

需要用到的工具：

1. 欧拉公式（公式教程：<https://www.bilibili.com/video/av27088046>）

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \\ i^2 = -1.$$

2. 三次贝塞尔曲线构造函数

$$f(t) = \alpha_1(1-t)^3 + 3\alpha_2(1-t)^2t + 3\alpha_3(1-t)t^2 + \alpha_4t^3, \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}, t \in [0,1].$$

3. 拟合函数

$$F(t) = \dots + c_{-2}e^{-2it} + c_{-1}e^{-it} + c_0e^{0it} + c_1e^{it} + c_2e^{2it} + \dots, \\ c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-mit} dt.$$

推导：<https://www.youtube.com/watch?v=qS4H6PEcCCA&t=1148s>

其中计算出来的数列 c_m 将作为最终的输出数据. 我们的工作求 c_m .

说明：

根据 2，我们发现要拟合的目标函数仅有 t 一个自变量. 我们又知道：

$$a_{m,n,\alpha,\beta} := \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n e^{-mit} dt, n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$$

的解析值可简单求出.

(其中 $(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha})$ 是把 t 的范围从 $[\alpha,\beta]$ 映射到 $[0,1]$; α,β 分别是当前贝塞尔构造函数定义域的下确界和上确界)

因此，仅需要确定数列 c_m 和数列 $a_{m,n,\alpha,\beta}$ 之间的关系即可. 这可以通过对 2 关于 t 进行降幂排序、并将结果的 t 的某次方替换成 $a_{m,n,\alpha,\beta}$ 得到，进而确立 c_m 和 $a_{m,n,\alpha,\beta}$ 的关系.

计算：

对 2 关于 t 进行降幂排序得到：

$$f(t) = (-\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4)t^3 + 3(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3)t^2 + 3(-\alpha_1 + \alpha_2)t + \alpha_1$$

设：有 n_b 段贝塞尔曲线、 $F(t)$ 的周期为 2π .

则 $F(t)$ 是一个被分成 n_b 段的分段函数，周期是 2π . 我们将每一段函数分开求 c_m 并加和，即可得到最终数据.

接下来开始正式计算，先计算 $a_{m,n,\alpha,\beta}$ 的迭代公式.

$$I_n := a_{m,n,\alpha,\beta}$$

经过对上式进行分部积分法可以得到：

$$I_n = \frac{i}{2\pi m} e^{-im\beta} - \frac{ni}{(\beta-\alpha)m} I_{n-1}, n = 1, 2, 3, 4, \dots \\ I_0 = \frac{i}{2\pi m} (e^{-im\beta} - e^{-im\alpha}).$$

利用这个迭代式，我们可以求出所有贝塞尔弧段对应的 $a_{m,n,\alpha,\beta}$ 。

这里我们再设一个数列 $\{w_n\}$ 用来存储（第 n 段曲线的长度/全部曲线长度之和）的值，并且令 $w_0 = 0$ 。

把每一小段分开求并加和，可得：

$$c_m = \sum_{k=1}^{n_b} \left((-\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4) a_{m,3,w_{k-1},w_k} + 3(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3) a_{m,2,w_{k-1},w_k} \right. \\ \left. + 3(-\alpha_1 + \alpha_2) a_{m,1,w_{k-1},w_k} + \alpha_1 a_{m,0,w_{k-1},w_k} \right)。$$

最后，将获得的复数列 c_m 转换成二维点列并写入本地即可。