需要用到的工具：

1. 欧拉公式（公式教程：https://www.bilibili.com/video/av27088046）

$$e^{it} = \cos t + i\sin t,$$
$$i^2 = -1.$$

2. 三次贝塞尔曲线构造函数

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{\alpha_1}(1-t)^3 + 3\boldsymbol{\alpha_2}(1-t)^2 t + 3\boldsymbol{\alpha_3}(1-t)t^2 + \boldsymbol{\alpha_4}t^3,$$
$$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\alpha_4} \in \mathbb{C}, t \in [0,1].$$

3. 拟合函数

$$\boldsymbol{F}(t) = \cdots + \boldsymbol{c_{-2}}e^{-2it} + \boldsymbol{c_{-1}}e^{-1it} + \boldsymbol{c_0}e^{0it} + \boldsymbol{c_1}e^{1it} + \boldsymbol{c_2}e^{2it} + \cdots,$$
$$\boldsymbol{c_m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(t)\, e^{-mit}\, dt.$$

推导：https://www.youtube.com/watch?v=qS4H6PEcCCA&t=1148s

其中计算出来的数列$\boldsymbol{c_m}$将作为最终的输出数据.我们的工作是求$\boldsymbol{c_m}$.

说明：

根据 2，我们发现要拟合的目标函数仅有 t 一个自变量.我们又知道：

$$\boldsymbol{a_{m,n,\alpha,\beta}} := \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \left(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n e^{-mit}\, dt, n \in \{0,1,2,\dots\}$$

的解析值可简单求出.

（其中$(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha})$是把 t 的范围从[α,β]映射到[0,1]；α,β分别是当前贝塞尔构造函数定义域的下确界和上确界）

因此，仅需要确定数列$\boldsymbol{c_m}$和数列$\boldsymbol{a_{m,n,\alpha,\beta}}$之间的关系即可.这可以通过对 2 关于 t 进行降幂排序、并将结果的 t 的某次方替换成$\boldsymbol{a_{m,n,\alpha,\beta}}$得到，进而确立$\boldsymbol{c_m}$和$\boldsymbol{a_{m,n,\alpha,\beta}}$的关系.

计算：

对 2 关于 t 进行降幂排序得到：

$$\boldsymbol{f}(t) = (-\boldsymbol{\alpha_1} + 3\boldsymbol{\alpha_2} - 3\boldsymbol{\alpha_3} + \boldsymbol{\alpha_4})t^3 + 3(\boldsymbol{\alpha_1} - 2\boldsymbol{\alpha_2} + \boldsymbol{\alpha_3})t^2 + 3(-\boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_2})t + \boldsymbol{\alpha_1}$$

设：有 n_b 段贝塞尔曲线、$\boldsymbol{F}(t)$的周期为 2π.

则 F(t)是一个被分成 n_b 段的分段函数，周期是 2π.我们将每一段函数分开求$\boldsymbol{c_m}$并加和，即可得到最终数据.

接下来开始正式计算，先计算$\boldsymbol{a_{m,n,\alpha,\beta}}$的迭代公式.

$$\boldsymbol{I_n} := \boldsymbol{a_{m,n,\alpha,\beta}}$$

经过对上式进行分部积分法可以得到：

$$\boldsymbol{I_n} = \frac{i}{2\pi m}e^{-im\beta} - \frac{ni}{(\beta-\alpha)m}\boldsymbol{I_{n-1}}, n = 1,2,3,4,\dots$$
$$\boldsymbol{I_0} = \frac{i}{2\pi m}\left(e^{-im\beta} - e^{-im\alpha}\right).$$

利用这个迭代式，我们可以求出所有贝塞尔弧段对应的$\boldsymbol{a_{m,n,\alpha,\beta}}$.

这里我们再设一个数列$\{\mathrm{w}_n\}$用来存储（第 n 段曲线到第 1 段曲线的长度的和/全部曲线长度之和）的值，并且令$\mathrm{w}_0 = 0$.

把每一小段分开求并加和，可得：

$$\boldsymbol{c_m} = \sum_{k=1}^{n_b}\Big(\big(-\boldsymbol{\alpha_{k,1}} + 3\boldsymbol{\alpha_{k,2}} - 3\boldsymbol{\alpha_{k,3}} + \boldsymbol{\alpha_{k,4}}\big)\boldsymbol{a_{m,3,w_{k-1},w_k}} + 3\big(\boldsymbol{\alpha_{k,1}} - 2\boldsymbol{\alpha_{k,2}} + \boldsymbol{\alpha_{k,3}}\big)\boldsymbol{a_{m,2,w_{k-1},w_k}} + 3\big(-\boldsymbol{\alpha_{k,1}} + \boldsymbol{\alpha_{k,2}}\big)\boldsymbol{a_{m,1,w_{k-1},w_k}} + \boldsymbol{\alpha_{k,1}}\boldsymbol{a_{m,0,w_{k-1},w_k}}\Big).$$

最后，将获得的复数列c_m转换成二维点列并写入本地即可.

结束语：

通过上面的计算过程，不难发现，只要能表示成关于时间 t 的映射$\boldsymbol{f}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$，都可对其进行降幂排序，将$t^n$替换成$\boldsymbol{a_{m,n,\alpha,\beta}}$得到相应的输出数据$\boldsymbol{c_m}$.