Содержание

1 Уравнение Лапласа и Пуассона.

При решении задач на нахождение напряжённости электростатического поля, в некоторых случаях удобно свести задачу к решению дифференциального уравнения специального вида для потенциала этого поля.

Подставим в уравнение:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1}$$

формулу, выражающую напряжённость электростатического поля через потенциал:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi. \tag{2}$$

С учётом того, что в декартовой системе координат:

$$\operatorname{div}\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi,$$

где Δ – оператор Лапласа, представляющий собой сумму 2-х производных по координатам, уравнение (1) примет вид:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Уравнение (3) называется уравнением Пуассона. В тех областях пространства где объёмная плотность зарядов $\rho = 0$, оно превращается в уравнение Лапласа[1]

$$\Delta\varphi = 0. \tag{4}$$

После нахождения потенциала φ, как решения уравнения (3) или (4) можно рассчитать напряжённость электростатического поля по формуле (2).

[1]Уравнение Пуассона и Лапласа относятся к уравнениям эллиптического типа

2 Граничные и начальные условия.

В общем виде уравнения (3) и (4) имеют бесконечное множество решений, т.к. в процессе интегрирования появятся константы, при любых значениях которых решение удовлетворяет исходному уравнению. Например общим решением для двумерного уравнения Лапласа вида:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \tag{5}$$

является функция:

$$\varphi(x,y)=F_1(y-ix)+F_2(y+ix), \tag{6}$$

где F_1 и F_2 произвольные функции комплексных аргументов $y-ix$ и $y+ix$, соответственно.

Для нахождения единственного решения уравнений (3) или (4) (если они существуют) необходимо к исходным уравнениям добавить дополнительные уравнения (дифференциальные или алгебраические), описывающие искомые функции на границах рассматриваемой области в любой момент времени и внутри области в начальный момент времени. Данные уравнения называются соответственно граничными и начальными условиями задачи.

2.1 Граничные условия.

Пусть нам необходимо решить задачу электростатики на нахождение потенциала в определённой области S двухмерного пространства, описываемую уравнением (5). В этом случае, для нахождения единственного решения необходимо задать граничные условия (**гу**), т.е. задать искомую функцию на границе L области S. В нашем случае область S представляет собой поверхность в двумерном пространстве, ограниченную замкнутым контуром L.

По виду уравнений, задающих **гу**, различают граничные условия 1-го рада (задача Дирихле), 2-го рода (задача Неймана) и 3-го рода (смешанная задача). Для решения нашей задачи ограничимся условиями 1-го рода, которые в общем виде можно записать как:

$$\varphi(x,y) = g(x,y), \quad x,y \in L, \tag{7}$$

где $g(x,y)$ – некоторая заданная на границе функция. В задаче о распределении электростатического поля **гу** задают потенциал φ на границе L области S.

3 Дискретизация дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей.

Зачастую аналитическое решение уравнений в частных производных возможно лишь, для очень ограниченного круга задач, в этих случаях прибегают к численному интегрированию. На примере уравнений (3) и (4) рассмотрим численное решение методом конечных разностей.

Суть метода конечных разностей сводится к дискретизации дифференциальных уравнений – представлении частных производных приближёнными выражениями, называемыми конечными разностями. Это позволяет совершить переход от дифференциальных уравнений к алгебраическим.

Для реализации метода конечных разностей, рассматриваемая область решения S покрывается координатной сеткой, а искомая непрерывная функция заменяется сеточной функцией:

$$\varphi(x,y) \approx \varphi(x_i,y_j) = \varphi_{ij}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: *Любой непрерывной функции $\varphi(x,y)$, заданной в области S, можно поставить в соответствие сеточную функцию $\varphi(x_i,y_j)$ (сокращённо φ_{ij}), заданную на сетке*
$\Theta = \{(x_i,y_j)|i = 0,1,2,...,n, j = 0,1,2,...,m, x_0 = 0, x_n = \alpha_1, y_0 = 0, y_m = \alpha_2\}$.

Производная функции непрерывного аргумента x в точке x_0 определяется, как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю:

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0} = \lim_{(x-x_0)\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{8}$$

Исключая из (8) придел, производную функции непрерывного аргумента $f(x)$ можно приближённо заменить разностным выражением, заданным для соответствующей сеточной функции $f(x_i)$:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x_i}, \tag{9}$$

в случае равномерной сетки $\Delta x_i = const = x_1 - x_0$. Аппроксимацию (9) легко распространить на двумерный случай:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{f_{i,j+1}-f_{i,j}}{\Delta y}.$$

Производные второго порядка аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\Delta x^2},\\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\Delta y^2}.\end{aligned} \tag{10}$$

3.1 Решение двумерного уравнения Лапласа методом конечных разностей (3 балла)

Построим алгоритм решения уравнения (5) методом конечных разностей для конкретной краевой задачи.

Зададим на отрезке $[x_{min} = 0, x_{max} = 10]$ равномерную координатную сетку с шагом Δx:

$$X = \{x_i | i = 1,2,...,n\}, \tag{11}$$

на отрезке $[y_{min} = 0, y_{max} = 10]$ равномерную координатную сетку с шагом Δy:

$$Y = \{y_j | j = 1,2,...,m\}. \tag{12}$$

Массивы заданные разбиениями (11) и (12), определяют на прямоугольной области двухмерную равномерную сетку.

Граничные условия 1-го рода для рассматриваемой задачи представляются в виде:

$$\varphi(x_1 = 0, y) = g_1(y) = y, \tag{13}$$

$$\varphi(x_n = 10, y) = g_2(y) = y + 10, \tag{14}$$

$$\varphi(x, y_1 = 0) = g_3(x) = x, \tag{15}$$

$$\varphi(x, y_m = 10) = g_4(x) = x + 10. \tag{16}$$

Производя дискретизацию граничных условий (13) - (16) на координатной сетке, заданной массивами (11) и (12) методом конечных разностей, получим:

$$\varphi_{1,j} = y_j, \tag{17}$$

$$\varphi_{n,j} = y_j + 10, \tag{18}$$

$$\varphi_{i,1} = x_i, \tag{19}$$

$$\varphi_{i,m} = x_i + 10, \tag{20}$$

где $\varphi_{1,j}, \varphi_{n,j}, \varphi_{i,1}, \varphi_{i,m}$ – значения функции $\varphi(x, y)$ в точках $(x_1,y_j), (x_n,y_j), (x_i,y_1), (x_i,y_m)$ соответственно.

Проводя дискретизацию для внутренних точек сетки уравнения

(5), получим:

$$\frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0,$$
$$i = 2..n-1, j = 2..m-1. \tag{21}$$

В результате дискретизации получаем систему линейных алгебраических уравнений размерности $m \cdot n$, содержащую $(n-2)\cdot(m-2)$ уравнения вида (21) для внутренних точек области и $2n + 2(m-2)$ уравнения вида (17) - (20) для граничных точек.

Т.к. задача свелась к решению системы алгебраических уравнений вида:

$$AF = B, \tag{22}$$

где A – матрица системы ($\dim A = m \cdot n \times m \cdot n$), F – вектор столбец, содержащий неизвестные ($\dim F = m \cdot n \times 1$), B – вектор столбец свободных членов ($\dim B = m \cdot n \times 1$), необходимо определить коэффициенты матрицы системы a_{kl} и столбца свободных членов b_k. Эти коэффициенты определяются путём сравнения системы уравнений вида (17) - (21) с системой (22), записанной в виде:

$$a_{kl} F_l = b_k, \tag{23}$$

по индексу l предполагается суммирование. Т.о. двумерную функцию $\varphi_{i,j}$ необходимо записать в виде одномерного массива (вектора столбца) F, найти его компоненты как:

$$F = A^{-1} B, \tag{24}$$

преобразовать обратно в двумерный массив φ_{ij} и построить его график в виде двумерной поверхности на сетке заданной массивами (11), (12).

3.2 Решение двумерного уравнения Пуассона методом конечных разностей (5 баллов)

Двумерное уравнение Пуассона имеет вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{\sigma(x,y)}{\varepsilon_0}, \tag{25}$$

где $\sigma(x,y)$ – поверхностная плотность зарядов.

Алгоритм решения уравнения (25) методом конечных разностей строится по аналогии с алгоритмом для решения уравнения Лапласа, отличие состоит в том, что система уравнений для внутренних точек, рассматриваемой области будет иметь вид:

$$\frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -\frac{\sigma_{i,j}}{\varepsilon_0}, \quad i = 2..n-1, j = 2..m-1. \tag{26}$$

В столбец свободных членов вместо 0, во внутренней области будут входить $\frac{\sigma_{i,j}}{\varepsilon_0}$ представленные в виде одномерного массива.

4 Результат.

Для реализации алгоритма решения уравнения Лапласа необходимо написать функцию на вход которой, в качестве параметров подаются n и m – количество элементов массива X и Y. Все остальные параметры берутся из изложенного алгоритма.

Для реализации алгоритма решения уравнения Пуассона необходимо написать функцию на вход которой, в качестве параметров подаются:

1. x_1 – начальная координата области решений по оси OX;
2. x_n – конечная координата области решений по оси OX;
3. y_1 – начальная координата области решений по оси OY;

4. y_m – конечная координата области решений по оси OY;

5. n – число точек координатной сетки по оси OX;

6. m – число точек координатной сетки по оси OY;

7. σ – функция в правой части уравнения Пуассона, например $\sigma = \exp(-x^2 - y^2)$;

8. $g1$ – функция, соответствующая потенциалу на левой границе;

9. $g2$ – функция, соответствующая потенциалу на правой границе;

10. $g3$ – функция, соответствующая потенциалу на нижней границе;

11. $g4$ – функция, соответствующая потенциалу на верхней границе;

На выходе функций, как для решения уравнения Лапласа, так и Пуассона, должны быть следующие результаты:

1. X – массив координатной сетки по оси OX;

2. Y – массив координатной сетки по оси OY;

3. φ – двумерный массив, содержащий значение потенциала в узлах координатной сетки размерности $n \times m$;

4. Графическое представление решения. Пример (рис. 1)

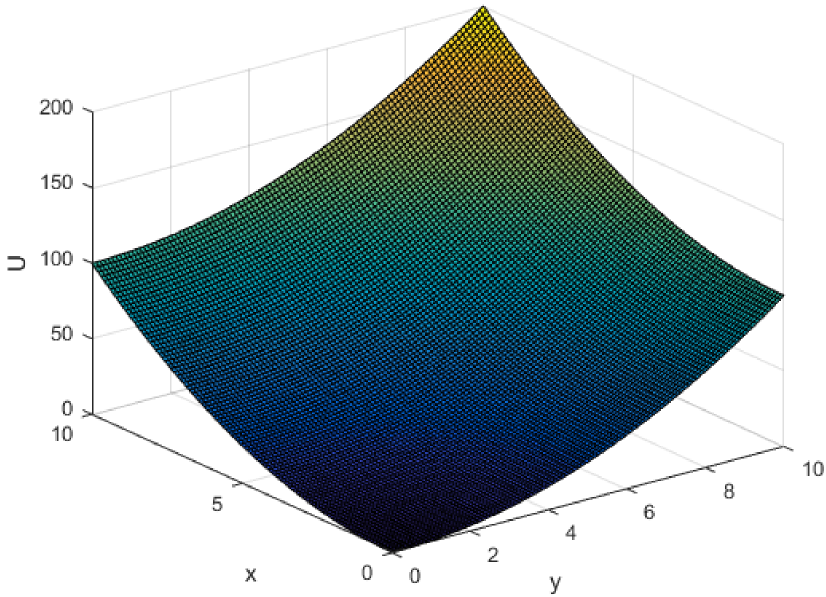

Рис. 1. Решение уравнения Пуассона для потенциала