

Soit Σ un alphabet possédant au moins 2 lettres. Pour L un langage sur Σ et $k > 1$ on pose

$$L^{(k)} = \{w^k \mid w \in L\} \text{ et } L^{1/k} = \{w \mid w^k \in L\}$$

1 **Question 0** Calculer $L^{1/2}$ pour L reconnu par l'expression régulière $ab(\Sigma\Sigma)^*$

2 **Question 1** Pour $k, l \geq 1$, montrer que

- $(L^{(k)})^{(l)} = L^{(kl)}$
- $(L^{1/k})^{1/l} = L^{1/kl}$
- $(L^{1/k})^{(k)} \subseteq L$

1 **Question 2** Donner un langage rationnel L tel que $\forall k \geq 2$, $L^{(k)}$ n'est pas rationnel

1 **Question 3** Montrer que pour L reconnu par un automate $A = (\Sigma, Q, q_i, \delta, F)$, on a

$$w \in L^{1/2} \Leftrightarrow \exists q \in Q, \begin{cases} \delta(q_i, w) = q \\ \delta(q, w) \in F \end{cases}$$

2 **Question 4** Montrer que si L rationnel, alors $L^{1/2}$ aussi.

3 **Question 5** Montrer que soit $k \in \mathbb{N}$, si L est rationnel, alors $L^{1/k}$ aussi.

1 **Question 6** Si L est rationnel, est-ce forcément aussi le cas de $\bigcup_{k \geq 1} L^{1/k}$?

4 **Question 7** Donner un algorithme qui détermine si un langage rationnel L respecte $L = (L^{1/2})^{(2)}$

4 **Question 8** Montrer que si L est rationnel, alors $\text{Root}(L) = \{w \in \Sigma^* : w^{|w|} \in L\}$ l'est aussi.