Le lemme

Soit X une variable aléatoire discrète intégrable sur l'univers Ω.

Question 0 Montrer qu'il existe $x \geq \mathbb{E}X$ tel que $x \in X(\Omega)$.

Un peu de chauffe

Soit $G = (S, A)$ avec $n := |S|$, $m := |A|$ et $m \geq 4n$. On note $\mathrm{cr}\left(\overline{G}\right)$ le nombre de croisements d'une représentation planaire $\overline{G}$ de G. Alors on définit $\mathrm{cr}(G) := \min \mathrm{cr}\left(\overline{G}\right)$.

D'après *la formule d'Euler*, pour tout graphe H, $\mathrm{cr}(H) \geq m(H) - 3n(H)$.

On note $S^{\dagger} \subset S$ une partie aléatoire de S où chaque sommet est choisi avec une probabilité p. On note ensuite $H := G[S]$ et $\overline{H} := \overline{G}[S]$.

Question 1 Montrer que $\mathrm{cr}\left(\overline{H}\right) \geq m(H) - 3n(H)$.

Question 2 Déterminer $\mathbb{E}[m(H)]$ et $\mathbb{E}[n(H)]$.

Question 3 Exprimer $\mathbb{E}\left[\mathrm{cr}\left(\overline{H}\right)\right]$ en fonction de $\mathrm{cr}(G)$.

Question 4 Démontrer

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}$$

Une question d'originalité

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ telle que tout $k \in [\![1, n]\!]$ apparaît exactement n fois dans M.

Question 5 Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne contenant au moins $\sqrt{n}$ valeurs distinctes.

De la géométrie

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^{10}$. On dira que $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^{10}$ *couvre* $\boldsymbol{a}$ si

$$\boldsymbol{a} \subset \bigcup_{x \in \boldsymbol{p}} \overline{\mathcal{B}}(x, 1)$$

Question 6 Montrer qu'il existe $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^{10}$ couvrant $\boldsymbol{a}$.

Ind: $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0.907$

Du rab

Soit $k \in \mathbb{N}$.

La propriété à laquelle on s'intéresse ici est la *propriété de distance*

$$\mathcal{D}(a_1 ... a_k) := \left(\forall i, j, |a_i - a_j| \leq 2\right) \vee \left(\forall i, j, |a_i - a_j| \geq 1\right)$$

On pose enfin $\mathcal{P}(n) := \forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{C}), |A| \Longrightarrow (\exists \{a_1 ... a_k\} \subset A, \mathcal{D}(a_1 ... a_k))$

Question 7 Montrer $\forall n, \mathcal{P}(n)$.