

Dans cet énoncé, un *stable* désigne un sous-graphe complètement déconnecté. Un stable est *localement maximal* si tous les autres sommets sont connectés à celui-ci.

Théorème de Caro-Wei

Soit $G = (S, A)$ un graphe quelconque.



Question 0 Donner un algorithme qui construit un stable localement maximal.



Question 1 Modifier l'algorithme précédent pour qu'il donne un stable localement maximal aléatoire choisi uniformément.

Pour v un sommet du graphe, note A_v la variable aléatoire indicatrice de l'événement " v fait partie du stable".



Question 2 Donner l'espérance de A_v pour $v \in S$.

On pose $d : S \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à un sommet associe son degré.



Question 3 Montrer que G admet un stable H de taille

$$|H| = \sum_{v \in S} \frac{1}{1 + d(v)}$$

Théorème de Tùran

Soit $G = (S, A)$ un graphe n'admettant pas K_{r+1} comme sous-graphe. On pose $n := |S|$ et $p := |A|$.



Question 4 Montrer que $p \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right)$



Question 5 Montrer que si $\frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \in \mathbb{N}$, alors la majoration précédente est optimale.