Demi-groupes, monoïdes et groupes

Soit un *demi-groupe* $(\mathbb{E}, +)$, c'est-à-dire que

- $\mathbb{E}$ est stable par $+$
- La loi $+$ est associative

On dira de plus que $\mathbb{E}$ est un *monoïde* si il existe $e \in \mathbb{E}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{E}, xe = ex = x$$

On dira enfin que $\mathbb{E}$ est un *groupe* si il existe $\cdot^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{E}, xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

Question 0 Donner un groupe, puis un monoïde qui n'est pas un groupe, et enfin un demi-groupe qui n'est pas un monoïde.

Si $\mathbb{E}$ est un monoïde, soit $\sim \in \left(\mathbb{E}^2\right)^2$ telle que $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$.

Question 1 Que dire de $\mathbb{E}^2/\sim$?

Soit Σ un ensemble fini. On appelle $\Sigma^\star$ le plus petit monoïde contenant Σ et tel que tous les éléments de $\Sigma^\star$ admettent une unique composition comme somme d'éléments de Σ. On note son neutre ε.

Question 2 Justifier que Σ^* est l'ensemble des mots finis sur Σ

On pose $\mathcal{A} := \{x \mapsto xw, w \in \Sigma^\star\}$, que l'on munit de la loi de composition usuelle des fonctions.

Question 3 Justifier que $\Sigma^\star$ et $\mathcal{A}$ sont en isomorphes comme monoïdes.

Associativité ?

Dans cette partie, $(S, +)$ est un demi-groupe.

Soit $n \in \mathbb{N}$ puis $a \in S^n$ un $n -$uplet.

Question 4 Donner le langage des expressions calculant $\sum a$. Est-il rationnel ?

Ind: Par exemple, pour $n = 3$, $\mathcal{L} = \{a_1 + (a_2 + a_3), (a_1 + a_2) + a_3\}$.

Question 5 Mettre en bijection $\mathcal{L}$ et l'ensemble des arbres binaires à n noeuds. Dénombrer $\mathcal{L}$.

On considère maintenant posséder une machine capable d'exécuter $\omega \in \mathbb{N}^\star$ opérations "+" simultanées.

Question 6 Donner un mauvais ordre de calcul de $\sum a$, puis un choix plus raisonnable.

Retouches

Soient $\mathcal{L}$ un langage rationnel et $M \in \Sigma^\star$ un mot de longueur $n \in \mathbb{N}^\star$. On appelle une *requête* un couple $1 \leq i \leq j \leq n$ et sa *taille* est $r := j - i$.

On *satisfait* une requête en renvoyant si $M[i : j] \in \mathcal{L}$. On note $q \in \mathbb{N}$ le nombre d'états d'un automate qui reconnaît $\mathcal{L}$.

Question 7 Donner un algorithme satisfaisant une requête.

Moyennant un précalcul,

Question 8 Donnez un algorithme efficace satisfaisant une requête en temps $\mathcal{O}(1)$ *Ind:* On pourra introduire un ensemble de fonctions similaire à $\mathcal{A}$ agissant sur l'automate

Une *modification* est une opération de la forme $M[i] \leftarrow a$ avec $a \in \Sigma$.

Question 9 Modifier l'algorithme précédent pour permettre des modifications en temps $\mathcal{O}(q \log r)$.