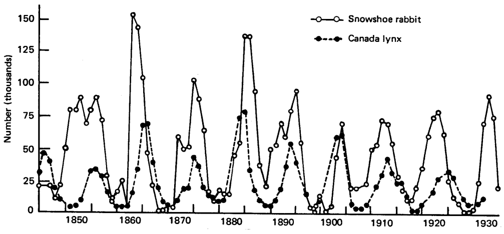
Projektarbeit: Das Räuber-Beute-Modell

pray-predator-model



Tobias Möhle

211204256

28.01.2013

Einleitung

Das Räuber-Beute-Modell ist ein Modell aus der Ökologie, welches das kleinste ökologische System beschreibt: zwei Populationen; eine Räuber- und eine Beutepopulation. Wie sich diese Populationen gegenseitig beeinflussen, bzw. wie sich dieser Einfluss beschreiben lässt, soll im Folgenden betrachtet werden. Eine Betrachtungsweise ist ein deterministisches Modell, welches durch die Lotka-Volterra-Gleichungen[1]

$$\dot{x} = x(k_1 A - k_{12} y) = 0$$

$$\dot{y} = y(k_{21} x - k_2) = 0$$

beschrieben wird. Hierbei soll x die Beute- und y die Räuberpopulation darstellen. Die Parameter haben die Bedeutung

- $k_1 A$ ist eine Größe, welche die Fertilität der Beutetiere beschreibt. Diese wird einerseits durch populationsspezifische Größen (Häufigkeit der Geburten, Anzahl der Kinder je Geburt etc.), welche in k_1 zusammengefasst sind, und andererseits durch die vorhandene Nahrungsmenge, symbolisiert mit A, beschrieben.
- k_2 beschreibt die Mortalität der Räuber
- k_{21} und k_{12} sind Größen, welche die Wechselwirkung der Populationen beschreibt, also die Anzahl der gerissenen Beutetiere auf der einen Seite und die Fertilität der Räuber auf der anderen Seite (welche von deren Nahrungsgrundlage, den Beutetieren, abhängt).

Die Lotka-Volterra-Gleichungen sind nicht allgemein lösbar, jedoch kann man an ihnen Betrachtungen zum Langzeit- und Stabilitätsverhalten durchführen.
Eine analoge Beschreibung wird durch die drei Reaktionsgleichungen

$$x + A \xrightarrow{k_1} 2x$$

$$y \xrightarrow[k_{21}]{k_{12}} 0$$

$$x + y \xrightarrow{k_2} 2y$$

gezeigt. Ihr liegt, wie allen chemischen Prozessen, ein stochastisches Modell zu Grunde, welches mit Hilfe entsprechender Methoden analysiert werden kann. Eine Betrachtung durch die Master-Gleichung und eine Analyse mit Hilfe des Gillespie-Algorithmus' werden im folgenden vorgestellt.

Deterministische Betrachtung

Die deterministische Betrachtung des Räuber-Beute-Systems folgt, wie bereits oben erwähnt, mit den gekoppelten Differenzialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{x} = x(k_1 A - k_{12} y) = 0$$

$$\dot{y} = y(k_{21} x - k_2) = 0$$

Da diese analytisch nicht lösbar sind, werden hier lediglich die stationären Lösungen, das heißt Lösungen, bei welchen sich das System nicht mehr verändert und entsprechend Langzeitlösungen sind, betrachtet.
Im stationären Fall gilt entsprechend: $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Hieraus ergeben sich zwei stabile Punkte: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = \frac{k_2}{k_{21}}$, $y_2 = \frac{k_1 A}{k_{12}}$.
Nun gilt es, zu untersuchen, wie stabil das System gegenüber kleinen Schwankungen an diesen Punkten ist. Dies lässt sich mit der Gleichung $\delta \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J\delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wobei J die Jakobimatrix ist:

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Gleichungen (am 25.01.2013)

$$J = \begin{pmatrix} k_1 A - k_{12} y & -k_{12} x \\ k_{21} y & k_{21} x - k_2 \end{pmatrix}.$$

untersuchen.
Für x_1, y_1 gilt also: $\begin{vmatrix} k_1 A - \lambda & 0 \\ 0 & -k_2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - k_1 A)(\lambda + k_2)$.
Da alle Koeffizienten positiv sind, ist das System an dem Punkt, wo beide Populationen ausgestorben sind, instabil. An dieser Lösung wird deutlich, dass in dem Modell nicht nur Geburt, sondern auch Zuwanderung aus anderen Populationen zu einer Zunahme der Anzahl der Tiere möglich ist.
Für x_2, y_2 gilt: $\begin{vmatrix} -\lambda & -k_{12} \frac{k_2}{k_2 1} \\ k_{21} \frac{k_1 A}{k_1 2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k_1 k_2 A$.
Dieses System hat lediglich die imaginären Lösungen $\lambda = \pm i\sqrt{k_2 k_1 A}$. Rein imagiäre Lösungen beschreiben weder stabile noch instabile Systeme sondern ozillierende Lösungen (analog zu Schwingungsgleichungen in der Mechanik).
Es lässt sich zeigen, dass, analog dem mathematischen Pendel oder anderen oszillierenden Systemen hier eine Erhaltungsgröße analog der Energie bzw. Hamilton-Funktion eingeführt werden kann[2]. Diese lautet:

$$H = k_{21} x - k_2 \ln(x) + k_{12} - k_1 A \ln(y) = const$$

Betrachtung mit der Master-Gleichung

Das betrachtete System kann mit zwei unterschiedlichen Master-Gleichungen beschrieben werden: zum einen durch die diskrete Master-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n,m,t) = k_1\, A(n-1)P(n-1,m,t) + k_{21}(n+1)(m-1)P(n+1,m-1,t) + k_2(m+1)P(n,m+1,t) - \left[k_1 A n + k_{21} n m + k_2 m\right] P(n,m,t)$$

bei welcher n die Größe der Beute-Population und m die der Räuber-Population ist. Diese lässt sich nun in eine kontinuierliche Gleichung überführen, indem man von einer maximalien Gesamtpopulation V ausgeht, welche nicht überschritten werden kann. Für große Populationen ($lim_{V\to\infty}$) wird das System kontinuierlich mit den Größen $x = \frac{n}{V}$, $y = \frac{m}{V}$. Nun gilt die Master-Gleichung: Dies ist eine diskrete Master-Gleichung, welche auf Ein-Schritt-Prozesse beschränkt ist. Außerdem ist hier bereits die Vereinfachung gemacht, dass die Konstanten k_{21} und $k_1 2$ als gleich angenommen werden.
Da jedoch zunächst beliebig viele Tiere in beiden Populationen vorkommen können, stellt diese Gleichung ein System von unendlich vielen gekoppelten Differentialgleichungen dar.

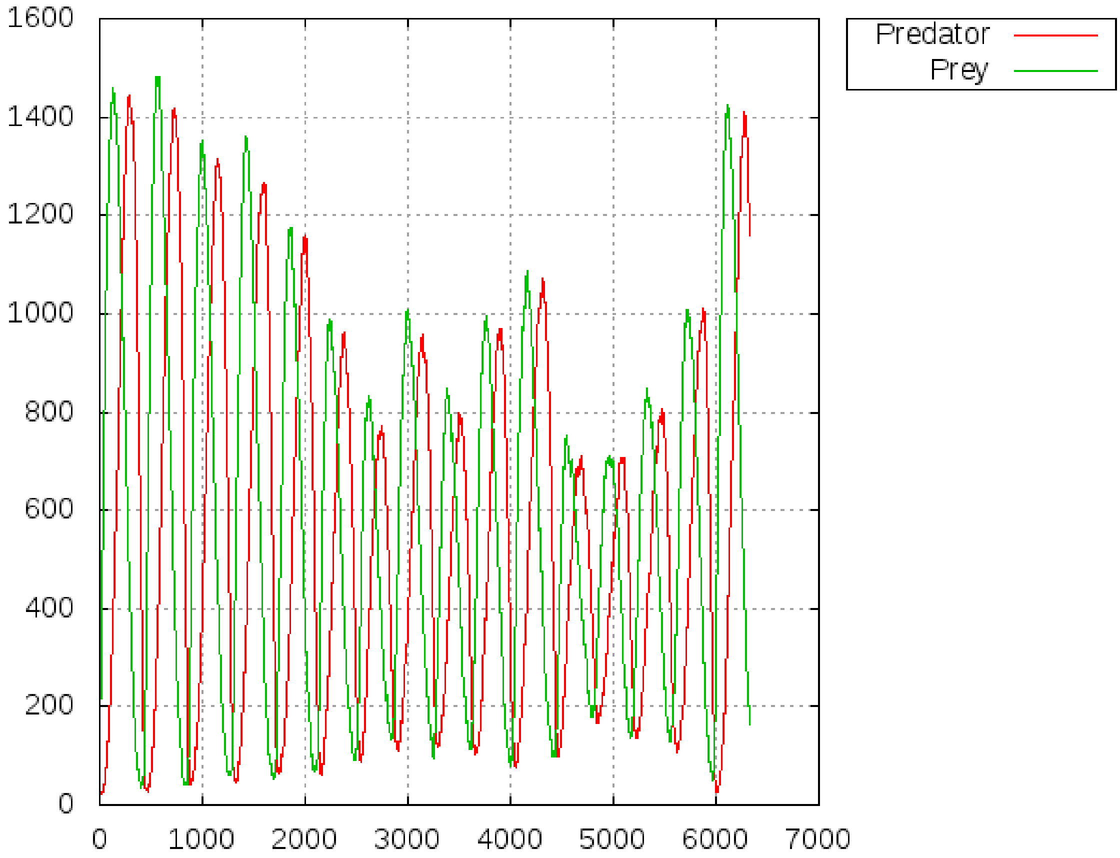
Berechnungen mit dem Gillespie-Algorithmus

Der Gillespie-Algorithmus untersucht stochastische Prozesse mit einem Ansatz: Es werden eine Anzahl von Durchläufen des Prozesses mit Hilfe von Zufallsfunktionen berechnet und anschließend über diese gemittelt. Wurden genügend Durchläufe gemacht und sind die verwendeten Zufallsalgorithmen gut, so entsprechen die mit dem Gillespie-Algorithmus gewonnenen Ergebnisse denen der deterministischen Lösung. Das genaue Vorgehen beim Gillespie-Algorithmus lautet wie folgt[3]:

1. Initialisiere zunächst alle Startwerte (Anfangsbedingungen, Konstanten etc).
2. Generiere zwei Zufallszahlen τ, ρ
3. Nun wird das System erweitert: Aus den oben generierten Zufallszahlen wird ein Zeitschritt ermittelt, bei welchem der Prozess durchgeführt wird, und aus der zweiten Zahl wird bestimmt, welcher der mögleichen Prozesse durchgeführt wird. Nun müssen die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten an die veränderten Zahlen angepasst werden.

[2] R. Mahnke „Nichtlineare Physik in Aufgaben “Verlag: B.G. Teubner, Stuttgart 1994; S. 125
[3] http://www.co-nan.eu/pdf/df2.pdf (28.01.2013)

Abbildung 1: Einzeltrajektorie des Räuber-Beute-Modells (mit Gillespie-Algorithmus berechnet)



4. Ist die zu Beginn festgelegte Simulationsdauer noch nicht erreicht, beginne wieder bei Schritt 2.

Mit Hilfe dieses Algorithmus' lässt sich das Räuber-Beute-Modell nun sehr gut beschreiben. In einer Implementierung des Algorithmus' ergaben sich folgende Abläufe:

Hier exemplarisch zunächst eine Einzeltrajektorie eines möglichen Prozesses: