TD h-équilibré : les AVL

Correction

deseq(D)	deseq(F)	rotation	ΔH
-2	-1	rg	-1
	0		0
	1	rdg	-1

deseq(D)	deseq(B)	rotation	ΔH
2	-1	rgd	-1
	0	rd	0
	1		-1

Table 1 – Rotations et changements de hauteur

***Solution 3.1* (Insertion)**

On écrit ici une version récursive de l'ajout d'un élément dans un AVL. Celui-ci sera basé sur le principe de l'ajout en feuilles des arbres binaires de recherche, le rééquilibrage se faisant à la remontée.

Quelle information nous dit qu'il faut mettre à jour ou pas le déséquilibre d'un nœud lorsqu'on remonte ?
On a besoin de savoir si l'arbre d'où on vient a changé de hauteur.

Pourquoi on ajoute ou on enlève 1 au déséquilibre ?
Si la hauteur de l'arbre d'où on vient a augmenté, en remontant : on ajoute 1 si c'est le sous-arbre gauche, on enlève 1 si c'est le droit.

1. Changement de hauteur ?
   (a) Cette étude nous permettra de savoir dans quels cas l'arbre change de hauteur après une insertion. Il est important de partir des cas possibles avant l'insertion (sinon on risque d'avoir des cas impossibles. . .)
   On considère une insertion dans le sous arbre gauche, qui a augmenté la hauteur de ce sous-arbre.
   Avant insertion, 3 possibilités pour le nœud actuel :

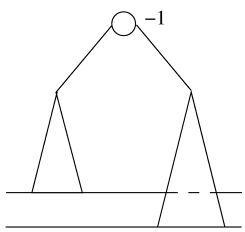


Figure 1 – Déséquilibre : -1

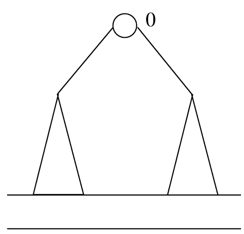


Figure 2 – Déséquilibre : 0

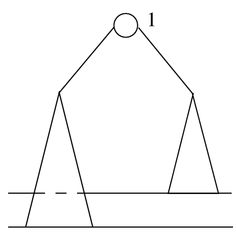
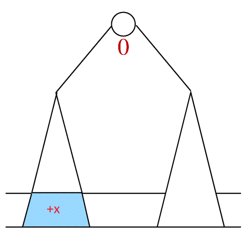
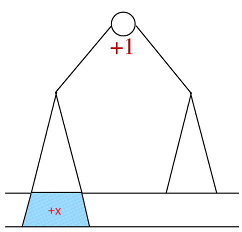


Figure 3 – Déséquilibre : 1

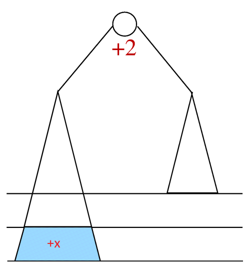
Après insertion :



$\Delta H = 0$

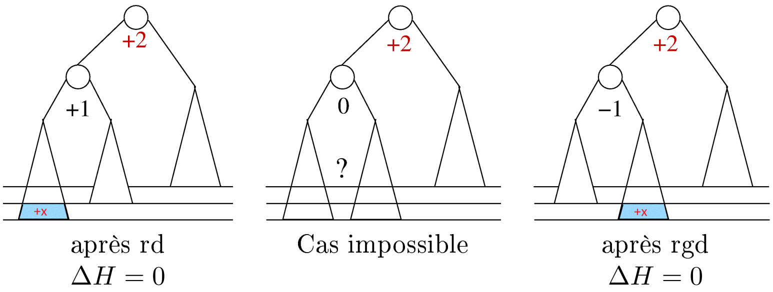


$\Delta H = 1$



Étude détaillée

Étude du cas où le nouveau déséquilibre est égal à +2, il y a a priori 3 possibilités pour le fils gauche : -1, 0, 1



(b) **Conclusion**

Soient :
- h_i la hauteur avant insertion
- h_f la hauteur après insertion
- h_r la hauteur après rotation

Si le nouveau déséquilibre de l'arbre est :

0 : $h_f = h_i$.

1 : $h_f = h_i + 1$.

2 : D'après l'exercice 1.3, si le déséquilibre du fils gauche est :

  1 : $h_r = h_f - 1$, or $h_f = h_i + 1$ donc $h_r = h_i$

  0 : cas impossible après une insertion

  -1 : $h_r = h_f - 1$, or $h_f = h_i + 1$ donc $h_r = h_i$

  Dans tous les cas, après une rotation, l'arbre retrouve sa hauteur initiale.

2. *Principe d'insertion dans les AVL :*
   - Recherche de la position d'insertion. Si la clé n'est pas déjà présente :
     - Création du nouveau nœud
     - Variation de hauteur égale à 1
   - A la remontée si la hauteur du sous-arbre (où a eu lieu l'insertion) a changé alors modification du déséquilibre du nœud courant (+1 si retour de gauche, -1 sinon). La nouvelle valeur est :

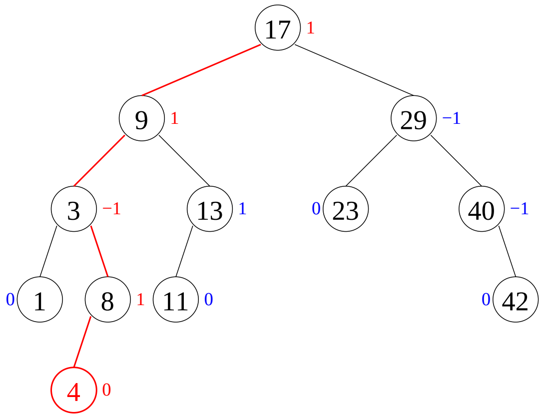
     0 : pas de variation de hauteur

     +1 ou -1 : la hauteur a changé (+1)

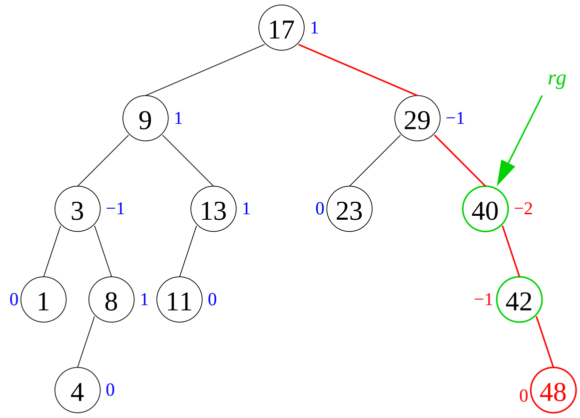
     +2 : si déséquilibre du fils gauche est égal à -1 alors RGD sinon RD, pas de variation de hauteur

     -2 : si déséquilibre du fils droit est égal à +1 alors RDG sinon RG, pas de variation de hauteur.

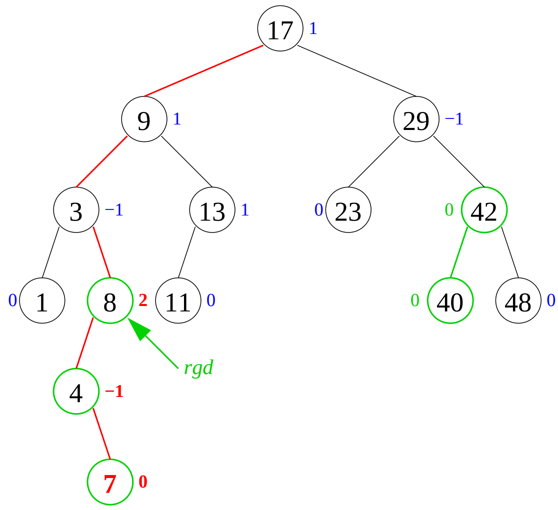
3. Insertion des clés 4, 48, 7 et 5 dans l'arbre du sujet.



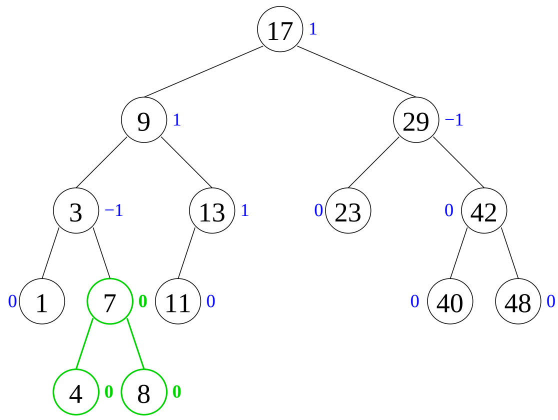
insertion 4



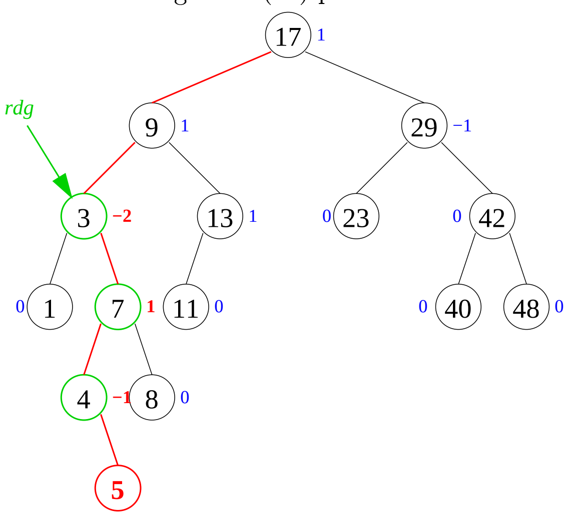
insertion 48



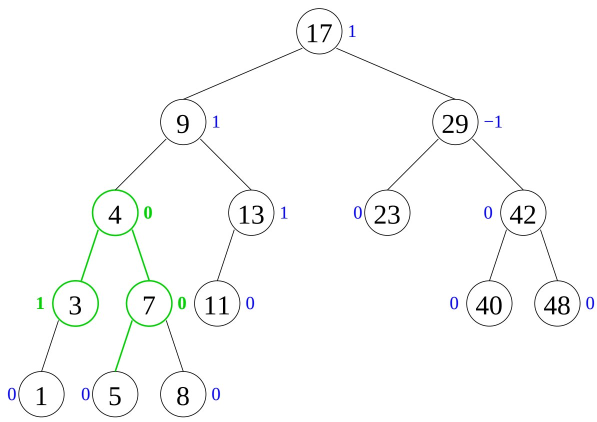
rotation gauche (40) puis insertion 7



rotation gauche-droite (rgd 8)



insertion 5



rotation droite-gauche (3)

4. *La fonction :*

   Spécifications : La fonction `insertAVL(`x`, `A`)` insère x dans l'AVL A (sauf si la clé est déjà présente) qu'elle retourne (la fonction récursive retourne en plus un booléen qui indique le changement de hauteur de l'arbre).

   Voir également la version sans raccourcis dans `AVL_classics.py`

```python
def __insertAVL(x, A):
    if A == None:
        return (avl.AVL(x, None, None, 0), True)
    elif x == A.key:
        return (A, False)
    elif x < A.key:
        (A.left, dh) = __insertAVL(x, A.left)
        if not dh:
            return (A, False)
        else:
            A.bal += 1
            if A.bal == 2:
                if A.left.bal == 1:
                    A = rr(A)
                else:
                    A = lrr(A)
            return (A, A.bal == 1)   # shortcut!
    else:   # x > A.key
        (A.right, dh) = __insertAVL(x, A.right)
        if not dh:
            return (A, False)
        else:
            A.bal -= 1
            if A.bal == -2:
                if A.right.bal == -1:
                    A = lr(A)
                else:
                    A = rlr(A)
            return (A, A.bal == -1) # shortcut!

def insertAVL(x, A):
    (A, dh) = __insertAVL(x, A)
    return A
```

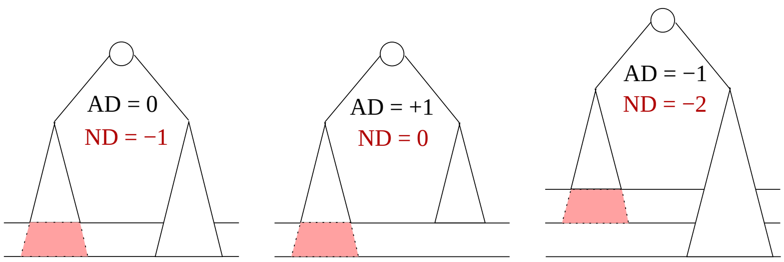
Solution 3.2 (Suppression)

La suppression se fera sur le même modèle que l'insertion :

- La suppression même se fera sur le modèle de celle vue en td pour un arbre binaire de recherche.
- Le rééquilibrage se fera à la remontée.

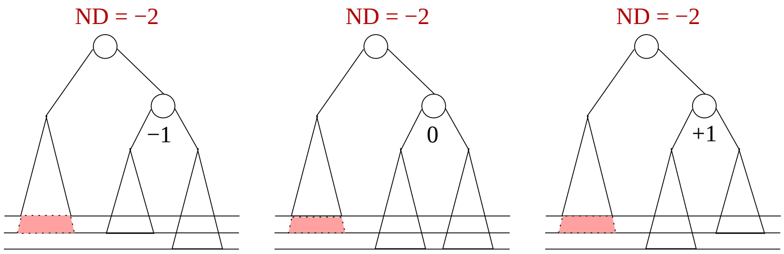
1. On considère une suppression dans le sous-arbre gauche qui a diminué la hauteur de cet arbre.

   Soient : **AD**, l'ancien déséquilibre, **ND**, le nouveau déséquilibre.



$\Delta H = 0$ $\Delta H = 1$ Étude détaillée

Étude du cas où le nouveau déséquilibre (ND) est égal à -2.



RG $\Delta H = 1$ RG $\Delta H = 0$ RDG $\Delta H = 1$

Conclusion :
– h_i la hauteur avant suppression
– h_f la hauteur après suppression
– h_r la hauteur après rotation

Si le nouveau déséquilibre de l'arbre est :

0 : $h_f = h_i - 1$.

-1 : $h_f = h_i$.

-2 : D'après l'exercice 1.3, si le déséquilibre du fils droit est égal à :

- **-1 :** $h_r = h_f - 1$, **et** $h_f = h_i$ donc $h_r = h_i - 1$.
- **0 :** $h_r = h_f$, **et** $h_f = h_i$ donc $h_r = h_i$.
- **1 :** $h_r = h_f - 1$, **et** $h_f = h_i$ donc $h_r = h_i - 1$.

2. *Principe de suppression dans les AVL :*

On considère ici encore que l'arbre ne contient que des valeurs distinctes.

- Recherche de l'élément à supprimer.
  - Si l'élément est en feuille alors suppression physique du nœud le contenant. La hauteur diminue.
  - Si l'élément est dans un point simple alors suppression physique du nœud le contenant : est remplacé par son fils. La hauteur diminue.
  - Si l'élément est dans un nœud double alors remplacer la clé par le maximum du sous-arbre gauche ou le minimum du sous-arbre droit suivant le déséquilibre du nœud courant. Puis, relancer la suppression de la clé remontée dans l'arbre où elle a été prise.

- A la remontée, si la hauteur du sous-arbre (où a eu lieu la suppression) a changé alors modification du déséquilibre du nœud courant (-1 si retour de gauche, +1 sinon). Si son déséquilibre est égal à :

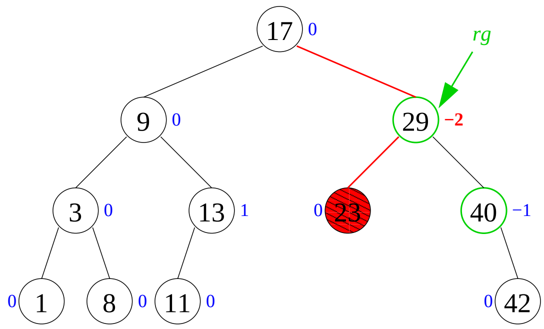
  0 : la hauteur a changé (-1)

  1 ou -1 : pas de variation de hauteur

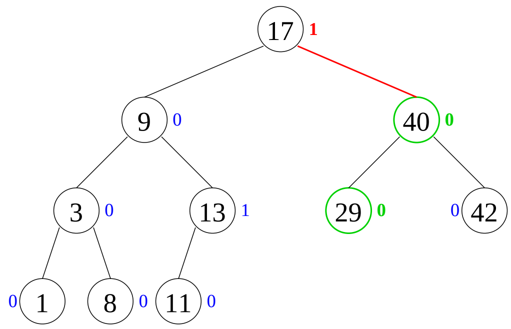
  2 : si déséquilibre du fils gauche est égal à :
  - **-1 :** RGD, la hauteur a changé (-1)
  - **0 :** RD, pas de variation de hauteur
  - **1 :** RD, la hauteur a changé (-1)

  -2 : si déséquilibre du fils droit est égal à :
  - **-1 :** RG, la hauteur a changé (-1)
  - **0 :** RG, pas de variation de hauteur
  - **1 :** RDG, la hauteur a changé (-1)

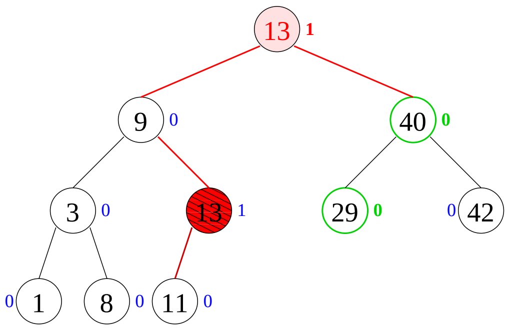
3. Suppression des clés 23, 17, 11 et 1 dans l'arbre du sujet.



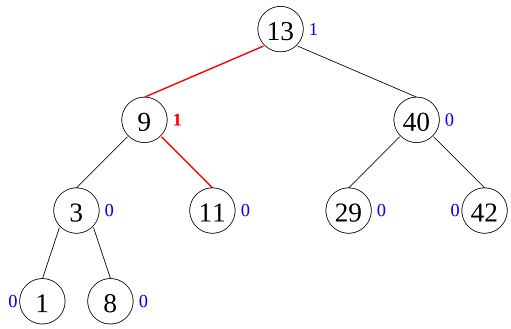
suppression 23



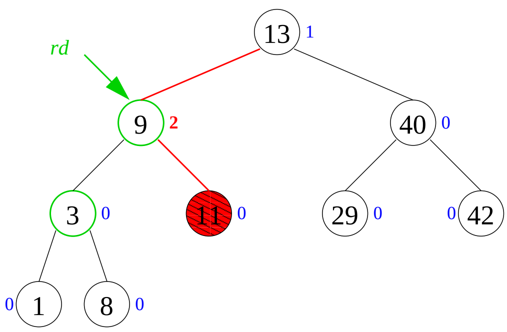
rotation gauche (29)



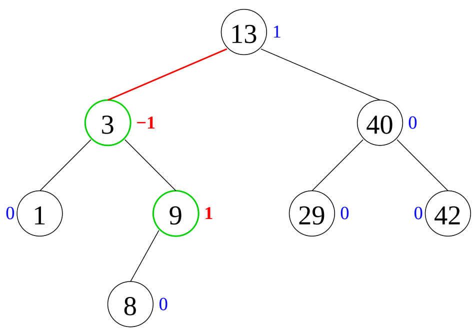
suppression 17
remplacé par 13



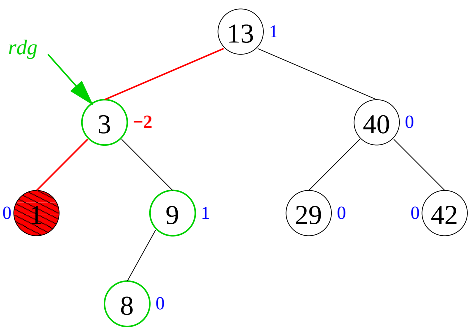
11 remonte



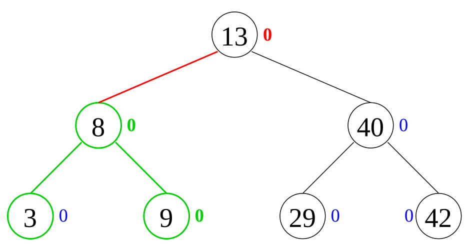
suppression 11



rotation droite (9)



suppression 1



rotation droite-gauche sur 3

4. *La fonction :*

La version non optimisée...

```
def maxBST(B):
    while B.right != None:
        B = B.right
    return B.key

def __deleteAVL(x, A):
    if A == None:
        return (None, False)
    elif x == A.key:
        if A.left != None and A.right != None:
            A.key = maxBST(A.left)
            x = A.key     # to use the case x <= A.key below
        else:
            if A.left == None:
                return(A.right, True)
            else:
                return(A.left, True)
    if x <= A.key:
        (A.left, dh) = __deleteAVL(x, A.left)
        if not dh:
            return (A, False)
        else:
            A.bal -= 1
            if A.bal == -2:
                if A.right.bal == 1:
                    A = rlr(A)
                else:
                    A = lr(A)
            return (A, A.bal == 0)
    else:   # x > A.key
        (A.right, dh) = __deleteAVL(x, A.right)
        if not dh:
            return (A, False)
        else:
            A.bal += 1
            if A.bal == 2:
                if A.right.bal == -1:
                    A = lrr(A)
                else:
                    A = rr(A)
            return (A, A.bal == 0)

def deleteAVL(x, A):
    (A, dh) = __deleteAVL(x, A)
    return A
```

L'algorithme ci-dessus peut être optimisé.
Lorsque l'on remplace la clé courante (la valeur recherchée dans le cas d'un point double) :

– Il est inutile de tester tous les cas : on peut choisir de quel coté descendre afin d'éviter une rotation à ce niveau.
– Il serait plus optimal de supprimer la valeur recherchée directement dans les fonction `max_avl` et `min_avl`, et donc d'y intégrer les mises à jour des déséquilibres et rééquilibrages éventuels.