

计算机算法设计与分析

朱双贺 2010E8009070012

第八次作业：邮局位置问题

在一条街上有 n 所房子， $H[i]$ ($1 \leq i \leq n$) 是第 i 所房子离街道起点处的距离（以米为单位），假定 $H[1] < H[2] < \dots < H[n]$ 。目前该街道上还没有一所邮局，先计划新建若干所邮局，使得每所房子到最近的邮局距离在 100 米以内。试设计一个时间复杂度为 $O(n)$ 的算法，计算出新建邮局的位置，即每所邮局离街道起点处的距离 $P[j]$ ($1 \leq j \leq m$)，同时确保新建邮局个数 m 最小。

解：

采用贪心方法：

1. 在距离 $first = H[1]$ 100 米的地方 $P[1]$ 建立第一所邮局
2. 找出距离 $P[1]$ 大于 100 米的第一所房子 $H[i]$ ，另 $first = H[i]$ ，重复上述过程，直到最后一所房子为止
3. $H[1], H[2], \dots, H[j]$ 即为所求

算法如下：

Algorithm Find_Location($H[], n$)

```
1. i=1;
2. j=0;
3. while i<=n
4.     j++;
5.     left=H[i];
6.     P[j]=left+100;
7.     while H[i]<P[j]+100 && i<=n then do i++;
8. end
```

证明算法的正确性:

1. 上述算法实际上将 n 所房子从第一所开始分成了 j 组，用 $(\text{left}[k], \text{right}[k])$ 表示，每组第一所房子到最后一所房子的距离不超过两百米，到下一组及上一组的第一所房子的距离 d 大于200米，每组内有且仅有一个邮局。即 $P[k] = \text{left}[k] + 100$ ， $\text{left}[k+1] > \text{left}[k] + 200$ ，且在 $d > 200$ 的范围内只有一个邮局
2. 假设上述算法所得解不是最优解，即还存在其他解使得新建邮局数少于 j 个。假设最优解新建邮局的个数为 $j-1$ 个，即可以撤掉有上述算法求出的最后一个邮局，然后重新改变前面 $j-1$ 个邮局的位置使其为最优解。由于撤掉了第 j 邮局，而第 $j-1$ 个邮局距离第 j 组的第一所房子的距离大于100米，为满足要求，必须将第 $j-1$ 所邮局向后至少移动到距离第 j 组的第一所房子的距离小于100米的位置，这样第 $j-1$ 组的第一所房子100米内就没有邮局了，需要再移动第 $j-2$ 所邮局，如此前面的 $j-3$ 所邮局都要向后移动，到第1所邮局移动时，第1所邮局的新的位置与第一所房子之间的距离将大于100米，这与要求不符。

所以假设不成立。

所以上述算法所得解是最优解，或属于最优解的结合。