Дискретная математика

Модуль 1.

Математическая логика

Лекция 1.

Авдошин С.М. (email: savdoshin@hse.ru)

Основные понятия и законы математической логики

Логика – наука о том, как правильно рассуждать, делать правильные умозаключения и выводы, получать правильные высказывания.

- Высказывания
- Пропозициональные переменные
- Логические связки
- Силлогизмы
- Законы Аристотеля
- Закон Лейбница

Высказывания

- **Высказывание** — предложение, выражающее суждение.
- Если суждение, составляющее содержание некоторого высказывания, истинно, то и о данном высказывании говорят, что оно истинно.
- Сходным образом ложным называют такое высказывание, которое является выражением ложного суждения.

Пропозициональные переменные

Примеры высказываний

Простые высказывания

$1 + 1 = 2.$

$2 + 2 = 3.$

P: *Джейн водит автомобиль*

Q: *У Боба русые волосы*

P и Q – пропозициональные переменные, обозначающие простые высказывания

Сложное высказывание

Джейн водит автомобиль и у Боба русые волосы

Символическая запись сложного высказывания – $P \wedge Q$

Предикат

- С каждым высказыванием связано понятие предиката
- Предикат это функция, принимающая логические значения $P : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \rightarrow \{0,\ 1\}$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \in X_1; \dots;\ x_n \in X_n$$

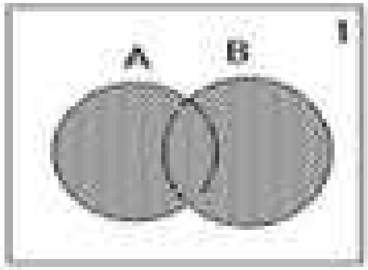
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ - области значений предметных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$

Пример предиката, свойств и высказываний

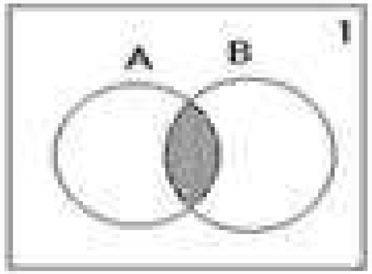
- Вася купил мороженное
- Предикат = купил
- $K(x, y)$ - x купил y; x, y – предметные переменные; X - множество людей; Y множество вещей; $\text{Вася}, \text{мороженное}$ – предметные константы;
- Свойство вещей $P(y) = K(\text{Вася}, y)$
- Свойство людей $R(x) = K(x, \text{мороженное})$
- Высказывание $A = R(\text{Вася}) = P(\text{мороженное}) = K(\text{Вася}, \text{мороженное})$

Свойство (одноместный предикат)

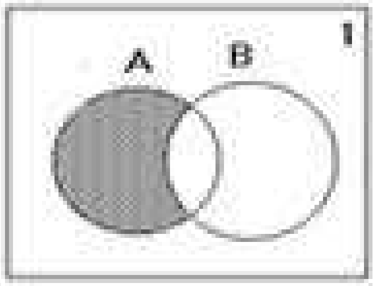
- $a = P_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$
- $b = P_B(x)$



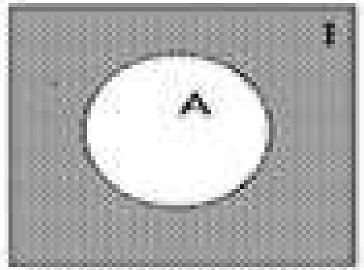
объединение $A \cup B$



пересечение $A \cap B$



разность $A \setminus B$



дополнение A

Логические (пропозициональные) связки

- Операция над высказываниями, позволяющая составлять новые высказывания путем соединения более простых.
- конъюнкция ($\wedge$ или $\&$),
- дизъюнкция ($\vee$),
- импликация ($\Rightarrow$)
- эквивалентность ($\Leftrightarrow$),
- отрицание ($\neg$).

$$\mathcal{A} \& \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}, \quad \neg\mathcal{A}, \quad \neg\mathcal{B}.$$

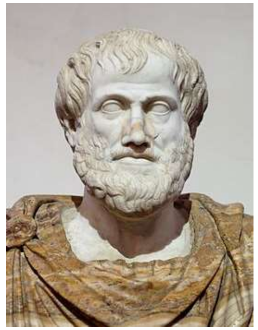
Таблицы истинности

Используются для установления истинности сложных высказываний. Введены австрийским логиком Людвигом Витгенштейном.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\&\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Силлогизм



- **Силлогизм**: (от греч. sillogismos) категорический. Дедуктивное умозаключение
- Силогизм – правило, позволяющее из истинных высказываний получать новые истинные высказывания
- Аристотель рассматривал два высказывания A и B, из которых следует C
- Если A и B истина, то C – истина

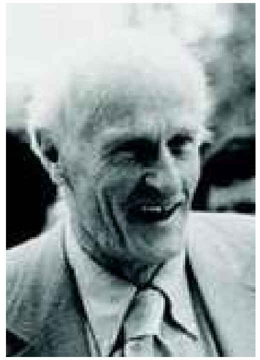
Основные силлогизмы

- $\frac{A, A => B}{B}$ (Modus Ponens)
- $\frac{A => B, \overline{B}}{\bar{A}}$ (Modus Tollens)
- $\frac{A => B, B => C}{A => C}$
- $\frac{A, B}{A \,\&\, B}$
- $\frac{A \,\&\, B}{A, B}$

Основные законы логики

- Законы Аристотеля
- Закон Лейбница

Закон тождества (Аристотель)



- $\vDash$ - истино, что (знак придуман американским логиком Стивином Коулом Клини в 1958 году)

$$\vDash (A \Leftrightarrow A)$$

- $(A \Leftrightarrow B)$ *означает*
  A равносильно B;
  A эквивалентно B;
  A тогда и только тогда, когда B;
  A необходимое и достаточное условие для B
- $(A \Leftrightarrow B) = (A \Rightarrow B) \,\&\, (A \Leftarrow B)$

Закон непротиворечия (Аристотель)

$$\nvDash \ (\mathrm{A} \,\&\, \bar{\mathrm{A}})$$

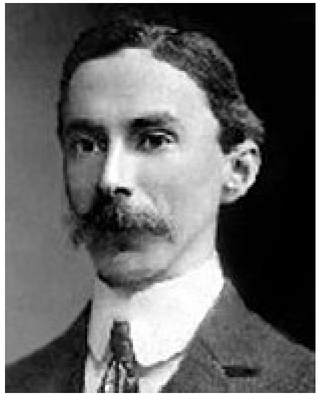
$\nvDash$ - означает ложно, что

Закон исключения третьего (Аристотель)

$$\vDash (A \vee \bar{A})$$

Закон достаточного основания (Лейбниц)

Никакое высказывание не может быть принято, если оно не является следованием, полученным в ходе применения силлогизмов из ранее полученных утверждений или строго установленных фактов, выраженных так же в форме высказывания



Логический парадокс Рассела

Дан объект $u = \{x | x \notin x\}$.

Теорема. $\vDash (u \in u) \& (u \notin u)$.

Данная теорема опровергает закон непротиворечия Аристотеля