

Дискретная математика

Введение в булеву алгебру.

ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ

Сергей Михайлович Авдошин savdoshin@hse.ru

Екатерина Николаевна Береснева eberesneva@hse.ru

Мария Константиновна Горденко mgordenko@hse.ru

Семинар 2

Виды формул

$$A(X) = A(x_1, x_2, \dots, x_n), x \in M^n, M = \{0, 1\}$$

- Общезначимая формула (тавтология)

$$(\forall I \in M^n)(A(I))$$

- Выполнимая формула

$$(\exists I \in M^n)(A(I))$$

- Противоречивая формула

$$(\forall I \in M^n)(\overline{A(I)})$$

- Опровержимая формула

$$(\exists I \in M^n)(\overline{A(I)})$$

1. ассоциативности

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

2. коммутативности

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + B = B + A$$

3. дистрибутивности

слева

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

справа

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

$$(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$$

4. идемпотентности

$$A \cdot A = A$$

$$A + A = A$$

5. двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} = A$$

6. поглощения

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$A + (A \cdot B) = A$$

7. Порццкого

$$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

$$A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$$

8. де Моргана

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

9. склеивания

$$(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A$$

$$(A \cdot B) + (A \cdot \bar{B}) = A$$

10. Аристотеля

противоречия

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

исключения третьего

$$A + \bar{A} = 1$$

11. действия с константами

нейтральный элемент

$$A \cdot 1 = A$$

$$A + 0 = A$$

поглощающий элемент

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A + 1 = 1$$

- $A \Rightarrow B = \bar{A} + B$
- $A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B} = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$
- $A \equiv B = \bar{A}\bar{B} + AB = (\bar{A} + B)(A + \bar{B})$

АССОЦИАТИВНОСТЬ

- $M = \{0,1\}$, $*$ — некая бинарная операция
- $(\forall a \in M)(\forall b \in M)(\forall c \in M)((a * b) * c = a * (b * c))$

Операция умножения ассоциативна

a	b	c	$a * b$	$(a * b) * c$	$b * c$	$a * (b * c)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Импликация НЕ ассоциативна

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Коммутативность

- $M = \{0,1\}$, $*$ — некая бинарная операция
- $(\forall a \in M)(\forall b \in M)(a * b = b * a)$

Пример. Операция импликация не коммутативна

a	b	\Rightarrow
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



\Rightarrow	0	1
0	1	1
1	0	1

Идемпотентность

- $M = \{0,1\}$, $*$ — некая бинарная операция
- $(\forall a \in M)(a * a = a)$

Пример. Операция импликация не идемпотентна

a	b	\Rightarrow
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



\Rightarrow	0	1
0	1	1
1	0	1

Левый нейтральный элемент

- $M = \{0,1\}$, $*$ — некая бинарная операция
- Если $(\exists e_l \in M)(e_l * a = a)$, то e_l - левый нейтральный элемент

Пример. Для операции импликация ? – левый нейтральный элемент

a	b	\Rightarrow
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



\Rightarrow	0	1	b
0	1	1	
1	0	1	
a			

Левый нейтральный элемент

- $M = \{0,1\}$, $*$ — некая бинарная операция
- Если $(\exists e_l \in M)(e_l * a = a)$, то e_l - левый нейтральный элемент

Пример. Для операции импликация 1 – левый нейтральный элемент

a	b	\Rightarrow
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



\Rightarrow	0	1	b
0	1	1	
1	0	1	
a			

Правый нейтральный элемент

- $M = \{0,1\}$, $*$ — некая бинарная операция
- Если $(\exists e_r \in M)(a * e_r = a)$, то e_r - правый нейтральный элемент

Пример. Для операции импликация нет правого нейтрального элемента

a	b	*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



*	0	1
0	1	1
1	0	1

b

?

a

Левый поглощающий элемент

- $M = \{0,1\}$, $*$ — некая бинарная операция
- Если $(\exists \infty_l \in M)(\infty_l * a = \infty_l)$, то ∞_l - левый поглощающий элемент

Пример. Для операции импликация нет левого поглощающего элемента

a	b	*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



*	0	1	b
0	1	1	
1	0	1	

a

?

Правый поглощающий элемент

- $M = \{0,1\}$, $*$ — некая бинарная операция
- Если $(\exists \infty_r \in M)(a * \infty_r = \infty_r)$, то ∞_r - правый поглощающий элемент

Пример. Для операции импликация 1 – правый поглощающий элемент

a	b	*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



*	0	1	b
0	1	1	
1	0	1	
a			

Разрешимость уравнения $a * x = b$

A	B	F
0	0	0
0	1	0
0	2	2
1	0	1
1	1	2
1	2	1
2	0	2
2	1	1
2	2	0



		x		
a	*	0	1	2
	0	0	0	2
	1	1	2	1
	2	2	1	0
		b		

$$0 * x = 1$$

$$x = ?$$

$$0 * x = 0$$

$$x = ?$$

НЕ разрешимо

Разрешимость уравнения $x * a = b$

A	B	F
0	0	0
0	1	0
0	2	2
1	0	1
1	1	2
1	2	1
2	0	2
2	1	1
2	2	0



x

a			
*	0	1	2
0	0	0	2
1	1	2	1
2	2	1	0

Разрешимо!

Принцип двойственности

Булева функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равная $\overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ называется *двойственной* функцией по отношению к функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

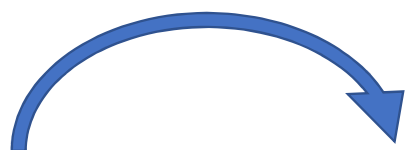
Для получения таблицы истинности двойственной функции достаточно в таблице истинности исходной функции заменить значения всех переменных на противоположные, т.е. все единицы заменить на нули, а нули – на единицы.

Функции двойственные равносильным функциям также равносильны.

Таким образом, производя замену вхождений элементов $\{0, 1, \&, \vee\}$ на $\{1, 0, \vee, \&\}$ в равносильных формулах, получаем равносильные же формулы.

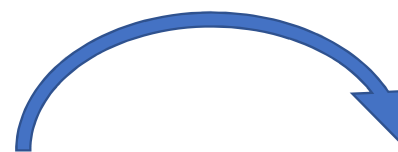
Нахождение двойственной функции

Отрицание



A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Сортировка

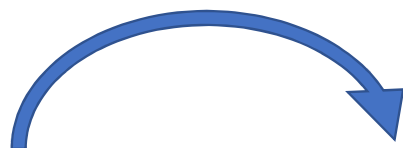


\bar{A}	\bar{B}	\bar{F}
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

A	B	F*
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

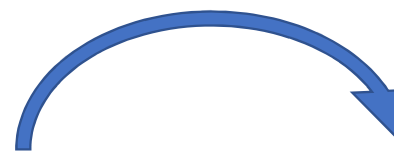
Нахождение двойственной функции

Отрицание



A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Сортировка



\bar{A}	\bar{B}	\bar{F}
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

A	B	F*
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$F_{13}(A, B)$ является двойственной функцией к $F_4(A, B)$

Двойственные операции

- $\&$ и $+$
- 0 и 1
- \Rightarrow и \Leftarrow
- \nRightarrow и \Leftarrow

Есть ли ещё?

Самодвойственная функция

Самодвойственная функция — **булева функция**, двойственная сама к себе. Функцией, двойственной к функции $f(x_1, \dots, x_n)$, называется функция $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Значит, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ является самодвойственной, если $\bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(x_1, \dots, x_n)$. Другими словами самодвойственная функция на противоположных друг другу наборах значений аргументов принимает противоположные значения.

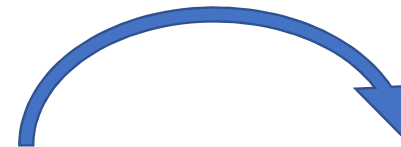
Самодвойственная функция

Отрицание



A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Сортировка



\bar{A}	\bar{B}	\bar{F}
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

F_{12} является самодвойственной функцией

Доказательство равносильности формул

Покажем верность закона ДеМоргана

$$((\neg x_1) \vee (\neg x_2)) = (\neg(x_1 \& x_2))$$

построив соответствующие им таблицы

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$\neg (x_1 \& x_2)$	$(\neg x_1) \vee (\neg x_2)$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Несущественная (фиктивная) переменная

- Переменная x_i в функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ называется несущественной (фиктивной), если $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$, т. е. изменение значения x_i в любом наборе аргументов не меняет значения функции.
- В результате удаления фиктивной переменной получаем функцию $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ от $n - 1$ переменной.

Разложение Шеннона

- Разложение Шеннона - метод представления булевой функции от n переменных в виде суммы двух подфункций от $(n - 1)$ остальных переменных.
- $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = F(x_i)$
- $F(x_i) = x_i F(x_i = 1) + \bar{x}_i F(x_i = 0) = (x_i + F(x_i = 0))(\bar{x}_i + F(x_i = 1))$
 дизъюнктивное конъюнктивное

Совершенное дизъюнктивное разложение Шеннона

- $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M^n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} F(a_1, a_2, \dots, a_n)$
$$x^a = \begin{cases} x, & a = 1 \\ \bar{x}, & a = 0 \end{cases}, x^a = (x \equiv a)$$

Пример

- $F = XYZ + X\bar{Y}Z + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}YZ + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$
- $F = X \cdot F(X = 1) + \bar{X} \cdot F(X = 0)$
- $F = X(YZ + \bar{Y}Z) + \bar{X}(\bar{Y}Z + YZ + \bar{Y}\bar{Z})$
- $F = Y(XZ + \bar{X}Z) + \bar{Y}(XZ + \bar{X}Z + \bar{X}\bar{Z})$
- $F = Z(XY + X\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y} + \bar{X}Y) + \bar{Z}(\bar{X}\bar{Y})$

Пример

- $F = X \cdot F(X = 1) + \bar{X} \cdot F(X = 0)$
- $F = X \begin{pmatrix} Y0011 \\ Z0101 \\ F1101 \end{pmatrix} + \bar{X} \begin{pmatrix} Y0011 \\ Z0101 \\ F1100 \end{pmatrix}$
- $F = X \left(Y \begin{pmatrix} Z01 \\ F01 \end{pmatrix} + \bar{Y} \begin{pmatrix} Z01 \\ F11 \end{pmatrix} \right) + \bar{X} \left(Y \begin{pmatrix} Z01 \\ F00 \end{pmatrix} + \bar{Y} \begin{pmatrix} Z01 \\ F11 \end{pmatrix} \right)$
- $F = X(Y(Z(1) + \bar{Z}(0)) + \bar{Y}(Z(1) + \bar{Z}(1))) + \bar{X}(Y(Z(0) + \bar{Z}(0)) + \bar{Y}(Z(1) + \bar{Z}(1)))$
 $= XYZ + X\bar{Y}Z + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$

X	Y	Z	F(X, Y, Z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Дизъюнктивная нормальная форма

- **Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)** — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид дизъюнкции конъюнкций литералов.
- **Формулы в ДНФ:**
 - $A + B$
 - $AB + \bar{A}$
 - $ABC\bar{C} + \bar{D}EF + CD + B$
- **Формулы не в ДНФ:**
 - $\overline{A + B}$
 - $A + B(C + D)$
- Но последние две формулы эквивалентны следующим формулам в ДНФ:
 - $\bar{A}\bar{B}$
 - $A + BC + BD$

Алгоритм построения ДНФ

1. Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы.
2. Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям на основании законов де Моргана.
3. Избавиться от знаков двойного отрицания.
4. Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

Пример

- Приведем к ДНФ формулу $F = \overline{((X \rightarrow Y) + \overline{(Y \rightarrow Z)})}$
- Выразим логическую операцию \rightarrow через $+, *, \bar{}$
 - $F = \overline{((\bar{X} + Y) + \overline{\bar{Y} + Z})}$
- В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:
 - $F = (\bar{\bar{X}}\bar{\bar{Y}})(\bar{\bar{Y}} + Z) = (X\bar{Y})(\bar{Y} + Z)$
- Используя закон дистрибутивности, получаем:
 - $F = (X\bar{Y}\bar{Y}) + (X\bar{Y}Z)$
- Используя идемпотентность конъюнкции, получаем ДНФ:
 - $F = X\bar{Y} + X\bar{Y}Z = X\bar{Y}$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

- **Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)** называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входят все переменные.
- Любая булева формула, не являющаяся тождественно ложной, может быть приведена к СДНФ, причем единственным образом, то есть для любой выполнимой функции алгебры логики существует своя СДНФ, причём единственная.
- Например, $F(X, Y, Z) = XYZ + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}Y\bar{Z}$.

Переход от ДНФ к СДНФ

- Если в какой-то простой конъюнкции недостаёт переменной, например, Z , вставляем в неё выражение $Z + \bar{Z} = 1$
- После чего раскрываем скобки (при этом повторяющиеся дизъюнктивные слагаемые не пишем, в силу закона идемпотентности)

Переход от ДНФ к СДНФ

$$\begin{aligned} X + \bar{Y}\bar{Z} &= X(Y + \bar{Y})(Z + \bar{Z}) + (X + \bar{X})\bar{Y}\bar{Z} = XYZ + XY\bar{Z} + X\bar{Y}Z + \\ &X\bar{Y}\bar{Z} + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} = XYZ + XY\bar{Z} + X\bar{Y}Z + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} \end{aligned}$$

Правила построения СДНФ по таблице ИСТИННОСТИ

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние единицы.

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Правила построения СДНФ по таблице ИСТИННОСТИ

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние единицы.
- Далее рассматриваются только те значения переменных, при которых функция равна 1. Если значение переменной равно 0, то она записывается с инверсией. Если значение переменной равно 1, то без инверсии.

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Правила построения СДНФ по таблице ИСТИННОСТИ

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние единицы.
- Далее рассматриваются только те значения переменных, при которых функция равна 1. Если значение переменной равно 0, то она записывается с инверсией. Если значение переменной равно 1, то без инверсии.
- $F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Конъюнктивная нормальная форма

- **Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)** — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид конъюнкции дизъюнкций литералов.
- **Формулы в КНФ:**
 - $\bar{A}(B + C)$
 - $(A + B)(\bar{B} + C + D)(D + \bar{E})$
 - AB
- **Формулы не в КНФ:**
 - $\overline{B + C}$
 - $AB + C$
 - $A(B + DE)$
- Но эти 3 формулы не в КНФ эквивалентны следующим формулам в КНФ:
 - $\bar{B}\bar{C}$
 - $(A + C)(B + C)$
 - $A(B + D)(B + E)$

Алгоритм построения КНФ

- Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием.
- Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям.
- Избавиться от знаков двойного отрицания.
- Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

Пример

- Приведем к КНФ формулу $F = (X \rightarrow Y)((\bar{Y} \rightarrow Z) \rightarrow \bar{X})$
- Преобразуем формулу F к формуле, не содержащей \rightarrow :
 - $F = (\bar{X} + Y)(\overline{(\bar{Y} \rightarrow Z)} + \bar{X}) = (\bar{X} + Y)\left(\left(\overline{\bar{Y} + Z}\right) + \bar{X}\right)$
- В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:
 - $F = (\bar{X} + Y)(\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X})$
- По закону дистрибутивности получим КНФ:
 - $F = (\bar{X} + Y)(\bar{X} + \bar{Y})(\bar{X} + \bar{Z})$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма

- **Совершенно конъюнктивная нормальная форма** - конъюнкция дизъюнкций, причём в каждой дизъюнкции (в каждой скобке) присутствуют все переменные, входящие в формулу, либо их отрицание, нет одинаковых дизъюнкций, в каждой дизъюнкции нет одинаковых слагаемых.
- Любая булева формула, не являющаяся тождественно истинной, может быть приведена к СКНФ.

Переход от КНФ к СКНФ

- Если в простой дизъюнкции не хватает какой-то переменной (например, Z), то добавляем в неё выражение $Z\bar{Z} = 0$
- $F = (X + Y)(X + \bar{Y} + \bar{Z}) = (X + Y + (Z\bar{Z}))(X + \bar{Y} + \bar{Z}) = (X + Y + Z)(X + Y + \bar{Z})(X + \bar{Y} + \bar{Z})$

Правила построения СКНФ по таблице ИСТИННОСТИ

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние 0.

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Правила построения СКНФ по таблице ИСТИННОСТИ

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние 0.
- Далее рассматриваются только те значения переменных, при которых функция равна 0. Если значение переменной равно 1, то она записывается с инверсией. Если значение переменной равно 0, то без инверсии.

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Правила построения СКНФ по таблице ИСТИННОСТИ

- Составить таблицу истинности логической функции
- Отметим те комбинации, которые приводят логическую функцию в состояние 0.
- Далее рассматриваются только те значения переменных, при которых функция равна 0. Если значение переменной равно 1, то она записывается с инверсией. Если значение переменной равно 0, то без инверсии.
- $F = (A + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)$

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1