Apuntes Progamación Matemática

Escrito por Jose Carlos García

Estos apuntes han sido escrito basados en las clases de Programación Matemática del curso 2016-2017 del Grado de Matemáticas en la Universidad de Cádiz.

Índice general

II Tema 2:

Tema 1:

1. Búsqueda de máximos y mínimos.

1.1 Funciones lineales

En primer lugar definimos el concepto de función lineal, que nos ayudará a definir el concepto *problema de programación lineal*

Definición 1.1.1 — Función lineal. Dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es lineal si cumple lo siguiente:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{1.1}$$

Donde $x, y \in D$ son variables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes reales.

En general, una función lineal $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ vendrá definida de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2 + x_2 + ... + c_nx_n \tag{1.2}$$

1.2 Problema de programación lineal

Una vez definido lo que es una función lineal, definimos el concepto de *problema de programación lineal*.

Definición 1.2.1 — Problema de programación lineal. Un problema de programación lineal (PPL) es un problema matemático que se puede expresar de la siguiente forma:
Hallar el máximo / mínimo de una función lineal, $f(x) = c_1x_1 + c_2 + x_2 + ... + c_nx_n$ sujeto a una

serie de restricciones que podemos expresar como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ ... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n \leq b_s \\ ... \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + ... + a_{tn}x_n \leq b_t \\ ... \\ a_{t+1,1}x_1 + a_{t+1,2}x_2 + ... + a_{t+1,n}x_n = b_{t+1} \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde $x_i, a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ para todo $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.
Nótese que lo que expresa entre llaves corresponde a una restricción que puede ser hecha a través de desigualdades o igualdades.

Por otro lado, para evitar problemas con las desigualdades, todas estas restricciones se pueden escribir como igualdades que cumplen ciertas propiedades.
Cuando sucede esto, decimos que nuestro problema de programación lineal está expresado en formato estándar.

Definición 1.2.2 — Problema de programación lineal estándar. Un PPL está expresado en formato estándar si se puede escribir como:
Hallar el máximo / mínimo de una función lineal, $f(x) = c_1x_1 + c_2 + x_2 + ... + c_nx_n$ sujeto a una serie de restricciones que podemos expresar como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde $x_i, b_j \in \mathbb{R}^+, a_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

De modo, que si tenemos un problema expresado en formato estándar podemos escribirlo con matrices; de forma que:

Definición 1.2.3 — Formato matricial de un PPL. Todo PPL se puede expresar como:
mín / máx del vector c^t donde c^t es el vector costo.

$$Ax = b, x \geq 0 \tag{1.3}$$

Donde A es la matriz de los coeficientes, b el vector de recursos y x variable de interés.

Por otro lado, veamos que todo PPL se puede escribir en formato estándar:

Proposición 1.2.1 Todo problema de programación lineal se puede escribir en formato estándar

Demostración. Realicemos una serie de pasos para convertirlo en un problema de programación lineal en formato estándar.

1. En primer lugar, debemos hacer que todos los x_i cumplan que $x_i \geq 0$. Para ello si $x_i < 0$ tomamos $x_i^* = -x_i$

2. Sea $x_i \in \mathbb{R}$ entonces $x_i = x_i^+ - x_i^-$ donde $x_i^+ \geq 0$ y $x_i^- \geq 0$.
3. Supongamos que $a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n \leq b_s$, si añadimos un s_s positivo podemos hacer que se cumpla: $a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n + s_s = b_s$
4. Para otro tipo de desigualdad se concluye igual.
5. Si $b_i < 0$, multiplicamos toda la restricción por -1.

■

Ejemplo: Expresar el siguiente PPL en formato estándar:

$$\text{mín } 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - x_4$$

$$s.a \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_4 \leq 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 8x_4 \geq 5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 \geq -3 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 0; x_2 \geq 0; x_3 \in \mathbb{R}; x_4 \geq 0$$

Resolución: Procedamos del mismo modo que se hizo en la demostración de la proposición anterior; $x_1^* = -x_1 \geq 0$, con x_2 no debemos hacer nada.
Ahora, dado que x_3 es libre, $x_3 = x_3^+ - x_3^-; x_3^+, x_3^- \geq 0$, con x_4 no debemos hacer nada.
De modo, que hemos convertido el problema anterior al siguiente:

$$\text{mín } -2x_1^* + 3x^2 + 9x_3^+ - 9x_3^- - x_4$$

$$s.a \begin{cases} -x_1^* - x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- \leq 17 \\ -x_1^* + x_2 + x_3^+ - x_3^- + x_4 = 100 \\ -3x_1^* + 2x_2 + 9x_3^+ - 9x_3^- - 8x_4 \geq 5 \\ x_1 + x_2 - x_3^+ + x_3^- - 4x_4 \geq -3 \end{cases}$$

$$x_1^*, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4 \geq 0$$

Nos queda convertir las desigualdades en igualdades; para ello debemos añadir unas variables:

$$s.a \begin{cases} -x_1^* - x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- + s_1 = 17 \\ -x_1^* + x_2 + x_3^+ - x_3^- + x_4 = 100 \\ -3x_1^* + 2x_2 + 9x_3^+ - 9x_3^- - 8x_4 - s_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3^+ + x_3^- - 4x_4 + s_4 = -3 \end{cases}$$

1.3 Factibilidad de una variable

Definición 1.3.1 — Factibilidad de una variable. Dado un PPL, $[P]$, sujeto a $Ax = b$ y $x \geq 0$, se dice que x_0 es factible de $[P]$ si $Ax_0 = b$ y $x_0 \geq 0$.

Definición 1.3.2 — Región factible. Al conjunto $\mathscr{R}$ formado por todas las soluciones factibles de $[P]$ se le denomina región factible.

Definición 1.3.3 — Solución óptima. Se dice que x_0^* es solución óptima de $[P]$ si x_0 es solución factible y verifica:
$c^t x_0^* \geq (\leq) c^t x$ para todo $x \in \mathscr{R}$ es un problema de minimizar (maximizar).

1.4 Resolución gráfica de un PPL

Planteamiento de un PPL y resolución gráfica

Una fábrica de juguetes fabrica dos tipos de juguetes: soldados y trenes.
Se vende un soldado a 27 dólares y se usan 10 de dólares de materia prima.
Cada soldado que se produce aumenta los costos variables de mano de obra y los costos generales en 14 dólares. Se vende un tren a 21 dólares y se usan 9 dólares de materia prima. Cada tren producido aumenta los costos variables de mano de obra y los costos generales en 10 dólares. La producción de soldados y trenes de madera necesita dos tipos de trabajo especializado: carpintería y acabado. Un soldado requiere 2 horas de acabado y 1 hora de carpintería. Un tren requiere 1 hora de acabado y 1 hora de carpintería. Cada semana, la fábrica puede conseguir toda la materia prima que se necesita, pero solamente dispone de 100 horas de acabado y 80 horas de carpintería. La demanda de los trenes no tiene límite, pero se pueden vender a lo más 40 soldados semanalmente.
La fábrica quiere maximizar su ganancia semanal (ingresos – costos).

Resolución:

1. Variables de interés:

$s :=$ "n$^{\text{o}}$ de soldados a la semana".
$t :=$ "n$^{\text{o}}$ de trenes a la semana".

2. Función objetivo

$(27-10-14)s+(21-9-10)t = 3s+2t$

3. Restriciones

$$s.a \begin{cases} 1s+1t \leq 80 \\ 2s+1t \leq 100 \\ s \leq 40 \end{cases}$$

Además, $s,t \geq 0$. Por tanto, nuestro PPL queda de la siguiente forma:

$$\text{máx } 3s+2t$$

$$s.a \begin{cases} s+t \leq 80 \\ 2s+t \leq 100 \\ s \leq 40 \end{cases}$$

$$s,t > 0$$

4. Resolución gráfica de un PPL En primer lugar, dibujamos las gráficas de las restricciones:

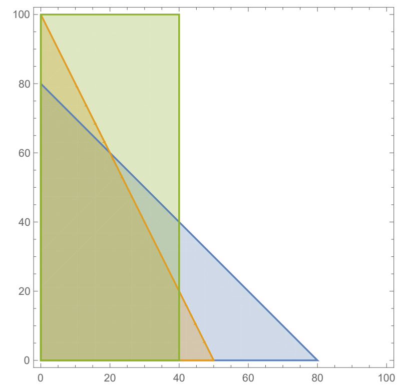


Figura 1.1: Gráfica de las restricciones de nuestro problema

Y nos quedamos con la intersección de todas las gráficas: Para mejorar nuestra función objetivo

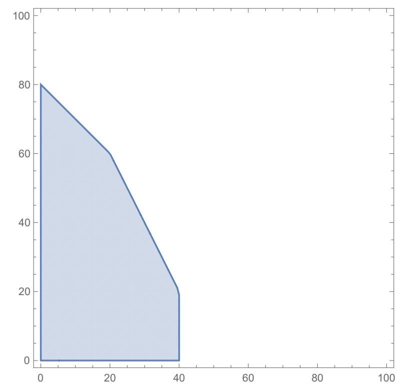


Figura 1.2: Gráfica de las restricciones de nuestro problema

debemos movernos de forma perpendicular a la gráfica de la función $3s+2t$, esto es, que debemos movernos en la dirección del vector gradiente de $3s+2t$, esta dirección es $(3,2)$, por tanto:

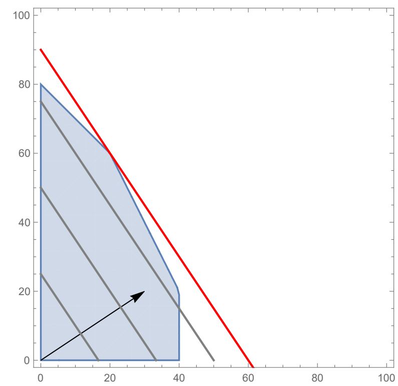


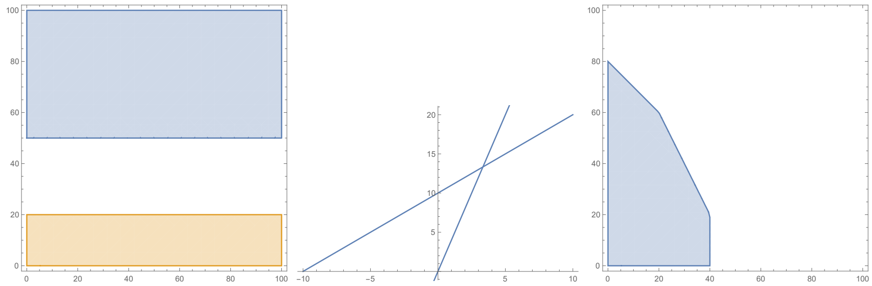
Figura 1.3: Gráfica de las restricciones de nuestro problema

Definición 1.4.1 — Restricción activa. Se dice que una restricción es activa para un punto x_0 si dicha restricción se verifica en forma de igualdad para este punto.

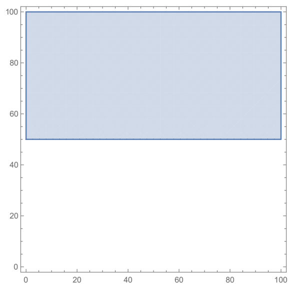
1.5 Clasificación de PPL según sus soluciones

Dado un PPL, [P], si $R = \emptyset$, **el problema es infactible**, es decir, **no tiene solución.** [1.4a]
Por otro lado, si $R \neq \emptyset$, podemos asegurar lo siguiente:
Existen solución:
- Únicas [1.4b]
- Múltiples, es decir, infinitas soluciones que determina el mismo valor de f, basta ver el gráfico [1.4c] y tomar una función objetivo con un vector gradiente paralelo.

No acotado:
Existen soluciones factibles que hacen mejorar a la función objetivo todo lo que queramos, basta tomar el vector director de la función paralelo al lado inferior y superior del paralelogramo. 1.4d



(a) Problema infactible (b) Solución única (c) Solución múltiple



(d) Solución no acotada

Figura 1.4: Clasificación de PPL según sus soluciones

1.6 Formas geométricas de un PPL

Definición 1.6.1 — Conjunto convexo. Se dice que $S \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo si para todo $x, y \in S$ y $x \neq y$ se verifica $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$ para todo $\lambda \in (0,1)$

Proposición 1.6.1 La intersección finita de conjuntos convexo es convexo.

Demostración. Sean $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos con $|I| < \infty$.
Veamos que la intersección de esta familia de conjuntos sigue siendo convexa.
Sean $x, y \in S = \cap S_i$ con $x \neq y$ entonces $x, y \in S_j$ para algún $j \in I$.
S_j es conexo, por tanto, $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_j$, por tanto, $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$ ∎

Definición 1.6.2 — Hiperplano en $\mathbb{R}^n$. Se llama hiperplano de $\mathbb{R}^n$ el conjunto $\mathscr{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x = b\}$

Definición 1.6.3 — Semiespacio cerrado positivo. Se llama semiespacio cerrado positivo el conjunto $\mathscr{H}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \geq b\}$

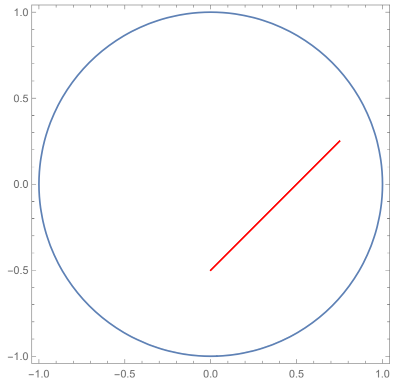


Figura 1.5: Ejemplo de conjunto convexo, donde en rojo se indica un camino convexo

Definición 1.6.4 — Semiespacio cerrado negativo. Se llama semiespacio cerrado negativo el conjunto $\mathscr{H}^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \leq b\}$

Definición 1.6.5 — Polítopo. Se llama polítopo de $\mathbb{R}^n$ a la intersección finita de hiperplanos y semiespacios cerrados.

Observación: Dado un PPL la región factible de $[P]$ es polítopo.

Definición 1.6.6 — Poliedro. Cuando el polítopo es acotado se denomina poliedro.

Proposición 1.6.2 Todo polítopo es convexo.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$.
Por el anterior Lema, seria equivalente a ver si los semiespacios y los hiperplanos son convexos; si vemos esto, ya lo habríamos demostrado.
$\mathscr{H}^+$ es convexo:
Sean $x, y \in \mathscr{H}^+$, $x \neq y$ tenemos que ver que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathscr{R}^+$.
Por un lado, si $x \in \mathscr{R}^+$, entonces $a^t x \geq b$.
Por otro lado, si $y \in \mathscr{R}^+$, tenemos que $a^t y \geq b$.
De estas dos observaciones, $a^t(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda a^t x + (1-\lambda)a^t y \geq \lambda b + (1-\lambda)b = b$.
Por tanto, $\mathscr{H}^+$ es convexo, para ver si los demás son convexo se realiza de una forma similar a la seguida en esta. ■

Definición 1.6.7 — Punto extremo. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de $\mathbb{R}^n$, sea $e \in S$, se dice que e es un **punto extremo** de S si no existen $x, y \in S$, con $x \neq y$ tal que $e = \lambda x + (1-\lambda)y$ para algún $\lambda \in (0,1)$

Definición 1.6.8 — Dirección de ilimitación. Dado un PPL [P] con $R \neq \emptyset$ la región factible de [P].
Se dice que $d \in \mathbb{R}^n$ es dirección de ilimitación de R si para cualquier $x_0 \in R$, y cualquier $\lambda \geq 0$ se tiene que $x_0 + \lambda d \in R$.

Definición 1.6.9 — Dirección de limitación extrema. Dado un PPL [P] y R su región factible se dice que $d \in \mathbb{R}^n$, $d \geq 0$, es dirección de limitación extrema no existe $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^n$, $d_1, d_2 \geq 0$ direcciones de ilimitación de R tales que $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

Proposición 1.6.3 Dado un PPL [P] y R (no acotado) su región factible se tiene que:
$d \in \mathbb{R}^n, d \geq 0$ es dirección de ilimitación si y sólo sí $Ad = 0$

Demostración. Supongamos que d es dirección de ilimitación de R.

$\Rightarrow$

Para todo $x_0 \in R$ tenemos que $(x_0 + \lambda d) \in R$ para todo $\lambda \geq 0$, por tanto:

$$A(x_0 + \lambda d) = b \tag{1.4}$$
$$Ax_0 + \lambda Ad = b \tag{1.5}$$

Sabemos que $x_0 \in R$, entonces $Ax_0 = b$, de aquí:

$$b + \lambda Ad = b \tag{1.6}$$
$$\lambda Ad = 0 \tag{1.7}$$

Como la igualdad anterior es para todo $\lambda \geq 0$, necesariamente $Ad = 0$.
$\Leftarrow$
Escribamos $A(x_0 + \lambda d)$, aplicando la propiedad distributiva tenemos:
$Ax_0 + A\lambda d = Ax_0 + 0 = Ax_0 = b$. ¿$x_0 + \lambda d \geq 0$? Sí, $x_0 \in R$, por tanto $x_0, \lambda, d \geq 0$. ■

1.7 Hipótesis de rango completo

Sea [P] un PPL estándar con matriz de coeficientes A_{mxn}, $rango(A) = m$, $m \leq n$

$$[A]_{mxn} \cdot [X]_{nx1} = [b]_{mx1}$$

Si $rango(A) < m$ entonces existen $m - rango(A)$ filas linealmente dependientes.

Caso I

Si el $rango(A) < rango(A|b)$ entonces, no existe solución, por tanto tenemos un problema **infactible**

Caso II

Si el $rango(A) = rango(A|b) < m$ entonces tenemos un sistema compatible indeterminado.

Conclusión

Para evitar trivialidades, en los problemas de teoría supondremos que $rango(A) = m$

1.8 Soluciones básicas

Definición 1.8.1 — Solución básica. Supongamos que [P] es un PPL en formato estándar y $rango(A) = m$

$$[B\ N]_{mxn} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}_{nx1} = [b]_{mx1}$$

Suponemos además que $rango(B) = m = rango(B|b)$ entonces tenemos que: $B \cdot x_b = b$ es un sistema compatible determinado.

1. Si $m = n$ entonces el sistema es compatible determinado, por la tanto la solución es única.
2. Si $m < n$ entonces el sistema es compatible indeterminado, de aquí, existen infinitas soluciones.

Tomemos ahora el vector $x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^n$, es **solución básica** de $[P]$ y se denomina **solución básica factible.**

Recordemos una propiedad de los menores:
Recordatorio: Dada una matriz A con $rango(A) = m$ entonces existe un menor de A de orden m A, es decir, existen m columnas independientes.
Ejemplo:
Sea $3x_1 + 2x_2$ la función objetivo y sujeto a:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 17 \\ 7x_2 \leq 10 \end{cases} = \begin{cases} x_1 + 4x_2 - s_1 = 17 \\ 7x_2 + s_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $rango(A) = rango(A|b) = 1 < 4$ número de incógnitas, por tanto si consideramos: $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}$, por tanto $x_1 = \frac{79}{7}, x_2 = \frac{10}{7}$, por tanto $(\frac{79}{7}, \frac{10}{7}, 0, 0)^t$ es solución básica.

Definición 1.8.2 — Variables básicas. Dado [P] un PPL y x_0 una solución básica de [P] a las variables de x_0 que están asociadas a las columnnas de B se las denomina **variables básicas**. En caso contrario, **son variables no básicas**.

Definición 1.8.3 — Solución básica degenerada. Se denomina solución básica degenerada a la solución básica que tiene algunas de sus variables básicas nulas. Las variables no básicas siempre valen cero.

Definición 1.8.4 — Soluciones adyacentes. Dadas dos soluciones básicas de un problema [P] se dice que son adyacentes si sus correspondientes matrices básicas son iguales excepto en una columna.

Teorema 1.8.1 — Caracterización solución básica. Sea [P] un PPL con región factible R se tiene entonces que x_0 es solución básica factible si y sólo si x_0 es punto extremo de R.

Demostración. $\Rightarrow$
Sea x_0 solución básica factible de [P], entonces $x_0 \in R$. Procedamos por reducción al absurdo: Supongamos que x_0 no es punto extremo de R, entonces existen $x, y \in R$, con $x \neq y$ tales que $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y, \lambda \in (0,1)$
Como x_0 es solución básica:

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \dots \\ x_{0p} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } x_{0i} > 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, m.$$

Supongamos que $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, x_0 \in R$, por tanto:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}, \lambda \in (0,1)$$

Observemos que $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$, sólo se daría esta igualdad si $x = y = 0$, pues $x, y \in R$, por lo que $x, y \geq 0$, esto contradice nuestras hipótesis

Entonces, si $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ tendríamos un punto extremo.

Sean ahora:

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ ... \\ x_{0p} \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_p \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

Volviendo al caso general, $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$:

$\left.\begin{array}{l} x \in R \Rightarrow Ax = b \\ y \in R \Rightarrow Ay = b \end{array}\right\} = Ax - Ay = 0; A(x-y) = 0.$

Aplicando el producto de matrices, llegamos ahora:

$(x_1 - y_1)(a_1) + (x_2 - y_2)(a_2) + ... + (x_p - y_p)(a_p) = 0$, sabemos que $x_0 \in R$, y sabemos que las columnas asociadas a los p primeros vectores son linealmente independientes, por lo tanto, por la independencia de las columnas $a_1, a_2, ..., a_p$, se tiene necesariamente que $x_i - y_i = 0$.

(Dado que al ser linealmente independiente, los coeficientes que multiplican las columnas deben ser obligatoriamente 0), por tanto, $x = y$, esto contradice nuestras hipótesis

$\Leftarrow$

Usando la misma notación que antes, sea x_0 un punto extremo de R.

1. Si las columnas de A asociadas a las componentes x_{0i} con $i = 1, ...p$ son linealmente independientes, estaría demostrado, pues es solución factible que proviene de columnas linealmente independientes.
2. (Reducción al absurdo) En caso contrario, se tiene que $a_1, a_2, ..., a_p$ son linealmente dependientes, existen unos escalares no todos nulos $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tales que:

   $$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 + a_2 + ... + \lambda_p a_p = 0$$

   Sea el vector $\lambda \in \mathbb{R}^n$, donde las p primeras componentes coinciden con la igualdad anterior.

   Se define: $\left\{\begin{array}{l} x_0^+ = x_0 + \varepsilon\lambda \\ x_0^- = x_0 - \varepsilon\lambda \end{array}\right.$ con $\varepsilon \geq 0$.

Queremos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que $\begin{matrix} x_0^+ \in R \\ x_0^- \in R \end{matrix}$, es decir, $\begin{cases} Ax_0^+ = b \\ x_0^+ \geq 0 \\ Ax_0^- = b \\ x_0^- \geq 0 \end{cases}$

Observemos lo siguiente:

$$Ax_o^+ = A(x_0 + \varepsilon\lambda) = Ax_0 + \varepsilon A\lambda = b$$

Por el mismo razonamiento, podemos ver que $Ax_0^- = b$.
Veamos que $x_0^+, x_0^- \geq 0$. Lo veremos para x_0^+.

$$x_0^+ = x_0 + \varepsilon\lambda = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \dots \\ x_{0p} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_p \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si *existen* $\lambda_i < 0$ observamos que:

$$x_{0i} + \varepsilon\lambda_i \Rightarrow \varepsilon = -\frac{x_{0i}}{\lambda_i}$$

Si tomamos el mínimo de los epsilon, esto es $\varepsilon_1 = \text{mín}\{-\frac{x_{0i}}{\lambda_i} : \lambda_i < 0\} \Rightarrow x_0^+ = x_0 + \varepsilon\lambda \in R$, por tanto, para ε_1, se tiene que $x_0^+ \in R$.
Podemos razonar igual para x_0^- para concluir que $x_0^- \in R$.
Finalmente, si tomamos $\varepsilon^* = \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, tenemos que $x_0^+, x_0^- \in R$, pero tenemos que $x_0 = \frac{1}{2}x_0^+ + \frac{1}{2}x_0^-$, es por lo tanto una combinación convexa con $x_0^+ \neq x_0^-$. Por tanto, hemos llegado una contradicción pues x_0 es un punto extremo.

■

Teorema 1.8.2 — Teorema fundamental de la programación lineal. Sea [P] un PPL en formato estándar.

$$\text{máx/mín } f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$s.a \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} A \in \mathscr{M}_{mxn} \\ rango(A) = m \\ b \geq 0 \end{matrix}$$

1. Si x_0 es solución factible de [P] entonces existe x_0^* solución básica de [P].
2. Si x_0 es solución factible óptima de [P] entonces existe x_0^* solución básica factible óptima de [P]

Demostración. Para probar este resultado, observemos:

1. Sea x_0 solución factible de [P], entonces x_0 se puede expresar como

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \dots \\ x_{0p} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_{0i} > 0 \\ 1 \leq i \leq p \leq n \end{matrix}$$

.

Si las columnas de A $a_1, a_2, ..., a_p$ asociadas a las componentes de x_0 mayores que cero son linealmente independientes, entonces x_0 sería solución factible básica. $\boxed{\text{Fin}}$
Si por el contrario, $a_1, ..., a_p$ son linealmente dependientes, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ escalares no todos nulos tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_p a_p = 0$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}^n$ el vector formado por λ_i con $i = 1, ..., p$ donde las $n - p$ columnas valen 0, $x_0^+ = x_0 + \varepsilon\lambda$, $\varepsilon \geq 0$.
¿$x_0^+ \in R$?
Vamos a repetir el procedimiento que seguimos en la demostración del teorema anterior:
$Ax_0^+ = A(x_0 + \varepsilon\lambda) = Ax_0 + \varepsilon A\lambda = b$ pues $\varepsilon A\lambda = 0$ y $Ax_0 = b$.
¿$x_0^+ \geq 0$?
Si existen $\lambda_i < 0$, tomamos $\varepsilon_1 = \min\{-\frac{x_{0i}}{\lambda_i} : \lambda_i < 0\}$.
Al tomar este ε_1, habría al menos una componente que se anule.
Entonces, $x_0^+ = x_0 + \varepsilon_1\lambda$ tiene como mucho $p - 1$ componentes mayores que cero, y el resto nulas. Si las componentes columnas de A asociadas a las componentes mayores que son linealmente independientes =>fin.
En caso contrario, reiteramos el razonamiento hasta llegar a un conjunto de columnas de A linealmente independientes (Cuando nos queden m).
Si todos los $\lambda_i \geq 0$

$$x_0^- = x_0 - \varepsilon\lambda_i, \varepsilon \geq 0$$

$$Ax_0^- = Ax_0 - \varepsilon A\lambda = b$$

Sea $\varepsilon_2 = \min\{\frac{x_{0i}}{\lambda_i} : \lambda_i \geq 0\}$ tal que $x_0^- = x_0 - \varepsilon_2\lambda$.
Este x_0^- tiene al menos una componente al menos mayor que cero. Reiterando el razonamiento =>fin.

2. Sean $x_\varepsilon^+, x_\varepsilon^- \in R$ los correspondientes x_0^-, x_0^+ del apartado anterior, para cierto $\varepsilon \geq 0$.
Sea $z_0 = c^t x_0$ el valor de la función objetivo para x_0.
Supongamos que [P] es un problema de maximizar.

$$c^t x_\varepsilon^+ = c^t(x_0 + \varepsilon\lambda) = c^t x_\varepsilon + \varepsilon c^t\lambda = z_0 + \varepsilon c^t\lambda$$

$$c^t x_\varepsilon^- = c^t(x_0 - \varepsilon\lambda) = c^t x_0 - \varepsilon c^t\lambda = z_0 - \varepsilon c^t\lambda$$

$\boxed{\text{Caso 1}}$
Supongamos que $c^t\lambda > 0$ entonces $c^t x_0 = z_0 < c^t x_\varepsilon^+$, pero esto es una contradicción pues es un problema de maximizar, y como x_0 es solución óptima, no puede haber una solución

mayor.
$\boxed{\text{Caso 2}}$
Supongamos que $c^t\lambda < 0$ entonces $c^t x_0 = z_0 < c^t x_\varepsilon^-$, que también es una contradicción por el mismo motivo que antes.

Por lo tanto, $c^t\lambda = 0$, entonces $c^t x_0 = c^t x_\varepsilon^+ = c^t x_\varepsilon^- = z_0$, por lo que x_ε^+ y x_ε^- son soluciones factibles óptimas.
Ahora reiteramos el proceso de la primera parte de la demostración y obtendremos $x_\varepsilon^+, x_\varepsilon^-$ soluciones factibles óptimas básicas.

■

Corolario 1.8.3 Dado un PPL con región factible R se tiene que si $R \neq \emptyset$ entonces siempre existen puntos extremos de R.

Corolario 1.8.4 En las mismas condiciones del corolario anterior, si existe solución óptima de [P] entonces existe un punto extremo de R que es solución óptima de [P]

Corolario 1.8.5 En las mismas condiciones del corolario anterior, el conjunto de puntos extremos de R es finito y a lo sumo tiene $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ puntos

1.9 Método Simplex

El método Simplex nos calcula soluciones óptimas de un problema, para ello:

1. Como cambiar de solución básica adyacente en soluciones básicas adyacentes.
2. Como conseguir que la solución básica a la que he cambiado sea factible. ($x \geq 0$)
3. Que variable (columna) debe entrar para mejorar la función objetivo.

1.9.1 Pivotar, "saltar"de solución básica factible en solución básica factible

Sea $[P]$ un PPL en formato estándar:

$$min(max)c^t x$$

$$s.a \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A \in \mathscr{M}_{mxn}, b \geq 0, rango(A) = m$$

Podemos suponer sin perdida de generaldiad que la matriz A se puede escribir como

$$[A][x] = [B_{mxn}\; N_{mx(n-m)}] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = [b]$$

La matriz B es invertible, por tanto podemos multiplicar por B^{-1} y tenemos:

$$[Id_{mxn}\; N_{mx(n-m)}] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = [B^{-1}][b]$$

Ejemplo

$$max/min\ c^t x$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + 5x_4 = 57 \\ x_1 - 4x_4 = 12 \\ x_1 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Tabla simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	0	5	57
x_2	0	1	0	-4	12
x_3	0	0	1	1	5

Supongamos que x_4 mejora a la solución actual. Cambiamos por ejemplo, x_4 por x_3

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	0	5	57
x_2	0	1	0	-4	12
x_3	0	0	1	1	5
				$\uparrow$	

Hacemos operaciones Gaussianas para poner la columna x_4 como básica:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	-5	0	32
x_2	0	1	4	0	32
x_4	0	0	1	1	5

Ahora volvemos a la solución básica inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	0	5	57
x_2	0	1	0	-4	12
x_3	0	0	1	1	5

Ahora queremos que entre en la base la variable x_4 y que salga la variable x_2

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	$\frac{5}{4}$	0	0	72
x_4	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	-3
x_3	0	$\frac{1}{4}$	1	0	8

1.9.2 Dada una variable no básica que mejore la solución actual, ¿Qué variable no básica debe salir?

Sea $[P]$ un PPL en formato estándar:

$$min\ (max)c^t x$$

$$s.a \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La matriz

$$[A][x] = [b]$$

Podemos reescribirla de forma que

$$[B\ N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = [b]$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la

$$B = I_{mxn} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos escribir en formato tabla en formato simplex:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & \dots & \dots & \dots & a_{1\ m+1} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & a_{2\ m+1} & \dots & a_{2q} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & a_{m\ m+1} & \dots & a_{mq} & \dots & a_{mn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = [b]$$

	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_q	...	x_n	b
x_1	1	...	...	...	$a_{1\ m+1}$	...	a_{1q}	...	a_{1n}	b_1
...	0	1	...	...	$a_{2\ m+1}$	...	a_{2q}	...	a_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	...	...	0	1	$a_{m\ m+1}$	...	a_{mq}	...	a_{mn}	b_m

Supongamos que x_q mejora la solución actual, entonces x_q quiere entrar en la base.
¿Qué variable básica $x_1, \dots, x_m$ debe salir?

$$b_1(a_1) + b_2(a_2) + \dots + b_m(a_m) = b$$

$$b_{1\ q}(a_1) + b_{2\ q}(a_2) + \dots + b_{m\ q}(a_m) = b$$

$$b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_n a_m = b\ (1)$$

$$a_{1\ q} a_1 + a_{2\ q} a_2 + \dots + a_{n\ q} a_m = a_q\ (2)$$

Sea $\varepsilon \geq 0$ y realicemos la siguiente operación:

$$(1) - \varepsilon(2)$$

$$(b_1 - \varepsilon a_{1\ q})a_1 + (b_2 - \varepsilon a_{2\ q}) + \dots + (b_m - \varepsilon a_{m\ q})a_m = b - \varepsilon a_q$$

$$(b_1 - \varepsilon a_{1\ q})a_1 + (b_2 - \varepsilon a_{2\ q}) + ... + (b_m - \varepsilon a_{m\ q})a_m + \varepsilon a_q = b$$

Definamos ahora el vector:

$$x_\varepsilon = \begin{pmatrix} b_1 - \varepsilon a_{1\ q} \\ b_2 - \varepsilon a_{2\ q} \\ ... \\ b_m - \varepsilon a_{m\ q} \\ ... \\ \varepsilon \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ ... \\ m \\ ... \\ q \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caso I: Si $a_{iq} < 0$ para $1 \leq i \leq m$, entonces $x_\varepsilon \in R$ para todo $\varepsilon \geq 0$.
En este caso, el problema es no acotado, encuentro una solución que hace que la función objetivo mejore todo lo queramos.
Caso II: Si existen algunos $a_{iq} > 0$, queremos que:

$$b_i - \varepsilon a_{iq} = 0$$

Tomando

$$\varepsilon = \text{mín}\{\frac{b_i}{a_{iq}} : a_{iq} > 0\}$$

Entonces entra en la base la variable x_q, sale de la base la variable asociada a la ecuación $b_i - \varepsilon a_{iq} = 0$
(En caso de empate, puede salir la que queramos)

Forma alternativa de la fase II

Supongamos que x_q entra en la base y que x_k es la variable básica que debe salir.

	x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_q	...	x_n	b
x_1	1	...	...	...	...	...	$a_{1\ m+1}$	...	a_{1q}	...	a_{1n}	b_1
...	0	1	...	...	...	...	$a_{2\ m+1}$	...	a_{2q}	...	a_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\leftarrow x_k$	...	...	...	1	...	...	...	...	a_{kq}	...	...	b_k
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	...	...	....	...	0	1	$a_{m\ m+1}$	...	a_{mq}	...	a_{mn}	b_m

Aplicamos operaciones Gaussianas

$$F'_k = \frac{1}{a_{kq}} F_k$$

	x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_q	...	x_n	b
x_1	1	...	...	...	...	...	$a_{1\ m+1}$	...	a_{1q}	...	a_{1n}	b_1
...	0	1	...	...	...	...	$a_{2\ m+1}$	...	a_{2q}	...	a_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\leftarrow x_k$	...	...	...	$\frac{1}{a_{kq}}$	...	...	...	...	$\frac{a_{kq}}{a_{kq}}$	...	...	$\frac{b_k}{a_{kq}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	...	...	....	...	0	1	$a_{m\ m+1}$	...	a_{mq}	...	a_{mn}	b_m

Hacemos ahora la siguiente operación:

$$F_j = F_j - a_{jq}F_k \; \forall j \neq q$$

	x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_q	...	x_n	b
x_1	1	...	...	...	...	...	$a_{1\ m+1}$	...	a_{1q}	...	a_{1n}	$b_1 - a_{1q}\frac{b_k}{a_{kq}}$
...	0	1	...	...	...	...	$a_{2\ m+1}$	...	a_{2q}	...	a_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\leftarrow x_k$	...	...	...	...	...	...	...	...	1	...	...	$\frac{b_k}{a_{kq}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	...	...	....	...	0	1	$a_{m\ m+1}$	...	a_{mq}	...	a_{mn}	$b_m - a_{mq}\frac{b_k}{a_{kq}}$

Como $b_i \geq 0$ entonces, $a_{kq} > 0$ de modo que

$$b_i - a_{iq}\frac{b_k}{a_{kq}} \geq 0$$

$$b_i \geq a_{iq}\frac{b_k}{a_{kq}}$$

1. Si a_{iq} para todo $i = 1,...,m$ para $i \neq k$ entra la nueva solución factible
2. Si existen algunos $a_{iq} > 0$

$$b_i - a_{iq}\frac{b_k}{a_{kq}} \geq 0$$

$$b_i \geq a_{iq}\frac{b_k}{a_{kq}}$$

Dado que $a_{iq} > 0$

$$\frac{b_i}{a_{iq}} \geq \frac{b_k}{a_{kq}}$$

La fila asociada a mín$\{\frac{b_i}{a_{iq}} : a_{iq} > 0\}$ indica la variable que debe salir.

1.9.3 ¿Qué variable no básica mejora a la solución actual?

Partimos del siguiente sistema:

	x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_q	...	x_n	b
x_1	1	...	...	...	...	...	$a_{1\ m+1}$	...	a_{1q}	...	a_{1n}	b_1
...	0	1	...	...	...	...	$a_{2\ m+1}$	...	a_{2q}	...	a_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_k	...	...	...	1	...	...	...	...	a_{kq}	...	...	b_k
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	...	...	....	...	0	1	$a_{m\ m+1}$	...	a_{mq}	...	a_{mn}	b_m

La solución básica asociada a la tabla anterior viene dada por:

$$x_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $f(x_1,x_2,...,x_n) = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ para $c_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1,...,n$
¿Qué valor alcanza x_0 en la función objetivo?

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = c_1x_1 + ... + c_mx_m + c_{m+1}\cdot 0 + ... + c_n \cdot 0 = z_0$$

Vamos a despejar los x_i para $i = 1,...,m$ en términos del resto de variables.

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{1j}x_j \\ x_2 = b_2 - \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{2j}x_j \\ \dots \\ x_m = b_m - \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{mj}x_j \end{cases}$$

¿Qué valor alcanza la función objetivo en la solución general x?

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = c_1(b_1 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{1j}x_j) + c_2(b_2 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{2j}x_j) + ... + c_m(b_m - \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}x_j) + x_{m+1}c_{m+1} + ... + c_nx_n$$

Aplicando la propiedad distributiva ahora:

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = c_1(b_1 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{1j}x_j) + c_2(b_2 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{2j}x_j) + ... + c_m(b_m - \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}x_j) + x_{m+1}c_{m+1} + ... + c_nx_n =$$

$$= c_1b_1 + c_2 + ... + c_mb_m - c_1 \sum_{j=m+1}^{n} a_{1j}x_j - c_2 \sum_{j=m+1}^{n} a_{2j}x_j - ... - c_m \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}x_j + x_{m+1}c_{m+1} + ... + c_nx_n =$$

$$= z_0 + \left[c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_ia_{i\ m+1}\right] x_{m+1} + \left[c_{m+2} - \sum_{i=1}^{m} c_ia_{i\ m+2}\right] x_{m+2} + ... + \left[c_n - \sum_{i=1}^{m} c_ia_{in}\right] x_n =$$

$$= z_0 - \left[\sum_{i=1}^{m} c_ia_{i\ m+1} - c_{m+1}\right] x_{m+1} - \left[\sum_{i=1}^{m} c_ia_{i\ m+2} - c_{m+2}\right] x_{m+2} - ... - \left[\sum_{i=1}^{m} c_ia_{in} - c_n\right] x_n =$$

Definimos $r_q = \sum\limits_{i=1}^{m} c_ia_{i\ q} - c_q$ como costo relativo asociado a la variable x_i.
Si el problema es de minimizar, queremos que todos los $r_q < 0$.
Por otro lado, si el problema es de maximizar queremos que todos los $r_q > 0$, de esta manera aumentamos el valor objetivo.
Por tanto, salen aquellos que no cumplan la condición de optimalidad.

Teorema 1.9.1 Dado un PPL

$$min(max)\ c^t x$$

$$s.a \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Si x_0 es una solución básica factible de [P] entonces

1. Si todos los costos relativos r_j de las variables básica son positivas o nulas (negativas o nulas) en el caso de maximizar (en el caso de minimizar) entonces x_0 es solución óptima de [P].
2. Si alguno de los costos relativos es negativo (positivo) en el caso de maximizar (minimizar) entonces la solución actual no es óptima y la variable asociada a dicho coste relativo mejorará la solución actual.
   a) Si existe $\varepsilon\{\frac{b_i}{a_{ij}} : a_{ij} > 0\}$ entonces la variable que debe de salir es aquella asociada a la fila donde se alcanza el mínimo, ε
   b) Si todos los componentes $a_{ij} < 0$ asociados a la variable que *entrar* entrar entonces el problema es no acotado. Podemos encontrar entonces una dirección de ilimitación.

Recordemos,

$$r_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$$

Los costos relativos asociados a las variables básicas siempre es 0.

1.10 Resolución de un PPL aplicando el Método Simplex

1.10.1 Problema de los soldados y trenes

$$max\ 3x_1 + 2x_2$$

$$s.a \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En primer lugar, escribimos el problema en formato estándar:

$$max\ 3x_1 + 2x_2$$

$$s.a \begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 100 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 80 \\ x_1 + s_3 = 40 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Escribimos la tabla simplex:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	2	1	1	0	0	100
s_2	1	1	0	1	0	80
s_3	1	0	0	0	1	40

En este caso, la solución básica actual es: $x_0^t = (0, 0, 100, 80, 40)$.

Calculamos ahora los costos relativos:

1. En cada variable escribimos su coste asociado.
2. En las variables básica se escribe también su coste relativo.
3. Multiplicamos los costos escritos en las variables básica con el valor asociado en la matriz en la misma fila y columna, y a continuación, restamos el coste asociado a la variable de la columna.

	3	2	0	0	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$0\ s_1$	2	1	1	0	0	100
$0\ s_2$	1	1	0	1	0	80
$0\ s_3$	1	0	0	0	1	40
	-3	-2	0	0	0	0

Quiere entrar la variable x_1 por ser la más negativa, calculamos $100/2$, $80/1$ y $40/1$ dado, que $40/1$ es el mínimo debe salir s_3.
Debemos convertir la columna asociada a la vaariable x_1 en $(0,0,1)^t$.

$$F_1' = F_1 - 2F_3$$

$$F_2' = F_2' - F_3$$

	3	2	0	0	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$0\ s_1$	0	1	1	0	-2	20
$0\ s_2$	0	1	0	1	-1	40
$3\ x_1$	1	0	0	0	1	40
	0	-2	0	0	3	120

Quiere entrar la variable x_2 por ser la más negativa, calculamos $20/1$, $40/1$ dado, que $20/1$ es el mínimo debe salir s_1.
Debemos convertir la columna asociada a la variable x_2 en $(1,0,0)^t$.

	3	2	0	0	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$2\ x_1$	0	1	1	0	-2	20
$0\ s_2$	0	0	-1	1	1	20
$3\ x_1$	1	0	0	0	1	40
	0	0	2	0	-1	160

Quiere entrar la variable s_3 por ser la más negativa, y dado que $20/1$ es el mínimo, debe salir s_2.

	3	2	0	0	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$2\ x_1$	0	1	-1	2	0	60
$0\ s_2$	0	0	-1	1	1	20
$3\ x_1$	1	0	0	0	1	20
	0	0	1	1	0	180

1.10.2 Ejemplo

$$max\ 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$s.a \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Pasamos a formato estándar

$$max\ 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$s.a \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Construimos la tabla simplex

	3	1	3	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
0 s_1	2	1	1	1	0	0	2
0 s_2	1	2	3	0	1	0	5
0 s_3	2	2	1	0	0	-1	6
	-3	-1	-3	0	0	0	0

Vemos que la variable x_1 y x_3 quieren entrar, elegimos una, en este caso x_1, y debe salir s_1.

$$F_1' = \frac{F_1}{2}$$

	3	1	3	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
3 x_1	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	1
0 s_2	1	2	3	0	1	0	5
0 s_3	2	2	1	0	0	-1	6
	-3	-1	-3	0	0	0	0

$$F_2' = F_2 - F_1$$

$$F_3' = F_3 - 2F_1$$

	3	1	3	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
3 x_1	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	1
0 s_2	0	$3/2$	$5/2$	$1/2$	1	0	4
0 s_3	0	1	0	-1	0	1	4
	0	$1/2$	$-3/2$	$3/2$	0	0	3

Debe entrar en la base la variable x_3, haciendo cociente, llegamos que la variable que debe salir es s_2, por tanto debemos convertir la columna de x_3 en la forma $(0,1,0)^t$

$$F_2' = \frac{2}{5}F_2$$

	3	1	3	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
$3\ x_1$	1	1/2	1/2	1/2	0	0	1
$3\ x_3$	0	3/5	1	−2/10	2/5	0	8/5
$0\ s_3$	0	1	0	−1	0	1	4
	0	1/2	−3/2	3/2	0	0	3

$$F_1' = F_1 - \frac{1}{2}F_2$$

	3	1	3	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
$3\ x_1$	1	1/5	0	6/10	−2/5	0	1
$3\ x_3$	0	3/5	1	−2/10	2/5	0	8/5
$0\ s_3$	0	1	0	−1	0	1	4
	0	7/5	0	6/5	3/5	0	27/5

Por tanto, la solución óptima es:

$$x_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{8}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.10.3 Ejemplo de problema no acotado

$$min\ 2x_1 - 5x_2 + x_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 - x_2 \le 4 \\ 4x_1 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \le 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Pasamos el problema a formato estándar:

$$min\ 2x_1 - 5x_2 + x_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 - x_2 + s_1 = 4 \\ 4x_1 s_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + s_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Escribimos la tabla simplex:

	2	−5	1	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
0 s_1	1	−1	0	1	0	0	4
0 s_2	4	0	0	0	1	0	2
0 s_3	1	−2	−1	0	0	1	1
	−2	5	−1	0	0	0	0

Dado que el problema es de minimizar, debe entrar la variable x_2, sin embargo, ninguna variable puede salir, pues todas las componentes de a_2 son ceros o números negativos.
Esto implica que el problema es no acotado. Podemos encontrar soluciones factible del problema [P] de manera qe la función objetivo mejore todo lo que queramos.

$$4a_4 + 2a_5 + a_6 = b$$

$$4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [1]$$

$$-1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad [2]$$

$$[1] - \varepsilon[2]$$

$$(4+\varepsilon)2a_5 + (1+2\varepsilon)a_6 = b - \varepsilon a_2$$

$$\varepsilon a_2 + (4+\varepsilon)a_4 + 2a_5 + (1+2\varepsilon)a_6 = b$$

$$x_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \\ 4+\varepsilon \\ 1+2\varepsilon \end{pmatrix}$$

Evaluando x_ε en la función objetivo tenemos que $f(x_\varepsilon) = -5\varepsilon$, los coeficientes de los ε son la dirección de ilimitación.

1.10.4 Ejemplo de ciclo en el método SIMPLEX

$$max\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4$$

$$s.a \begin{cases} -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ 1/3x_1 + x_2 - 1/3x_3 - 2x_4 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Pasamos el problema a formato estándar, y construimos la tabla SIMPLEX:

	2	3	−1	−12	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
0 s_1	−2	−9	1	9	1	0	0
0 s_2	1/3	1	1/3	−2	0	1	0
	−2	−3	1	12	0	0	0

	2	3	−1	−12	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
0 s_1	1	0	−2	−9	1	9	0
3 x_2	1/3	1	−1/3	−2	0	1	0
	−1	0	0	6	0	3	0

	2	3	−1	−12	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
2 x_1	1	0	−2	−9	1	9	0
3 x_2	0	1	1/3	1	−1/3	−2	0
	0	0	−2	−3	1	12	0

	2	3	−1	−12	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
2 x_1	1	0	−2	−9	1	9	0
−12 x_4	0	1	1/3	1	−1/3	−2	0
	0	3	−1	0	0	6	0

...

	2	3	−1	−12	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
0 s_1	−2	−9	1	9	1	0	0
0 s_2	1/3	1	1/3	−2	0	1	0
	−2	−3	1	12	0	0	0

1.10.5 Método anticiclado

1. Elegimos un orden entre las variables.
2. En caso de empate en los criterios de entrada o de salida de variables, elegimos la variable más pequeña usando el orden definido en la lista de la fase I.

1.11 Resolución de PPL con restricciones $(=)$ y $(\geq)$

Sea [P] el siguiente PPL:

$$min\ 3x_1 + 5x_2$$

$$s.a \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \end{cases}$$

Lo pasamos a formato estándar, y construimos la tabla SIMPLEX.

	x_1	x_2	s_1	s_3	b	
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	1	0	1	0	6
s_3	-3	-2	0	0	1	-18

Es básica pero no factible, por tanto no puede inicializar el simplex.

1.11.1 Método de inicialización del SIMPLEX

1. Método de las penalizaciones o de la M grande.
2. Método de las dos fases.

Método de las penalizaciones

Modificamos el problema original añadiendo una variable artificial (z_i) por cada restricción de $(=)$ y de $(\geq)$.
Dichas variables artificiales tendrán un costo $M >> 0$ (muy grande) y entrarán en la función objetivo sumando (restando) si el problema es de minimizar (maximizar).
Al problema con las variables artificiales se le denomina problema ampliado.

Volviendo al problema anterior,

$$min\ 3x_1 + 5x_2 + Mz_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + s_1 = 4 \\ x_2 + s_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - s_3 + z_3 = 18 \end{cases}$$

Recordemos lo siguiente:

- Las variables de holgura sirven para transformar las restricciones $(\leq)$ o $(\geq)$ en $(=)$
- Las variables artificiales sirven para iniciar el método SIMPLEX con una solución básica factible.

Observación:

- El problema ampliado no es equivalente al problema original.
- Solo coincide cuando en la solución del problema ampliado las variables artificiales sean 0, z_i para todo i.
- Si x_0 es solución óptima del problema ampliado y todos los $z_i = 0$, entonces x_0 es solución óptima del problema original.
- El problema ampliado siempre tiene solución.
- Si x_0 es solución óptima del problema ampliado y existe algún $z_i \neq 0$
  Entonces el problema original NO tiene solución.
- Si el problema ampliado es no acotado entonces el problema original también es no acotado.

Resolvamos entonces:

$$min\ 3x_1 + 5x_2 + Mz_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + s_1 = 4 \\ x_2 + s_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - s_3 + z_3 = 18 \end{cases}$$

	3	5	0	0	0	M	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z_3	b
$0\ s_1$	1	0	1	0	0	0	4
$0\ s_2$	0	1	0	1	0	0	6
$M\ z_3$	3	2	0	0	-1	1	18
	$3M-3$	$2M-5$	0	0	$-M$	0	$18M$

En este caso entra x_1 y sale s_1

$$F_3' = F_3 - 3F_1$$

	3	5	0	0	0	M	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z_3	b
$3\ x_1$	1	0	1	0	0	0	4
$0\ s_2$	0	1	0	1	0	0	6
$M\ z_3$	0	2	-3	0	-1	1	6
	0	$2M-5$	$-3M+3$	0	$-M$	0	$6M+12$

Entra x_2 y sale z_3.
El lector debe continuar este ejercicio.

Método de las dos fases

1. Fase 1
   a) Añadimos una variable artificial z_i para cada restricción de $(=)$ o $(\geq)$ igual que en el método de las penalizaciones.
   b) Cambiamos la función objetivo por

$$min \sum_{i=1}^{k} z_i$$

   c) Si el problema de la fase 1 tiene solución optima con alguna variable artificial no nula, entonces el problema original no tiene solución.
   d) Si tiene solución óptima y todas las variables artificiales son cero, entonces pasamos a la fase 2.
2. Fase 2
   a) Cambiamos la función objetivo de la fase 1 por la función objetivo original y eliminamos las columnas de las variables artificiales.

Ejemplo:

$$min\ 3x_1 + 5x_2 + Mz_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + s_1 = 4 \\ x_2 + s_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - s_3 + z_3 = 18 \end{cases}$$

Fase 1

$$min\ z_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + s_1 = 4 \\ x_2 + s_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - s_3 + z_3 = 18 \end{cases}$$

	0	0	0	0	0	1	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z_3	b
0 s_1	1	0	1	0	0	0	4
0 s_2	0	1	0	1	0	0	6
1 z_3	3	2	0	0	-1	1	18
	3	2	0	0	-1	0	18

	0	0	0	0	0	1	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z_3	b
0 x_1	1	0	1	0	0	0	4
0 s_2	0	1	0	1	0	0	6
1 z_3	0	2	-3	0	-1	1	6
	0	2	-3	0	-1	0	6

	0	0	0	0	0	1	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z_3	b
0 x_1	1	0	1	0	0	0	4
0 s_2	0	0	$3/2$	1	$1/2$	$-1/2$	3
1 x_2	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	$1/2$	3
	0	0	0	0	0	-1	0

Fase 2:

	3	5	0	0	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
3 x_1	1	0	1	0	0	4
0 s_2	0	0	$3/2$	1	$1/2$	3
5 x_2	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	3
	0	0	$-9/2$	0	$5/2$	27

Ejercicio Resolver el siguiente PPL.

1.

$$min\ x_1 + x_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq -5 \\ x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

2.

$$min\ 15x_1 + 77x_2$$

$$s.a \begin{cases} 2x_1 + 28x_2 \geq 1 \\ 6x_1 + 8x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Tema 2:

2. El problema dual

> **Definición 2.0.1 — Formato canónico.** Dado un PPL [P], decimos que está expresado en forma canónica si:
>
> $$min\ c^t x$$
> $$s.a \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

> **Definición 2.0.2 — Problema dual.** Dado un PPL [P], se define el problema dual asociado a [P] como:
>
> $$max\ b^t w$$
> $$s.a \begin{cases} A^t w \leq c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

Proposición 2.0.1 El dual del dual es el primal.

Demostración.

$$min\ c^t x$$
$$s.a \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow\ (Dual)$$

$$max\ b^t w$$
$$s.a \begin{cases} A^t w \leq c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow\ (Canonico)$$

$$min \ -b^t w$$
$$s.a \begin{cases} -A^t w \geq -c \\ w \geq 0 \end{cases}$$
$$\Downarrow \ (Dual)$$
$$max \ -c^t y$$
$$s.a \begin{cases} -Ay \leq -b \\ w \geq 0 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$min \ c^t y$$
$$s.a \begin{cases} Ay \geq b \\ w \geq 0 \end{cases}$$

■

2.0.1 Tabla de conversión primal a dual

Minimizar	Maximizar
Variables	**Restricciones**
$\leq$	$\geq$
libre	$=$
$\geq$	$\leq$
Restricciones	**Variables**
$\leq$	$\leq$
$=$	libre
$\geq$	$\geq$

2.1 Teoremas de dualidad débil y fuerte

Teorema 2.1.1 Dado un PPL [P] en formato canónico, y [D] su dual. Si x_0 y w_0 son soluciones factibles de [P] y [D] entonces $c^t w_0 \geq b^t x_0$.

Demostración. Sea x_0 una solución del problema [P] y w_0 una solución del problema [D], entonces se cumple $Ax_0 \geq b$ y $A^t w_0 \leq c$.

- Multiplicamos la primera desigualdad por w_0^t a la izquierda:

$$w_0^t A x_0 \geq w_0^t b$$

- Hacemos lo mismo para segunda desigualdad, pero esta vez multiplicando por x_0^t:

$$x_0^t A^t w_0 \leq x_0^t c$$

- Por tanto,

$$x_0^t c \geq x_0^t A^t w_0 = w_0^t A x_0 \geq w_0^t b$$

■

Teorema 2.1.2 — Teorema de la dualidad fuerte. Sea un PPL [P] y su dual asociado [D] con x_0 y w_0 soluciones factibles de [P] y [D] respectivamente.
Si $f(x_0) = c^t x_0 = b^t w_0 = f^*(w_0)$ entonces x_0 y w_0 son soluciones óptimas de sus respectivos problemas.

Demostración. Sea x solución factible de [P] con [P] problema de minimizar (se razona igual para maximizar).
Por el teorema de la dualidad débil, $c^t x \geq b^t w_0 = c^t x_0$, lo que implica que x_0 es solución óptima de [P]. ■

Teorema 2.1.3 Sea [P] un PPL y [D] su dual asociado. Si x_0 es la solución óptima de [P] entonces [D] tambien tiene solución óptima y está viene dada por $w_0^t = c_0^t B^{-1}$ con B la base asociada a la solución x_0 y c_B los costos asociados a las variables básicas. Además ambas soluciones x_0 y w_0 alcanzan el mismo valor de la función objetivo.

Demostración. Sea [P] PPL en formato canónico:

$$min\ c^t x$$

$$s.a \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Pasando a formato estándar:

$$min\ c^t x$$

$$s.a \begin{cases} Ax - Is = b \\ x, s \geq 0 \end{cases}$$

Escribimos la tabla simplex:

	x	s	b
	A	$-Id$	b

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la solución óptima se encuentra en las n primeras columnas (Es como hacer el simplex pero suponiendo de antemano quienes serán las soluciones óptimas):

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_b^t & x_n^t & s^t & b \\ \hline x_b & B & N & -Id & b \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_b^t & x_n^t & s^t & b \\ \hline c_b\ x_b & Id & B^{-1}N & -B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline & 0^t & c_b^tB^{-1}N - c_N^t & -c_b^tB^{-1} & \end{array}$$

Nuestro x_0 es $x_0 = B^{-1}b$, por tanto el valor de nuestra función objetivo es $c_B^tB^{-1}b$.
¿Es $w_0 = c_b^tB^{-1}$ solución factible del dual? Observemos:

$$A^tw_0 = [B\ \ N]^t[c_B^tB^{-1}]^t =$$

$$= \begin{bmatrix} B^t \\ N^t \end{bmatrix} (B^{-1})^tc_B = \begin{bmatrix} B^t(B^{-1})^tc_b \\ N^t(B^{-1})^tc_b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_b \\ N^t(B^{-1})^tc_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ (B^{-1}N)^tc_b \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c_b \\ c_n \end{bmatrix}$$

Por otro lado, $w_0^t = c_b^tB^{-1} \geq 0$, aplicando que las cotas relativas de las variables de holgura $-c_b^tB^{-1} \leq 0$.
Ahora veremos que $c^tx_0 = b^tw_0$

$$b^tw_0 = b^t(c_b^tB^{-1})^t = b^t(B^{-1})^tc_b = (B^{-1}b)^tc_b = ((B^{-1}b)^tc_B)^t = c_B^tB^{-1}b = c_B^tx_b = c^tx_0$$

■

2.2 Condiciones de holgura complementarias

Sea [P] un PPL en formato canónico y [D] su dual asociado.
Sea x_0 solución óptima de [P] y w_0 solución óptima de [D].

- $Ax_0 \geq b \longrightarrow$ multiplicamos por w_0^t a la izquierda:

$$w_0^tAx_0 \geq w_0^tb$$

- $w_0^tA \leq c_0^t \longrightarrow$ multiplicamos por x_0^t a la derecha:

$$x_0^tA^tw_0 \leq x_0^tc$$

- Por tanto, dado que x_0 y w_0 son soluciones óptimas:

$$x_0^tc = w_0^tAx_0 = w_0^tb$$

Ahora usando esa última igualdad, observemos:

- $w_0^tAx_0 = w_0^tb$:

$$w_0^tAx_0 - w_0^tb = 0 \Rightarrow w_0^t[Ax_0 - b] = w_0^tS = 0$$

Donde S es la matriz de las variables de holguras de [P], por tanto:

$$w_{0j}s_j = 0$$

De lo que se concluye que si $s_j \neq 0$ para algún j entonces necesariamente $w_{0j} = 0$.

- $x_0^t c = w_0^t A x_0$:

$$c^t x_0 - w_0^t A x_0 = 0 \Rightarrow [c^t - w_0^t A]x_0 = 0 = S' x_0 = 0$$

Donde S' es la matriz de las variables de holguras de [D], por tanto:

$$x_{0j} s'_j = 0$$

De lo que se concluye que si $s'_j \neq 0$ para algún j entonces necesariamente $x_{0j} = 0$.

Proposición 2.2.1 Si el dual es degenerado,entonces el primal tiene solución múltiple.

Demostración. Sin perdida de generalidad, sea x_0 la solución básica óptima, sea B la matriz básica asociada a la solución básica, entonces la solución óptima del dual viene dada por $w_0^t = c_B^t B^{-1}$. w_0^t tiene alguna componente nula por hipótesis, entonces en la tabla óptima [P], w_0^t aparece en los costes relativos de las variables de holguras (Véanse las condiciones de holgura complementarias). Sabemos entonces que si existen variables no básicas con costos relativos distintos de cero, entonces [P] tiene solución múltiple. ∎

En resumen,

Primal	**Dual**
Solución óptima	Solución óptima
Ilimitado	Infactible
Infactible	Ilimitado o infactible

2.3 Método simplex dual

Sea [P] un PPL en formato canónico, sea x_0 una solución básica de [P] (No necesariamente óptima). Supongamos además que la solución asociada a la base B de x_0, $w^t = c_B^t B^{-1}$ cumple las restricciones del dual. Como w_0^t verifica las condiciones del dual, se tiene:

$$w_0^t = c_B^t B^{-1}[B\, N] = [c_B^t B^{-1} B \;\; c_B^t B^{-1} N] = [c_B^t \;\; c_B^t B^{-1} N]$$

Dado que w_0 cumple todas las restricciones del dual, $w_0^t A \leq c^t$, en particular,

$$[c_B^t \;\; c_B^t B^{-1} N] \leq [c_B^t \;\; c_N^t]$$

Por tanto, todos los costes relativos son negativos, de donde se cumple la condición de optimalidad en el primal.
x_0 sólo será solución básica cuando $x_0 \geq 0$, por tanto partimos de x_0 que verifica $Ax_0 = b$ y w_0^t verifica las restricciones del dual.

- Si $x_0 \geq 0$ entonces es óptima.
- Si x_0 tiene alguna componente negativa:

$$x_0 = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Supongamos que la componente i de $B^{-1} b$ es negativa.
Construyamos la tabla simplex:

	x_b^t	x_n^t	b
x_b	B	N	b

Para obtener la última tabla simplex, simplemente multiplicamos por B^{-1}

	x_b^t	x_n^t	b
x_b	Id	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el dual es no degenerado, si lo fuese, aplicamos algún método anticiclado, además, $w_0^t = c_B^t B^{-1}$ verifica por hipótesis las restricciones del dual.

- $w_0^t a_1 = c_B^t B^{-1} a_1 = c_1$ (Básica)
- ...
- $w_0^t a_m = c_B^t B^{-1} a_m = c_m$ (Básica)
- $w_0^t a_{m+1} = c_B^t B^{-1} a_{m+1} < c_{m+1}$ (No básica)
- ...
- $w_0^t a_n = c_B^t B^{-1} a_n < c_n$ (No básica)

Sea ahora w_ε^t con $\varepsilon > 0$ una nueva solución del dual que transforma una de las restricciones de igualdad en $(<)$ y una restricción de $(<)$ en una de igualdad.
Esto hace que la solución del primal asociada siga verificando la condición de optimalidad, y además, w_ε^t consigue un valor de la función objetivo mejor.

$$w_\varepsilon^t = w_0^t - \varepsilon u_i^t$$

Donde u_i^t es la fila i-ésima de B^{-1}

¿Verifica w_ε^t las restricciones del dual? ¿$w_\varepsilon^t A \leq c^t$?

- $w_\varepsilon^t a_j = (w_0^t - \varepsilon u_i^t) a_j = w_0^t a_j - \varepsilon u_i^t a_j$
- Sí $i = j$ $u_i^t a_j = 1$ en otro caso, es cero.
- Por tanto, en las m primeras filas distintas de i tenemos:

  $$w_\varepsilon^t a_j = (w_0^t - \varepsilon u_i^t) a_j = w_0^t a_j = c_j$$

  Por otro lado, en la fila i-ésima tendríamos:

  $$w_\varepsilon^t a_i = (w_0^t - \varepsilon u_i^t) a_i = w_0^t a_i - \varepsilon 1 \leq c_i$$

- En el resto de filas sólo podemos asegurar $m < j < n$:

  $$w_\varepsilon^t a_j = (w_0^t - \varepsilon u_i^t) a_j = w_0^t a_j - \varepsilon u_i^t a_j$$

- Llamemos $y_{ij} = u_i^t a_j$
  1. Supongamos que todos los $y_{ij} \geq 0$ para todo $m < j \leq n$, podríamos afirmar entonces que w_ε^t es factible para todo epsilon.
     Además, dado que el valor de la función objetivo es $w_\varepsilon^t b = w_0^t b - \varepsilon u_i^t b$ podemos asegurar que el valor de la función objetivo aumenta.
  2. Supongamos que existe un $y_{ij} < 0$, entonces tomando epsilo de la siguiente forma:

     $$c_B^t B^{-1} a_j - \varepsilon y_{ij} = c_j \Rightarrow \varepsilon = \frac{c_B^t B^{-1} a_j - c_j}{y_{ij}}$$

     Una de las restricciones de $(<)$ (al menos) se convierte de igualdad, tomando el mínimo de los épsilon (ε_0), lo tenemos.
     Además, $w_{\varepsilon_0}^t b = w_0^t b - \varepsilon u_i^t b > w_0^t b$.

2.3.1 Algoritmo Simplex Dual

Sea $[P]$ un PPL en formato estándar

$$min\ c^t x$$
$$s.a \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Se define el algoritmo simplex dual de la siguiente forma:

1. Dada una solución básica óptima de [P] x_0 (No necesariamente factible) y $w_0^t = c_B^t B^{-1}$ factible dual asociada a x_0 entonces:
   - Si $x_B \geq 0$ entonces x_0 será solución básica factible y óptima.
   - Si existe alguna componente x_B negativa: PASO 2.
2. Seleccionamos la componente de x_B mayor en valor absoluto. Supongamos que dicha componente es $x_{B_i} < 0$ entonces **esa variable abandonará la base.**
3. La variable j asociada a ε_0 será **la variable que va a entrar en la base.**

$$\varepsilon_0 = \min_j \{ \frac{c_B^t B^{-1} a_j - c_j}{y_{ij}} : y_{ij} < 0 \}$$

4. Realizamos operaciones gaussianas para convertir la variable x_j en la variable x_i, y volvemos al paso 1.