专题模拟赛 4 讲评

洛谷 2022

进阶算法计划

—— VinstaG173

洛谷

www.luogu.com.cn

前言

整体题目分析

前言

关于题目知识点

主要是第 18 讲至第 21 讲的内容，具体知识点如下：

T1 Tarjan 求割点，简单计数

T2 广义矩阵乘法，位运算的性质

T3 缩点，树形背包

T4 期望 dp，高斯消元

由于题目考察知识点比较综合，因此难度较高。预估在提高至省选难度。

T1 缘起于文明没落之际

考点：Tarjan 求割点，简单计数

简要题意

给定一个 n 个点 m 条边的无向连通图，定义一个点的影响力为删去该点以及其相邻边后不连通的无序点对 (x,y) 的数量。求影响力最大的点的编号，若有多个则按从小到大的顺序依次输出。

首先将问题转化为求所有 n 个点各自的影响力。

部分分

30 分

对每个点，删除（也可以用打标记实现）后暴力枚举点对 (x, y) 并判断是否连通。

时间复杂度 $O(n^3 m)$。

60 分

注意到删除一个点后图可能是若干个连通块，当且仅当 x, y 不在同一个连通块内时点对 (x, y) 不连通。

故可以在删除后用一次搜索求出各个连通块的大小，再求两两大小之积的和。

普通的实现方法是 $O(n(m + n^2))$ 的，前缀和优化后可以做到 $O(n(m + n))$。

正解

在 60 分做法的基础上，我们希望不对删除每个点的情况都进行一次搜索。

注意到原图连通，使得删去后存在不连通的 (x, y)，即影响力不为 0 的点只能是割点。这提示我们使用 Tarjan 算法。

发现在 Tarjan 算法的过程中我们可以求出一个割点删去后的各个连通分量。具体地，对于割点 u 以及 dfs 树上其子结点 v，每个使得 $low_v > dfn_u$ 的 v 均对应一个删去 u 后的连通分量，其大小即为 dfs 树上 v 的子树的大小。

最后一个连通分量的大小即为所有点数减去各个连通分量的点数再减去一个点 u。和 60 分做法一样使用前缀和优化即可做到 $O(n+m)$。

T2 致以沉寂千年的祷告

考点：广义矩阵乘法，位运算的性质

简要题意

给定长为 m 的数列 a 和 c，以及递推关系

$$a_k = and_{i=1}^{m}(a_{k-i}\ or\ c_i),$$

求出 a_n 的值。其中 and 和 or 是按位与和按位或运算。

部分分

测试点 3,4

输入中已经给出，直接输出 a_n 即可。

70 分

依题意模拟，对每项 $O(m)$ 递推。

时间复杂度 $O(nm)$。

正解

这个形式很像线性递推：

$$a_k = \sum_{i=1}^{m} a_{k-i} c_i \,.$$

线性递推可以用矩阵乘法加速。这个递推可以吗？

我们注意到 or 对 and 确实有分配律。因此我们可以进行广义矩阵乘法。

但是要注意：对于乘法运算，有 $\forall a, 0 \cdot a = 0, 1 \cdot a = a$。但对于 or 运算，这里满足 0,1 性质的对应的数分别是 $2^t - 1$（即在给定位数内二进制全为 1）和 0。对于题目给出的 2^{32}，对应的 $t \geq 32$ 即可。

和线性递推一样建出矩阵后进行快速幂即可。时间复杂度 $O(m^3 \log n)$。

T3 我将会不顾一切前往

考点：缩点，树形背包

简要题意

给定一个 n 个点的有向图，点有点权，每点有至多一条出边。选出一个包含不超过 k 个点的点集，使得点集中所有出边（若有）指向的点在点集内的点的点权和最大。

部分分

测试点 1-6

暴力枚举所有点集，判断是否合法再求出点权和。

时间复杂度 $O(2^n n)$。

测试点 7-11

由于 $m_i < i$，显然有向图构成森林。添加点 0，这就是经典树形背包。

正解

发现每点至多有一条出边的图有一个性质：同一个连通分量（可以是将有向边转化为无向边后的连通分量）中至多有一个环，且环上点没有向环外的出边。

这表明，若对每个连通分量找出唯一（可能不存在）的环，再将其缩成等价的点，那这个连通分量也会转变成树形结构。

寻找环可以用 Tarjan 算法，但由于此题中图的简单性质也可以用简单的 dfs，但是它们本质是相同的。

对于一个环，其上所有点显然必须同时在点集内或不在点集内，否则将白占一个位置不贡献点权。因此我们将环缩成一个大点，定义其“大小”为环中点树，点权为环中点权和。

再规定其它点的“大小”为 1。这样我们将原问题转化为一个点有“大小”，有点权，求“大小”之和不超过 k 且点权之和最大的点集。

我们可以同样地做树形背包，不过需要注意的是此处的背包由于一个点的“大小”可能不止 1，要取前缀最大值。

时间复杂度 $O(n+m)$。

T4 迈向虚无的永恒神境

考点：期望 dp，高斯消元

简要题意

在一个 $n \times m$ 的方格图中，最初在第 1 行第 s 列。每步需要向前、左、右三个方向之一走一步，三个方向的权重分别为 d, l, r。不能从左右方向走出方格表，向每个方向走的概率分别为该方向的权重除以当前格子能够走的方向的权重之和。求从第 n 行向前走出方格表所需要的期望步数。

部分分

测试点 1-3

随便手玩。

测试点 4

容易发现答案为 n。

测试点 5-12

设 $f_{i,j}$ 表示从 (i,j) 开始需要的期望步数，则 $i > n$ 时 $f_{i,j} = 0$。

考虑 dp。根据题意列出方程：

$$f_{i,1} = \frac{d}{d+r} f_{i+1,1} + \frac{r}{d+r} f_{i,2} + 1,$$

$$f_{i,j} = \frac{d}{d+l+r} f_{i+1,j} + \frac{l}{d+l+r} f_{i,j-1} + \frac{r}{d+l+r} f_{i,j+1} + 1,$$

$$f_{i,m} = \frac{d}{d+l} f_{i+1,m} + \frac{l}{d+l} f_{i,m-1} + 1,$$

其中第二个方程中 $2 \le j \le m-1$。

部分分

移项得到：

$$(d+r)f_{i,1}-df_{i+1,1}-rf_{i,2}=d+r,$$

$$(d+l+r)f_{i,j}-df_{i+1,j}-lf_{i,j-1}-rf_{i,j+1}=d+l+r,$$

$$(d+l)f_{i,m}-df_{i+1,m}-lf_{i,m-1}=d+l,$$

用高斯消元法解 nm 元线性方程组即可。

时间复杂度 $O((nm)^3\log(nm))$。

正解

移项将方程改写为

$$(d+r)f_{i,1}-rf_{i,2}=df_{i+1,1}+d+r,$$

$$(d+l+r)f_{i,j}-lf_{i,j-1}-rf_{i,j+1}=df_{i+1,j}+d+l+r,$$

$$(d+l)f_{i,m}-lf_{i,m-1}=df_{i+1,m}+d+l,$$

则我们可以将 $f_{i+1,j}$ 看作常量，解 n 个 m 元线性方程组。

时间复杂度 $O(nm^3\log m)$。

感谢观看！

有什么疑问的，可以在评论区提出。