

Dans cet énoncé, un *stable* désigne un sous-graphe complètement déconnecté. Un stable est *localement maximal* si tous les autres sommets sont connectés à celui-ci.

### **Théorème de Caro-Wei**

Soit  $G = (S, A)$  un graphe quelconque.



**Question 0** Donner un algorithme qui construit un stable localement maximal.



**Question 1** Modifier l'algorithme précédent pour qu'il donne un stable localement maximal aléatoire choisi uniformément.

Pour  $v$  un sommet du graphe, note  $A_v$  la variable aléatoire indicatrice de l'événement " $v$  fait partie du stable".



**Question 2** Donner l'espérance de  $A_v$  pour  $v \in S$ .

On pose  $d : S \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction qui à un sommet associe son degré.



**Question 3** Montrer que  $G$  admet un stable  $H$  de taille

$$|H| = \sum_{v \in S} \frac{1}{1 + d(v)}$$

### **Théorème de Tùran**

Soit  $G = (S, A)$  un graphe n'admettant pas  $K_{r+1}$  comme sous-graphe. On pose  $n := |S|$  et  $p := |A|$ .



**Question 4** Montrer que  $p \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right)$



**Question 5** Montrer que si  $\frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \in \mathbb{N}$ , alors la majoration précédente est optimale.