



Soit  $\Sigma$  un alphabet possédant au moins 2 lettres. Pour  $L$  un langage sur  $\Sigma$  et  $k > 1$  on pose


$$L^{(k)} = \{w^k \mid w \in L\} \text{ et } L^{1/k} = \{w \mid w^k \in L\}$$

 **Question 0** Calculer  $L^{1/2}$  pour  $L$  reconnu par l'expression régulière  $ab(\Sigma\Sigma)^*$


 **Question 1** Pour  $k, l \geq 1$ , montrer que


- $(L^{(k)})^{(l)} = L^{(kl)}$
- $(L^{1/k})^{1/l} = L^{1/kl}$
- $(L^{1/k})^{(k)} \subseteq L$


 **Question 2** Donner un langage rationnel  $L$  tel que  $\forall k \geq 2$ ,  $L^{(k)}$  n'est pas rationnel


 **Question 3** Montrer que pour  $L$  reconnu par un automate  $A = (\Sigma, Q, q_i, \delta, F)$ , on a


$$w \in L^{1/2} \Leftrightarrow \exists q \in Q, \begin{cases} \delta(q_i, w) = q \\ \delta(q, w) \in F \end{cases}$$

 **Question 4** Montrer que si  $L$  rationnel, alors  $L^{1/2}$  aussi.

 **Question 5** Montrer que soit  $k \in \mathbb{N}$ , si  $L$  est rationnel, alors  $L^{1/k}$  aussi.

 **Question 6** Si  $L$  est rationnel, est-ce forcément aussi le cas de  $\bigcup_{k \geq 1} L^{1/k}$  ?

 **Question 7** Donner un algorithme qui détermine si un langage rationnel  $L$  respecte  $L = (L^{1/2})^{(2)}$

 **Question 8** Montrer que si  $L$  est rationnel, alors  $\text{Root}(L) = \{w \in \Sigma^* : w^{|w|} \in L\}$  l'est aussi.