REQUIN

recueil de **qu**estions d'**in**formatique

Sommaire

Chapitre I. Algorithmique 3
Chapitre II. Arbres & Graphes 5
Chapitre III. Langages formels 7
Chapitre IV. Théorie des jeux 9
Chapitre V. Calculabilité 11
Chapitre VI. Logique 13
Chapitre VII. Langages fonctionnels 15
Chapitre VIII. Mathématiques pour l'informatique 17
Problème VIII.1: Un peu de théorie 18
VIII.1.a Demi-groupes, monoïdes et groupes 18
VIII.1.b Associativité ? 18
VIII.1.c Retouches 18

Chapitre I. Algorithmique

c'est si vide ici…

Chapitre II. Arbres & Graphes

c'est si vide ici…

Chapitre III. Langages formels

c'est si vide ici…

Chapitre IV. Théorie des jeux

c'est si vide ici…

Chapitre V. Calculabilité

c'est si vide ici…

Chapitre VI. Logique

c'est si vide ici...

Chapitre VII. Langages fonctionnels

c'est si vide ici…

Chapitre VIII. Mathématiques pour l'informatique

Problème VIII.1: Un peu de théorie

VIII.1.a Demi-groupes, monoïdes et groupes

Soit un *demi-groupe* $(\mathbb{E}, +)$, c'est-à-dire que

- $\mathbb{E}$ est stable par $+$
- La loi $+$ est associative

On dira de plus que $\mathbb{E}$ est un *monoïde* si il existe $e \in \mathbb{E}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{E}, xe = ex = x$$

On dira enfin que $\mathbb{E}$ est un *groupe* si il existe $\cdot^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{E}, xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

0. *Donner un groupe, puis un monïde qui n'est pas un groupe, et enfin un demi-groupe qui n'est pas un monoïde.* ☆☆☆☆☆

Si $\mathbb{E}$ est un monoïde, soit $\sim \in \left(\mathbb{E}^2\right)^2$ telle que $(a, b)\sim(c, d) \iff a + d = b + c$.

1. *Que dire de* $\mathbb{E}^2/\sim$ *?* ★☆☆☆☆

Soit Σ un ensemble fini. On appelle $\Sigma^\star$ le plus petit monoïde contenant Σ et tel que

$$\forall u, v, w, x \in \Sigma^\star, (u, v) = (w, x) \iff uv = wx$$

On note son neutre ε.

2. *Justifier que* $\Sigma^\star$ *est l'ensemble des mots finis sur* Σ ☆☆☆☆☆

On pose $\mathcal{A} := \{x \mapsto xw, w \in \Sigma^\star\}$, que l'on munit de la loi de composition usuelle des fonctions.

3. *Justifier que* $\Sigma^\star$ *et* $\mathcal{A}$ *sont en isomorphes comme monoïdes.* ★☆☆☆☆

VIII.1.b Associativité ?

Dans cette partie, $(S, +)$ est un demi-groupe.

Soit $n \in \mathbb{N}$ puis $a \in S^n$ un n −uplet.

4. *Donner le langage des expressions calculant* $\sum a$*. Est-il rationnel ?* ★☆☆☆☆

   Par exemple, pour $n = 3$, $\mathcal{L} = \{a_1 + (a_2 + a_3), (a_1 + a_2) + a_3\}$.

5. *Mettre en bijection* $\mathcal{L}$ *et l'ensemble des arbres binaires à* n *noeuds. Dénombrer* $\mathcal{L}$*.* ★★☆☆☆

On considère maintenant posséder une machine capable d'exécuter $\omega \in \mathbb{N}^\star$ opérations "+" simultanées.

6. *Donner un mauvais ordre de calcul de* $\sum a$*, puis un choix plus raisonnable.* ★☆☆☆☆

VIII.1.c Retouches

Soient $\mathcal{L}$ un langage rationnel et $M \in \Sigma^\star$ un mot de longueur $n \in \mathbb{N}^\star$. On appelle une *requête* un couple $1 \leq i \leq j \leq n$ et sa *taille* est $r := j - i$. On *satisfait* une requête en renvoyant si $M[i : j] \in \mathcal{L}$. On note $q \in \mathbb{N}$ le nombre d'états d'un automate qui reconnaît $\mathcal{L}$.

7. *Donner un algorithme satisfaisant une requête.* ☆☆☆☆☆

Moyennant un précalcul,

8. *Donnez un algorithme efficace satisfaisant une requête en temps* $\mathcal{O}(q \log r)$ ★★★☆☆

Une *modification* est une opération de la forme $M[i] \leftarrow a$ avec $a \in \Sigma$.

9. *Modifier l'algorithme précédent pour permettre des modifications en temps* $\mathcal{O}(q \log r)$. ★★★☆☆