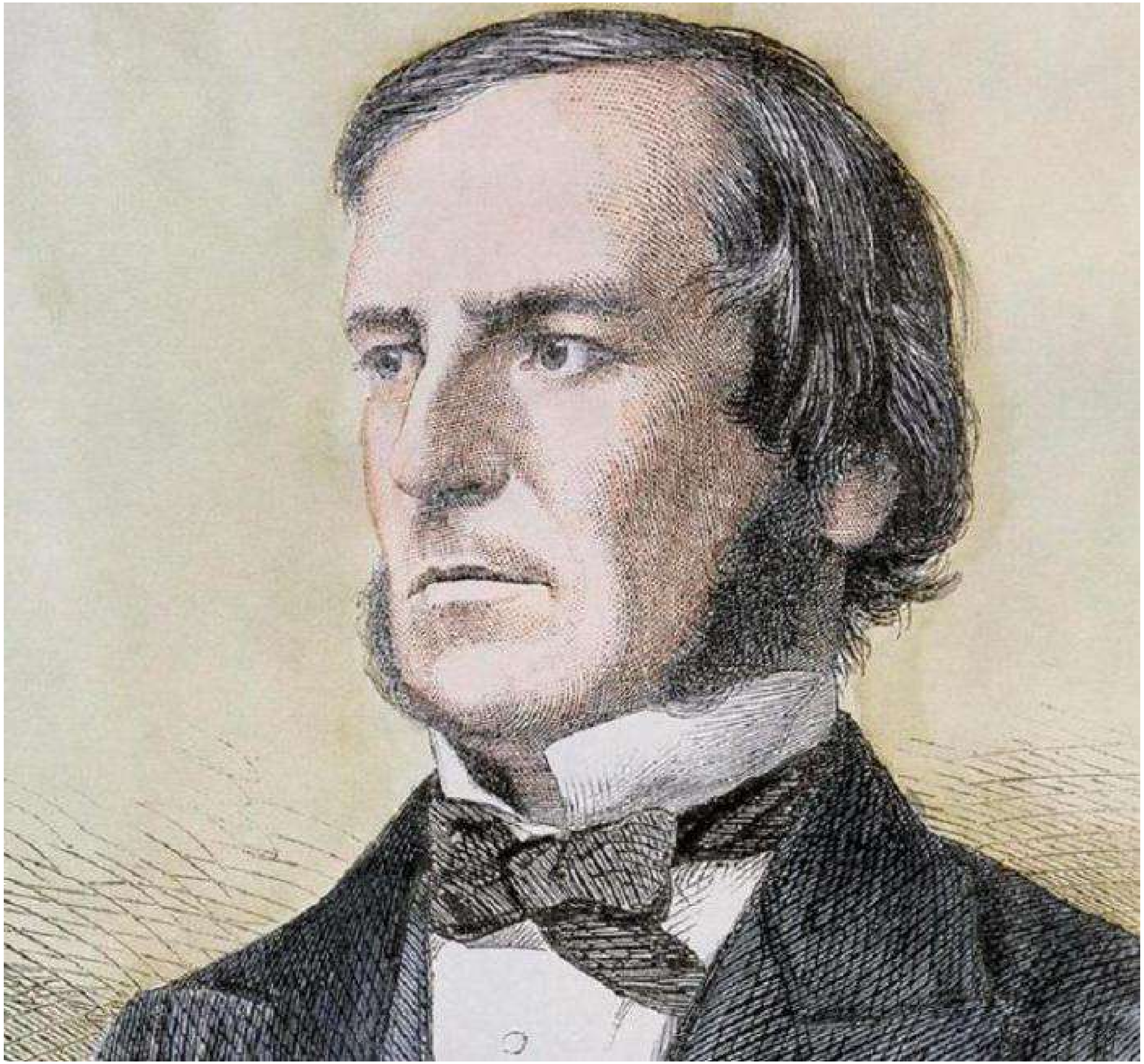
Дискретная математика Введение в булеву алгебру. ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ

Сергей Михайлович Авдошин savdoshin@hse.ru

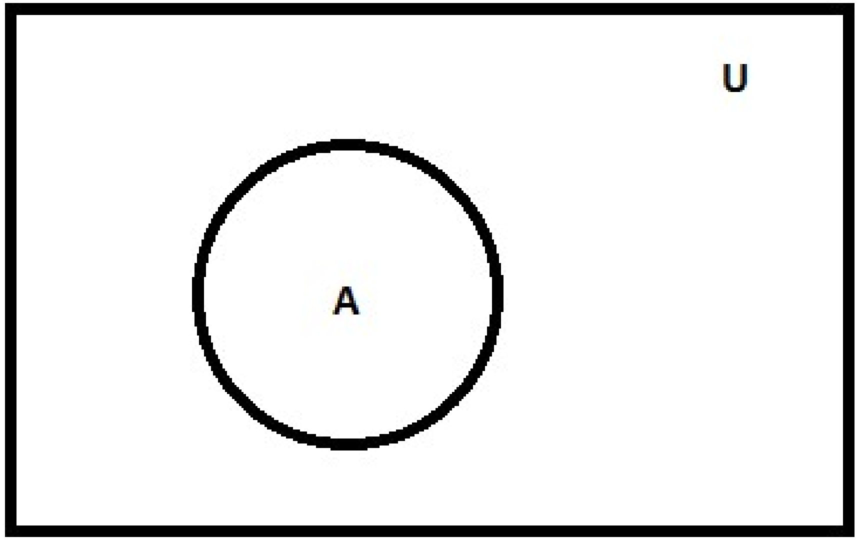
Екатерина Николаевна Береснева eberesneva@hse.ru

Мария Константиновна Горденко mgordenko@hse.ru



Универсум

- Пусть U есть некоторое множество.
- A есть подмножество множества U, если всякий элемент из множества A принадлежит множеству U.
- Множество U универсально (универсум), если все рассматриваемые множества есть подмножества множества U.



Основные определения

- Пусть A, B, C есть произвольные подмножества множества U;
- a, b, c есть элементы множества U.
- $\emptyset$ - пустое множество, то есть множество без элементов.

Основные неопределяемые отношения в теории множества:

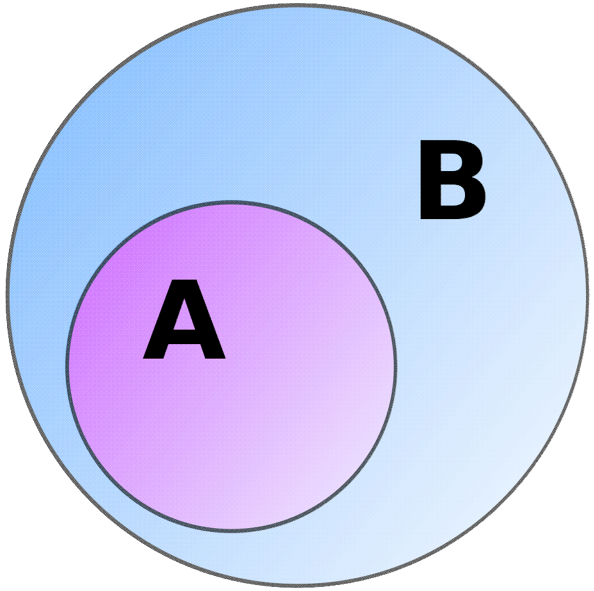
- $a = b$, элементы a и b равны (совпадают);
- $a \neq b$, элементы a и b *не* равны (не совпадают);
- $a \in A$, элемент a принадлежит множеству A.
- $a \notin A$, элемент a *не* принадлежит множеству A.

Обозначения

- $\Leftrightarrow, \leftrightarrow, \equiv$ – если и только если, эквивалентность
- $\&$, $\wedge$, $\cdot$ – конъюнкция
- $\vee, +$ – дизъюнкция
- $\neg$ – отрицание
- $\Rightarrow, \rightarrow$ – импликация
- $\nRightarrow$, $\nrightarrow$ – коимпликация
- $\bigoplus$ – сложение по модулю 2
- $|$ – штрих Шеффера
- $\circ, \downarrow$ – функция Вебба, стрелка Пирса
- $\forall$ – квантор общности
- $\exists$ – квантор существования
- $\exists!$ – квантор существования единственного элемента

Множества и подмножества

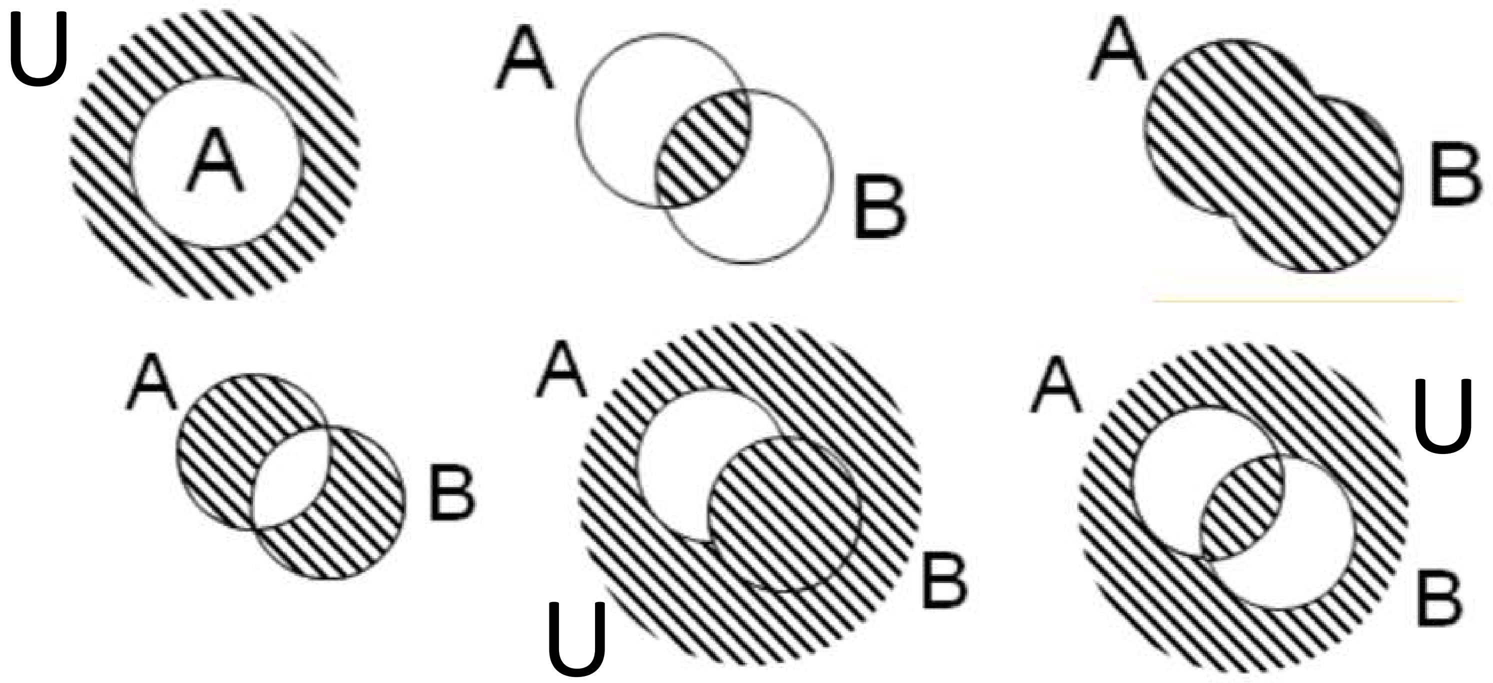
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a\,(a \in A \to a \in B)$ – отношение включения множеств, при этом множество *A* называется подмножеством множества *B*, а множество *B* называется надмножеством множества *A*;
- $A \supseteq B \Leftrightarrow B \subseteq A$
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \,\&\, A \supseteq B$, отношение равенства множеств
- $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \,\&\, A \neq B$, отношение строгого включения множеств
- $A \supset B \Leftrightarrow B \subset A$



Булеан множества

- $\mathrm{P}(A)$ или 2^A – множество всех подмножеств , множества *A*;
- $A = \{a, b, c\}$
- $\mathrm{P}(A) = 2^A = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\},\ A\}$
- $\emptyset$ и A – несобственные (тривиальные) подмножества множества *A*
- $\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}$ – собственные подмножества множества *A*

$A \cup B = \{x \in U: x \in A \vee x \in B\}$, объединение множеств A и B;
$A \cap B = \{x \in U: x \in A \;\&\; x \in B\}$, пересечение множеств A и B;
$A - B = \{x \in U: x \in A \;\&\; x \notin B\}$, разность множеств A и B;
$\overline{A} = U - A$, дополнение к множеству A;
$A \div B = (A \cup B) - (A \cap B)$, симметрическая разность множеств A и B;
$A \times B = \{(a, b): a \in A \;\&\; b \in B\}$, декартово произведение множеств A и B.



Под натуральным числом понимаем количество элементов конечного множества. Количество элементов пустого множества есть 0.

Распространим декартово произведение на несколько сомножителей:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Определим декартову степень множества

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A \ (n \text{ раз}), A^0 = \varnothing.$$

Множества $\varnothing$ и A называются несобственными (тривиальными) подмножествами множества A. Если $A \subset B$ & $A \neq \varnothing$, то A есть собственное подмножество множества B.

Иногда пишут $A \cdot B$ или AB вместо $A \cap B$.

Примем следующие обозначения.
Множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.
Множество положительных натуральных чисел $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, ...\}$.
Множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.
Множество $\mathbb{Z}_n = E_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.
Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}: m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+\}$.
Множество вещественных чисел $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
Множество неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.
Множество комплексных чисел $\mathbb{C} = \{x + i\,y: x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, здесь $i^2 = -1$.

Задачи

- Чему равна мощность множества $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$?
- Какие утверждения истины ?

1) $\{1,2,3\} \in \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$
2) $\{2\} \subset \{1,2,3,4,5\}$
3) $\varnothing = \{\varnothing\}$
4) $\{2\} \in \{1,2,3,4,5\}$
5) $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$

Функция

Пусть A и B есть два множества.

Функция f: $A \to B$ есть **отображение**, которое каждому элементу x из A ставит в соответствие некоторый элемент y из B.

Это обстоятельство записывается как $y = f(x)$.

Булевы функции от одной переменной

$\boldsymbol{A}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{A}$	$\bar{\boldsymbol{A}}$	$\mathbf{1}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Булевы функции от двух переменных

A	B	0	$A \cdot B$	$A \nRightarrow B$	A	$A \nLeftarrow B$	B	$A \oplus B$	$A + B$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

A	B	$A \circ B$	$A \equiv B$	$\bar{B}$	$A \Leftarrow B$	$\bar{A}$	$A \Rightarrow B$	$A \vert B$	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Количество булевых функций от N переменных

$$2^{2^N}$$

Какие высказывания синтаксически верны?

1. $A \wedge \neg\neg B$
2. $\overline{A \vee B \neg \oplus A} \oplus A$
3. $\bar{A} \,\&\, B \Rightarrow \Rightarrow B$
4. $\bar{A}BC \Rightarrow B$
5. $\overline{A + \overline{A} + \overline{B + \overline{C \to A} \to B} \to C}$
6. $\bar{\bar{\bar{B}}} \vee \bar{A}$
7. $K \bigwedge \bigwedge L$
8. $\bar{\bar{\bar{\bar{B}}}}$

Различные формы задания булевых функций

- Описать (задать, определить, представить) функциональное соответствие множества двоичных наборов аргументов (области определения) и множества значений булевой функции можно различным образом.
- Мы рассмотрим следующие формы представления булевых функций:
  - Табличная
  - Цифровая
  - Геометрическая
  - Карты Карно
  - Алгебраическая
  - Бинарная диаграмма решений

Табличная форма задания булевой функции

- $y = F(X, Y, Z)$

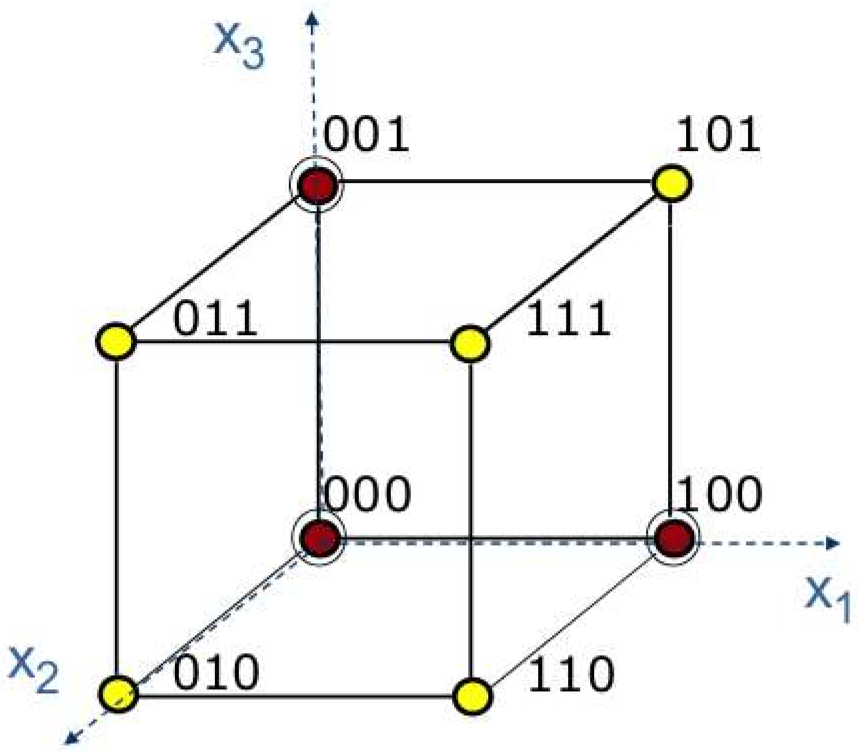
X	Y	Z	F(X, Y, Z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Цифровая форма задания булевой функции

- $\sum(0,1,4,5,7)$
- $\prod(2,3,6)$

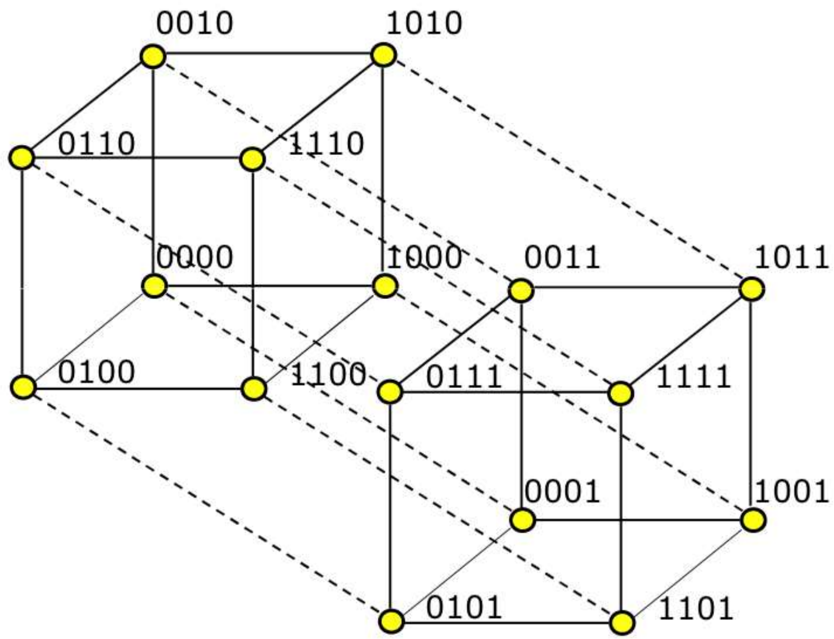
X	Y	Z	F(X, Y, Z)	Десятичный эквивалент
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	2
0	1	1	0	3
1	0	0	1	4
1	0	1	1	5
1	1	0	0	6
1	1	1	1	7

Геометрическая форма задания

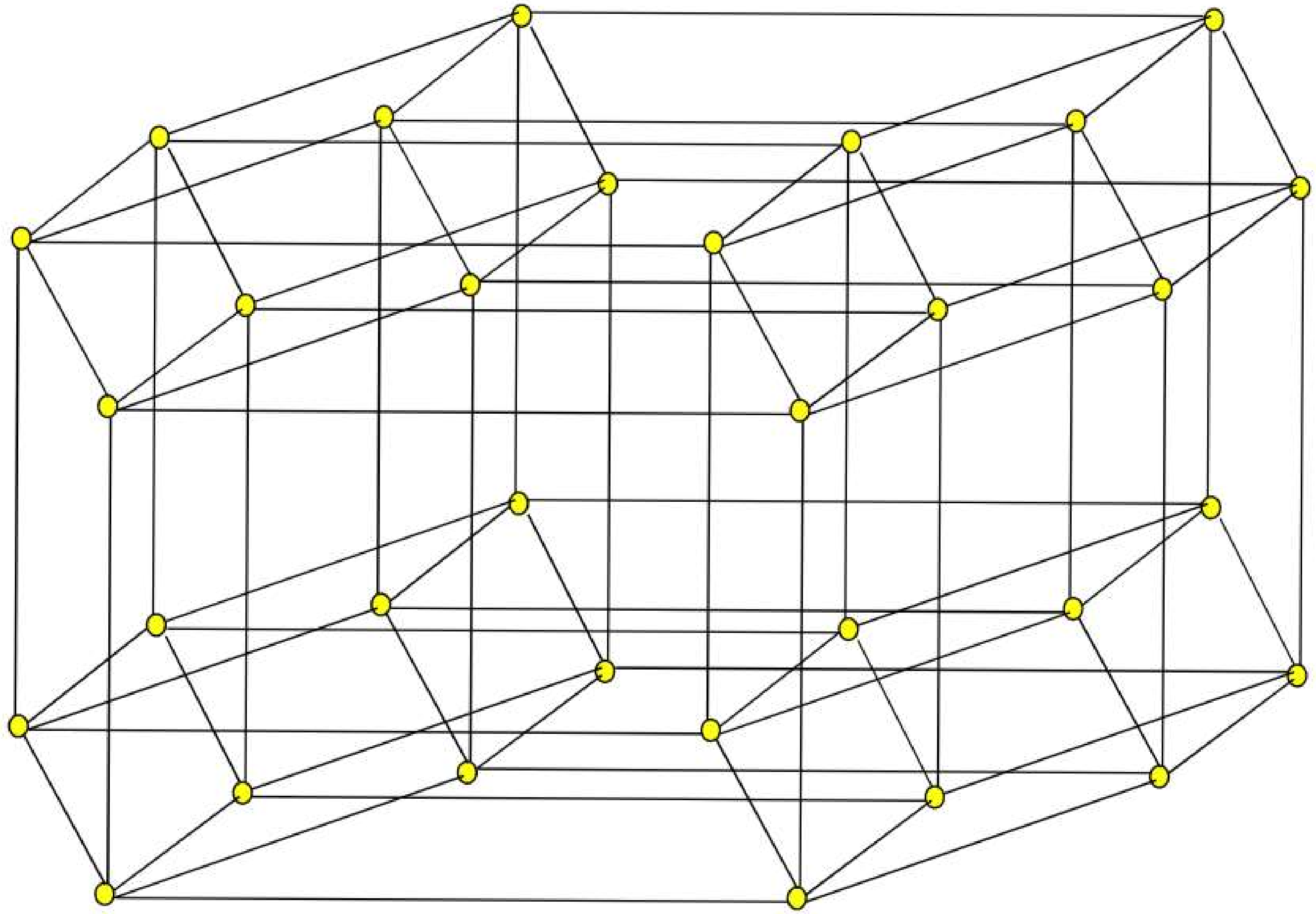


X	Y	Z	F(X, Y, Z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

4-мерное булево пространство



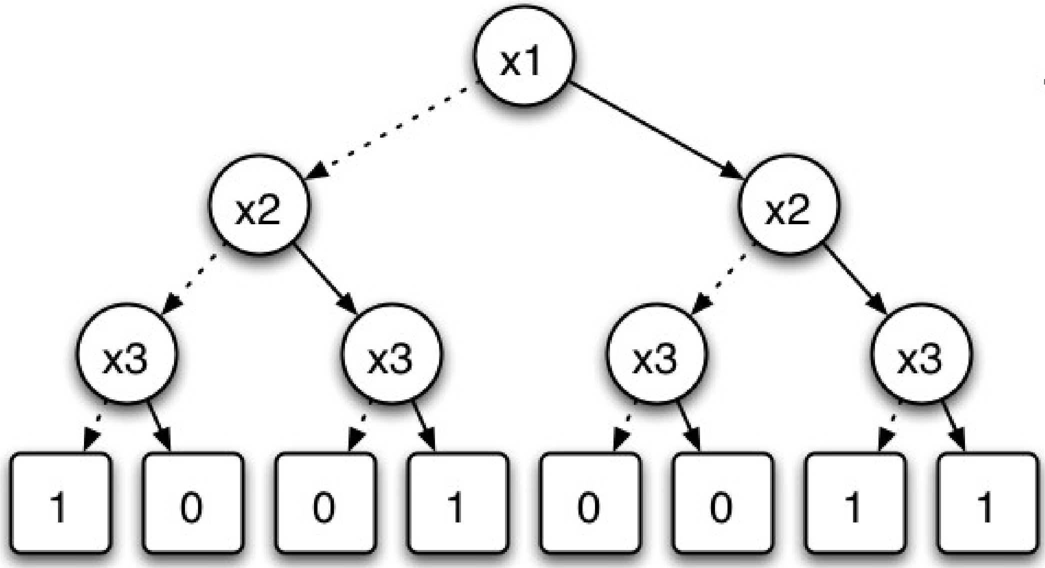
5-мерное булево пространство



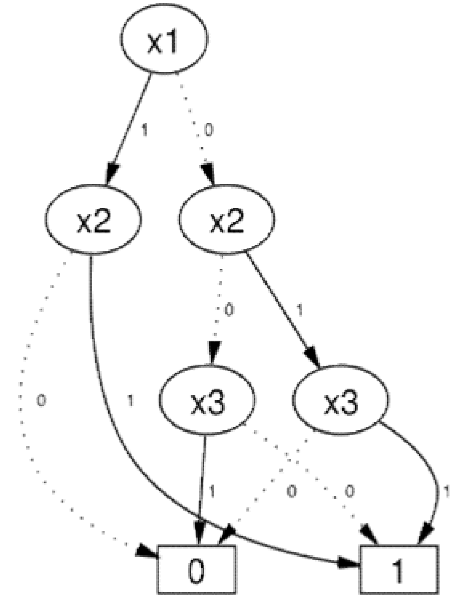
Алгебраическая форма записи

- $\overline{A + B} + C$

Бинарная диаграмма решений



x1	x2	x3	*f*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



Как построить таблицу истинности для сложного высказывания $\bar{A} \to B \wedge C \oplus B$?

A	B	C	$\bar{A}$	$B \wedge C$	$B \wedge C \oplus B$	$\bar{A} \to B \wedge C \oplus B$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1