

3. Случайные сигналы и помехи в радиотехнических системах

3.1. Случайные процессы и их основные характеристики

Помехой называют стороннее колебание, затрудняющее приём и обработку сигнала. Помехи могут иметь искусственное или естественное происхождение. В статистической теории радиотехнических систем, где оцениваются потенциальные возможности систем, рассматриваются, главным образом, помехи естественного происхождения – флуктуационные шумы, представляющие собой результирующий эффект очень большого числа часто следующих элементарных импульсов, налагающихся друг на друга.

Математическим описанием шума является случайный процесс. Каждое возможное проявление случайного процесса является детерминированной функцией времени и называется его реализацией. Случайный процесс рассматривается как совокупность (ансамбль) своих реализаций. Какая именно из реализаций будет задействована в каждом конкретном опыте с участием случайного процесса неизвестно. В дальнейшем для обозначения случайного процесса (или случайных величин) будет использоваться **жирный шрифт**, а реализации случайного процесса (или значения случайных величин) будут обозначаться той же буквой в обычном написании. Таким образом

$$\xi(t) = \{\xi^{(i)}(t)\}_{i=0}^{\infty}, \quad (3.1)$$

где $\xi(t)$ - обозначает случайный процесс, а $\xi^{(i)}(t)$ – его i -я реализация. Там, где не имеет значения, какая именно реализация случайного процесса рассматривается, индекс i будет опускаться.

Теоретически предполагается, что случайный процесс включает бесконечно много реализаций. В качестве примера на рис.3.1 показаны несколько фрагментов реализаций флуктуационного случайного процесса. Реализации флуктуационного случайного процесса имеют вид непрерывных, неограниченных во времени функций.

Значение случайного процесса, зафиксированное в некоторый момент времени t_1 называется выборкой (отсчётом, сечением) случайного процесса. Выборка флуктуационного случайного процесса является непрерывной случайной величиной

$$\xi(t_1) = \{\xi^{(i)}(t_1)\}_{i=0}^{\infty}. \quad (3.2)$$

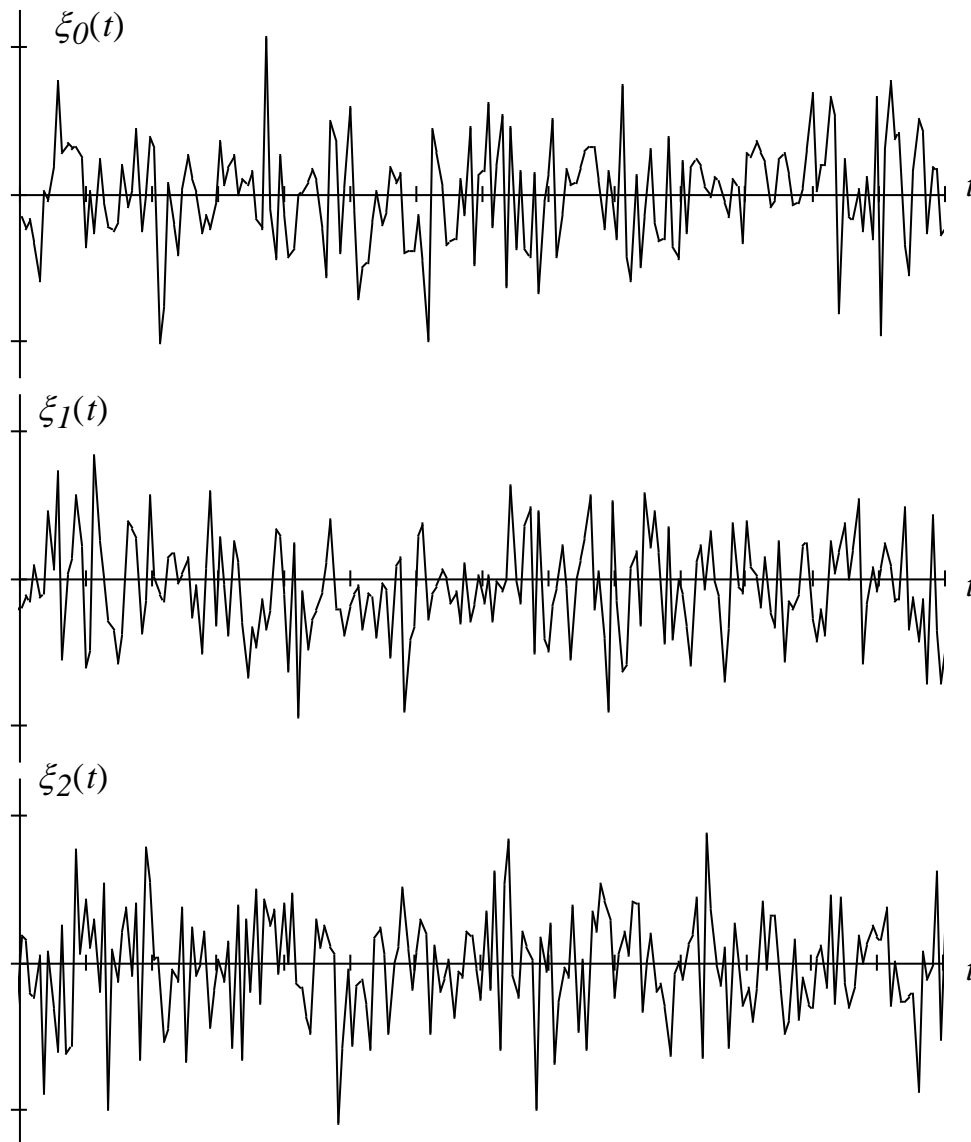


Рис.3.1. Примеры реализаций случайного процесса

Случайный процесс описывается N - мерной плотностью распределения вероятности (ПРВ)

$$w_{\xi}(x_0, x_1 \dots x_{N-1}; t_0, t_1 \dots t_{N-1}) = \frac{P(\cap_{i=0}^{N-1} x_i < \xi(t_i) < x_i + \partial x_i)}{\partial x_0 \partial x_1 \dots \partial x_{N-1}}, \quad (3.3)$$

которая определяется вероятностью того, что выборки процесса $\xi(t_i)$ в моменты времени $\{t_i\}_{i=0}^{N-1}$ заключены в интервалах $\{[x_i, x_i + \partial x_i]\}_{i=0}^{N-1}$. N - мерная плотность вероятности случайного процесса является совместной плотностью вероятности его выборок в различные моменты времени и в общем случае зависит от того, в какие моменты времени рассматривается процесс. Для уменьшения громоздкости зависимость от $t_0, t_1, \dots t_{N-1}$ при обо-

значении ПРВ в дальнейшем будет указываться лишь при необходимости.

Плотность вероятности обладает следующими свойствами:

1. Положительной определённости

$$w_{\xi}(x_0 \dots x_{N-1}) \geq 0; \quad (3.4)$$

2. Нормировки

$$\int_{x_0=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{x_{N-1}=-\infty}^{+\infty} w_{\xi}(x_0 \dots x_{N-1}) dx_0 \dots dx_{N-1} = 1; \quad (3.5)$$

3. Симметрии

$$w_{\xi}(x_0 \dots x_i \dots x_k \dots x_{N-1}) = w_{\xi}(x_0 \dots x_k \dots x_i \dots x_{N-1}); \quad (3.6)$$

4. Согласованности

$$w_{\xi}(x_0 \dots x_{N-2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi}(x_0 \dots x_{N-1}) dx_{N-1}. \quad (3.7)$$

5. Вероятность того, что выборки случайного процесса принимают значения, заключённые в интервалах $\{[a_i, b_i]\}_{i=0}^{N-1}$ равна

$$P(\cap_{i=0}^{N-1} a_i < \xi(t_i) < b_i) = \int_{x_0=a_0}^{b_0} \dots \int_{x_{N-1}=a_{N-1}}^{b_{N-1}} w_{\xi}(x_0 \dots x_{N-1}) dx_0 \dots dx_{N-1}; \quad (3.8)$$

6. Если выборки процесса независимы, то многомерная ПРВ определяется одномерными

$$w_{\xi}(x_0 \dots x_{N-1}) = w_{\xi}(x_0; t_0) \dots w_{\xi}(x_{N-1}; t_{N-1}). \quad (3.9)$$

Отметим, что одномерные ПРВ выборок процесса в различные моменты времени в общем случае могут быть различными.

Плотность распределения вероятности, рассматриваемая при условии, что произошло какое либо событие называется условной плотностью распределения вероятностей. Например, если это событие заключается в том, что случайная величина η приняла значение $y < \eta < y + \partial y$, для совместной плотности вероятности процесса $\xi(t)$ и величины η можно записать

$$w_{\xi\eta}(x_0, x_1 \dots x_{N-1}, y) = w_{\xi}(x_0, x_1 \dots x_{N-1} | y) w_{\eta}(y), \quad (3.10)$$

где $w_{\xi}(x_0, x_1 \dots x_{N-1} | y)$ - плотность вероятности случайного процесса $\xi(t)$ при условии, что $y < \eta < y + \partial y$;

$w_{\eta}(y)$ - плотность вероятности случайной величины η .

В частном случае, когда условное событие заключается в том, что в момент времени t_0 выборка процесса приняла значение $x_0 < \xi(t_0) < x_0 + \partial x_0$, (3.10) можем переписать в виде:

$$w_{\xi}(x_0, x_1 \dots x_{N-1}) = w_{\xi}(x_1 \dots x_{N-1} | x_0) w_{\xi}(x_0). \quad (3.11)$$

Интегральной характеристикой случайного процесса явля-

ется функция распределения вероятностей (ФРВ)

$$F_{\xi}(x_0, x_1 \dots x_{N-1}) = P(\cap_{i=0}^{N-1} \xi(t_i) < x_i), \quad (3.12)$$

которая определяется вероятностью совместного наступления событий, заключающихся в том, что выборки процесса $\xi(t_i)$ в моменты времени $\{t_i\}_{i=0}^{N-1}$ принимают значения меньшие, чем $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$. Функция распределения и плотность вероятности связаны между собою соотношениями:

$$F_{\xi}(x_0 \dots x_{N-1}) = \int_{-\infty}^{x_0} \dots \int_{-\infty}^{x_{N-1}} w_{\xi}(z_0 \dots z_{N-1}) dz_0 \dots dz_{N-1},$$

$$w_{\xi}(x_0 \dots x_{N-1}) = \frac{\partial^N F_{\xi}(x_0, x_1 \dots x_{N-1})}{\partial x_0 \dots \partial x_{N-1}}. \quad (3.13)$$

Отметим некоторые свойства ФРВ:

$$1. F_{\xi}(x_0 \dots x_{N-1}) \geq 0; \quad (3.14)$$

$$2. F_{\xi}(x_0 \dots -\infty \dots x_{N-1}) = 0; F_{\xi}(+\infty \dots +\infty) = 1; \quad (3.15)$$

$$3. F_{\xi}(x_0 \dots x_i \dots x_k \dots x_{N-1}) = F_{\xi}(x_0 \dots x_k \dots x_i \dots x_{N-1}); \quad (3.16)$$

$$4. F_{\xi}(x_0 \dots x_{N-2}, +\infty) = F_{\xi}(x_0 \dots x_{N-2}); \quad (3.17)$$

$$5. P(\cap_{i=0}^{N-1} a_i < \xi(t_i) < b_i) =$$

$$= F_{\xi}(b_0 \dots b_{N-1}) - F_{\xi}(a_0 \dots a_{N-1}); \quad (3.18)$$

$$6. P(\cap_{i=0}^{N-1} \xi(t_i) > x_i) = 1 - F_{\xi}(x_0, x_1 \dots x_{N-1}). \quad (3.19)$$

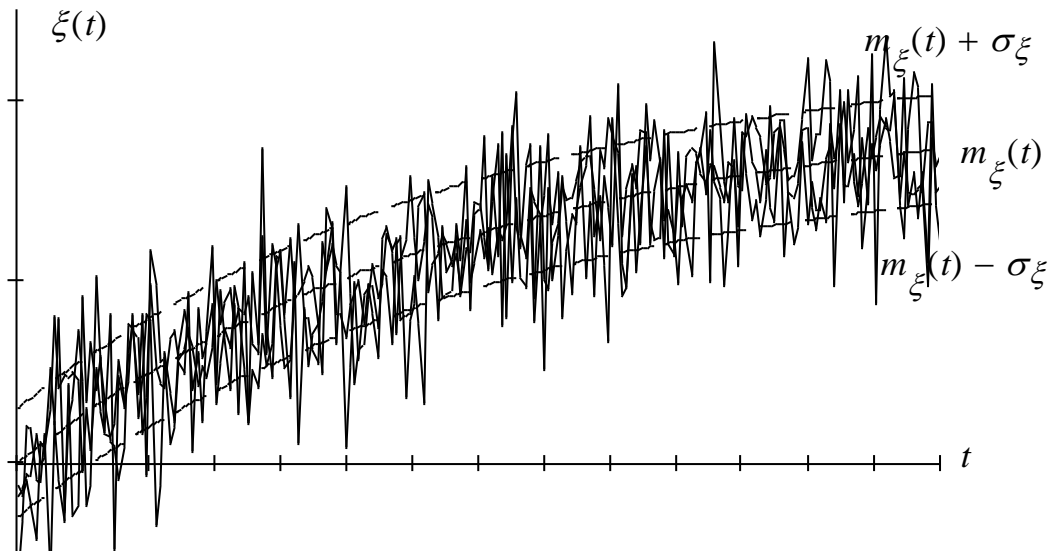


Рис.3.2. Реализации случайного процесса с постоянной дисперсией

Простыми, но информативными характеристиками случайного процесса являются его математическое ожидание и дисперсия. Математическое ожидание $m_{\xi}(t)$ является детерминирован-

ной функцией, график которой отражает наиболее вероятную тенденцию временного поведения процесса. Дисперсия $\sigma_{\xi}^2(t)$ характеризует разброс значений случайного процесса относительно математического ожидания. В качестве примера на рис.3.2 показаны несколько реализаций случайного процесса с постоянной дисперсией, график его математического ожидания и графики функций $m_{\xi}(t) \pm \sigma_{\xi}$. Дисперсия определяет «коридор»

$$m_{\xi}(t) - \sigma_{\xi}(t) < \xi(t_i) < m_{\xi}(t) + \sigma_{\xi}(t),$$

в котором наиболее вероятно принимают значения наибольшее число реализаций случайного процесса.

Математическое ожидание случайного процесса определяется его одномерной ПРВ

$$m_{\xi}(t) = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w_{\xi}(x; t) dx. \quad (3.20)$$

В общем случае случайный процесс можно представить в виде наложения детерминированной составляющей $m_{\xi}(t)$ и центрированного случайного процесса $\xi^{\circ}(t)$, имеющего нулевое математическое ожидание:

$$\xi(t) = m_{\xi}(t) + \xi^{\circ}(t). \quad (3.21)$$

Сформулируем основные свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание инвариантно относительно детерминированной функции

$$M\{s(t)\} = s(t). \quad (3.22)$$

2. Математическое ожидание линейно

$$M\{k_1 \xi_1(t) + k_2 \xi_2(t)\} = k_1 M\{\xi_1(t)\} + k_2 M\{\xi_2(t)\}, \quad (3.23)$$

где $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ - коэффициенты; $\xi_1(t), \xi_2(t)$ - случайные процессы.

3. Для независимых случайных процессов $\xi_1(t), \xi_2(t)$

$$M\{\xi_1(t) \xi_2(t)\} = M\{\xi_1(t)\} M\{\xi_2(t)\}. \quad (3.24)$$

4. Математическое ожидание функции от случайного процесса

$$M\{f(\xi(t))\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) w_{\xi}(x; t) dx. \quad (3.25)$$

Дисперсия случайного процесса представляет собой математическое ожидание квадрата модуля центрированного случайного процесса

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2(t) = D\{\xi(t)\} &= M\{\xi^{\circ}(t) \xi^{\circ*}(t)\} = \\ &= M\left\{\left(\xi(t) - m_{\xi}(t)\right) \left(\xi(t) - m_{\xi}(t)\right)^*\right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Перечислим основные свойства дисперсии.

1. Дисперсия детерминированной функции равна нулю

$$D\{s(t)\} = 0. \quad (3.27)$$

2. При умножении случайного процесса $\xi(t)$ на число $k \in \mathbb{C}$ дисперсия умножается на квадрат модуля этого числа

$$D\{k\xi(t)\} = kk^*D\{\xi(t)\}. \quad (3.28)$$

3. При сложении или вычитании двух независимых случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ их дисперсии складываются

$$D\{\xi_1(t) \pm \xi_2(t)\} = D\{\xi_1(t)\} + D\{\xi_2(t)\}. \quad (3.29)$$

Степень подобия двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ в различные моменты времени характеризуется их взаимной корреляционной функцией

$$R_{\xi\eta}(t_0, t_1) = M\{\xi^\circ(t_0)\eta^{*\circ}(t_1)\}. \quad (3.30)$$

Случайные процессы, для которых взаимная корреляционная функция равна нулю, называются некоррелированными. Как следует из (3.24), независимые случайные процессы являются некоррелированными. Обратное утверждение в общем случае является не верным.

Когда рассматривается один и тот же случайный процесс, (3.30) определяет автокорреляционную функцию и характеризует взаимосвязь его значений, взятых в различные моменты времени:

$$R_\xi(t_0, t_1) = M\{\xi^\circ(t_0)\xi^{*\circ}(t_1)\}. \quad (3.31)$$

Автокорреляционная функция случайного процесса обладает сопряжённой симметрией относительно своих аргументов, при их равенстве совпадает с дисперсией:

$$R_\xi(t_0, t_1) = R_\xi^*(t_1, t_0), R_\xi(t_0, t_1)_{t_0=t_1=t} = \sigma_\xi^2(t). \quad (3.32)$$

Важным классом случайных процессов являются стационарные. Случайный процесс называется стационарным в узком смысле, если его ПРВ не изменяется при любом сдвиге всей группы точек $\{t_i\}_{i=0}^{N-1}$. Характеристики такого процесса не изменяются при изменении начала отсчёта времени. Такой процесс ведёт себя во времени однородно. При этом:

1. одномерная ПРВ не зависит от времени

$$w_\xi(x, t) = w_\xi(x); \quad (3.33)$$

2. двумерная ПРВ зависит только от разности $\tau = t_1 - t_0$

$$w_\xi(x_0, x_1; t_0, t_1) = w_\xi(x_0, x_1; t_1 - t_0) = w_\xi(x_0, x_1; \tau); \quad (3.34)$$

3. математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени

$$m_{\xi}(t) = m_{\xi}, \sigma_{\xi}^2(t) = \sigma_{\xi}^2. \quad (3.35)$$

4. автокорреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_1 - t_0$

$$R_{\xi}(t_0, t_1) = R_{\xi}(t_1 - t_0) = R_{\xi}(\tau), \quad (3.36)$$

обладает свойством сопряжённой симметрии

$$R_{\xi}(\tau) = R_{\xi}^*(-\tau), \quad (3.37)$$

принимает максимальное по модулю значение, равное дисперсии, в нуле

$$R_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2, |R_{\xi}(\tau)| \leq \sigma_{\xi}^2. \quad (3.38)$$

Если для случайного процесса выполняются только условия 3 и 4, то он называется стационарным в широком смысле.

Спектральной плотностью мощности стационарного случайного процесса называется преобразование Фурье его автокорреляционной функции

$$\Xi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.39)$$

Корреляционная функция может быть определена с помощью обратного преобразования Фурье спектральной плотности мощности

$$R_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.40)$$

Стационарные процессы имеют место в установившихся режимах работы систем при неизменных внешних условиях. В дальнейшем будут рассматриваться только стационарные случайные процессы.

3.2. Гауссов (нормальный) случайный процесс

На рис.3.1 в качестве примера показаны три реализации гауссова случайного процесса. Одномерная ПРВ гауссова случайного процесса описывается выражением

$$w_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}^2}} e^{-\frac{(x-m_{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^2}}, \quad (3.41)$$

где m_{ξ}, σ_{ξ}^2 - математическое ожидание и дисперсия.

Функция распределения вероятностей гауссова процесса имеет вид:

$$F_{\xi}(x) = \Phi\left(\frac{x-m_{\xi}}{\sigma_{\xi}}\right), \quad (3.42)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – интеграл вероятностей.

Интеграл вероятностей определяет ФРВ Гаусса при единичной дисперсии и нулевом математическом ожидании, в элементарных функциях не выражается. Для практических расчётов могут быть использованы таблицы значений интеграла вероятностей, приводимые в справочниках, или аппроксимации для прямой

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1 - a \exp[-(b(c+z))^2], & z \geq 0 \\ a \exp[-(b(c-z))^2], & z < 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

и обратной функции

$$\Phi^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{1}{b} \sqrt{\ln\left(\frac{a}{1-z}\right)} - c, & z \geq 0.5 \\ c - \frac{1}{b} \sqrt{\ln\left(\frac{a}{z}\right)}, & z < 0.5 \end{cases}, \quad (3.44)$$

где $a = 0.768, b = 0.6, c = 1.088$.

Графики ПРВ и ФРВ Гаусса при нулевом математическом ожидании и единичной дисперсии показаны на рис.3.3.

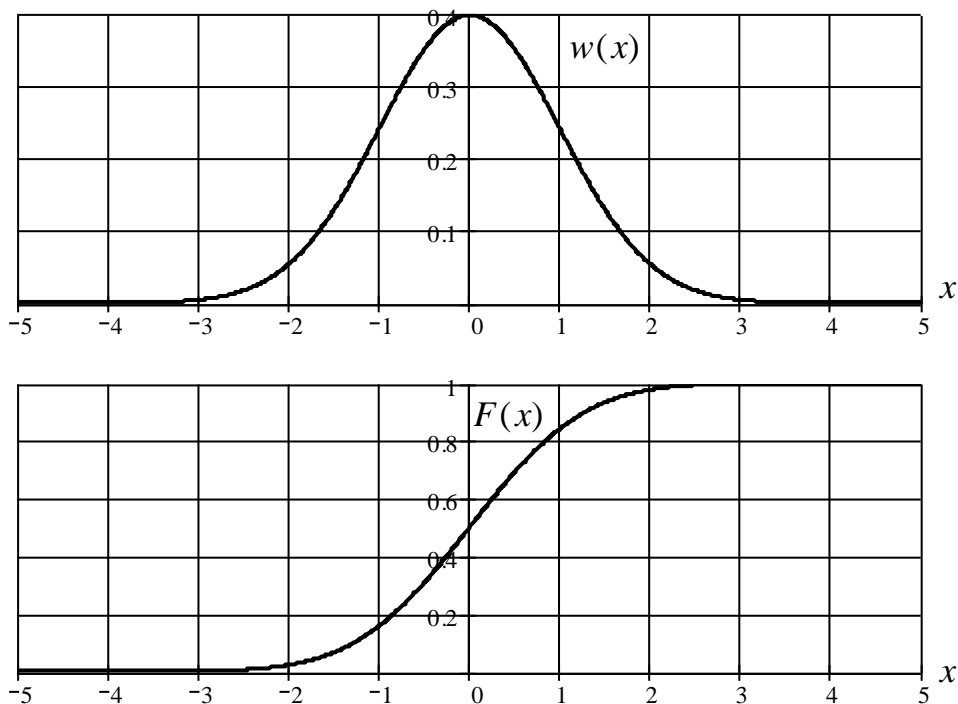


Рис.3.3 ПРВ и ФРВ Гаусса

В большинстве практических случаев плотность распределения вероятности флуктуационного случайного процесса явля-

ется гауссовой. Это связано с тем, что такие случайные процессы являются результатом совместного действия большого количества различных факторов, каждый из которых вносит примерно одинаковый вклад. При этом оказываются выполненными условия центральной предельной теоремы теории вероятностей, что и определяет неограниченное приближение ПРВ к гауссовой.

Гауссов закон распределения инвариантен по отношению к линейным преобразованиям случайного процесса, более того, при линейном инерционном преобразовании происходит нормализация случайного процесса: ПРВ отклика линейной инерционной системы приближается к гауссовой, независимо от того, какую ПРВ имел преобразуемый случайный процесс. Чем больше постоянная времени инерционной системы по сравнению с интервалом корреляции случайного процесса, определяемым шириной его автокорреляционной функции, тем сильнее проявляется эффект нормализации.

Можно показать, что для гауссова процесса некоррелированность выборок означает их независимость.

3.3. Релеевский процесс

Рассмотрим нелинейное преобразование независимых стационарных гауссовых процессов $X(t)$ и $Y(t)$ с одинаковыми дисперсиями σ^2 в процессы $\rho(t) \geq 0$ и $\theta(t) \in [-\pi, \pi]$ вида

$$\rho(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}, \theta(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y(t)}{X(t)}\right). \quad (3.45)$$

Обратному преобразованию:

$$X(t) = \rho(t)\cos\theta(t), Y(t) = \rho(t)\sin\theta(t) \quad (3.46)$$

соответствуют функции

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta \quad (3.47)$$

и якобиан преобразования

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \quad (3.48)$$

Совместная плотность распределения вероятностей получаемых в результате преобразования случайных процессов:

$$w_{\rho\theta}(\rho, \theta) = w_{XY}(x, y)|_{\substack{x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta}} J(\rho, \theta). \quad (3.49)$$

Запишем выражения для одномерных ПРВ процессов $X(t)$ и $Y(t)$:

$$\begin{aligned} w_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma^2}\right), \\ w_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Так как рассматриваемые случайные процессы независимы, их совместную ПРВ можно представить в виде:

$$w_{XY}(x, y) = w_X(x)w_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-m_X)^2 + (y-m_Y)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Подставив это выражение в (3.49), запишем

$$\begin{aligned} w_{\rho\theta}(\rho, \gamma) &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(\rho \cos \theta - m_X)^2 + (\rho \sin \theta - m_Y)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + m_X^2 + m_Y^2 - 2\rho(m_X \cos \theta + m_Y \sin \theta)}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Представим m_X и m_Y в виде:

$$\begin{aligned} m_X &= m \cos \theta_m, \quad m_Y = m \sin \theta_m, \\ \text{где } m &= \sqrt{m_X^2 + m_Y^2}, \quad \theta_m = \arctg\left(\frac{m_Y}{m_X}\right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Тогда $m_X \cos \theta + m_Y \sin \theta = m \cos(\theta - \theta_m)$ и выражение для совместной ПРВ процессов $\rho(t)$ и $\theta(t)$ принимает вид:

$$w_{\rho\theta}(\rho, \theta) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + m^2 - 2m\rho \cos(\theta - \theta_m)}{2\sigma^2}\right). \quad (3.52)$$

Определим плотность распределения вероятностей процесса $\rho(t)$, используя свойство согласованности для ПРВ (3.7), исключая параметр θ :

$$\begin{aligned} w_\rho(\rho) &= \int_{-\pi}^{+\pi} w_{\rho\theta}(\rho, \theta) d\theta = \\ &= \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + m^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(\frac{m\rho \cos(\theta - \theta_m)}{\sigma^2}\right) d\theta. \end{aligned} \quad (3.53)$$

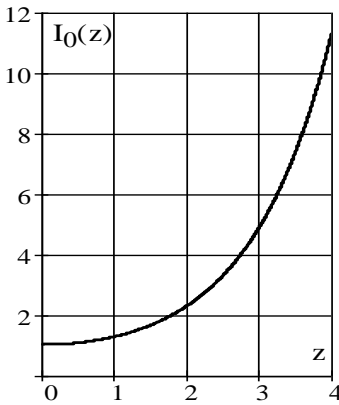


Рис.3.4. График функции Бесселя

Интеграл, входящий в (3.53), связан с функцией Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(z \cos(\theta + \alpha)) d\theta, \quad (3.54)$$

где результат интегрирования не зависит от α . График функции Бесселя показан на рис.3.4. В некоторых случаях оказывается удобным пользоваться её аппроксимацией:

$$I_0(z) \approx \begin{cases} e^{0.236z^2}, & z \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z + 0.182, & z > 1 \end{cases} \quad (3.55)$$

Относительная погрешность аппроксимации (3.55) не превышает 3%.

С учётом (3.54)

$$w_\rho(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{m\rho}{\sigma^2}\right). \quad (3.56)$$

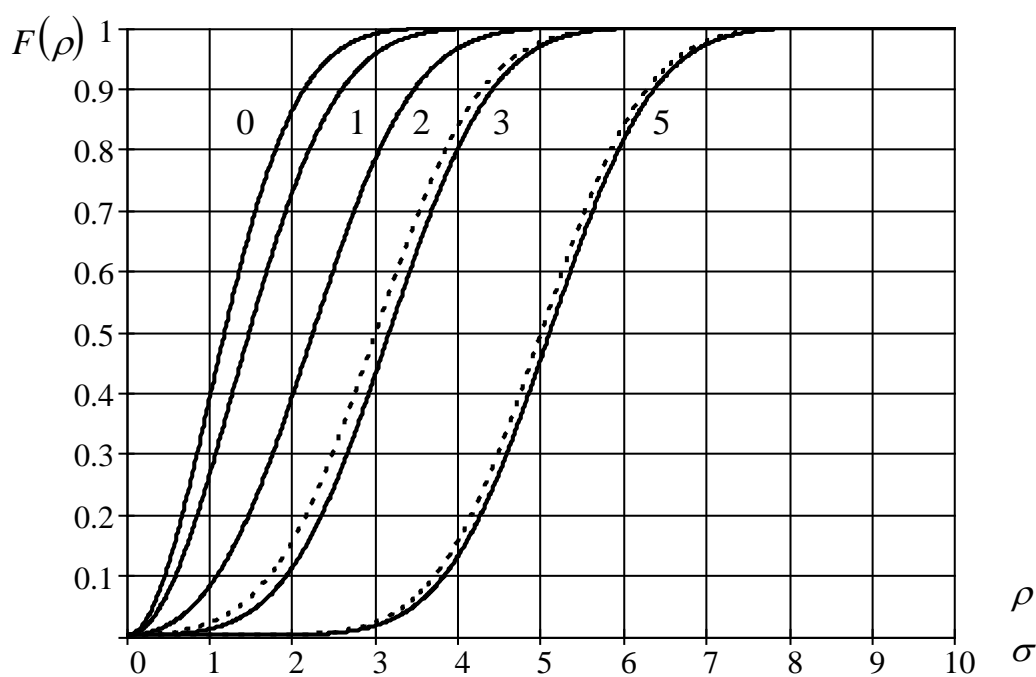
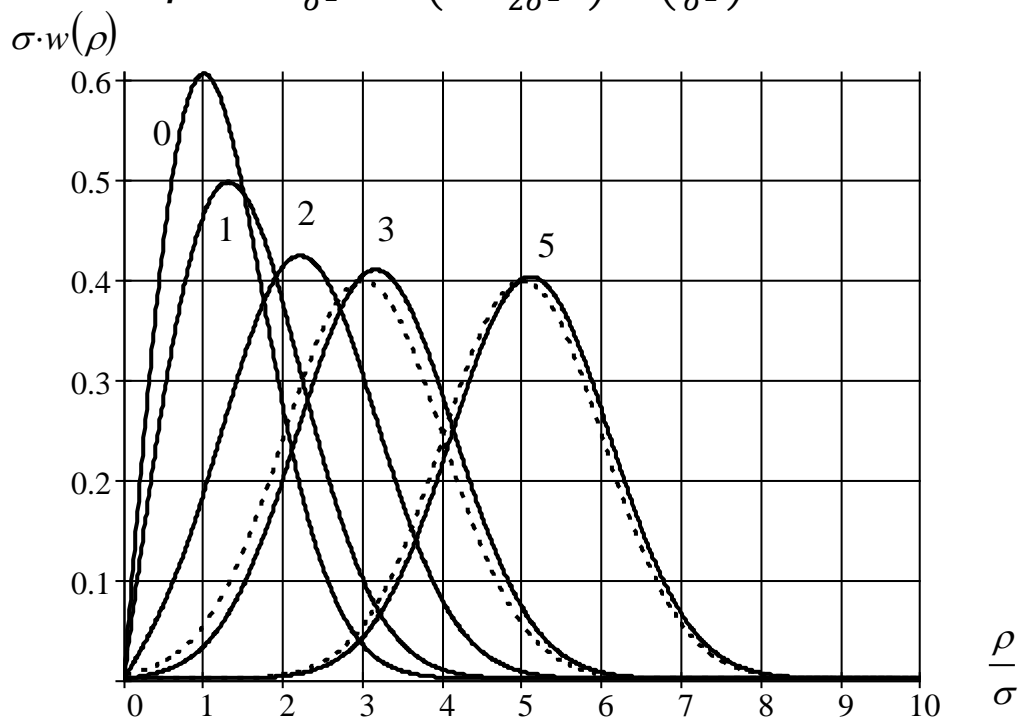


Рис.3.5. Графики ПРВ и ФРВ Райса.

Полученная ПРВ называется распределением Райса (или обоб-

щённым распределением Релея). Параметры m и σ^2 в данном случае не являются математическим ожиданием и дисперсией.

Интегральная функция обобщённого распределения Релея

$$F_{\rho}(\rho) = \int_0^{\rho} \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2+m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{mz}{\sigma^2}\right) dz \quad (3.57)$$

в элементарных функциях не выражается и рассчитывается численно, либо с использованием справочных таблиц и графиков.

Графики ПРВ и ФРВ Райса показаны на рис.3.5. Значения параметра $\frac{m}{\sigma} = 0; 1; 2; 3; 5$ указаны около соответствующей кривой. Когда $\frac{m}{\sigma} \geq 3$ ПРВ и ФРВ Райса удовлетворительно аппроксимируются гауссовым законом с параметрами m и σ

$$\begin{aligned} w_{\rho}(\rho) \Big|_{\frac{m}{\sigma} \geq 3} &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\rho-m)^2}{2\sigma^2}}, \\ F_{\rho}(\rho) \Big|_{\frac{m}{\sigma} \geq 3} &\approx \Phi\left(\frac{\rho-m}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Графики аппроксимирующих функций для $\frac{m}{\sigma} = 3; 5$ показаны на рис.3.5 пунктиром.

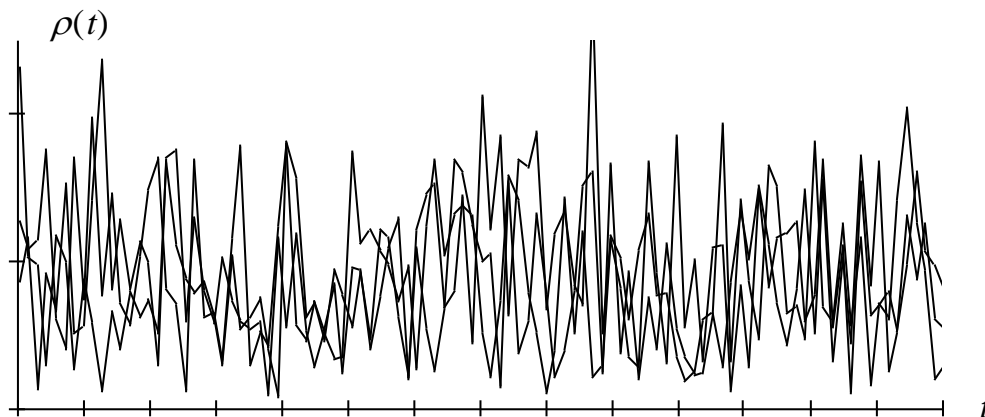


Рис.3.6. Пример реализаций релеевского процесса.

В частном случае, когда

$$m = m_x = m_y = 0, \quad (3.59)$$

распределение Райса (3.56) переходит в распределение Релея:

$$w_{\rho}(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.60)$$

которому соответствует ФРВ, математическое ожидание и дисперсия:

$$F_{\rho}(\rho) = 1 - e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}},$$

$$m_{\rho} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \sigma_{\rho}^2 = (2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2. \quad (3.61)$$

График ПРВ и ФРВ Релея на рис.3.5 соответствует случаю $\frac{m}{\sigma} = 0$.

В качестве примера на рис.3.6 показано несколько реализаций релейского процесса.

Вернёмся к (3.52) при условии (3.59)

$$w_{\rho\theta}(\rho, \theta) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi} w_{\rho}(\rho), \quad (3.62)$$

и определим ПРВ процесса $\theta(t)$:

$$w_{\theta}(\theta) = \int_0^{+\infty} w_{\rho\theta}(\rho, \theta) d\rho = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} w_{\rho}(\rho) d\rho = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.63)$$

В рассматриваемом частном случае случайный процесс $\theta(t)$ имеет равномерное распределение на интервале $[-\pi, \pi]$, более того

$$w_{\rho\theta}(\rho, \theta) = w_{\theta}(\theta)w_{\rho}(\rho), \quad (3.64)$$

то есть случайные процессы $\rho(t)$ и $\theta(t)$ независимы.

3.4. Узкополосные случайные процессы

Узкополосным называется случайный процесс, ширина спектра мощности $\Delta\omega$ которого гораздо меньше центральной частоты спектра ω_0

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1. \quad (3.65)$$

Пример реализации узкополосного случайного процесса показан на рис.3.7 (пунктиром показана огибающая реализации).

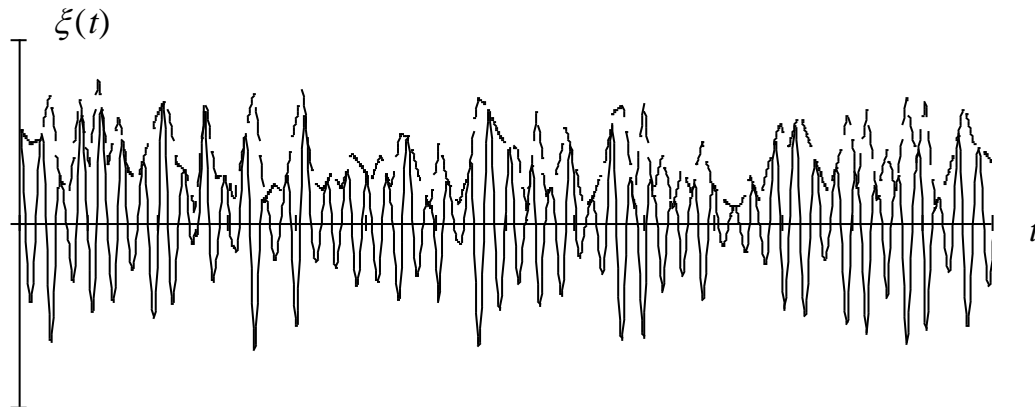


Рис.3.7. Пример реализации узкополосного случайного процесса
 Узкополосный случайный процесс описывается выражением

$$\xi(t) = \rho(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t) + \theta(t)), \quad (3.66)$$

где $\rho(t) \geq 0$ - огибающая случайного процесса, $\varphi(t) + \theta(t)$ - мгновенная фаза, $-\pi \leq \theta(t) \leq \pi$.

Выражение (3.66) нетрудно преобразовать к виду

$$\xi(t) = X(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) - Y(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (3.67)$$

где $X(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$; $Y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$.

Найдём одномерные ПРВ которые имеют процессы $\rho(t)$, $\theta(t)$, $X(t)$, $Y(t)$, когда узкополосный $\xi(t)$ является стационарным гауссовым случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_ξ^2 , а случайные процессы $\rho(t)$ и $\theta(t)$ - взаимно независимые.

Как видно из (3.67) $\xi(t)$ является линейной комбинацией процессов $X(t)$ и $Y(t)$, поэтому они также должны быть стационарными. Выборки процесса $X(t)$ в моменты времени t_k , удовлетворяющие уравнению

$$\omega_0 t_k + \varphi(t_k) = 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, \quad (3.68)$$

совпадают с выборками узкополосного процесса

$$\xi(t_k) = X(t_k). \quad (3.69)$$

Следовательно, в моменты времени t_k совпадают и ПРВ процессов $\xi(t)$ и $X(t)$. Поскольку рассматриваются стационарные процессы, то одномерная ПРВ не зависит от времени. Таким образом ПРВ рассматриваемых процессов совпадают и $X(t)$ является гауссовым случайным процессом с нулевым средним $m_X = 0$ и дисперсией $\sigma_X^2 = \sigma_\xi^2$.

Аналогично, рассматривая выборки процесса $Y(t)$ в моменты времени t_k , удовлетворяющие уравнению

$$\omega_0 t_k + \varphi(t_k) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, \quad (3.70)$$

нетрудно установить, что $Y(t)$ является гауссовым случайным процессом с нулевым средним $m_Y = 0$ и дисперсией $\sigma_Y^2 = \sigma_\xi^2$.

Рассмотрим взаимную корреляционную функцию процессов $X(t)$ и $Y(t)$ в один и тот же момент времени

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_0, t_0) &= M\{X(t_0)Y(t_0)\} = \\ &= M\{\rho^2(t_0) \cos \theta(t_0) \sin \theta(t_0)\} = \\ &= \frac{1}{2} M\{\rho^2(t_0) \sin (2\theta(t_0))\}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

В силу независимости $\rho(t)$ и $\theta(t)$, используя свойства математического ожидания (3.24) и (3.25), выражение (3.71) продолжим в

виде:

$$R_{XY}(t_0, t_0) = \frac{1}{2} M\{\rho^2(t_0)\} M\{\sin(2\theta(t_0))\} = \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{2} M\{\rho^2(t_0)\} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(2y) w_{\theta}(y) dy.$$

При любой чётно-симметричной ПРВ

$$w_{\theta}(y) = w_{\theta}(-y), \quad (3.73)$$

интеграл в (3.72) равен нулю и случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ являются не коррелированными в один и тот же момент времени. Так как они гауссовы, то некоррелированность для них означает и независимость.

При выполнении условия (3.73) случайные процессы $\rho(t)$ и $\theta(t)$, получаются нелинейным преобразованием независимых гауссовых величин с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией σ_{ξ}^2 вида (3.45), и, как установлено в п.3.3, $\rho(t)$ имеет распределение Релея (3.60) с параметром σ_{ξ} , а $\theta(t)$ имеет равномерное распределение (3.63).

3.5. Квазидетерминированные сигналы

В радиотехнических системах сигнал, распространяясь от радиопередающего устройства к приёмному, не только подвергается воздействию помех, но и искажается в результате взаимодействия с локальными неоднородностями среды распространения, её временной нестабильности, зависимости параметров от времени суток и погодных условий. В большинстве случаев эти искажения проявляются в случайных изменениях амплитуды и фазы сигнала из-за наличия областей с различной оптической плотностью, показателем поглощения и рассеивания на пути распространения сигнала, а также в результате многолучевого распространения. Амплитуда и фаза сигнала непредсказуемо изменяются и при отражении сигнала от радиолокационной цели и зависят от её конфигурации, угла облучения, эффективной поверхности рассеивания.

Для учёта указанных явлений сигнал на входе приёмного устройства представляют в виде стационарного гауссова случайного процесса с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_s

$$s(t) = Av(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t) + \theta), \quad (3.74)$$

где \mathbf{A} и θ – независимые случайные величины. \mathbf{A} имеет распределение Релея (3.60) с параметром σ_s , θ – равномерно распределена на интервале $[-\pi, \pi]$. $v(t)$, $\varphi(t)$ – детерминированные функции, которые определяют огибающую и мгновенную фазу сигнала, формируемого радиопередающим устройством, ω_0 – частота несущего колебания. Выражение (3.74), описывающее сигнал со случайной амплитудой и фазой, является частным случаем (3.66).

Сигнал со случайной амплитудой и фазой характеризуется средней энергией

$$E_{\text{cp}} = M\{E\} = M\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 v^2(t) \cos^2(\omega_0 t + \varphi(t) + \theta) dt\right\}. \quad (3.75)$$

Учтём, что начальная фаза несущего колебания θ является не энергетическим параметром, а математическое ожидание линейно, тогда для средней энергии запишем

$$\begin{aligned} E_{\text{cp}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} M\{A^2\} v^2(t) \cos^2(\omega_0 t + \varphi(t)) dt = \\ &= M\{A^2\} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(t) \cos^2(\omega_0 t + \varphi(t)) dt = M\{A^2\} E_0, \end{aligned} \quad (3.76)$$

где E_0 – энергия сигнала при $\mathbf{A} = 1$.

Представляя случайную величину \mathbf{A} в виде $\mathbf{A} = m_A + \mathbf{A}^\circ$ и имея в виду свойства математического ожидания, запишем

$$\begin{aligned} M\{A^2\} &= M\{(m_A + \mathbf{A}^\circ)^2\} = M\{m_A^2 + 2m_A \mathbf{A}^\circ + \mathbf{A}^{\circ 2}\} = \\ &= M\{m_A^2\} + M\{2m_A \mathbf{A}^\circ\} + M\{\mathbf{A}^{\circ 2}\} = m_A^2 + M\{\mathbf{A}^{\circ 2}\} = m_A^2 + \sigma_A^2. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Выражения для математического ожидания и дисперсии релеевской случайной величины \mathbf{A} даются (3.61)

$$m_A = \sigma_s \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \sigma_A^2 = (2 - \frac{\pi}{2}) \sigma_s^2, \quad (3.78)$$

Подставляя их в (3.77) и возвращаясь к (3.76), для средней энергии сигнала получим

$$E_{\text{cp}} = 2\sigma_s^2 E_0. \quad (3.79)$$

Средняя энергия сигнала со случайной амплитудой и фазой равна энергии соответствующего детерминированного сигнала, когда его дисперсия

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2}. \quad (3.80)$$

В случае, когда амплитуда сигнала известна, рассматривается сигнал со случайной начальной фазой

$$s(t) = v(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t) + \theta), \quad (3.81)$$

где θ – равномерно распределена на интервале $[-\pi, \pi]$. Отметим, что в общем случае, (3.81) описывает стационарный случайный процесс лишь при определённых видах $v(t)$ и $\varphi(t)$, однако, при анализе его стационарность принимается приближённо.

Сигналы вида (3.74) и (3.81) иногда называются квазидетерминированными сигналами.

3.6. Белый и квазибелый шум

При анализе преобразования случайных процессов линейными системами, когда в пределах амплитудно-частотной характеристики системы спектр мощности случайного процесса можно приблизительно считать постоянным, в качестве математической модели воздействия рассматривают белый или квазибелый шум.

Белый шум – это случайный процесс $n(t)$ с равномерным спектром мощности

$$N(\omega) = \frac{N_0}{2}. \quad (3.82)$$

Корреляционная функция белого шума:

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (3.83)$$

Дисперсия рассматриваемого процесса $\sigma_n^2 = R_n(0)$ бесконечна. Это означает, что белый шум может рассматриваться лишь в качестве удобной математической абстракции, использование которой в ряде случаев упрощает решение различных задач.

Поскольку корреляционная функция белого шума равна нулю при любых отличных от нуля значениях своего аргумента, то любые две выборки белого шума, соответствующие различным моментам времени, являются некоррелированными, а в случае, когда белый шум гауссов – независимыми.

Квазибелым шумом называется случайный процесс $n(t)$, спектр мощности которого равномерен в пределах некоторой полосы частот $[-\omega_m, \omega_m]$ и равен нулю вне этой полосы

$$N(\omega) = \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right). \quad (3.84)$$

Обратное преобразование Фурье от (3.84) даёт автокорреляционную функцию

$$R_n(\tau) = \frac{N_0 \omega_m}{2\pi} \text{sinc}(\omega_m \tau). \quad (3.85)$$

Дисперсия квазибелого шума

$$\sigma_n^2 = R_n(0) = \frac{N_0 \omega_m}{2\pi}. \quad (3.86)$$

Графики спектральной плотности мощности и автокорреляционной функции квазибелого шума показаны на рис.3.8.

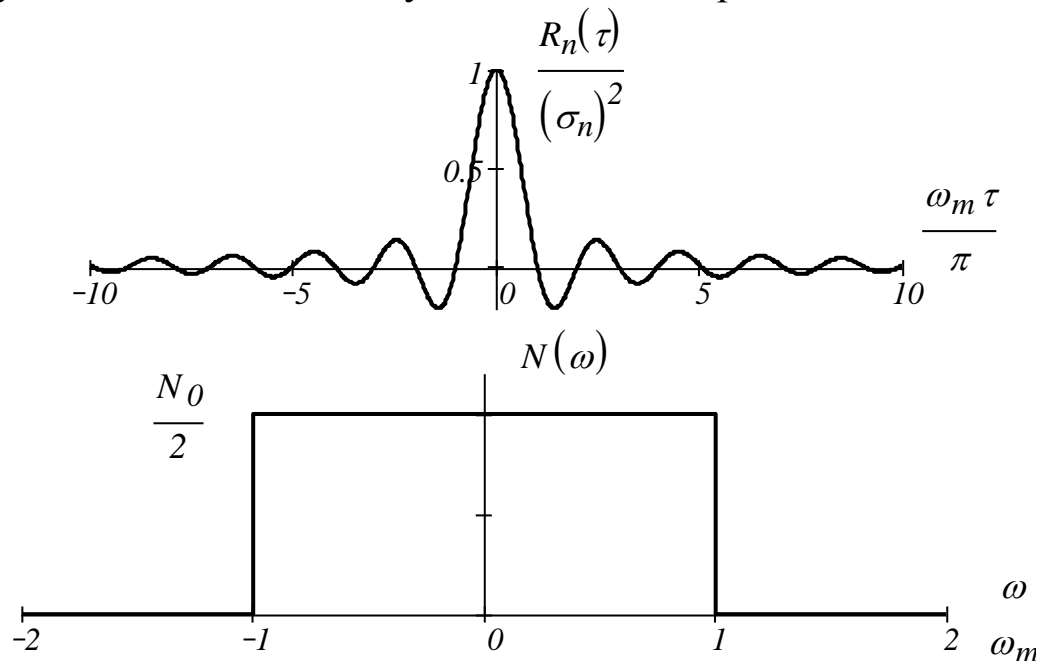


Рис.3.8. Корреляционная функция и спектр мощности квазибелого шума.

Корреляционная функция квазибелого шума обращается в нуль в точках

$$\tau_k = kT, k = \pm 1, \pm 2 \dots, \quad (3.87)$$

где $T = \frac{\pi}{\omega_m}$. Это означает, что выборки квазибелого шума, взятые с интервалом равным или кратным T некоррелированы, а в случае, когда квазибелый шум гауссов – независимы.

[Главная страница](#)

