Точная верхняя и нижняя границы. Ограниченные последовательности.

pudgeandmath

09.10.22

1 Точная верхняя и нижняя границы.

$$\sup X := \min\{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X(x \leq c)\},$$
$$\inf X := \max\{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X(c \leq x)\}.$$

Верхней гранью непустого множества X называется число b, удовлетворяющее условиям:

- $\forall x \in X \to x \leq b$
- $\forall b' < b \to \exists x \in X : x > b'$
  $(\forall \varepsilon > 0 \to \exists x \in X : x > b - \varepsilon)$

Нижней гранью непустого множества X называется число b, удовлетворяющее условиям:

- $\forall x \in X \to b \leq x$
- $\forall b' > b \to \exists x \in X : x < b'$
  $(\forall \varepsilon > 0 \to \exists x \in X : x < b + \varepsilon)$

2 Ограниченные последовательности.

- Последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, если существует такое число M, что $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \leq M$
- Последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, если существует такое число M, что $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \geq M$
- Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена снизу и сверху, то есть существует такое число $M \geq 0$, что $\forall n \in \mathbb{N}\colon |x_n| \leq M$

Для доказательства ограниченности последовательностей полезны следующие неравенства:

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$
$$|x - y| \geq ||x| - |y||$$