REQUIN

REcueil de **QU**estions d'**IN**formatique

Niveaux de difficulté

- 🐥 : Question d'introduction servant à s'approprier l'énoncé
- 🐈 : Question classique ou pouvant être résolue en déroulant une méthode simple
- 🐙 : Question nécessitant un raisonnement plus complet ou une astuce, mais à la portée de tous
- 🦈 : Question difficile du sujet demandant une réflexion posée ou une bonne intuition
- 🐉 : Question très difficile pour les plus courageux qui n'ont pas peur de réfléchir longtemps
- ☣️ : Question ouverte à la connaissance des autrices

Sommaire

Chapitre I. Algorithmique

c'est si vide ici…

Chapitre II. Arbres & Graphes

Problème II.1: Mots univers

On dit qu'un mot $w \in \Sigma^*$ est n-univers si tout les mots de Σ^n sont des facteurs de w. On s'intéresse à créer les plus petits mots n-univers.

Question 0 Montrer qu'un mot n-univers sur un alphabet à k lettres à au moins une longueur de $k^n + n - 1$

Soit $G = (V, E)$ un graphe **orienté**, on définit $L(G)$ le *graphe ligne* de G par le graphe orienté (E, E') avec E' l'ensemble des arêtes de la forme $((x, y), (y, z))$ pour $(x, y), (y, z) \in E$.

Question 1 Donner le graphe ligne du cycle à 4 éléments et d'un arbre binaire parfait de hauteur 2.

On construit alors la famille des graphes de Bruijn $(\mathrm{DB}(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\mathrm{DB}(1) = \left(\{0, 1\}, \{0, 1\}^2\right)$ et $\mathrm{DB}(n + 1) = L(\mathrm{DB}(n))$.

Question 2 Construire $\mathrm{DB}(2)$

Question 3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, chaque sommet de $\mathrm{DB}(n)$ à autant d'arêtes sortantes que entrantes. Combien de sommets et d'arêtes $\mathrm{DB}(n)$ possède t'il ?

Question 4 Montrer que pour tout graphe orienté fortement connexe tel que pour tout sommet le degrée entrant est le même que le degrée sortant, il existe un cycle eulérien (un cycle passant par toutes les arêtes du graphe).

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{DB}(n)$ possède un cycle eulérien.

Question 5 En voyant les sommets de $\mathrm{DB}(n)$ comme des mots dans $\{0, 1\}^{n-1}$, et en étiquetant les arêtes par 0 ou 1, montrer qu'il existe un mot n-univers sur l'alphabet $\{0, 1\}$ de taille $2^n + n - 1$

Question 6 Généraliser la question précédente pour des alphabets plus grand.

Problème II.2: Théorème de Tùran

Dans cet énoncé, un *stable* désigne un sous-graphe complètement déconnecté. Un stable est *localement maximal* si tous les autres sommets sont connectés à celui-ci.

I Théorème de Caro-Wei

Soit $G = (S, A)$ un graphe quelconque.

Question 0 Donner un algorithme qui construit un stable localement maximal.

Question 1 Modifier l'algorithme précédent pour qu'il donne un stable localement maximal aléatoire choisi uniformément.

Pour v un sommet du graphe, note A_v la variable aléatoire indicatrice de l'événement "v fait partie du stable".

Question 2 Donner l'espérance de A_v pour $v \in S$.

On pose $d : S \to \mathbb{N}$ la fonction qui à un sommet associe son degré.

Question 3 Montrer que G admet un stable H de taille

$$|H| = \sum_{v \in S} \frac{1}{1 + d(v)}$$

II Théorème de Tùran

Soit $G = (S, A)$ un graphe n'admettant pas K_{r+1} comme sous-graphe. On pose $n := |S|$ et $p := |A|$.

Question 4 Montrer que $p \leq \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$

Question 5 Montrer que si $\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right) \in \mathbb{N}$, alors la majoration précédente est optimale.

Chapitre III. Langages formels

Problème III.1: Language permuté et inclusions

Soit Σ un alphabet. Pour $w \in \Sigma^*$ un mot et $\alpha \in \Sigma$ une lettre, on note $|w|_\alpha$ le nombre d'occurrence de α dans w. Pour L un langage sur Σ, on pose $\sigma(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L, \forall \alpha \in \Sigma, |u|_\alpha = |w|_\alpha\}$ la *permutation* de L.

On dira que L est strictement hors-contexte si L est hors-contexte et n'est pas régulier.

Question 0 Montrer que $L_1 = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier mais qu'il est hors-contexte. Que vaux $\sigma(L_1)$?

Question 1 Donner un langage L tel que L soit strictement hors contexte mais $\sigma(L)$ régulier.

Question 2 Donner un langage L' tel que L' soit régulier mais $\sigma(L')$ strictement hors-contexte.

Question 3 Montrer que si L est tel que $L_1 \subseteq L \subseteq \sigma(L_1)$, alors L n'est pas régulier.

Question 4 Est-ce qu'il existe L' un langage strictement hors-contexte tel que $\sigma(L')$ est strictement hors-contexte et tel qu'il existe L régulier tel que $L' \subseteq L \subseteq \sigma(L')$?

Problème III.2: Language continuables

Soit $\Sigma = \{a, b\}$. On dit que $w \in \Sigma^*$ est *primitif* s'il n'existe pas de mot $u \in \Sigma^*$ et de $p > 1$ tels que $w = u^p$

Un langage L est dit *continuable* si pour tout $u \in \Sigma^*$, il existe un $v \in \Sigma^*$ tel que $uv \in L$

Question 0 Pour chacun des cas suivants donner des exemples de langage sur $\Sigma = \{a, b\}$:
- Un langage infini régulier ne reconnaissant aucun mot primitif
- Un langage infini régulier ne reconnaissant que des mots primitifs
- Un langage infini régulier continuable
- Un langage infini algébrique continuable ne reconnaissant que des mots primitifs

Question 1 Proposer un algorithme pour tester si un mot est primitif en $O\left(|w|^{\frac{3}{2}}\right)$. *C'est possible de le faire en* $O(|w|)$

Question 2 Étant donné un automate A, proposer un algorithme pour déterminer si le langage reconnu par A est continuable.

Question 3 Montrer que tout langage régulier continuable sur $\Sigma = \{a, b\}$ contient une infinité de mots primitifs. Quelle est la condition sur Σ pour que cela soit vrai ?

Question 4 Existe-t'il un langage infini rationnel continuable ne comportant que des mots primitifs?
Indication: Considérer l'ensemble des applications partielles $\{\delta^*(u, \_) : u \in \Sigma^*\}$*, et trouver un bon groupe pour la composition inclut dans cet ensemble.*
δ^* *est définie par* $\delta^*(ua, q) = \delta(a, \delta^*(u, q))$ *et* $\delta^*(\varepsilon, q) = q$ *pour* $(a, u, q) \in \Sigma \times \Sigma^* \times Q$

Problème III.3: Puissance et racine de languages

Soit Σ un alphabet possédant au moins 2 lettres. Pour L un langage sur Σ et $k > 1$ on pose

$$L^{(k)} = \{w^k \mid w \in L\} \text{ et } L^{1/k} = \{w \mid w^k \in L\}$$

🐈 **Question 0** Calculer $L^{1/2}$ pour L reconnu par l'expression régulière $ab(\Sigma\Sigma)^*$

🐙 **Question 1** Pour $k, l \geq 1$, montrer que
- $\left(L^{(k)}\right)^{(l)} = L^{(kl)}$
- $\left(L^{1/k}\right)^{1/l} = L^{1/kl}$
- $\left(L^{1/k}\right)^{(k)} \subseteq L$

🐈 **Question 2** Donner un langage rationnel L tel que $\forall k \geq 2, L^{(k)}$ n'est pas rationnel

🐈 **Question 3** Montrer que pour L reconnu par un automate $A = (\Sigma, Q, q_i, \delta, F)$, on a

$$w \in L^{1/2} \Leftrightarrow \exists q \in Q, \begin{cases} \delta(q_i, w) = q \\ \delta(q, w) \in F \end{cases}$$

🐙 **Question 4** Montrer que si L rationnel, alors $L^{1/2}$ aussi.

🦈 **Question 5** Montrer que soit $k \in \mathbb{N}$, si L est rationnel, alors $L^{1/k}$ aussi.

🐈 **Question 6** Si L est rationnel, est-ce forcément aussi le cas de $\bigcup_{k \geq 1} L^{1/k}$?

🐉 **Question 7** Donner un algorithme qui détermine si un langage rationnel L respecte $L = \left(L^{1/2}\right)^{(2)}$

🐉 **Question 8** Montrer que si L est rationnel, alors $\text{Root}(L) = \left\{w \in \Sigma^* : w^{|w|} \in L\right\}$ l'est aussi.

Chapitre IV. Théorie des jeux

Problème IV.1: Nim à choix

Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$ avec $1 \in A$. On considère un jeu à deux joueurs où $N > 0$ objets sont disposés sur une table, et chaque joueur doit à tour de rôle retirer $t \in A_{>N}$ objets de la table. Le joueur qui retire le dernier objet perd.

On appellera Alice le joueur qui commence et Bob le deuxième joueur.

Question 0 Pour les valeurs de A suivantes, pour quel N Alice possède-t'elle une stratégie gagnante ?
- $A = \mathbb{N}$
- $A = \{1\}$
- $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$
- $A = \{1, 2, ..., p\}$ pour p fixé

Question 1 Si $\max(A) \leq N$, proposer un algorithme qui décide si Alice possède une stratégie gagnante pour un N donné.

Chapitre V. Calculabilité

Problème V.1: Calculabilité et représentation d'ensembles infinis

On se propose ici de créer une structure de donnée permettant de représenter un ensemble infini sous la forme d'une fonction de `'a -> bool` déterministe et qui **termine toujours**. On fixe dans cet exercice X un ensemble quelconque. On défini donc le type suivant en OCaml :

```ml
type 'a set = 'a -> bool;;
```

🐥 **Question 0** Expliciter la bijection entre $\mathcal{P}(X)$ et $\{0, 1\}^X$

🐥 **Question 1** Donner une fonction `make_finite: 'a list -> 'a set` qui à une liste finie renvoie l'ensemble de ses valeurs

🐈 **Question 2** Construire des objets de type `int set` pour représenter les ensembles suivants :
- L'ensemble des nombres pairs
- $\mathbb{P}$, l'ensemble des nombres premiers
- L'image d'une fonction fixée `f` positive et strictement croissante

🐈 **Question 3** Donner le code d'une fonction `union` qui réalise l'union de deux ensembles.

🐙 **Question 4** Donner un ensemble que l'on ne pourra pas représenter par notre structure. Le nombre d'ensembles non représentable est-t'il fini ? Dénombrable ? Indénombrable ?

🦈 **Question 5** Soit `val P: int set set`, montrer qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout `val x: int set`, `P x` ne regarde que les entrées inférieure à N dans `x`. Est-ce vrai avec `val P: (int -> int) set` ?

🐉 **Question 6** Écrire une fonction `val f : (int set set) -> int set` qui à un `int set set` non vide associe un de ces éléments.

Chapitre VI. Logique

Problème VI.1: Compacité

Pour A un ensemble de formules de la logique propositionnelle, on dit qu'une valuation μ *satisfait* A si $\forall F \in A, \mu \vDash F$. On note cela $\mu \vDash A$.

On dit que A est *finement satisfiable* si pour tout $E \subseteq A$ fini, E est satisfiable.

On pose $(X_n)_n$ une suite de variables propositionelle.

Question 0 Les ensembles suivants sont-ils satisfiables ?
- $A_1 = \{X_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg X_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
- $A_2 = \{X_i \vee \neg X_{i+1} : i \in \mathbb{N}\}$
- $A_3 = \{X_i \wedge \neg X_{i+1} : i \in \mathbb{N}\}$

On cherche à montrer le *théorème de compacité*: A est satisfiable si et seulement si A est finement satisfiable

Question 1 Montrer que si A est satisfiable alors il est finement satisfiable.

Question 2 Dans le cas ou l'ensemble des variables propositionnelles de A est dénombrable, démontrer le théorème de compacité. On pourra chercher à construire une valuation par récurrence sur les variables propositionnelles.

On dit qu'un graphe non orienté $G = (S, E)$ avec $E \subseteq S^2$ et S potentiellement infini est N-coloriable s'il existe une fonction $c : S \to [\![1; N]\!]$ tel que $\forall (x, y) \in E, c(x) \neq c(y)$

Question 3 Utiliser le théorème de compacité pour montrer que un graphe infini est N coloriable si et seulement si tout ses sous-graphes fini sont N coloriables.

Chapitre VII. Langages fonctionnels

Chapitre VIII. Mathématiques pour l'informatique

Problème VIII.1: Monoïdes libres, langages et actions

I Demi-groupes, monoïdes et groupes

Soit un *demi-groupe* $(\mathbb{E}, +)$, c'est-à-dire que

- $\mathbb{E}$ est stable par $+$
- La loi $+$ est associative

On dira de plus que $\mathbb{E}$ est un *monoïde* si il existe $e \in \mathbb{E}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{E}, xe = ex = x$$

On dira enfin que $\mathbb{E}$ est un *groupe* si il existe $\cdot^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{E}, xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

Question 0 Donner un groupe, puis un monoïde qui n'est pas un groupe, et enfin un demi-groupe qui n'est pas un monoïde.

Si $\mathbb{E}$ est un monoïde, soit $\sim \in (\mathbb{E}^2)^2$ telle que $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$.

Question 1 Que dire de $\mathbb{E}^2 / \sim$?

Soit Σ un ensemble fini. On appelle $\Sigma^\star$ le plus petit monoïde contenant Σ et tel que tous les éléments de $\Sigma^\star$ admettent une unique composition comme somme d'éléments de Σ. On note son neutre ε.

Question 2 Justifier que Σ^* est l'ensemble des mots finis sur Σ

On pose $\mathcal{A} := \{x \mapsto xw, w \in \Sigma^\star\}$, que l'on munit de la loi de composition usuelle des fonctions.

Question 3 Justifier que $\Sigma^\star$ et $\mathcal{A}$ sont en isomorphes comme monoïdes.

II Associativité ?

Dans cette partie, $(S, +)$ est un demi-groupe.

Soit $n \in \mathbb{N}$ puis $a \in S^n$ un n −uplet.

Question 4 Donner le langage des expressions calculant $\sum a$. Est-il rationnel ?

Ind: Par exemple, pour $n = 3$, $\mathcal{L} = \{a_1 + (a_2 + a_3), (a_1 + a_2) + a_3\}$.

Question 5 Mettre en bijection $\mathcal{L}$ et l'ensemble des arbres binaires à n noeuds. Dénombrer $\mathcal{L}$.

On considère maintenant posséder une machine capable d'exécuter $\omega \in \mathbb{N}^*$ opérations "$+$" simultanées.

Question 6 Donner un mauvais ordre de calcul de $\sum a$, puis un choix plus raisonnable.

III Retouches

Soient $\mathcal{L}$ un langage rationnel et $M \in \Sigma^\star$ un mot de longueur $n \in \mathbb{N}^\star$. On appelle une *requête* un couple $1 \leq i \leq j \leq n$ et sa *taille* est $r := j - i$.

On *satisfait* une requête en renvoyant si $M[i : j] \in \mathcal{L}$. On note $q \in \mathbb{N}$ le nombre d'états d'un automate qui reconnaît $\mathcal{L}$.

Question 7 Donner un algorithme satisfaisant une requête.

Moyennant un précalcul,

🦈 **Question 8** Donnez un algorithme efficace satisfaisant une requête en temps $\mathcal{O}(1)$ *Ind:* On pourra introduire un ensemble de fonctions similaire à $\mathcal{A}$ agissant sur l'automate

Une *modification* est une opération de la forme $M[i] \leftarrow a$ avec $a \in \Sigma$.

🦈 **Question 9** Modifier l'algorithme précédent pour permettre des modifications en temps $\mathcal{O}(q \log r)$.

Problème VIII.2: Méthode probabiliste

I Le lemme

Soit X une variable aléatoire discrète intégrable sur l'univers Ω.

Question 0 Montrer qu'il existe $x \geq \mathbb{E}X$ tel que $x \in X(\Omega)$.

II Un peu de chauffe

Soit $G = (S, A)$ avec $n := |S|$, $m := |A|$ et $m \geq 4n$. On note $\mathrm{cr}\left(\overline{G}\right)$ le nombre de croisements d'une représentation planaire $\overline{G}$ de G. Alors on définit $\mathrm{cr}(G) := \min \mathrm{cr}\left(\overline{G}\right)$.

D'après *la formule d'Euler*, pour tout graphe H, $\mathrm{cr}(H) \geq m(H) - 3n(H)$.

On note $S^\dagger \subset S$ une partie aléatoire de S où chaque sommet est choisi avec une probabilité p. On note ensuite $H := G[S]$ et $\overline{H} := \overline{G}[S]$.

Question 1 Montrer que $\mathrm{cr}\left(\overline{H}\right) \geq m(H) - 3n(H)$.

Question 2 Déterminer $\mathbb{E}[m(H)]$ et $\mathbb{E}[n(H)]$.

Question 3 Exprimer $\mathbb{E}\left[\mathrm{cr}\left(\overline{H}\right)\right]$ en fonction de $\mathrm{cr}(G)$.

Question 4 Démontrer

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}$$

III Une question d'originalité

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ telle que tout $k \in [\![1, n]\!]$ apparaît exactement n fois dans M.

Question 5 Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne contenant au moins $\sqrt{n}$ valeurs distinctes.

IV De la géométrie

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^{10}$. On dira que $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^{10}$ *couvre* $\boldsymbol{a}$ si

$$\boldsymbol{a} \subset \bigcup_{x \in \boldsymbol{p}} \overline{\mathcal{B}}(x, 1)$$

Question 6 Montrer qu'il existe $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^{10}$ couvrant $\boldsymbol{a}$.

Ind: $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0.907$

V Du rab

Soit $k \in \mathbb{N}$.

La propriété à laquelle on s'intéresse ici est la *propriété de distance*

$$\mathcal{D}(a_1 ... a_k) := \left(\forall i, j, |a_i - a_j| \leq 2\right) \vee \left(\forall i, j, |a_i - a_j| \geq 1\right)$$

On pose enfin $\mathcal{P}(n) := \forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{C}), |A| \Longrightarrow (\exists \{a_1 ... a_k\} \subset A, \mathcal{D}(a_1 ... a_k))$

Question 7 Montrer $\forall n, \mathcal{P}(n)$.