Дискретная математика Минимизация булевых функций

Сергей Михайлович Авдошин savdoshin@hse.ru

Екатерина Николаевна Береснева eberesneva@hse.ru

Мария Константиновна Горденко mgordenko@hse.ru

Семинар 3

Что такое алгебра?

Пусть M есть непустое множество и пусть для каждого $i \in Z_n$ на множестве M задана $n_i -$ арная внутренняя операция f_i. В таком случае $\langle M, \{f_i | i \in Z_n\}\rangle$ называют алгеброй и говорят, что множество M есть алгебра относительно операций $\{f_i | i \in Z_n\}$.

Запишите используя это определение булеву алгебру, алгебру множеств и алгебру равнозначных формул.

Основные понятия

- Алгебра $\langle M, * \rangle$ с одной внутренней бинарной операцией * – группоид.
- Если для операции * выполняется свойство ассоциативности, то M полугруппа относительно операции *.
- Если в полугруппе существует нейтральный элемент, то это M - моноид.
- Если в полугруппе выполняется разрешимость уравнения (существует обратный элемент), то M $-$ группа.
- Если в алгебре выполняется коммутативность, то она коммутативная:
  - пример коммутативного группоида – операция Вебба или Шеффера;
  - пример коммутативного моноида – операция сложения или умножения;
  - пример коммутативной группы – операция сложения по модулю 2 или эквивалентность.

Что это?

* (mod 4)	0	1	2	3
0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**2**	**3**
2	**0**	**2**	**0**	**2**
3	**0**	**3**	**2**	**1**

Это моноид

* (mod 4)	1	3
1	1	3
3	3	1

Это группа

Для сложения по модулю натурального числа выполняются все свойства коммутативной группы

+ (mod p)	**0**	**1**	**…**	**p - 1**
0	0	1	…	p - 1
1	1	2	…	0
…	…	…	…	…
p - 1	p - 1	0	…	p - 2

Алгебра с двумя операциями

- Кольцо M – алгебра с двумя бинарными операциями (сложение и умножение), при этом выполняются следующие свойства:
  - M – абелева (коммутативная) группа по сложению.
  - M – полугруппа по умножению.
  - Операция умножения дистрибутивна слева и справа относительно сложения

Пример: умножение квадратных матриц

- Кольцо может быть коммутативным (по умножению).
- Кольцо может быть с единицей (с нейтральным элементом).
- В кольце могут быть делители нуля.
- Кольцо без делителей нуля - это область целостности.
- Если в области целостности есть обратные элементы, то это тело.
- Если тело коммутативно, то это поле!

А какие поля существуют?

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Поля с бесконечным числом элементов:

- поля рациональных (дробей), вещественных, комплексных чисел.

Конечное поле:

- Множество GF(p) = {0, 1, ..., p − 1} с операциями сложения $\oplus$ и умножения & по модулю простого числа p является числовым полем. Результат любой операции также является элементом данного поля.

- Мы будем рассматривать GF(2) = поле вычетов по модулю 2.
- Для поля уравнение $ax \oplus b = 0$ имеет единственное решение

И ещё раз.

Поле GF(2) – алгебра с двумя операциями (сложение по модулю 2 и логическое умножение).

Носитель поля относительно операции сложения образует группу.

Если мы выбросим из носителя поглощающий элемент относительно операции умножения (обычно обозначается как ноль), то получится тривиальная коммутативная группа с единственным элементом.

Выполняется закон дистрибутивности умножения относительно сложения.

Алгебра над множеством F, образующая коммутативную группу по сложению $+$ над F с нейтральным элементом $\mathbf{0}$ и коммутативную группу по умножению над ненулевыми элементами $F \setminus \{\mathbf{0}\}$, при выполняющемся свойстве дистрибутивности умножения относительно сложения.

Если раскрыть указанное выше определение, то множество F с введёнными на нём алгебраическими операциями сложения $+$ и умножения $*$ ($+\colon F \times F \to F, \quad *\colon F \times F \to F$, т. е. $\forall a, b \in F \quad (a+b) \in F,\ a*b \in F$) называется **полем** $\langle F, +, * \rangle$, если выполнены следующие аксиомы:

1. Коммутативность сложения: $\forall a, b \in F \quad a+b=b+a$.
2. Ассоциативность сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a+b)+c=a+(b+c)$.
3. Существование нулевого элемента: $\exists \mathbf{0} \in F\colon \forall a \in F \quad a+\mathbf{0}=a$.
4. Существование противоположного элемента: $\forall a \in F\ \exists (-a) \in F\colon a+(-a)=\mathbf{0}$.
5. Коммутативность умножения: $\forall a, b \in F \quad a*b=b*a$.
6. Ассоциативность умножения: $\forall a, b, c \in F \quad (a*b)*c=a*(b*c)$.
7. Существование единичного элемента: $\exists e \in F \setminus \{\mathbf{0}\}\colon \forall a \in F \quad a*e=a$.
8. Существование обратного элемента для ненулевых элементов: $(\forall a \in F\colon a \neq \mathbf{0})\ \exists a^{-1} \in F\colon a*a^{-1}=e$.
9. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a+b)*c=(a*c)+(b*c)$.

Задача

Десятичное значение двоичного числа $x_3x_2x_1x_0$, являющегося решением уравнения $7x_3 \oplus 14x_2 \oplus 12x_1 \oplus 15x_0 = 6$, равно _____.

$7 = 0111_2$
$14 = 1110_2$
$12 = 1100_2$
$15 = 1111_2$
$6 = 0110_2$

$$0111_2 \cdot x_3 \oplus 1110_2 \cdot x_2 \oplus 1100_2 \cdot x_1 \oplus 1111_2 \cdot x_0 = 0110_2$$

Задача

Десятичное значение двоичного числа $x_3x_2x_1x_0$, являющегося решением уравнения $7x_3 \oplus 14x_2 \oplus 12x_1 \oplus 15x_0 = 6$, равно _____.

$7 = 0111_2$
$14 = 1110_2$
$12 = 1100_2$
$15 = 1111_2$
$6 = 0110_2$

$$\begin{array}{c} (3) \\ (2) \\ (1) \\ (0) \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{(1)\oplus=(0) \\ (2)\oplus=(0)}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача

Десятичное значение двоичного числа $x_3x_2x_1x_0$, являющегося решением уравнения $7x_3 \oplus 14x_2 \oplus 12x_1 \oplus 15x_0 = 6$, равно _____.

$7 = 0111_2$
$14 = 1110_2$
$12 = 1100_2$
$15 = 1111_2$
$6 = 0110_2$

$$\begin{array}{c} (3) \\ (2) \\ (1) \\ (0) \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{(1)\oplus=(0) \\ (2)\oplus=(0)}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{(2)\oplus=(1) \\ (3)\oplus=(1)}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(3)\oplus=(2)}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(0)\oplus=(3)}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача

Десятичное значение двоичного числа $x_3x_2x_1x_0$, являющегося решением уравнения $7x_3 \oplus 14x_2 \oplus 12x_1 \oplus 15x_0 = 6$, равно ____.

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 1$
$x_2 = 1$
$x_1 = 0$
$x_0 = 1$

$$x_3x_2x_1x_0 = 1101_2 = 8 + 4 + 1 = 13$$

$$\begin{array}{r} 0111 \\ \oplus\ 1110 \\ 1111 \\ \hline 0110 \end{array}$$

Проверка:

$$0111_2 \cdot 1 \oplus 1110_2 \cdot 1 \oplus 1100_2 \cdot 0 \oplus 1111_2 \cdot 1 = 0110_2$$

$$82X_7 \oplus 107X_6 \oplus 168X_5 \oplus 62X_4 \oplus 87X_3 \oplus 153X_2 \oplus 84X_1 \oplus 129X_0 = 61$$

Переведем коэффициенты уравнения в двоичную систему счисления.

$82_{10}=01010010_2$, $107_{10}=01101011_2$, $168_{10}=10101000_2$, $62_{10}=00111110_2$, $87_{10}=01010111_2$, $153_{10}=10011001_2$,$84_{10}=01010100_2$, $129_{10}=10000001_2$, $61_{10}=00111101_2$

Составим расширенную матрицу коэффициентов соответствующей системы линейных уравнений в GF(2) и решим систему.

$$82_{10}=01010010_2,\ 107_{10}=01101011_2,\ 168_{10}=10101000_2,\ 62_{10}=00111110_2,$$
$$87_{10}=01010111_2,\ 153_{10}=10011001_2, 84_{10}=01010100_2,\ 129_{10}=10000001_2,$$
$$61_{10}=00111101_2$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&1&0&0&1&0&1&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&1\\
1&0&0&1&1&1&1&0&1\\
0&1&1&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
1&1&0&1&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&1&0&1&1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(4)\oplus=(6)\\(1)\oplus=(6)\\\sim\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&1&0&0&1&0&1&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&1\\
0&1&0&1&0&1&0&0&1\\
0&1&1&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&1&1&0&1&1
\end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&1&0&0&1&0&1&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&1\\
0&1&0&1&0&1&0&0&1\\
0&1&1&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&1&1&0&1&1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(6)\oplus=(5)\\(4)\oplus=(5)\\(3)\oplus=(5)\\(0)\oplus=(5)\\ \sim\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&0&1&1&1&0&1&0&1\\
0&1&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&1&1&1&1&0&1&0
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(6)\oplus=(7)\\(5)\oplus=(7)\\(4)\oplus=(7)\\(0)\oplus=(7)\\ \sim\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&1&1&1&1&1&1\\
0&1&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c}(6)\oplus=(2)\\(5)\oplus=(2)\\(1)\oplus=(2)\\(0)\oplus=(2)\\ \sim\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(5)\oplus=(1)\\(2)\oplus=(1)\\ \sim\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(7)\oplus=(3)\\(6)\oplus=(3)\\(5)\oplus=(3)\\ \sim\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(6)\oplus=(2)\\(5)\oplus=(2)\\(1)\oplus=(2)\\(0)\oplus=(2)\\ \sim\end{array}
\left(\begin{array}{c}
0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0
\end{array}\right.
$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
(7)\oplus=(4)\\
(6)\oplus=(4)\\
(5)\oplus=(4)\\
\sim
\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right)$$

Получаем решение:

$X7 = 0$, $X6 = 0$, $X5 = 0$, $X4 = 1$, $X3 = 1$, $X2 = 0$, $X1 = 1$, $X0 = 0$.

Получаем решение: $X_7 = 0,\ X_6 = 0,\ X_5 = 0,\ X_4 = 1,\ X_3 = 1,\ X_2 = 0,\ X_1 = 1,\ X_0 = 0.$

Составим таблицу истинности функции F.

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	0	0	0	1	1	0	1	0

Десятичный номер функции F равен $2^4 + 2^3 + 2^1 = 26.$

- $A + B = A \oplus B \oplus AB$
- $AB = A \equiv B \equiv (A + B)$

A	B	$A + B$	$A \oplus B$	AB	$A \oplus B \oplus AB$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1

A	B	AB	$A \equiv B$	$A + B$	$A \equiv B \equiv (A + B)$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

- Пара функций F и G называются ортогональными, если $FG = 0$

A	B	F	G	FG
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

НЕ ортогональные

A	B	F	G	FG
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

Ортогональные

- Если две функции являются ортогональными, то $F + G = F \oplus G$

$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{G}$	$F + G$	$F \oplus G$
0	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	0	0

• Пара функций F и G называются ортогональными, если $F + G = 1$

A	**B**	F	G	$F + G$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

НЕ ортогональные

A	**B**	F	G	$F + G$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Ортогональные

- Если две функции являются ортогональными, то $FG = F \equiv G$

$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{G}$	FG	$F \equiv G$
0	1	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Разложения Шеннона

$F(x) = x \cdot F(1) + \bar{x} \cdot F(0)$ - дизъюнктивное разложение

$F(x) = \left(x + F(0)\right)\left(\bar{x} + F(1)\right)$ - конъюнктивное разложение

Выполним дизъюнктивные разложения Шеннона логической функции F.

$$\begin{array}{c}A\\B\\C\\F\end{array}\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}=\bar{A}\cdot\begin{array}{c}B\\C\\F\end{array}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}+A\cdot\begin{array}{c}B\\C\\F\end{array}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}=\bar{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\bar{C}$$

$$\begin{array}{c}A\\B\\C\\F\end{array}\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}=\bar{B}\cdot\begin{array}{c}A\\C\\F\end{array}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+B\cdot\begin{array}{c}A\\C\\F\end{array}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}=\bar{B}\cdot(A\nRightarrow C)+B\cdot(A\oplus C)$$

$$\begin{array}{c}A\\B\\C\\F\end{array}\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}=\bar{C}\cdot\begin{array}{c}A\\B\\F\end{array}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}+C\cdot\begin{array}{c}A\\B\\F\end{array}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\bar{C}\cdot A+C\cdot(A\nLeftarrow B)$$

Выполним конъюнктивные разложения Шеннона логической функции $\boldsymbol{F}$.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(A + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\bar{A} + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (A + B \cdot C) \cdot (\overline{A} + \bar{C})$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(B + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\bar{B} + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (B + (A \nRightarrow C)) \cdot (\bar{B} + (A \oplus C))$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(C + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\bar{C} + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (C + A) \cdot (\bar{C} + (A \nLeftarrow B))$$

Разложение Рида

$$x \oplus 0 = x$$
$$x \oplus 1 = \bar{x}$$

$$F(x) = x \cdot F(1) + \bar{x} \cdot F(0) = x \cdot F(1) \oplus \bar{x} \cdot F(0) = x \cdot F(1) \oplus (x \oplus 1) \cdot F(0) =$$
$$= x \cdot F(1) \oplus x \cdot F(0) \oplus F(0) = F(0) \oplus x \cdot \big(F(0) \oplus F(1)\big) =$$

$= F(0) \oplus x \cdot F'_x$, где $F'_x -$ дискретный аналог производной

$F(x) = F(1) \equiv \left(x + \overline{F'_x}\right)$ - двойственное разложение в точке 0

$$F(x) = x \cdot F(1) \oplus \bar{x} \cdot F(0) = (\bar{x} \oplus 1)F(1) \oplus \bar{x} \cdot F(0) = \bar{x} \cdot F(1) \oplus F(1) \oplus$$
$$\bar{x} \cdot F(0) = F(1) \oplus \bar{x}\big(F(0) \oplus F(1)\big) = F(1) \oplus \bar{x} \cdot F'_x$$

$F(x) = F(0) \equiv \left(\bar{x} + \overline{F'_x}\right)$ - двойственное разложение в точке 1

Классический принцип двойственности

Если функция f задана формулой, построенной с помощью $\&, \vee, \neg, 0, 1$ и переменных, то по теореме о суперпозиции двойственных функций и ввиду того, что для функций $x \& y, x \vee y, x, \bar{x}, 0, 1$ двойственными являются функции $x \vee y$, $x \& y, x, \bar{x}, 1, 0$ соответственно, f^* получается из f заменой $\&$ **на** $\vee$**,**

$\vee$ **на** $\&$**,**

0 на 1,

1 на 0

(при исходной расстановке скобок).

Задача

- **Задача:** Известно, что если Андрей и Володя пойдут в кино, то Сережа в кино не пойдет. Известно также, что если Володя не пойдет в кино, то в кино пойдут Андрей и Сережа. Надо узнать, кто при этих условиях может пойти в кино.

Задача

- **Задача:** Известно, что если Андрей и Володя пойдут в кино, то Сережа в кино не пойдет. Известно также, что если Володя не пойдет в кино, то в кино пойдут Андрей и Сережа. Надо узнать, кто при этих условиях может пойти в кино.
- **Решение:**

1. Введем обозначения.
   - Пусть А означает: «Андрей пойдет в кино»,
   - В означает: «Володя пойдет в кино»,
   - С означает: «Сережа пойдет в кино».
2. Условия задачи запишутся следующим образом: $AB \to \bar{C}; \bar{B} \to AC$

Задача

- **Задача:** Известно, что если Андрей и Володя пойдут в кино, то Сережа в кино не пойдет. Известно также, что если Володя не пойдет в кино, то в кино пойдут Андрей и Сережа. Надо узнать, кто при этих условиях может пойти в кино.
- **Решение:**

3. $AB \to \bar{C}; \bar{B} \to AC$
4. $\overline{AB} + \bar{C}; B + AC$
5. $(\overline{AB} + \bar{C})(B + AC) = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(B + AC) = \bar{A}B + A\bar{B}C + B\bar{C}$

Задача

- **Задача:** Известно, что если Андрей и Володя пойдут в кино, то Сережа в кино не пойдет. Известно также, что если Володя не пойдет в кино, то в кино пойдут Андрей и Сережа. Надо узнать, кто при этих условиях может пойти в кино.
- **Решение:**

6. $\bar{A}B + A\bar{B}C + B\bar{C} = 1$

  - $\bar{A}B$ т. е. в кино может пойти Володя без Андрея.
  - $A\bar{B}C$ т. е. в кино могут пойти Андрей с Сережей, но без Володи.
  - $B\bar{C}$ т. е. в кино может пойти Володя без Сережи.

Задача

- **Задача:** Известно, что если Андрей и Володя пойдут в кино, то Сережа в кино не пойдет. Известно также, что если Володя не пойдет в кино, то в кино пойдут Андрей и Сережа. Надо узнать, кто при этих условиях может пойти в кино.
- **Решение:**

7. $\bar{A}B + A\bar{B}C + B\bar{C} = \bar{A}B(C + \bar{C}) + A\bar{B}C + (A + \bar{A})B\bar{C} = \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} = \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} = 1$

  - $\bar{A}BC$ т. е. в кино может пойти Володя с Сережей без Андрея
  - $\bar{A}B\bar{C}$ т.е. ...
  - $A\bar{B}C$ т.е. ...
  - $AB\bar{C}$ т.е. ...

Задача

- **Задача.** В школе решили организовать секцию атлетической гимнастики. Надо было разработать правила приема в эту секцию. Ребята внесли ряд предложений:
    1. Если ученик не отличник и не здоров, то он не может быть принят.
    2. Если ученик является отличником, то не может быть, чтобы он был здоров и его не приняли.
    3. Если ученик не принят, то он не отличник.
    4. Если ученик не здоров, то он не отличник и не будет принят.
- Учитель физкультуры сказал, что четыре правила — это слишком много. К тому же формулировки правил должны быть более простыми, более лаконичными. Поэтому, сказал учитель, возникает следующая задача: надо совокупность всех четырех правил заменить новыми правилами — и надо это сделать так, чтобы число новых правил было минимальным, чтобы каждое новое правило было сформулировано кратчайшим образом и чтобы совокупность новых правил была равносильна совокупности четырех исходных правил.
- Через некоторое время эту задачу действительно удалось решить. Какие правила получились?

Задача

- **Задача.** В школе решили организовать секцию атлетической гимнастики. Надо было разработать правила приема в эту секцию. Ребята внесли ряд предложений:
    1. Если ученик не отличник и не здоров, то он не может быть принят.
    2. Если ученик является отличником, то не может быть, чтобы он был здоров и его не приняли.
    3. Если ученик не принят, то он не отличник.
    4. Если ученик не здоров, то он не отличник и не будет принят.
- Учитель физкультуры сказал, что четыре правила — это слишком много. К тому же формулировки правил должны быть более простыми, более лаконичными. Поэтому, сказал учитель, возникает следующая задача: надо совокупность всех четырех правил заменить новыми правилами — и надо это сделать так, чтобы число новых правил было минимальным, чтобы каждое новое правило было сформулировано кратчайшим образом и чтобы совокупность новых правил была равносильна совокупности четырех исходных правил.
- Через некоторое время эту задачу действительно удалось решить. Какие правила получились?

ученик является отличником — О,

ученик здоров — З,

ученик принят — П

Задача

Решение.

1. Если ученик не отличник и не здоров, то он не может быть принят. $\overline{\text{О}}\,\overline{\text{З}} \rightarrow \overline{\text{П}} = \overline{\overline{\text{О}}\,\overline{\text{З}}} + \overline{\text{П}} = \text{О} + \text{З} + \overline{\text{П}}$
2. Если ученик является отличником, то не может быть, чтобы он был здоров и его не приняли. $\text{О} \rightarrow \overline{\text{З}\overline{\text{П}}} = \overline{\text{О}} + \overline{\text{З}} + \text{П}$
3. Если ученик не принят, то он не отличник. $\overline{\text{П}} \rightarrow \overline{\text{О}} = \text{П} + \overline{\text{О}}$
4. Если ученик не здоров, то он не отличник и не будет принят. $\overline{\text{З}} \rightarrow \overline{\text{О}}\,\overline{\text{П}} = \text{З} + \overline{\text{О}}\,\overline{\text{П}}$

ученик является отличником — О,
ученик здоров — З,
ученик принят — П

Задача

Решение.

$$(\text{О} + \text{З} + \overline{\text{П}})(\overline{\text{О}} + \overline{\text{З}} + \text{П})(\text{П} + \overline{\text{О}})(\text{З} + \overline{\text{О}}\overline{\text{П}}) = \cdots = \overline{\text{П}}\overline{\text{О}} + \text{З}\text{П}$$

ОТВЕТ?

Задача

Решение.

$$(\text{О} + \text{З} + \overline{\text{П}})(\overline{\text{О}} + \overline{\text{З}} + \text{П})(\text{П} + \overline{\text{О}})(\text{З} + \overline{\text{О}}\overline{\text{П}}) = \cdots = \overline{\text{П}}\overline{\text{О}} + \text{ЗП}$$

$$\overline{\text{П}}\overline{\text{О}} + \text{ЗП} = (\overline{\text{П}} + \text{З})(\overline{\text{П}} + \text{П})(\overline{\text{О}} + \text{З})(\overline{\text{О}} + \text{П}) = (\overline{\text{П}} + \text{З})(\overline{\text{О}} + \text{З})(\overline{\text{О}} + \text{П}) = (\overline{\text{П}} + \text{З})(\overline{\text{О}} + \text{П}) = (\text{П} \rightarrow \text{З})(\text{О} \rightarrow \text{П})$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

Задача

Решение.

$$(\text{О} + \text{З} + \overline{\text{П}})(\overline{\text{О}} + \overline{\text{З}} + \text{П})(\text{П} + \overline{\text{О}})(\text{З} + \overline{\text{О}}\,\overline{\text{П}}) = \cdots = \overline{\text{П}}\,\overline{\text{О}} + \text{ЗП}$$

$$\overline{\text{П}}\,\overline{\text{О}} + \text{ЗП} = (\overline{\text{П}}\,\overline{\text{О}} + \text{З})(\overline{\text{П}}\,\overline{\text{О}} + \text{П}) = (\overline{\text{П}} + \text{З})(\overline{\text{О}} + \text{З})(\overline{\text{П}} + \text{П})(\overline{\text{О}} + \text{П}) =$$
$$(\overline{\text{П}} + \text{З})(\overline{\text{О}} + \text{З})(\overline{\text{О}} + \text{П}) = (\overline{\text{П}} + \text{З})(\overline{\text{О}} + \text{П}) = (\text{П} \to \text{З})(\text{О} \to \text{П})$$

Таким образом, задача решена. Получилось два правила приема в секцию:

1. Если ученик принят, то необходимо, чтобы он был здоров
2. Если ученик является отличником, то он будет принят