Afin d’étudier le modèle du graphe de diffusion, nous avons pris l’initiative de créer un outil pour résoudre numériquement les équations de ce système. Plus particulièrement, il s’agit d’un système d’équations différentielles linéaires d’ordre 1. Par conséquent nous avons choisi d’employer un schéma d’Euler explicite pour la résolution approchée. Celui-ci donne des résultats très satisfaisants avec un pas de temps raisonnable, tout en étant peu coûteux en temps de calcul. Les résultats obtenus servent de support aux analyses ultérieures.

Reprenons le système d’équations (machin) introduit à la partie (truc). En posant U = (ux) e Mn1(R), G = (Gxy) e Mn(R) et C = diag(Cx) e Mn(R) l’équation différentielle se réécrit dU/dt = A\*U où A = 1/C \* (G - diag(sum(G)). (ajouter des étapes de calcul ?) On se donne un vecteur U0 de températures initiales pour le système. Notre but est alors de résoudre de façon approchée le problème de Cauchy U(0) = U0, dU/dt=A\*U. Pour un temps initial ti, un temps final tf et un pas de temps dt on cherche une solution Uxk sur l’intervalle de temps discrétisé {ti, ti+dt, ti+2dt, ..., tf}. Une solution est fournie par le schéma d’Euler explicite U(k+1) = Uk + dt\*A\*Uk.

Théorème : (ce théorème est un cas particulier d’un résultat de cours de Modélisation en analyse) Le schéma d’Euler explicite est convergent au sens suivant : si Û(t) est la solution exacte et Uk la solution approchée, max k ||Û(tk) – Uk|| -> 0 quand dt -> 0

L’implémentation de ce schéma est faite en Python 3.12 à l’aide de numpy et de matplotlib pour les tracés. Les détails d’implémentation sont disponibles à l’annexe (truc). Nous avons également créé un outil d’animation des graphes, qui ne peut malheureusement pas être illustré dans ce rapport.

Voici l’exemple d’un graphe à deux sommets de capacité 1, reliés par une arête de conductance 1, et initialisés aux températures 0 et 10.

[fig graphe] [fig temp]

Conditions aux limites : En l’état actuel, le modèle ne permet de représenter que des systèmes isolés en régime de diffusion pure. Cepedant la modélisation des interactions entre un bâtiment, le milieu extérieur, et les sources de chaleur internes nécessite de pouvoir étudier des régimes forcés et des conditions aux limites plus complexes.

Il faut donc modifier la simulation pour en tenir compte. On définit alors une condition aux limites comme une fonction qui prend en arguments un sommet et l’état du graphe à un instant donné, et renvoie la température de ce sommet à l’instant suivant. Un sommet qui se voit attribuer une condition aux limites cesse d’obéir à l’équation (machin). Le pseudocode suivant détaille le fonctionnement de la simulation

tant que t < t\_fin

nouvelles températures <- anciennes températures + dt \* A \* (anciennes températures)

pour chaque sommet du graphe

si le sommet a une condition aux limites (CL)

nouvelle température du sommet <- CL(état du graphe, numéro du sommet)

Voici les principaux types de conditions aux limites pertinents pour notre étude :

Température constante : la température du sommet reste fixée à une constante, indépendamment du comportement des sommets voisins. C’est un thermostat au sens thermodynamique.

Température fonction du temps : la température du sommet suit une certaine fonction du temps, indépendamment du comportement des sommets voisins.

Chauffage/refroidissement : le sommet continue d’échanger de la chaleur normalement avec ses voisins. Il reçoit une puissance thermique supplémentaire P(t) “venant de l’extérieur” qui se traduit par une variation de température dt\*P(t)/C à chaque pas de simulation. Des valeurs positives pour P correspondent à un chauffage, des valeurs négatives à un refroidissement.

Chauffage/refroidissement thermostaté : le sommet continue d’échanger de la chaleur normalement avec ses voisins. Il reçoit une puissance thermique supplémentaire P (constante) si sa température U franchit un seuil S, et reste isolé sinon. Ce cas correspond à un chauffage avec thermostat comme on en trouve dans la plupart des immeubles. NB : Si P>0, le chauffage s’active dès que U<S. Si au contraire P<0, le refroidissement s’active dès que U>S.

Etude du graphe ligne