Дискретная математика
Введение в булеву алгебру.
ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ

Сергей Михайлович Авдошин savdoshin@hse.ru

Екатерина Николаевна Береснева eberesneva@hse.ru

Мария Константиновна Горденко mgordenko@hse.ru

Семинар 2

Виды формул

$$A(X) = A(x_1, x_2, \dots, x_n), x \in M^n, M = \{0, 1\}$$

- Общезначимая формула (тавтология)
$$(\forall I \in M^n)\big(A(I)\big)$$
- Выполнимая формула
$$(\exists I \in M^n)\big(A(I)\big)$$
- Противоречивая формула
$$(\forall I \in M^n)\big(\overline{A(I)}\big)$$
- Опровержимая формула
$$(\exists I \in M^n)\big(\overline{A(I)}\big)$$

1. ассоциативности

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C \qquad A+(B+C)=(A+B)+C$$

2. коммутативности

$$A\cdot B=B\cdot A \qquad A+B=B+A$$

3. дистрибутивности

слева

$$A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C) \qquad A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$$

справа

$$(A+B)\cdot C=(A\cdot C)+(B\cdot C) \qquad (A\cdot B)+C=(A+C)\cdot(B+C)$$

4. идемпотентности

$$A \cdot A = A \qquad\qquad A + A = A$$

5. двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} = A$$

6. поглощения

$$A \cdot (A + B) = A \qquad\qquad A + (A \cdot B) = A$$

7. Порецкого

$$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B \qquad\qquad A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$$

8. де Моргана

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

9. склеивания

$$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A \qquad (A \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A$$

10. Аристотеля

противоречия — *исключения третьего*

$$A \cdot \overline{A} = 0 \qquad A + \overline{A} = 1$$

11. действия с константами

нейтральный элемент

$$A \cdot 1 = A \qquad\qquad A + 0 = A$$

поглощающий элемент

$$A \cdot 0 = 0 \qquad\qquad A + 1 = 1$$

- $A \Rightarrow B = \bar{A} + B$
- $A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B} = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$
- $A \equiv B = \bar{A}\bar{B} + AB = (\bar{A} + B)(A + \bar{B})$

Ассоциативность

- $M = \{0,1\}, \quad * -$ некая бинарная операция
- $(\forall a \in M)(\forall b \in M)(\forall \mathrm{c} \in M)\big((a * b) * c = a * (b * c)\big)$

Операция умножения ассоциативна

a	**b**	**c**	$a * \boldsymbol{b}$	$(a * b) * c$	$\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}$	$a * (b * c)$
0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**
0	1	0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	1	1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**
1	1	0	**1**	**0**	**0**	**0**
1	1	1	**1**	**1**	**1**	**1**

Импликация НЕ ассоциативна

a	b	c	$a \Rightarrow \boldsymbol{b}$	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$	$\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{c}$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$
0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**
0	0	1	**1**	**1**	**1**	**1**
0	1	0	**1**	**0**	**0**	**1**
0	1	1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	**0**	**1**	**1**	**1**
1	0	1	**0**	**1**	**1**	**1**
1	1	0	**1**	**0**	**0**	**0**
1	1	1	**1**	**1**	**1**	**1**

Коммутативность

- $M = \{0,1\}, \quad * -$некая бинарная операция
- $(\forall a \in M)(\forall b \in M)(a * b = b * a)$

Пример. Операция импликация не коммутативна

a	b	$\Rightarrow$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

→

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Идемпотентность

- $M = \{0,1\}, \quad * -$некая бинарная операция
- $(\forall a \in M)(a * a = a)$

Пример. Операция импликация не идемпотентна

a	b	⇒
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

⇒	0	1
0	1	1
1	0	1

Левый нейтральный элемент

- $M = \{0,1\}, \quad * -$некая бинарная операция
- Если $(\exists e_l \in M)(e_l * a = a)$, то e_l - левый нейтральный элемент

Пример. Для операции импликация ? – левый нейтральный элемент

a	b	⇒
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

b

⇒	0	1
0	1	1
1	0	1

a

Левый нейтральный элемент

- $M = \{0,1\}, \quad * -$некая бинарная операция
- Если $(\exists e_l \in M)(e_l * a = a)$, то e_l - левый нейтральный элемент

Пример. Для операции импликация 1 – левый нейтральный элемент

a	b	⇒
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

⇒	0	1	b
0	1	1	
1	0	1	
a			

Правый нейтральный элемент

- $M = \{0,1\}, \quad * -$некая бинарная операция
- Если $(\exists e_r \in M)(a * e_r = a)$, то e_r - правый нейтральный элемент

Пример. Для операции импликация нет правого нейтрального элемента

a	b	*
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

*	0	1
0	1	1
1	0	1

b

?

a

Левый поглощающий элемент

- $M = \{0,1\}$, $\ast$ −некая бинарная операция
- Если $(\exists \infty_l \in M)(\infty_l \ast a = \infty_l)$, то ∞_l - левый поглощающий элемент

Пример. Для операции импликация нет левого поглощающего элемента

a	b	*
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

→

*	0	1	b
0	1	1	
1	0	1	
a			

?

Правый поглощающий элемент

- $M = \{0,1\}$, $\ast$ −некая бинарная операция
- Если $(\exists \infty_r \in M)(a \ast \infty_r = \infty_r)$, то ∞_r - правый поглощающий элемент

Пример. Для операции импликация 1 – правый поглощающий элемент

a	b	*
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

→

*	0	1
0	1	1
1	0	1

b (столбцы), a (строки)

Разрешимость уравнения $a * x = b$

A	B	F
0	0	**0**
0	1	**0**
0	2	**2**
1	0	**1**
1	1	**2**
1	2	**1**
2	0	**2**
2	1	**1**
2	2	**0**

x

*	0	1	2
0	0	0	2
1	1	2	1
2	2	1	0

a

b

$0 * x = 1$
$x = ?$

$0 * x = 0$
$x = ?$

НЕ разрешимо

Разрешимость уравнения $x * a = b$

A	B	F
0	0	**0**
0	1	**0**
0	2	**2**
1	0	**1**
1	1	**2**
1	2	**1**
2	0	**2**
2	1	**1**
2	2	**0**

a

	*	0	1	2
	0	0	0	2
x	1	1	2	1
	2	2	1	0

Разрешимо!

Принцип двойственности

Булева функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ равная $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ называется *двойственной* функцией по отношению к функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для получения таблицы истинности двойственной функции достаточно в таблице истинности исходной функции заменить значения всех переменных на противоположные, т.е. все единицы заменить на нули, а нули – на единицы.

Функции двойственные равносильным функциям также равносильны.

Таким образом, производя замену вхождений элементов $\{0, 1, \&, \vee\}$ на $\{1, 0, \vee, \&\}$ в равносильных формулах, получаем равносильные же формулы.

Нахождение двойственной функции

A	B	F
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Отрицание

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{F}$
1	1	**0**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**0**

Сортировка

A	B	F^*
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**0**

Нахождение двойственной функции

Отрицание

Сортировка

A	B	F
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{F}$
1	1	**0**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**0**

A	B	F^*
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**0**

$F_{13}(A, B)$ является двойственной функцией к $F_4(A, B)$

Двойственные операции

- $\&$ и +
- 0 и 1
- $\Rightarrow$ и $\nLeftarrow$
- $\nRightarrow$ и $\Leftarrow$

Есть ли ещё?

Самодвойственная функция

Самодвойственная функция — булева функция, двойственная сама к себе. Функцией, двойственной к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, называется функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Значит, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является самодвойственной, если $\overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Другими словами самодвойственная функция на противоположных друг другу наборах значений аргументов принимает противоположные значения.

Самодвойственная функция

A	B	F
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**0**

Отрицание

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{F}$
1	1	**0**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

Сортировка

A	B	F
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**0**

F_{12} является самодвойственной функцией

Доказательство равносильности формул

Покажем верность закона ДеМоргана

$$((\neg x_1)\vee(\neg x_2)) = (\neg(x_1 \& x_2))$$

построив соотвествующие им таблицы

x_1	x_2	$x_1\&x_2$	$\neg(x_1\&x_2)$	$(\neg x_1)\vee(\neg x_2)$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Несущественная (фиктивная) переменная

- Переменная x_i в функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ называется несущественной (фиктивной), если $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$, т. е. изменение значения x_i в любом наборе аргументов не меняет значения функции.
- В результате удаления фиктивной переменной получаем функцию $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ от $n - 1$ переменной.

Разложение Шеннона

- Разложение Шеннона - метод представления булевой функции от n переменных в виде суммы двух подфункций от $(n-1)$ остальных переменных.
- $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = F(x_i)$
- $F(x_i) = x_i F(x_i = 1) + \overline{x_i} F(x_i = 0) = \big(x_i + F(x_i = 0)\big)\big(\overline{x_i} + F(x_i = 1)\big)$

дизъюнктивное конъюнктивное

Совершенное дизъюнктивное разложение Шеннона

- $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{(a_1, a_2, \dots, a_n \in M^n)} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} F(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$x^a = \begin{cases} x, a = 1 \\ \bar{x}, a = 0 \end{cases}, x^a = (x \equiv a)$$

Пример

- $F = XYZ + X\bar{Y}Z + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}YZ + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$
- $F = X \cdot F(X = 1) + \bar{X} \cdot F(X = 0)$
- $F = X(YZ + \bar{Y}Z) + \bar{X}(\bar{Y}Z + YZ + \bar{Y}\bar{Z})$

- $F = Y(XZ + \bar{X}Z) + \bar{Y}(XZ + \bar{X}Z + \bar{X}\bar{Z})$
- $F = Z(XY + X\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y} + \bar{X}Y) + \bar{Z}(\bar{X}\bar{Y})$

Пример

- $F = X \cdot F(X = 1) + \bar{X} \cdot F(X = 0)$
- $F = X \begin{pmatrix} Y0011 \\ Z0101 \\ F1101 \end{pmatrix} + \bar{X} \begin{pmatrix} Y0011 \\ Z0101 \\ F1100 \end{pmatrix}$
- $F = X \left(Y \begin{pmatrix} Z01 \\ F01 \end{pmatrix} + \bar{Y} \begin{pmatrix} Z01 \\ F11 \end{pmatrix} \right) + \bar{X} \left(Y \begin{pmatrix} Z01 \\ F00 \end{pmatrix} + \bar{Y} \begin{pmatrix} Z01 \\ F11 \end{pmatrix} \right)$
- $F = X\big(Y(Z(1) + \bar{Z}(0)) + \bar{Y}(Z(1) + \bar{Z}(1))\big) + \bar{X}\big(Y(Z(0) + \bar{Z}(0)) + \bar{Y}(Z(1) + \bar{Z}(1))\big) = XYZ + X\bar{Y}Z + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$

X	Y	Z	F(X, Y, Z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

https://ru.wikipedia.org/wiki/Дизъюнктивная_нормальная_форма

Дизъюнктивная нормальная форма

- **Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)** — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид дизъюнкции конъюнкций литералов.
- Формулы **в ДНФ**:
  - $A + B$
  - $AB + \bar{A}$
  - $AB\bar{C} + \bar{D}EF + CD + B$
- Формулы **не в ДНФ**:
  - $\overline{A + B}$
  - $A + B(C + D)$
- Но последние две формулы эквивалентны следующим формулам в ДНФ:
  - $\bar{A}\bar{B}$
  - $A + BC + BD$

https://ru.wikipedia.org/wiki/Дизъюнктивная_нормальная_форма

Алгоритм построения ДНФ

1. Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы.
2. Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям на основании законов де Моргана.
3. Избавиться от знаков двойного отрицания.
4. Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Дизъюнктивная_нормальная_форма

Пример

- Приведем к ДНФ формулу $F = \overline{((X \to Y) + \overline{(Y \to Z)})}$
- Выразим логическую операцию $\to$ через $+, *, \bar{\ }$
  - $F = \overline{((\bar{X} + Y) + \overline{(\bar{Y} + Z)})}$
- В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:
  - $F = (\bar{\bar{X}}\bar{Y})(\bar{Y} + Z) = (X\bar{Y})(\bar{Y} + Z)$
- Используя закон дистрибутивности, получаем:
  - $F = (X\bar{Y}\bar{Y}) + (X\bar{Y}Z)$
- Используя идемпотентность конъюнкции, получаем ДНФ:
  - $F = X\bar{Y} + X\bar{Y}Z = X\bar{Y}$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

- **Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)** называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входят все переменные.
- Любая булева формула, не являющаяся тождественно ложной, может быть приведена к СДНФ, причем единственным образом, то есть для любой выполнимой функции алгебры логики существует своя СДНФ, причём единственная.
- Например, $F(X,Y,Z) = XYZ + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}Y\bar{Z}$.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Дизъюнктивная_нормальная_форма

Переход от ДНФ к СДНФ

- Если в какой-то простой конъюнкции недостаёт переменной, например, Z, вставляем в неё выражение $Z + \bar{Z} = 1$
- После чего раскрываем скобки (при этом повторяющиеся дизъюнктные слагаемые не пишем, в силу закона идемпотентности)

https://ru.wikipedia.org/wiki/Дизъюнктивная_нормальная_форма

Переход от ДНФ к СДНФ

$$X + \bar{Y}\bar{Z} = X(Y + \bar{Y})(Z + \bar{Z}) + (X + \bar{X})\bar{Y}\bar{Z} = XYZ + XY\bar{Z} + X\bar{Y}Z + X\bar{Y}\bar{Z} + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} = XYZ + XY\bar{Z} + X\bar{Y}Z + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$

Правила построения СДНФ по таблице истинности

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние единицы.

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Правила построения СДНФ по таблице истинности

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние единицы.
- Далее рассматриваются только те значения переменных, при которых функция равна 1. Если значение переменной равно 0, то она записывается с инверсией. Если значение переменной равно 1, то без инверсии.

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Правила построения СДНФ по таблице истинности

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние единицы.
- Далее рассматриваются только те значения переменных, при которых функция равна 1. Если значение переменной равно 0, то она записывается с инверсией. Если значение переменной равно 1, то без инверсии.
- $F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Конъюнктивная нормальная форма

- **Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)** — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид конъюнкции дизъюнкций литералов.
- Формулы **в КНФ**:
  - $\bar{A}(B + C)$
  - $(A + B)(\bar{B} + C + D)(D + \bar{E})$
  - AB
- Формулы **не в КНФ**:
  - $\overline{B + C}$
  - $AB + C$
  - $A(B + DE)$
- Но эти 3 формулы не в КНФ эквивалентны следующим формулам в КНФ:
  - $\bar{B}\bar{C}$
  - $(A + C)(B + C)$
  - $A(B + D)(B + E)$

Алгоритм построения КНФ

- Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием.
- Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям.
- Избавиться от знаков двойного отрицания.
- Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

Пример

- Приведем к КНФ формулу $F = (X \to Y)((\bar{Y} \to Z) \to \bar{X})$
- Преобразуем формулу F к формуле, не содержащей $\to$:
    - $F = (\bar{X} + Y)\left(\overline{(\bar{\bar{Y}} \to Z)} + \bar{X}\right) = (\bar{X} + Y)\left(\left(\overline{\bar{\bar{\bar{Y}}} + Z}\right) + \bar{X}\right)$
- В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:
    - $F = (\bar{X} + Y)(\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X})$
- По закону дистрибутивности получим КНФ:
    - $F = (\bar{X} + Y)(\bar{X} + \bar{Y})(\bar{X} + \bar{Z})$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма

- **Совершенно конъюнктивная нормальная форма** - конъюнкция дизъюнкций, причём в каждой дизъюнкции (в каждой скобке) присутствуют все переменные, входящие в формулу, либо их отрицание, нет одинаковых дизъюнкций, в каждой дизъюнкции нет одинаковых слагаемых.
- Любая булева формула, не являющаяся тождественно истинной, может быть приведена к СКНФ.

Переход от КНФ к СКНФ

- Если в простой дизъюнкции не хватает какой-то переменной (например, Z), то добавляем в неё выражение $Z\bar{Z} = 0$
- $F = (X + Y)(X + \bar{Y} + \bar{Z}) = \big(X + Y + (Z\bar{Z})\big)(X + \bar{Y} + \bar{Z}) = (X + Y + Z)(X + Y + \bar{Z})(X + \bar{Y} + \bar{Z})$

Правила построения СКНФ по таблице истинности

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние 0.

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Правила построения СКНФ по таблице истинности

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние 0.
- Далее рассматриваются только те значения переменных, при которых функция равна 0. Если значение переменной равно 1, то она записывается с инверсией. Если значение переменной равно 0, то без инверсии.

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Правила построения СКНФ по таблице истинности

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние 0.
- Далее рассматриваются только те значения переменных, при которых функция равна 0. Если значение переменной равно 1, то она записывается с инверсией. Если значение переменной равно 0, то без инверсии.
- $F = (A + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)$

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1