zylinder und an

der Probe jeweils ein PT-100 Messwiderstand über den mit Hilfe eines Ohmmeters der Widerstand gemessen werden kann. Der Widerstand variiert mit der Temperatur, dadurch kann aus dem Widerstand auf die Temperatur geschlossen werden. Außerdem ist der Rezipient noch mit einer Vakuumpumpe und einer Heliumflasche inklusive Absperrhahn und Reduzierventil verbunden.



**Abbildung 1:** Schematischer Aufbau des Versuchs. [2]

## 3.2 Durchführung

Zu Beginn wird der Rezipient mit Hilfe der Vakuumpumpe evakuiert. Nach der Evakuierung wird der Rezipient mit Helium gefüllt, damit beim Abkühlen ein möglichst großer Wärmefluss stattfinden kann, denn Helium hat eine hohe thermische Leitfähigkeit. Anschließend wird das Dewar-Gefäß mit flüssigen Stickstoff gefüllt und der Rezipient wird bis zu einer Temperatur von 80 K abgekühlt. Wenn sowohl die Probe als auch der Zylinder die gewünschte Temperatur erreicht haben, wird der Rezipient wieder evakuiert, damit möglichst keine Konvektion mehr stattfinden kann und die Messung kann beginnen. Dazu wird die Probe über ein Konstantstromgerät beheizt und die Zeitmessung wird gestartet. Damit keine Wärmeverluste durch Konduktion von der Probe zum Zylinder stattfinden, sollte die Temperatur zwischen Zylinder und Probe immer identisch gehalten werden. Dafür muss die Leistung für die Heizwicklung vom Zylinder so variiert werden, dass die beiden Temperaturen sich nicht unterscheiden. Also sollte die Stromversorgung zur Gehäuseheizung stetig angepasst werden. Im Kontext der Durchführung bedeutet dies, dass der Widerstand der beiden Messwiderstände identisch gehalten werden sollte. Während der Messung sollte in regelmäßigen Abständen die Werte der beiden Widerstände, die aktuelle Messzeit, die Heizspannung und der Heizstrom für die Heizwicklung der Probe notiert werden. Wichtig ist zudem, dass die Spannung und der Strom der Heizwicklung für die Probe nur direkt nach der Aufnahme eines Messwertes verändert werden darf. Die Starttemperatur für die Messung beträgt 80 K und die Endtemperatur 300 K.

## 4 Auswertung

### 4.1 Bestimmung von $C_p$ und $C_V$

Zunächst wird die Molwärme bei konstantem Druck  $C_p$  bestimmt.  $C_p$  kann wie folgt bestimmt werden:

$$C_p = \frac{U \cdot I \cdot M \cdot \Delta t}{m \cdot \Delta T} \quad (22)$$

$U$  und  $I$  sind hierbei die angelegte Heizspannung und Heizstrom der Probe für den jeweiligen Zeitraum zwischen 2 Messwerten,  $M$  ist die Molmasse des Materials der Probe,  $m$  ist die Masse der Probe,  $\Delta T$  ist die Temperaturdifferenz, die zwischen 2 Messwerten auftritt und  $\Delta t$  ist die Zeitdifferenz zwischen 2 Messwerten. Die Molmasse  $M$  und die Masse  $m$  der Probe beträgt:

$$M = 0,06355 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$
$$m = 0,342 \text{ kg}$$

Um die gemessenen Pt-100-Widerstände in die entsprechenden Temperaturen umzurechnen kann folgende Formel genutzt werden:



$$T = 0,00134 R^2 + 2,296 R - 243,02 \quad (23)$$

Für  $R$  wird der Widerstand in Ohm eingesetzt und die sich daraus ergebende Temperatur  $T$  besitzt die Einheit °C. Anschließend wird die Temperatur von der Probe  $T_P$  und dem Zylinder  $T_Z$  gemittelt und mit der gemittelten Temperatur  $T$  wird im Folgenden gerechnet.

Aus  $C_p$  lässt sich mit Formel (24)  $C_V$  bestimmen:

$$C_p - C_V = 9 \cdot \alpha^2 \cdot \kappa \cdot V_0 \cdot T \Leftrightarrow C_V = C_p - 9 \cdot \alpha^2 \cdot \kappa \cdot V_0 \cdot T \quad (24)$$

Hierbei bezeichnet  $C_P$  die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck und  $C_V$  bei konstantem Volumen. Der Unterschied zwischen den Wärmekapazitäten ist, dass bei konstantem Druck ein Teil der Energie für die Volumenausdehnungsarbeit  $p dV$  benötigt wird. Deshalb ist  $C_P$  größer als  $C_V$ . Aus der Thermodynamik lässt sich dann Formel (24) herleiten.

Dabei ist  $\alpha$  der lineare Ausdehnungskoeffizient,  $\kappa$  [1] ist das Kompressionsmodul und  $V_0$  [4] ist das Molvolumen. Für Kupfer können folgende Werte für  $\kappa$  und  $V_0$  verwendet werden:

$$\kappa = 140 \text{ GPa}$$

$$V_0 = 7,11 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$$

Die Werte von  $\alpha$  sind nicht konstant sondern abhängig von der Temperatur der Probe, deswegen wird eine Ausgleichsrechnung mit einem Polynom 4. Grades

$$\alpha(T) = a \cdot T^4 + b \cdot T^3 + c \cdot T^2 + d \cdot T + e \quad (25)$$

durch die Werte aus Abbildung 2 durchgeführt.

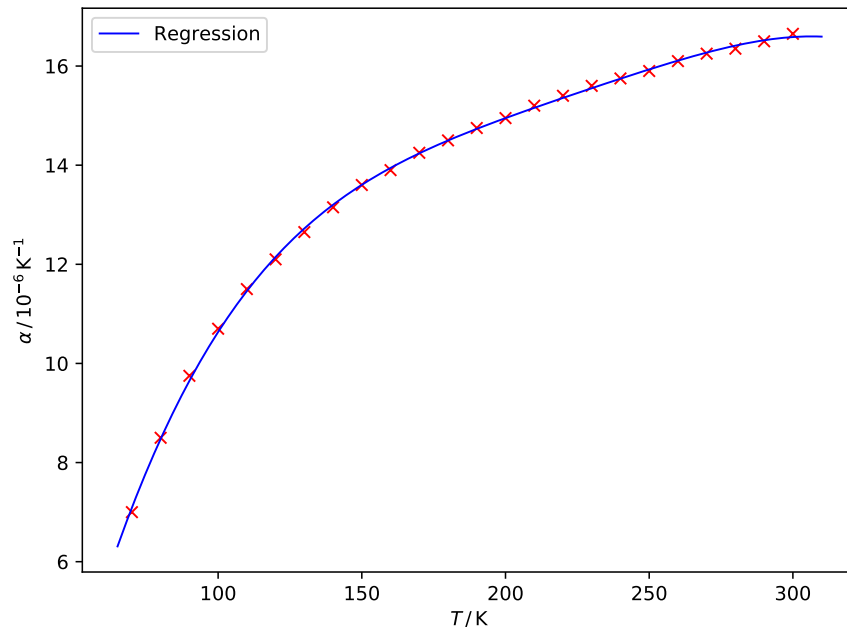
T [K]	70	80	90	100	110	120	130	140
$\alpha$ [ $10^{-6}$ grd $^{-1}$ ]	7,00	8,50	9,75	10,70	11,50	12,10	12,65	13,15
T [K]	150	160	170	180	190	200	210	220
$\alpha$ [ $10^{-6}$ grd $^{-1}$ ]	13,60	13,90	14,25	14,50	14,75	14,95	15,20	15,40
T [K]	230	240	250	260	270	280	290	300
$\alpha$ [ $10^{-6}$ grd $^{-1}$ ]	15,60	15,75	15,90	16,10	16,25	16,35	16,50	16,65

**Abbildung 2:**  $\alpha$  für verschiedene Temperaturen  $T$ . [2]

Diese Ausgleichsrechnung wird mit Python und *scipy.optimize.curve\_fit* erstellt und die Unsicherheiten mit *uncertainties.ufloat* berechnet. Dies ergab folgende Werte für die Parameter

$$\begin{aligned}
a &= (-8,2 \pm 0,7) \cdot 10^{-9} \text{ K}^{-5} \\
b &= (7,4 \pm 0,5) \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-4} \\
c &= (2,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-3} \\
d &= (0,41 \pm 0,02) \text{ K}^{-2} \\
e &= (11,3 \pm 0,6) \text{ K}^{-1}
\end{aligned}$$

und folgenden Plot:



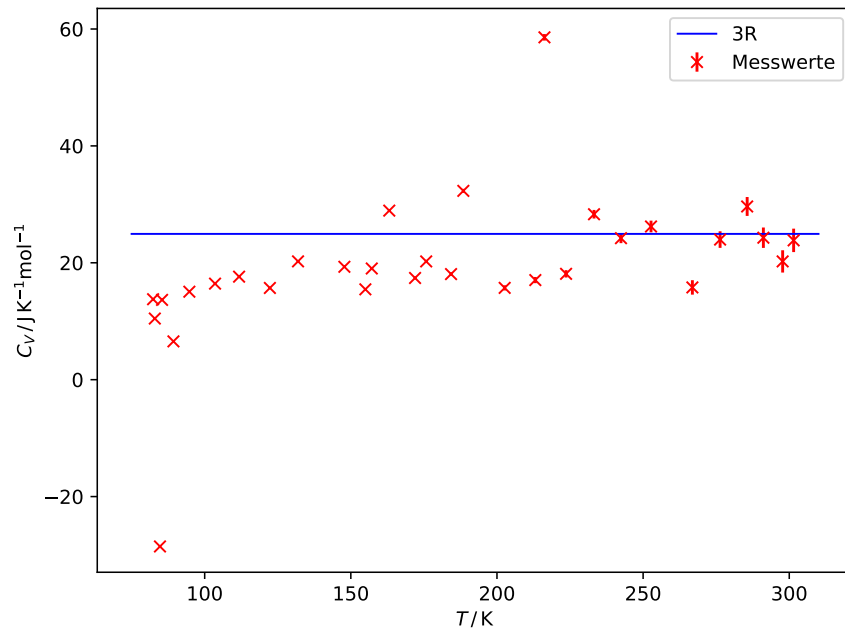
**Abbildung 3:**  $\alpha$  in Abhängigkeit von  $T$  mit Ausgleichsrechnung.

Mit Hilfe von dieser Ausgleichsfunktion in Abbildung 3 kann  $C_V$  in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  mit Formel (24) berechnet werden. Die Werte für  $C_p$  und  $C_V$  sind in Tabelle 1 zu sehen.

Diese Werte in einem Diagramm aufgetragen gegen die Temperatur  $T$  ergibt:

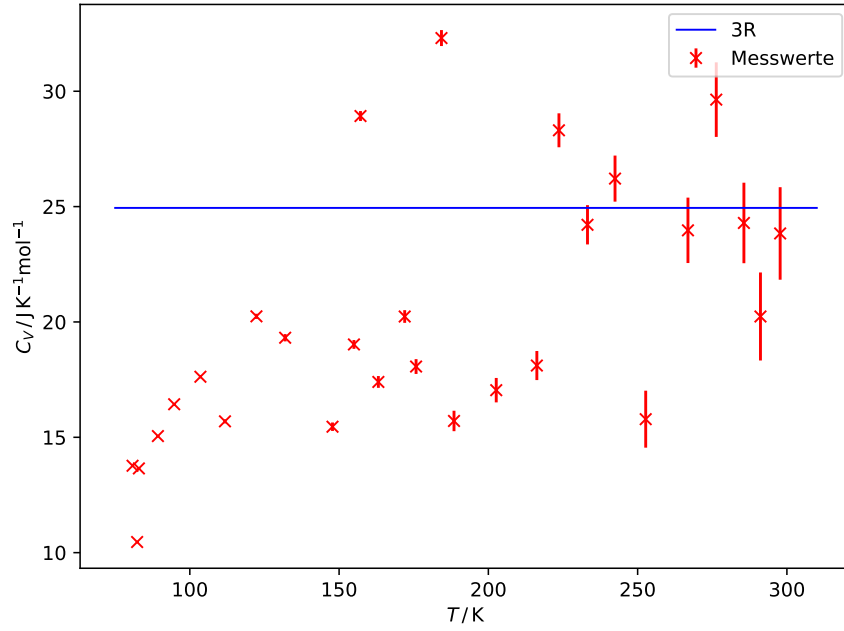
**Tabelle 1:** Messdaten und Berechnungen für Bestimmung von  $C_p$  und  $C_V$ .

$t / \text{min}$	$R_P / \text{k}\Omega$	$R_Z / \text{k}\Omega$	$T_P / \text{mA}$	$T_Z / \text{mA}$	$\langle T \rangle / \text{mA}$	$U / \text{V}$	$I / \text{mA}$	$C_P$	$C_V$
0.0	0.0217	0.0219	80.584	81.055	80.819	5.33	50.9	13.830	13.766
7.0	0.0225	0.0224	82.468	82.232	82.350	5.4	51.5	10.526	10.461
9.0	0.0227	0.0227	82.939	82.939	82.939	6.75	64.5	13.722	13.650
16.0	0.0237	0.0238	85.297	85.533	85.415	9.72	92.8	-28.46	-28.535
18.0	0.0244	0.0225	86.950	82.468	84.709	9.82	93.0	6.6352	6.553
21.0	0.0254	0.0254	89.312	89.312	89.312	13.96	132.5	15.151	15.053
25.0	0.0276	0.0278	94.520	94.994	94.757	14.03	132.9	16.558	16.433
32.0	0.0314	0.0314	103.545	103.545	103.545	14.07	133.2	17.777	17.624
39.0	0.0349	0.0348	111.892	111.653	111.773	16.28	153.7	15.881	15.692
45.0	0.0389	0.0396	121.472	123.152	122.312	16.34	154.5	20.467	20.243
52.0	0.0432	0.0433	131.817	132.059	131.938	16.38	154.7	19.600	19.315
63.0	0.0499	0.0497	148.037	147.551	147.794	16.4	154.8	15.771	15.458
67.0	0.0524	0.0531	154.119	155.825	154.972	16.38	155.0	19.346	19.024
68.5	0.0533	0.054	156.313	158.021	157.167	19.24	181.5	29.270	28.925
73.0	0.0564	0.0558	163.886	162.419	163.152	19.31	182.2	17.780	17.399
77.0	0.0594	0.06	171.240	172.713	171.977	19.34	182.3	20.633	20.235
79.0	0.0608	0.0617	174.680	176.894	175.787	19.34	182.4	18.501	18.067
83.0	0.0646	0.0648	184.043	184.537	184.290	20.9	196.9	32.757	32.305
86.0	0.0665	0.0663	188.739	188.245	188.492	20.9	197.0	16.225	15.708
91.0	0.0712	0.073	200.398	204.878	202.638	21.0	197.1	17.610	17.042
95.0	0.0745	0.0781	208.619	217.621	213.120	21.0	197.3	59.159	58.575
99.0	0.0777	0.0774	216.619	215.868	216.243	21.0	197.3	18.732	18.110
102.0	0.0802	0.0808	222.888	224.395	223.641	21.0	197.3	28.980	28.307
108.0	0.0844	0.0842	233.457	232.953	233.205	20.9	197.4	24.936	24.211
113.0	0.088	0.0879	242.554	242.301	242.428	21.0	197.5	26.999	26.213
119.0	0.0926	0.0914	254.229	251.178	252.704	21.2	199.5	16.659	15.785
124.0	0.0972	0.0979	265.961	267.751	266.856	21.2	199.8	24.905	23.971
129.0	0.1012	0.1013	276.208	276.465	276.337	21.2	200.0	30.630	29.636
135.0	0.1048	0.1049	285.468	285.725	285.596	21.1	199.0	25.319	24.290
138.0	0.107	0.107	291.143	291.143	291.143	21.1	199.1	21.306	20.236
141.0	0.1095	0.1096	297.608	297.867	297.738	21.1	199.1	24.928	23.836



**Abbildung 4:**  $C_V$  in Abhängigkeit von  $T$  mit Fehlerbalken.

In Abbildung 4 ist zu erkennen, dass es bei der Messung einige Messfehler aufgetreten sind. Deswegen werden die Werte Nummer 4, 5 und 21 aus Tabelle 1 als Messfehler herausgenommen und erneut in einem Diagramm gegen die Temperatur  $T$  aufgetragen.



**Abbildung 5:**  $C_V$  in Abhängigkeit von  $T$  mit Fehlerbalken.

In den folgenden Abschnitten wird auch nur mit den Werten von  $C_V$  aus Abbildung 5 gerechnet.

## 4.2 Experimentelle Bestimmung der Debye-Temperatur $\theta_D$

Zur Bestimmung der Debye Temperatur  $\theta_D$  werden nur die Molwärmen  $C_V$  für eine Temperatur von unter 170 K betrachtet. Mit Hilfe der Debye-Funktion aus Quelle [2] können die Werte für  $\frac{\theta_D}{T}$  für die entsprechenden  $C_V$  bestimmt werden.  $\frac{\theta_D}{T}$  multipliziert mit der entsprechenden Temperatur  $T$  ergibt dann die Debye Temperatur  $\theta_D$ . Die Werte für  $T$ ,  $C_V$ ,  $\frac{\theta_D}{T}$  und  $\theta_D$  sind in Tabelle 2 aufgetragen.

Die verschiedenen Werte für die Debye-Temperatur  $\theta_D$  ergeben gemittelt:

$$\theta_D = (329 \pm 19) \text{ K}$$

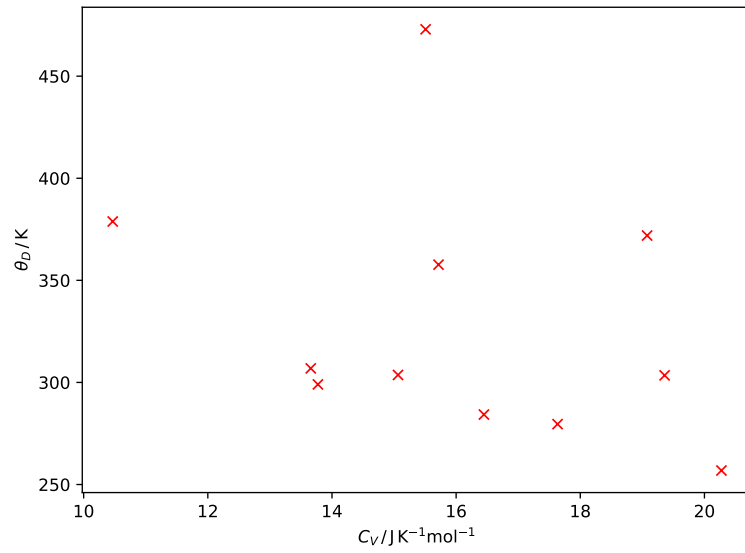
Der Mittelwertsfehler wurde mit Formel (26) bestimmt.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n^2 - n} \cdot \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} \quad (26)$$

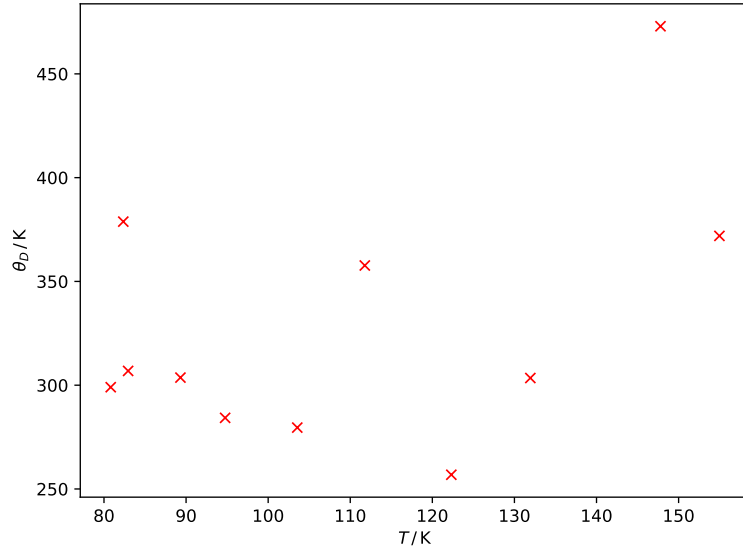
Dabei ist  $\sigma_{\bar{x}}$  der Mittelwertsfehler,  $n$  ist die Anzahl der Werte über die gemittelt wird und  $\bar{x}$  ist der Mittelwert.

**Tabelle 2:** Messdaten zur Berechnungen von  $\theta_D$ .

$C_V / \text{J}/(\text{K mol})$	$T / \text{K}$	$\frac{\theta_D}{T}$	$\theta / \text{K}$
13.7735	80.820	3.7	299.034
10.4680	82.351	4.6	378.8146
13.6584	82.940	3.7	306.878
15.0640	89.313	3.4	303.6642
16.4475	94.757	3.0	284.271
17.6341	103.546	2.7	279.5742
15.7165	111.773	3.2	357.6736
20.2737	122.313	2.1	256.8573
19.3584	131.939	2.3	303.4597
15.5082	147.794	3.2	472.9408
19.0766	154.973	2.4	371.9352



**Abbildung 6:**  $\theta_D$  in Abhängigkeit von  $C_V$ .



**Abbildung 7:**  $\theta_D$  in Abhängigkeit von  $T$ .

### 4.3 Theoretische Bestimmung der Debye-Temperatur $\theta_D$

Die Debye Temperatur kann auch theoretisch bestimmt werden. Dazu wird Formel (15) aus Abschnitt 2.3 verwendet. Für die Geschwindigkeiten  $v_l$  und  $v_{tr}$  werden die Werte aus Quelle [2] genutzt, diese lauten:

$$v_l = 4,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_{tr} = 2,26 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Mit Hilfe von Formel (13) ergibt sich dann mit den Geschwindigkeiten  $v_l$  und  $v_{tr}$  für die Debye-Frequenz  $\omega_D$  folgende Formel:

$$\omega_D = \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 N_A}{V_0} \cdot \left( \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3} \right)^{-1}} \quad (27)$$

$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  ist dabei die Avogadro-Konstante. Die Werte eingesetzt ergibt dann für die Debye-Frequenz folgenden Wert:

$$\omega_D = 4,349 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$

Die Debye-Temperatur  $\theta_D$  lässt sich nun mit Formel (28) bestimmen.

$$\theta_D = \frac{\hbar}{k_B} \cdot \omega_D \quad (28)$$

Dabei ist  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  [5] das reduzierte planksche Wirkungsquantum und  $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$  [3] ist die Boltzmann-Konstante. Damit ergibt sich für die Debye-Temperatur  $\theta_D$  ein theoretischer Wert von:

$$\theta_D = 332,102 \text{ K}$$

## 5 Diskussion

Zunächst wird durch die Abbildungen 4 sofort ersichtlich, dass dieses Experiment von großen Fehlern besetzt ist. Es gibt nur wenige Zusammenhang zwischen den Messwerten und der theoretischen Vorhersage. Des Weiteren sind auch große Diskrepanzen zwischen den Messwerten zu erkennen, was auf einen hohen statistischen Fehler hinweist. In den Abbildungen 6 und 7 wird ebenfalls deutlich, dass die hier bestimmte Debye-Temperatur keinen ersichtlichen Trend aufweist und somit auch von hohen Fehlern betroffen ist.

Die Messung zu der Molwärme zeigt trotzdem klar, wie im Schnitt bei hohen Temperaturen die klassisch erwartete Molwärme von  $3R$  angenähert wird. Es ist auch ein Absinken der Molwärme bei kleinen Temperaturen zu erkennen. Aufgrund der hohen Fehler ist jedoch nicht zu erkennen, dass das Debye-Modell eine bessere Näherung bietet als das Einstein-Modell.

Trotz hohen statistischen Messfehlern, liegt die gemessene Debye-Temperatur nah an der Theorieerwartung:

$$\begin{aligned}\theta_{D,\text{gemessen}} &= (329 \pm 19) \text{ K} \\ \theta_{D,\text{theoretisch}} &= 332,102 \text{ K}\end{aligned}$$

Die maximale prozentuale Abweichung des gemessenen Wertes von der theoretischen Berechnung beträgt also

$$\Delta\theta_D = \frac{\theta_{D,\text{theoretisch}}}{\theta_{D,\text{gemessen, min}}} - 1 = 5.94 \%$$

und der Mittelwert hat die Abweichung

$$\Delta\theta_D = 0.94 \%.$$

Der Großteil der Fehler entstehen aufgrund der mangelhaften Messmethode in diesem Experiment. Da die Temperatur im Dewar-Gefäß mit flüssigem Stickstoff gering gehalten wird und dieses per Hand ständig nachgekippt werden musste, konnte keine kontinuierlich steigende Temperatur erzielt werden. Das hat dazu geführt, dass die Temperaturunterschiede zwischen dem Gefäß und der Probe zum Teil sehr unterschiedlich waren. Dieses Temperaturproblem trägt höchstwahrscheinlich den größten Beitrag zum Fehler. Außerdem



ist der Aufbau nicht gut abgeschirmt. Das Dewar-Gefäß war oben offen und somit anfällig gegen äußere Einflüsse auf die Temperatur. Es ist ebenfalls wichtig zu erwähnen, dass die Zeit nur ungenau gemessen werden konnte, da das auftragen der Messwerte ebenfalls bis zu ca. eine Minute gedauert hat.

## Literatur

- [1] Janusz Chrzanowski und Bohdan Bieg. „Bulk Modulus of Copper Alloys in Context of Modern Metal Theory“. In: *New Trends in Production Engineering* 1 (Okt. 2018), S. 681–686. DOI: 10.2478/ntpe-2018-0086.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch V47: Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern*.
- [3] B Fellmuth, Ch Gaiser und J Fischer. „Determination of the Boltzmann constant—status and prospects“. In: *Measurement Science and Technology* 17.10 (Aug. 2006), R145–R159. DOI: 10.1088/0957-0233/17/10/r01. URL: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/17/10/r01>.
- [4] Philip M. Bethke Richard A. Robie. „Molar Volumes and Densities of Minerals“. In: *United States department of the interior geological survey* 1 (Okt. 1983), S. 4. URL: <https://pubs.usgs.gov/tei/822/report.pdf> (besucht am 26.06.2021).
- [5] Units The NIST Reference on Constants und Uncertainty. *2018 CODATA Value: reduced Planck constant*. URL: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?hbar> (besucht am 26.06.2021).