Dans cet énoncé, un *stable* désigne un sous-graphe complètement déconnecté. Un stable est *localement maximal* si tous les autres sommets sont connectés à celui-ci.

Théorème de Caro-Wei
Soit $G = (S, A)$ un graphe quelconque.

Question 0 Donner un algorithme qui construit un stable localement maximal.

Question 1 Modifier l'algorithme précédent pour qu'il donne un stable localement maximal aléatoire choisi uniformément.

Pour v un sommet du graphe, note A_v la variable aléatoire indicatrice de l'événement "v fait partie du stable".

Question 2 Donner l'espérance de A_v pour $v \in S$.

On pose $d : S \to \mathbb{N}$ la fonction qui à un sommet associe son degré.

Question 3 Montrer que G admet un stable H de taille

$$|H| = \sum_{v \in S} \frac{1}{1 + d(v)}$$

.

Soit d_m le degré moyen d'un sommet de G.

Question 4 En déduire que G admet un stable de taille

$$|S\frac{|}{1 + d_m}$$

.

Théorème de Tùran
Soit $G = (S, A)$ un graphe n'admettant pas K_{r+1} comme sous-graphe. On pose $n := |S|$ et $p := |A|$.

Question 5 Montrer que $p \leq \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$

Question 6 Montrer que si $\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right) \in \mathbb{N}$, alors la majoration précédente est optimale.