# Предел последовательности

pudgeandmath

11.10.22

### Понятие предела последовательности

**Определение 1** *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– произвольная посл-ть;* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *и* $a \in \mathbb{R}$. $a$ *есть предел посл-ти* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *при* $n \to \infty$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$), *если* $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon |a_n - a\ | < \varepsilon$.

- Если предел существует, то посл-ть называется сходящейся.
- Посл-ть называется расходящейся, если она не имеет предела (конечного).
- Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ означает, что все члены посл-ти $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$, находятся в $\varepsilon$-окрестности числа $a$.

### Свойства предела последовательности

1. Постоянная посл-ть сходится:

$$(\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n = a) \implies \left(\lim_{n\to\infty} a_n = a\right)$$

2. Единственность предела:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = a'\right) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} = a''\right) \implies (a' = a'')$$

3. Ограниченность сходящейся последовательности:

$$\left(\lim_{n\to\infty} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a \in \mathbb{R}\right) \implies (\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} - \text{ограничена})$$

### Предельный переход и отношение неравенства

1. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произв. посл-ти:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = a\right) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} b_n = b \wedge (a < b) \implies (\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N\colon a_n < b_n)\right)$$

2. Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – произвольные посл-ти:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = a\right) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} b_n = b\right) \wedge (\exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0\colon a_n \geq b_n) \implies (a \geq b)$$

**Бесконечно малая и бесконечно большая посл-ти**

**Определение 2** *Говорят, что посл-ть* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *является бесконечно малой посл-тью, если* $\alpha \to 0$ *при* $n \to \infty$ ($\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$).

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n \geq \mathbb{N} : |\alpha_n < \varepsilon|$$