UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

APUNTES DE PROGRAMACIÓN LINEAL

ANTONIO J. ARRIAZA GÓMEZ
MANUEL MUÑOZ MÁRQUEZ
FRANCISCO J. NAVARRO IZQUIERDO
INMACULADA ESPEJO MIRANDA
J. CARLOS GARCÍA ORTEGA

Índice general

1. Introducción **1**

2. Programación lineal **3**
2.1. Objetivo de la programación lineal e interpretación en $\mathbb{R}^3$ 3
2.2. Definiciones 4
2.2.1. Forma matricial y conversión de formato 5
2.2.2. Resolución gráfica de un P.P.L. 8
2.2.3. Tipos de P.P.L. según las soluciones 10
2.3. Geometría de conjuntos convexos 11
2.4. Teorema Fundamental de la P.L. 13
2.4.1. Hipótesis de partida 13

3. Método Simplex **25**
3.1. Las tres fases del método simplex 25
3.1.1. Pivotar, "saltar"de solución básica factible en solución básica factible 25
3.1.2. Dada una variable no básica que mejore la solución actual, ¿Qué variable no básica debe salir? 27
3.1.3. ¿Qué variable no básica mejora a la solución actual? 30
3.1.4. Teorema de condición necesaria y suficiente de optimalidad 31
3.2. Degeneración del ciclado 34
3.2.1. Método anticiclado 35
3.3. Métodos para resolver problemas con restricciones 35
3.3.1. Resolución de PPL con restricciones $(=)$ y $(\geq)$ 35
3.3.2. Método de las penalizaciones 36
3.3.3. Método de las dos fases 37
3.4. Coste computacional 39
3.4.1. Operaciones de una iteración 39

3.4.2. Operaciones totales 40

4. Problema dual de la programación lineal **41**

5. Análisis de post-optimalidad **43**

6. Problemas de transportes **45**

Software libre

"Mi trabajo en el software libre está motivado por un objetivo idealista: difundir libertad y cooperación. Quiero motivar la expansión del software libre, reemplazando el software privativo que prohibe la cooperación, y de este modo hacer nuestra sociedad mejor." Richar Stallman

Declaración sobre las licencias y ámbito científico

Todo el código creado para generar este proyecto va a estar disponible para descargar, modificar y compartir sin ningún tipo de limitación. Te animo a hacer tuyo cualquier código que necesites para tus proyectos, los modifiques según tus necesidades y que luego compartas el código para que otras personas puedan seguir mejorándolo.

Código fuente del trabajo

Cumpliendo la licencia que se expone en la primera página de este libro, se puede descargar una copia completa de este trabajo, junto a todo el código necesario para generarlo a través del siguiente enlace: https://github.com/JoseCarlosGarcia95/ApuntesIO

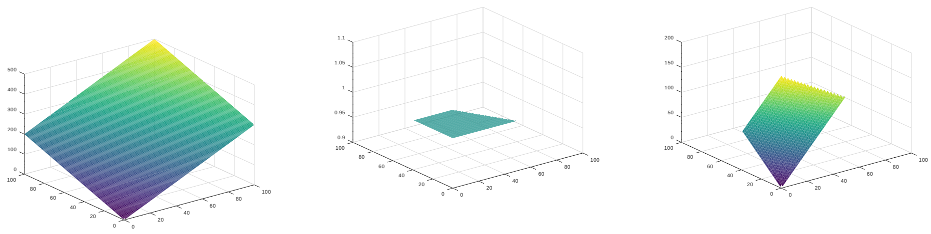
1

Introducción

2 Programación lineal

2.1. Objetivo de la programación lineal e interpretación en $\mathbb{R}^3$

El objetivo de la programación lineal es resolver el problema de minimizar o maximizar una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ restringida a un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ de manera que tanto f como D cumplan ciertas condiciones.



(a) Una aplicación f lineal (b) Una D región dada por restricciones (c) La aplicación lineal f restringida a D

A la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se le pide que sea lineal y a D que sea un conjunto definido por desigualdades lineales.

2.2. Definiciones

Definición 1: Problema de programación lineal

Un problema de programación lineal (PPL) es un problema matemático que se puede expresar de la siguiente forma:
Hallar el máximo / mínimo de una función lineal, $f(x) = c_1x_1 + c_2 + x_2 + ... + c_nx_n$ sujeto a una serie de restricciones que podemos expresar como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ ... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n \leq b_s \\ ... \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + ... + a_{tn}x_n \leq b_t \\ ... \\ a_{t+1,1}x_1 + a_{t+1,2}x_2 + ... + a_{t+1,n}x_n = b_{t+1} \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde $x_i, a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ para todo $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.
Nótese que lo que expresa entre llaves corresponde a una restricción que puede ser hecha a través de desigualdades o igualdades.

Se supone sin pérdida de generalidad que $b_j \geq 0$ con $1 \leq j \leq m$ (de no ser así bastaría con multiplicar por (-1)).

Definición 2: Formato Estándar de un P.P.L

Un P.P.L está en formato estándar si está expresado de la siguiente forma:

$$\text{mín} / \text{máx} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.a} \begin{cases} \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \end{cases}$$

con $x_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq n$ y $b_j \geq 0$ para $1 \leq j \leq m$.

2.2.1. Forma matricial y conversión de formato

El problema de programación lineal puede expresarse de forma matricial como:

$$\text{mín} / \text{máx} \quad c^t x$$

$$\text{s.a} \begin{cases} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{cases}$$

con $b \geq 0$. De esta forma se tiene que

- $c^t x :=$ función objetivo
- $x :=$ variables de decisión
- $c :=$ vector de costos
- $A :=$ matriz de coeficientes tecnológicos
- $c^t x :=$ vector de recursos

Dado cualquier P.P.L siempre es posible transformarlo en otro P.P.L equivalente (con las mismas soluciones) en formato estándar.

Conversión de variables

- En el caso de que una variable sea $x_i \leq 0$ se transforma creando una nueva variable $x_i^* = -x_i \geq 0$. De esta forma siempre que aparezca x_i la sustituiremos por $-x_i^*$.
- En el caso de que x_i sea libre se expresa como la diferencia de dos nuevas variables la correspondiente a la parte positiva y a la negativa (x_i^+ y x_i^- respectivamente) quedando $x_i = x_i^+ - x_i^-$ con $x_i^+, x_i^- \geq 0$. Como ocurría en el caso anterior, se sustituye la variable en cuestión por $x_i^+ - x_i^-$.

Conversión de restricciones

- Si nos encontramos con una restricción del tipo $\geq$,

  $$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \leq b_j,$$

  se añade una nueva variable $s_j \geq 0$ y se suma al primer miembro de la desigualdad de modo que esta quedaría de la forma

  $$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n + s_j = b_j.$$

- Si nos encontramos con una restricción del tipo $\leq$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \leq b_j,$$

vuelve a introducirse una variable $s_j \geq 0$, pero en este caso se resta al primer miembro de la desigualdad de modo que la esta quedaría de la forma

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - s_j = b_j.$$

A las variables s_j se las denominan variables de holgura.

Conversión del vector de recursos

Si $b_j < 0$ entonces multiplicamos por (-1) la restricción j-ésima o lo que es equivalente, la fila j-ésima de la matriz A y del vector de recursos b.

Ejemplo 1

Pasar a formato estándar el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - x_4 \\ \text{s.a} & \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +4x_3 & & \leq & 17 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 100 \\ 3x_1 & +2x_2 & +9x_3 & -8x_4 & \geq & 5 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & -4x_4 & \geq & -3 \end{array} \right. \end{array}$$

con $x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3 libre y $x_4 \geq 0$.

Esto es, los problemas

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.a} & \left\{ \begin{array}{rrcr} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \leq & b_2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \equiv \begin{array}{ll} \text{máx} & c_1x_1 + c_2x_2 + 0s_1 + 0s_2 \\ \text{s.a} & \left\{ \begin{array}{rrrcr} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +s_1 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +s_2 & = & b_2 \\ & & x_1, x_2, s_1, s_2 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

son equivalentes, siendo sus soluciones $x = (x_1, x_2)$ y $x' = (x_1, x_2, s_1, s_2)$ respectivamente.
Para empezar, el dominio que define el problema (II) coincide con el que define el problema (I) cuando se tienen en cuenta sólo las variables x_1, x_2. Es decir, cuando se re... en ese subespacio. Además, las variables s_1 y s_2 no están presentes en la función objetivo, por lo que los valores de la f.o. en ambos problemas debe coincidir.

Sea x la solución factible de $[P_1]$. Entonces $x = (x_1, x_2)$ verifica que

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

por lo que tomando

$$\begin{aligned} s_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq 0 \\ s_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

entonces el vector $x' = (x_1, x_2, s_1, s_2)$ es solución de $[P_2]$.
De la misma forma se prueba que $[P_2]$ tiene las mismas soluciones que $[P_1]$.

Definición 3: Solución factible

Dado un P.P.L $[P]$

$$[P] \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c'x \\ \text{s.a} & \left\{ \begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

se dice que x_0 es solución factible para $[P]$ si cumple que $Ax_0 = b$ y $x_0 \geq 0$.

Definición 4: Región factible

El conjunto formado por todos los puntos factibles se denomina región factible y se denotará por R.

Definición 5: Solución óptima

Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es solución óptima de $[P]$ si es factible y cumple que $c^t x \geq c^t x_0$ para todo $x \in R$.

2.2.2. Resolución gráfica de un P.P.L.

Ejemplo 2

Una fábrica de dos tipos de juguetes: **soldados** y **trenes**. Cada soldado se vende por 27 u.m. y se gastan 10 u.m. en materia prima para su fabricación. Cada tren se vende por 21 u.m. y se necesitan para su fabricación 9 u.m. de materia prima. Cada tren eleva el coste de producción en 10 u.m. y cada soldado en 14 u.m. Ambos juguetes necesitan un ensamblado y un acabado, siendo necesarias 1 h. para el acabado y 1 h para el ensamblado de cada tren y 1 h. de ensamblado y 2h. de acabado para cada soldado.

Se disponen de 100 h. de acabados y 80 h. de ensamblado semanales. Además, en esta franja de tiempo sólo pueden venderse 40 soldados como máximo.

¿Cuántos soldados y trenes debemos producir por semana para obtener el máximo beneficio?

Solución : *E*n primer lugar, encontramos las variables de interés:

$$s := \text{Soldados a la semana}$$

$$t := \text{Trenes a la semana}$$

A continuación, buscamos la función objetivo:

$$(27 - 10 - 14)s + (21 - 9 - 10)t = 3s + 2t$$

Por otro lado, las restricciones del problema anterior vienen dadas por:

$$\begin{aligned} &1s + 1t \leq 80 \\ &2s + 1t \leq 100 \\ &s \leq 40 \end{aligned}$$

Por tanto, nuestro PPL queda de la siguiente forma:

$$\text{máx } 3s + 2t$$

$$s.a \begin{cases} s + t \leq 80 \\ 2s + t \leq 100 \\ s \leq 40 \end{cases}$$

$$s, t > 0$$

Para resolverlo gráficamente, en primer lugar debemos dibujar todas las restricciones:

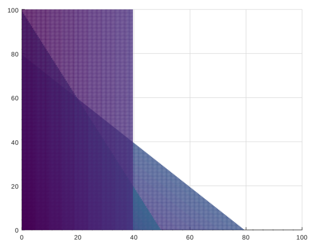


Figura 2.2: Gráfica de las restricciones de nuestro problema

Una vez planteada las restricciones nos quedamos con su restricción, esto es:

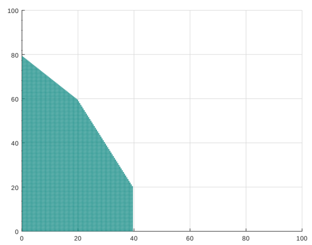


Figura 2.3: Gráfica de las restricciones de nuestro problema

Finalmente, para mejorar nuestra función objetivo debemos movernos de forma perpendicular a la gráfica de la función $3s + 2t$, esto es, que debemos movernos en la dirección del vector gradiente de $3s + 2t$, esta dirección es $(3, 2)$, por tanto:

esto es:

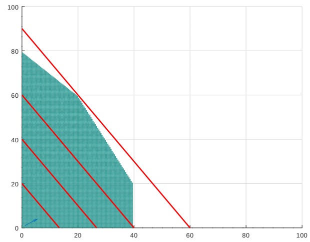


Figura 2.4: Gráfica de las restricciones de nuestro problema

Definición 6: Restricción activa

Dado un P.P.L $[P]$ se dice que una restricción está activa en x_0 si se cumple por igualdad en x_0.

En el ejemplo 2.2.2, la restricción $s+t \leq 80$ está activa en $x_0 = (20, 60)$ pues $20+60 = 80$.

2.2.3. Tipos de P.P.L. según las soluciones

Podemos clasificar todos los P.P.L:

- Si $R = \emptyset$ entonces diremos que el problema es infactible, no tiene solución.
- Si $R \neq \emptyset$ entonces el problema puede:
  1. Tener solución óptima, única o múltiple (infinitas soluciones).
  2. Ser no acotado, es decir, se encuentran soluciones que minimizan(maximizan) la función objetivo tanto como se quiere.

A continuación se ilustran los diferentes casos de forma gráfica.

METE GRÁFICOS

2.3. Geometría de conjuntos convexos

Definición 7: Conjunto convexo

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice convexo si dados $x, y \in S$ se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$ para cualquier $\lambda \in (0,1)$.

Proposición 1

La intersección finita de conjuntos convexos es convexa.

Demostración. Sean $S_1, S_2, \ldots, S_k$ conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ con $k \in \mathbb{N}$ y denotemos

$$S = \bigcap_{i=1}^{k} S_i.$$

Dados $x, y \in S$ entonces $x, y \in S_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Como cada S_i es convexo, dado $\lambda \in (0,1)$ se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$ y por tanto $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$.
Luego S es convexo.

□

Definición 8

Sea $a \in \mathbb{R}^n$ con $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}^n$, se define como:

1. Hiperplano de $\mathbb{R}^n$ al conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x = b\}$.
2. Semiespacio cerrado positivo a $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \geq b\}$.
3. Semiespacio cerrado negativo a $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \leq b\}$.

Definición 9

Un polítopo es un conjunto definido por un número finito de intersecciones de semiespacios o hiperplanos. Si un polítopo es acotado entonces se denomina poliedro.

Observemos, que en un P.P.L la región factible es un polítopo.

Proposición 2

Los polítopos son conjuntos convexos.

Demostración. Teniendo en cuenta la definición 2.3 y la proposición 2.3 basta con demostrar que los semiespacios e hiperplanos son conjuntos convexos.
Sean $x, y \in H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \leq b\}$ y $\lambda \in (0, 1)$. Entonces $a^t x, a^t x \leq b$ y como $\lambda > 0$ entonces

$$\begin{aligned} \lambda(a^t x) &\leq \lambda b && (2.1) \\ (1-\lambda)(a^t y) &\leq (1-\lambda)b. && (2.2) \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones (2.1) y (2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} a^t[\lambda x + (1-\lambda)y] &= a^t(\lambda x) + a^t[(1-\lambda)y] \\ &= \lambda(a^t x) + (1-\lambda)(a^t y) \\ &\leq \lambda b + (1-\lambda)b = b. \end{aligned}$$

Luego $\lambda x + (1-\lambda)y \in H^-$ y por tanto es convexo. Para los conjuntos H^+ y H se demuestra de forma similar. □

Definición 10: Punto extremo

Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, se dice que $e \in S$ es un punto extremo de S si no existen $x, y \in S$ de forma que se puede expresar como $e = \lambda x + (1-\lambda)y$ para algún $\lambda \in (0, 1)$.
INCLUIR REP GRAFICA

Definición 11: Dirección de ilimitación (d.d.i.)

Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo se dice que $d \in \mathbb{R}^n$ es dirección de ilimitación de S si dado $\lambda \geq 0$ entonces $x_0 + \lambda d \in S$ para todo $x_0 \in S$.

METE GRÁFICOS

Definición 12: Dirección de ilimitación extrema

Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo se dice que $d \in \mathbb{R}^n$ es d.d.i. extrema de S si no existen $d_1, d_2 \in S$ con $d_1 \neq d_2$ tal que $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Proposición 3

Sea R la región factible de un P.P.L. entonces d es dirección de ilimitación de R si y sólo si $Ad = 0$ y $d \geq 0$.

Demostración. $\Longrightarrow$ Si d es d.d.i. entonces para todo $x_0 \in R = \{x \in \mathbb{R} : Ax = b\}$ y

$\lambda \geq 0$ se tiene que $x_0 + \lambda d \in R$, es decir

$$\begin{aligned} A(x_0 + \lambda d) &= b \\ Ax_0 + \lambda Ad &= b \\ b + \lambda Ad &= b \\ \lambda Ad &= 0 \end{aligned}$$

Luego $Ad = 0$.

$\Longleftarrow$ Si $Ad = 0$ entonces dados $x_0 \in R$ y $\lambda \geq 0$ se tiene que

$$A(x_0 + \lambda d) = Ax_0 + \lambda Ad = b$$

y por tanto que $x_0 + \lambda d \in R$.

$\square$

2.4. Teorema Fundamental de la P.L.

2.4.1. Hipótesis de partida

Antes de seguir con los P.P.L. debemos fijar dos hipótesis que son razonables. Dado un problema en formato estándar

$$\min \quad f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{cases}$$

siendo A una matriz de dimensiones $m \times n$ entonces

1. La matriz tenga rango máximo ($rg(A) = m$) ya que, en caso contrario y como veremos más adelante, alguna de las m restricciones sería innecesaria o el problema sería infactible. A esta hipótesis se la conoce como Hipótesis de rango completo.

2. El número de restricciones será menor que el de incógnitas ($m \leq n$). Esta hipótesis se deduce de la anterior.

Es importante resaltar que la matriz A es aquella que resulta de añadir las variables homogéneas, lo que se está pidiendo es que A sea de la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{n\times m}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \\ \\ \end{bmatrix}_{n\times 1}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \\ \\ \end{bmatrix}_{m\times 1}}_{b}$$

La hipótesis de rango completo asume que todas las filas de A son linealmente independientes. de no ser así podría ocurrir dos cosas:

1. Si la fila i es linealmente dependiente de la fila j en la matriz A pero linealmente independiente en la matriz ampliada $[\ A \mid b\ ]$ entonces el problema es infactible ya que hay dos restricciones contradictorias.

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 10 \\ 4x & + & 2y & = & 10 \end{array}$$

   El sistema no tiene solución, por lo que el problema es infactible.

2. Si la fila i es linealmente dependiente de la fila j en $[\ A \mid b\ ]$ entonces estamos ante dos restricciones equivalentes y por tanto podemos eliminar una de ellas.

De aquí, se deduce que m no puede ser mayor que n pues si fuese $n < m$ entonces el rango máximo de A sería n y eso significaría que existen filas de A linealmente dependientes dandose así alguno de los casos anteriores. Por tanto podemos suponer sin ningún problema que $m \leq n$.
Dado un $P.P.L.$ en formato estándar

$$\text{máx} \quad c^t x$$

$$\text{s.a} \left\{ \begin{array}{ccc} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \right.$$

siendo

$$\begin{array}{ccccc} A & & x & & b \\ \begin{bmatrix} \\ a_1 & \cdots & a_m & \cdots & a_n \\ \\ \end{bmatrix}_{n \times m} & & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}_{n \times 1} & = & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}_{m \times 1} \end{array}$$

Como $rg(A) = rg(A|b) = m < n$ entonces el sistema es compatible indeterminado (existen infinitas soluciones).
Nota: *El caso $m = n$ es trivial ya que implica que hay solución única y por tanto esa debe ser la óptima.*
Las columnas de A deben ser linealmente dependientes y por tanto existe m columnas linealmente independientes. Formemos pues una nueva submatriz B con m columnas de A linealmente independientes. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que tomamos las m primeras. Entonces el sistema se descompone como sigue:

$$\begin{bmatrix} \text{B} & \text{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{b} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

El subsistema formado por $Bx_B = b$ tiene solución única pues B es cuadrada con $|B| \neq 0$, lo que significa que si tomamos $x_N = 0$ obtenemos una solución para el sistema original

$$Bx_B + N \cdot 0 = b.$$

Definición 13: Solución básica

Dado un P.P.L. en formato estándar, a la solución única x_B procedente de la descomposición (2.3) se la denomina solución básica, y existen como máximo

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \text{ posibles soluciones.}$$

Ejemplo 3

Consideremos el problema

$$\text{máx} \quad 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 1x_1 & +4x_2 & -s_1 & = & 17 \\ 0x_1 & +7x_2 & +s_2 & = & 10 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 & & \geq & 0 \end{cases}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix},$$

y por tanto que una descomposición del tipo (2.3) es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Quedando que $Bx_B = b$ y por tanto $x_B = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}$. Luego $x^t = (17, 0, 0, 10)$.

Nota: *Existen soluciones básicas no factibles, es decir, no toda solución básica sirve, sólo las soluciones básicas factibles.*

Definición 14

En las mismas condiciones de antes, las variables x_i que se corresponden con las columnas de la base B se las denominan Variables básicas.

Al resto se las denominan variables no básicas (y siempre se igualan a cero).

Definición 15

Dada una solución básica, si alguno de sus componentes básicos es cero entonces se lo denomina Solución básica degenerada.

Definición 16: Soluciones básicas adyacentes

Dos soluciones básicas se dicen adyacentes si sus bases son iguales excepto en una columna.

Nota: *El siguiente teorema nos da una interpretación geométrica de qué es una solución básica.*

Teorema 1

Sea $A_{m\times n}$ con $rg(A) = m < n$. Sea $R = \{x : Ab = b,\ x \geq 0\}$. Entonces se tiene que x_0 es solución básica factible si y sólo si $x_0 \in R$ y es punto extremo de R.

Demostración. $\Longrightarrow$ Si x_0 es solución básica factible y por tanto, por ser factible, $x_0 \in R$. Veamos por reducción al absurdo que x_0 es punto extremo de R.

Supongamos pues que x_0 no es punto extremo de R. Entonces existen $x, y \in R$ con $x \neq y$ y $\lambda \in (0, 1)$ tal que $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Al ser x_0 solución básica, se puede expresar sin pérdida de generalidad como:

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donde } p \leq m.$$

Observemos que se está teniendo en cuenta que x_0 sea una solución básica degenerada. Además, en el caso de que $x_0 = \overline{0}$, este punto es punto extremo de R pues:

$$x_0 = \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

pero $\lambda x_i + (1-\lambda)y_i = 0$ se verifica si y sólo si $x_i = y_i = 0$. Luego $\overline{0}$ es un punto extremo.

Consideremos entonces que $x_{0i} > 0$ para $1 \leq i \leq p$. Como x_0 es solución básica, se verifica que las primeras p variables o columnas de A son linealmente independientes.

Además, x e y deben tener la siguiente expresión por el mismo argumento de antes:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $x, y \in R$ entonces $Ax = Ay = b$ y por tanto $A(x-y) = 0$. Esto es

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_p - y_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

esto es $a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2) + \cdots + a_p(x_p - y_p) = \overline{0}$.

Como cada A_i son linealmente independientes entonces $x_i - y_i = 0$ para $1 \leq i \leq p$. Es decir $x = y$ llegando así a una contradicción. Luego x_0 es un punto extremo de R.

$\Longleftarrow$ Sea $x_0 \in R$ con x_0 punto extremo de R. Como $x_0 \in R$ entonces $Ax_0 = b$ y $x_0 \geq 0$. Veamos que x_0 es solución básica. En primer lugar, escribiremos

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donde } p \leq m.$$

Podemos suponer que $p \leq m$ sin problemas, pues en el caso de que $m < p < n$ se cumple que $a_1, a_2, \ldots, a_p$ son columnas de A linealmente dependientes puesto que $rg(A) = m$ por lo que existen unos escalares no todos nulos tales que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_p a_p = 0.$$

Tomemos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_p, \ldots, \lambda_n)$, entonces existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\begin{cases} x_0^+ = x_0 + \epsilon\lambda \in R \\ x_0^- = x_0 - \epsilon\lambda \in R \end{cases}$$

y por construcción $x_0 = \frac{1}{2}x_0^+ + \frac{1}{2}x_0^-$ con $x_0^+ \neq x_0^-$, por lo que x_0 no sería punto extremo de R.

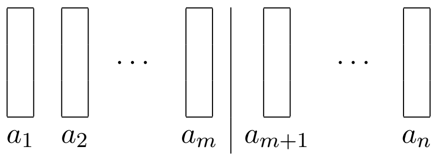
Supongamos entonces que $p \leq m$. Se tiene que si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ son columnas linealmente independientes de A entonces x_0 sería solución básica.

Observemos que esto es cierto ya que en el caso de que $a_1, a_2, \ldots, a_p$ fuesen linealmente dependientes, por el mismo razonamiento de antes existirían $x_0^+, x_0^- \in R$ con $x_0^+ \neq x_0^-$ tal que $x_0 = \frac{1}{2}x_0^+ + \frac{1}{2}x_0^-$ contradiciendo de esta forma que x_0 sea punto extremo.

Por tanto $a_1, \ldots, a_p$ son linealmente independientes y por tanto x_0 es solución básica factible.

□

¿Qué ocurre si x_0 proviene de columnas linealmente dependientes donde hay un vector linealmente independiente?



Supongamos que $a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_n$.

Ejemplo 4

$$\text{mín} / \text{máx} \quad c^t x$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 5 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	1	1	1	0	1
	2	2	2	0	1	2

Solución : Sea $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R$, como todas las componentes son positivas veamos si las columnas correspondientes, a_1, a_2, a_3, a_4 son linealmente independientes:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0$$

$$-1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=0.$$

Sea $\lambda=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\1\end{pmatrix}$ y $x_0^+=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\epsilon\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\1\end{pmatrix}$ con $\epsilon\geq 0$.

Para que $x_0^+\in R$ ha de cumplirse $\begin{cases}Ax_0^+=0\\x_0^+\geq 0\end{cases}$. En primer lugar tenemos que

$$ax_0^+=A(x_0+\epsilon\lambda)=Ax_0+\epsilon\underbrace{A\lambda}_{=0}=Ax_0=b.$$

En segundo lugar, para que se cumpla $x_0^+\geq 0$, podemos calcular el mínimo $\epsilon\geq 0$ de manera que se anule sólo una componente de x_0^+.

$$x_0^+=\begin{pmatrix}1-\epsilon\\1-2\epsilon\\1-3\epsilon\\1+\epsilon\end{pmatrix}\geq 0,\text{ es decir }\begin{array}{rcl}1-\epsilon=0&\Longleftrightarrow&\epsilon=1\\1-2\epsilon=0&\Longleftrightarrow&\epsilon=1/2\\1-3\epsilon=0&\Longleftrightarrow&\epsilon=1/3\end{array}$$

por lo que tomando $\epsilon=1/3$ se tiene que $x_0^+=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\0\\4/3\end{pmatrix}\in R$ y ahora las columnas de las que proviene x_0^+ son linealmente independientes:

$$a_1,a_2\text{ y }a_3\equiv\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\text{ y }\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Antes de proseguir con el Teorema fundamental de la Programacion lineal (teorema 2.4.1) sería conveniente desarrollar un ejemplo donde mostrar el método cosntructivo que demuestra el teorema.

Ejemplo 5

$$\text{s.a}\begin{cases}x_1 & & & +x_4 & = & 2\\ & x_2 & & +2x_4 & = & 3\\ & & x_3 & +3x_4 & = & 4\end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Solución : Sea $x_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in R$, se tiene que una solución básica proviene de resolver

$$\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 = b,$$

pero a_1, a_2, a_3 son linealmente dependientes, luego existen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $x_0^+ = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tomando $\epsilon = \frac{1}{3}$ se obtiene

$$x_0^+ = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es solución factible y proviene de a_1 y a_2 que son linealmente dependientes por lo que debemos repetir el proceso.

Sea $\lambda' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $x_0^{++} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tomando $\epsilon = \frac{1}{3}$,

$$x_0^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in R, \quad \text{por construcción.}$$

Además se tiene que a_1 es linealmente independiente. ¿Pero se puede decir que x_0^{++} es solución básica? Pues sí, en concreto es básica degenerada, porque podemos encontrar $m-1$ vectores de A que sean linealmente independientes y de manera que forman una base junto con a_1, sólo tomando que las componentes de dichas columnas sean ceros ya que se tendría que el vector x_0^{++} proviene de una base.

$$\underbrace{a_1 \mid a_1' \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{m-1}}_{m \text{ columnas l. indep.}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

luego el x_0^{++} procede de una base y es solución básica.
De la misma forma si el x_0 original hubiese tenido dos vectores linealmente independientes bastaria con añadir columnas linealmente independientes hasta completar la base y considerar dichas variables basicas nulas obteniendo asi soluciones basicas degeneradas.

Teorema 2: Teorema Fundamental de la Programación Lineal

Dado un P.P.L.

$$\text{mín} / \text{máx} \quad c^t$$

$$\text{s.a} \begin{cases} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{cases}$$

1. Si existe x_0 solución factible de $[P]$ entonces existe x^* solución básica factible óptima de $[P]$.
2. Si existe x_0 solución factible óptima de $[P]$ entonces existe x^* solución básica factible óptima de $[P]$.

Demostración. 1. Sea x_0 una solución factible de $[P]$ entonces x_0 se puede escribir como

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donde } 0 \leq p \leq n.$$

Para el caso $p = 0$ entonces $x_0 = \overline{0}$ es punto extremo y por tanto solución básica(degenerada). Supongamos entonces que $x_{0i} > 0$ para $1 \leq i \leq p$ con $1 \leq p \leq n$.

Basta con demostrar que las columnas de a $a_1, a_2, \ldots, a_p$ asociadas a esos componentes son linealmente independientes para probar que x_0 es solución básica.

Si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ fuesen linealmente dependientes entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ escalares no todos nulos tales que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_p a_p = 0.$$

Definimos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y tomamos

$$x_0^+ = x_0 + \epsilon\lambda = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} + \epsilon\lambda_1 \\ \vdots \\ x_{0p} + \epsilon\lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Si existe un $\lambda_1 < 0$ (o varios) tomamos

  $$\epsilon = \text{mín}\left\{ -\frac{-x_{oi}}{\lambda_i} : \lambda_i < 0 \right\}$$

  de esa manera obtendríamos un nuevo vector x_0^+ con una componente menos, es decir, ahora tiene $p-1$ componentes mayores estrictas que cero pero aun así $x_0^+ \in R$ ya que

  $$Ax_0^+ = A(x_0 + \epsilon\lambda) = Ax_0 + \epsilon\lambda = b.$$

  Como $rg(A) = m$ se tendrá que repitiendo el procedimiento $p - m$ veces obtendremos m componentes linealmente independientes, siendo por tanto x_0 solución básica.

- Si todos los $\lambda_i > 0$ tomamos el vector $x_0^- = x_0 - \epsilon\lambda$ y por el mismo razonamiento anterior, llegaríamos a un vector cn menos componentes estrictamente positivos y sus columnas asociadas linealmente independientes (ver ejemplo 2.4.1).

2. Si existe una solución factible óptima de $[P]$, llamémosla $x_0 \in R$, entonces

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } x_0^i > 0 \text{ para } 1 \leq i \leq p.$$

- Si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ son columnas de A linealmente independientes entonces x_0 es básica.

- Si $a_1, a_2 \ldots, a_p$ son columnas de A linealmente dependientes entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ escalares no todos nulos tales que $\lambda_1 a_1 + \cdots + a_p = 0$.
  Sea $\lambda^t = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y definamos

  $$x_\epsilon^+ = x_0 + \epsilon\lambda \quad \text{y} \quad x_\epsilon^- = x_0 - \epsilon\lambda.$$

  Se puede elegir $\epsilon_0 > 0$ tal que $x_{\epsilon_0}^+, x_{\epsilon_0}^- \in R$. Esto es, $Ax_{\epsilon_0}^+ = Ax_{\epsilon_0}^- = b$ y $x_{\epsilon_0}^+, x_{\epsilon_0}^- \leq 0$. Ahora bien,
  - Si $c^t\lambda > 0$ entonces

    $$c^t x_{\epsilon_0}^+ = c^t x_0 + \epsilon c^t \lambda > c^t x_0 \tag{2.4}$$
    $$c^t x_{\epsilon_0}^- = c^t x_0 - \epsilon c^t \lambda < c^t x_0 \tag{2.5}$$

    así pues, las ecuaciones (2.4) y (2.5) si $[P]$ es de maximizar o de minimizar respectivamente, contradicen que x_0 sea la solución óptima.
  - Si $c^t\lambda < 0$ entonces

    $$c^t x_{\epsilon_0}^- = c^t x_0 - \epsilon c^t \lambda > c^t x_0 \tag{2.6}$$
    $$c^t x_{\epsilon_0}^+ = c^t x_0 + \epsilon c^t \lambda < c^t x_0 \tag{2.7}$$

    así pues, las ecuaciones (2.6) y (2.7) si $[P]$ es de maximizar o de minimizar respectivamente, contradicen que x_0 sea la solución óptima.
  - Si $c^t\lambda = 0$ entonces $c^t x_0 = c^t x_0^+ = c^t x_0^-$ por lo que x_0^+ y x_0^- son soluciones con el mismo valor de la función objetivo y con una componente menos estrictamente positiva, por lo que repitiendo el proceso de forma iterativa se llegaria a un $x_\epsilon^* = x_0^* \pm \lambda\epsilon$ donde x_ϵ^* sea básica y $c^t x_\epsilon^* = c^t x_0$.

$\square$

Corolario 1

Si un polítopo es no vacío entonces el conjunto de puntos extremos es no vacío.

Corolario 2

Si existe solución óptima finita entonces existe una solución óptima finita que es un punto extremo.

Corolario 3

El conjunto de puntos extremos de un polítopo es finito a lo sumo

$$\binom{n}{m}.$$

Ejemplo 6

Si consideramos $n = 100$ variables y $m = 30$ restricciones y cada sistema básico tarda en resolverse 1 milisegundo, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{c} 100 \\ 30 \end{array} \right) = \frac{100!}{70! \cdot 30!} = 29 \cdot 10^{24} = 9195 \text{ billones de años.}$$

El método SIMPLEX, el cual veremos en el próximo capítulo busca la solución óptima entre las soluciones básicas pero sin calcularlas todas.

3 Método Simplex

En el capítulo anterior se ha hecho una introducción de que es la programación lineal y los distintos teoremas que relacionan los problemas de optimización con representaciones geométricas.
En este capítulo se introducirá el método simplex, un algoritmo para poder resolver problemas de programación lineal.
En resumen, el método simplex nos calcula soluciones óptimas de un problema, teniendo en cuenta:

1. Hay que cambiar de soluciones básicas adyacentes en soluciones básicas adyacentes.
2. Conseguir que la solución básica sea factible.
3. Calcular que variable debe entrar en la base para mejorar la función objetivo.

Teniendo en cuenta esto, a continuación se describirán las distintas fases del método simplex

3.1. Las tres fases del método simplex

3.1.1. Pivotar, "saltar"de solución básica factible en solución básica factible

Sea $[P]$ un PPL en formato estándar:

$$min(max)c^t x$$

$$s.a \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A \in \mathcal{M}_{mxn}, b \geq 0, rango(A) = m$$

Podemos suponer sin perdida de generaldiad que la matriz A se puede escribir como

$$[A][x] = [B_{mxn} \; N_{mx(n-m)}] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = [b]$$

La matriz B es invertible, por tanto podemos multiplicar por B^{-1} y tenemos:

$$[Id_{mxn}\ N_{mx(n-m)}]\left[\begin{array}{c} x_B \\ x_N \end{array}\right] = [B^{-1}][b]$$

Ejemplo 7

$$max/min\ c^t x$$

$$s.a \left\{ \begin{array}{c} x_1 + 5x_4 = 57 \\ x_1 - 4x_4 = 12 \\ x_1 + x_4 = 5 \end{array} \right.$$

Tabla simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	0	5	57
x_2	0	1	0	-4	12
x_3	0	0	1	1	5

Supongamos que x_4 mejora a la solución actual. Cambiamos por ejemplo, x_4 por x_3

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	0	5	57
x_2	0	1	0	-4	12
x_3	0	0	1	1	5
				$\uparrow$	

Hacemos operaciones Gaussianas para poner la columna x_4 como básica:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	-5	0	32
x_2	0	1	4	0	32
x_4	0	0	1	1	5

Ahora volvemos a la solución básica inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	0	5	57
x_2	0	1	0	-4	12
x_3	0	0	1	1	5

Ahora queremos que entre en la base la variable x_4 y que salga la variable x_2

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	$\frac{5}{4}$	0	0	72
x_4	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	-3
x_3	0	$\frac{1}{4}$	1	0	8

3.1.2. Dada una variable no básica que mejore la solución actual, ¿Qué variable no básica debe salir?

Sea $[P]$ un PPL en formato estándar:

$$min\ (max) c^t x$$

$$s.a \left\{ \begin{array}{c} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

La matriz

$$[A][x] = [b]$$

Podemos reescribirla de forma que

$$[B\ N] \left[\begin{array}{c} x_B \\ x_N \end{array} \right] = [b]$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la

$$B = I_{mxn} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos escribir en formato tabla en formato simplex:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & \dots & \dots & \dots & a_{1\ m+1} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & a_{2\ m+1} & \dots & a_{2q} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & a_{m\ m+1} & \dots & a_{mq} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} x_B \\ x_N \end{array} \right] = [b]$$

	x_1	x_2	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_q	$\dots$	x_n	b
x_1	1	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{1\ m+1}$	$\dots$	a_{1q}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$\dots$	0	1	$\dots$	$\dots$	$a_{2\ m+1}$	$\dots$	a_{2q}	$\dots$	a_{2n}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	$\dots$	$\dots$	0	1	$a_{m\ m+1}$	$\dots$	a_{mq}	$\dots$	a_{mn}	b_m

Supongamos que x_q mejora la solución actual, entonces x_q quiere entrar en la base.
¿Qué variable básica $x_1, ..., x_m$ debe salir?

$$b_1(a_1) + b_2(a_2) + ... + b_m(a_m) = b$$

$$b_{1\ q}(a_1) + b_{2\ q}(a_2) + ... + b_{m\ q}(a_m) = b$$

$$b_1 a_1 + b_2 a_2 + ... + b_n a_m = b\ (1)$$

$$a_{1\ q} a_1 + a_{2\ q} a_2 + ... + a_{n\ q} a_m = a_q\ (2)$$

Sea $\varepsilon \geq 0$ y realicemos la siguiente operación:

$$(1) - \varepsilon(2)$$

$$(b_1 - \varepsilon a_{1\ q})a_1 + (b_2 - \varepsilon a_{2\ q}) + ... + (b_m - \varepsilon a_{m\ q})a_m = b - \varepsilon a_q$$

$$(b_1 - \varepsilon a_{1\ q})a_1 + (b_2 - \varepsilon a_{2\ q}) + ... + (b_m - \varepsilon a_{m\ q})a_m + \varepsilon a_q = b$$

Definamos ahora el vector:

$$x_\varepsilon = \begin{pmatrix} b_1 - \varepsilon a_{1\ q} \\ b_2 - \varepsilon a_{2\ q} \\ ... \\ b_m - \varepsilon a_{m\ q} \\ ... \\ \varepsilon \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ ... \\ m \\ ... \\ q \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caso I: Si $a_{iq} < 0$ para $1 \leq i \leq m$, entonces $x_\varepsilon \in R$ para todo $\varepsilon \geq 0$.
En este caso, el problema es no acotado, encuentro una solución que hace que la función objetivo mejore todo lo queramos.
Caso II: Si existen algunos $a_{iq} > 0$, queremos que:

$$b_i - \varepsilon a_{iq} = 0$$

Tomando

$$\varepsilon = \text{mín}\{\frac{b_i}{a_{iq}} : a_{iq} > 0\}$$

Entonces entra en la base la variable x_q, sale de la base la variable asociada a la ecuación $b_i - \varepsilon a_{iq} = 0$ (En caso de empate, puede salir la que queramos)

Forma alternativa de la fase II

Supongamos que x_q entra en la base y que x_k es la variable básica que debe salir.

	x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_q	...	x_n	b
x_1	1	...	...	...	...	...	$a_{1\ m+1}$	...	a_{1q}	...	a_{1n}	b_1
...	0	1	...	...	...	...	$a_{2\ m+1}$	...	a_{2q}	...	a_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\leftarrow x_k$	...	...	...	1	...	...	...	...	a_{kq}	...	...	b_k
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	...	...	....	...	0	1	$a_{m\ m+1}$	...	a_{mq}	...	a_{mn}	b_m

Aplicamos operaciones Gaussianas

$$F_k' = \frac{1}{a_{kq}} F_k$$

	x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_q	...	x_n	b
x_1	1	...	...	...	...	...	$a_{1\ m+1}$	...	a_{1q}	...	a_{1n}	b_1
...	0	1	...	...	...	...	$a_{2\ m+1}$	...	a_{2q}	...	a_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\leftarrow x_k$	...	...	...	$\frac{1}{a_{kq}}$	...	...	...	...	$\frac{a_{kq}}{a_{kq}}$	...	...	$\frac{b_k}{a_{kq}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	...	...	....	...	0	1	$a_{m\ m+1}$	...	a_{mq}	...	a_{mn}	b_m

Hacemos ahora la siguiente operación:

$$F_j = F_j - a_{jq} F_k \ \forall j \neq q$$

	x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_q	...	x_n	b
x_1	1	...	...	...	...	...	$a_{1\ m+1}$	...	a_{1q}	...	a_{1n}	$b_1 - a_{1q}\frac{b_k}{a_{kq}}$
...	0	1	...	...	...	...	$a_{2\ m+1}$	...	a_{2q}	...	a_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\leftarrow x_k$	...	...	...	...	...	...	...	...	1	...	...	$\frac{b_k}{a_{kq}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	...	...	....	...	0	1	$a_{m\ m+1}$	...	a_{mq}	...	a_{mn}	$b_m - a_{mq}\frac{b_k}{a_{kq}}$

Como $b_i \geq 0$ entonces, $a_{kq} > 0$ de modo que

$$b_i - a_{iq}\frac{b_k}{a_{kq}} \geq 0$$

$$b_i \geq a_{iq}\frac{b_k}{a_{kq}}$$

1. Si a_{iq} para todo $i = 1, ..., m$ para $i \neq k$ entra la nueva solución factible
2. Si existen algunos $a_{iq} > 0$

$$b_i - a_{iq}\frac{b_k}{a_{kq}} \geq 0$$

$$b_i \geq a_{iq}\frac{b_k}{a_{kq}}$$

Dado que $a_{iq} > 0$

$$\frac{b_i}{a_{iq}} \geq \frac{b_k}{a_{kq}}$$

La fila asociada a $\text{mín}\{\frac{b_i}{a_{iq}} : a_{iq} > 0\}$ indica la variable que debe salir.

3.1.3. ¿Qué variable no básica mejora a la solución actual?

Partimos del siguiente sistema:

	x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_q	...	x_n	b
x_1	1	...	...	...	...	...	$a_{1\ m+1}$	...	a_{1q}	...	a_{1n}	b_1
...	0	1	...	...	...	...	$a_{2\ m+1}$	...	a_{2q}	...	a_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_k	...	...	...	1	...	...	...	...	a_{kq}	...	...	b_k
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	...	...	....	...	0	1	$a_{m\ m+1}$	...	a_{mq}	...	a_{mn}	b_m

La solución básica asociada a la tabla anterior viene dada por:

$$x_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ para $c_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, ..., n$
¿Qué valor alcanza x_0 en la función objetivo?

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + ... + c_mx_m + c_{m+1} \cdot 0 + ... + c_n \cdot 0 = z_0$$

Vamos a despejar los x_i para $i = 1, ..., m$ en términos del resto de variables.

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{1j}x_j \\ x_2 = b_2 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{2j}x_j \\ \dots \\ x_m = b_m - \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}x_j \end{cases}$$

¿Qué valor alcanza la función objetivo en la solución general x?

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1(b_1 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{1j}x_j) + c_2(b_2 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{2j}x_j) + ... + c_m(b_m - \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}x_j) + x_{m+1}c_{m+1} + ... + c_nx_n$$

Aplicando la propiedad distributiva ahora:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1(b_1 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{1j}x_j) + c_2(b_2 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{2j}x_j) + ... + c_m(b_m - \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}x_j) + x_{m+1}c_{m+1} + ... + c_nx_n$$

$$= c_1b_1 + c_2 + ... + c_mb_m - c_1 \sum_{j=m+1}^{n} a_{1j}x_j - c_2 \sum_{j=m+1}^{n} a_{2j}x_j - ... - c_m \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}x_j + x_{m+1}c_{m+1} + ... + c_nx_n =$$

$$= z_0 + \left[c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i\ m+1}\right] x_{m+1} + \left[c_{m+2} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i\ m+2}\right] x_{m+2} + ... + \left[c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}\right] x_n =$$

$$= z_0 - \left[\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i\ m+1} - c_{m+1}\right] x_{m+1} - \left[\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i\ m+2} - c_{m+2}\right] x_{m+2} - ... - \left[\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in} - c_n\right] x_n =$$

Definimos $r_q = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i\ q} - c_q$ como costo relativo asociado a la variable x_i.
Si el problema es de minimizar, queremos que todos los $r_q < 0$.
Por otro lado, si el problema es de maximizar queremos que todos los $r_q > 0$, de esta manera aumentamos el valor objetivo.
Por tanto, salen aquellos que no cumplan la condición de optimalidad.

3.1.4. Teorema de condición necesaria y suficiente de optimalidad

La discusión anterior se puede ver de forma resumida en el siguiente teorema:

Teorema 3

Dado un PPL

$$min(max)\ c^t x$$

$$s.a \left\{ \begin{array}{c} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Si x_0 es una solución básica factible de [P] entonces

1. Si todos los costos relativos r_j de las variables básica son positivas o nulas (negativas o nulas) en el caso de maximizar (en el caso de minimizar) entonces x_0 es solución óptima de [P].

2. Si alguno de los costos relativos es negativo (positivo) en el caso de maximizar (minimizar) entonces la solución actual no es óptima y la variable asociada a dicho coste relativo mejorará la solución actual.

   a) Si existe $\varepsilon\{\frac{b_i}{a_{ij}} : a_{ij} > 0\}$ entonces la variable que debe de salir es aquella asociada a la fila donde se alcanza el mínimo, ε

   b) Si todos los componentes $a_{ij} < 0$ asociados a la variable que *entrar* entrar entonces el problema es no acotado. Podemos encontrar entonces una dirección de ilimitación.

Recordemos,

$$r_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$$

Los costos relativos asociados a las variables básicas siempre es 0.

Ejemplo 8

$$max\ 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$s.a \left\{ \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \end{array} \right.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Pasamos a formato estándar

$$max\ 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$s.a \left\{ \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 6 \end{array} \right.$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Construimos la tabla simplex

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & b \\
\hline
0\, s_1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0\, s_2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
0\, s_3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\
\hline
 & -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Vemos que la variable x_1 y x_3 quieren entrar, elegimos una, en este caso x_1, y debe salir s_1.

$$F_1' = \frac{F_1}{2}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & b \\
\hline
3\, x_1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\
0\, s_2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
0\, s_3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\
\hline
 & -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$F_2' = F_2 - F_1$$

$$F_3' = F_3 - 2F_1$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & b \\
\hline
3\, x_1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\
0\, s_2 & 0 & 3/2 & 5/2 & 1/2 & 1 & 0 & 4 \\
0\, s_3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
 & 0 & 1/2 & -3/2 & 3/2 & 0 & 0 & 3
\end{array}$$

Debe entrar en la base la variable x_3, haciendo cociente, llegamos que la variable que debe salir es s_2, por tanto debemos convertir la columna de x_3 en la forma $(0, 1, 0)^t$

$$F_2' = \frac{2}{5} F_2$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & b \\
\hline
3\, x_1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\
3\, x_3 & 0 & 3/5 & 1 & -2/10 & 2/5 & 0 & 8/5 \\
0\, s_3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
 & 0 & 1/2 & -3/2 & 3/2 & 0 & 0 & 3
\end{array}$$

$$F_1' = F_1 - \frac{1}{2}F_2$$

	3	1	3	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
3 x_1	1	1/5	0	6/10	−2/5	0	1
3 x_3	0	3/5	1	−2/10	2/5	0	8/5
0 s_3	0	1	0	−1	0	1	4
	0	7/5	0	6/5	3/5	0	27/5

Por tanto, la solución óptima es:

$$x_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{8}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.2. Degeneración del ciclado

Vamos a ver ahora unos casos donde el método simplex nos lleva a un ciclo,

$$max\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4$$
$$s.a \begin{cases} -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ 1/3x_1 + x_2 - 1/3x_3 - 2x_4 \leq 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Pasamos el problema a formato estándar, y construimos la tabla SIMPLEX:

	2	3	−1	−12	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
0 s_1	−2	−9	1	9	1	0	0
0 s_2	1/3	1	1/3	−2	0	1	0
	−2	−3	1	12	0	0	0

	2	3	−1	−12	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
0 s_1	1	0	−2	−9	1	9	0
3 x_2	1/3	1	−1/3	−2	0	1	0
	−1	0	0	6	0	3	0

	2	3	-1	-12	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
$2\,x_1$	1	0	-2	-9	1	9	0
$3\,x_2$	0	1	$1/3$	1	$-1/3$	-2	0
	0	0	-2	-3	1	12	0

	2	3	-1	-12	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
$2\,x_1$	1	0	-2	-9	1	9	0
$-12\,x_4$	0	1	$1/3$	1	$-1/3$	-2	0
	0	3	-1	0	0	6	0

$\ldots$

	2	3	-1	-12	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
$0\,s_1$	-2	-9	1	9	1	0	0
$0\,s_2$	$1/3$	1	$1/3$	-2	0	1	0
	-2	-3	1	12	0	0	0

3.2.1. Método anticiclado

1. Elegimos un orden entre las variables.

2. En caso de empate en los criterios de entrada o de salida de variables, elegimos la variable más pequeña usando el orden definido en la lista de la fase I.

3.3. Métodos para resolver problemas con restricciones

Hay casos que al escribir nuestro problema de programación lineal no somos capaces de inicializar el método SIMPLEX, pues no somos capaces de calcular una solución básica, esto pasa en problemas de programación lineal donde aparecen restricciones con $=$ o $\geq$.
Veamos un ejemplo:

3.3.1. Resolución de PPL con restricciones $(=)$ y $(\geq)$

Sea [P] el siguiente PPL:

$$min\ 3x_1 + 5x_2$$

$$s.a \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \end{cases}$$

Lo pasamos a formato estándar, y construimos la tabla SIMPLEX.

	x_1	x_2	s_1	s_3	b	
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	1	0	1	0	6
s_3	-3	-2	0	0	1	-18

Es básica pero no factible, por tanto no puede inicializar el simplex.

3.3.2. Método de las penalizaciones

Modificamos el problema original añadiendo una variable artificial (z_i) por cada restricción de $(=)$ y de $(\geq)$.
Dichas variables artificiales tendrán un costo $M >> 0$ (muy grande) y entrarán en la función objetivo sumando (restando) si el problema es de minimizar (maximizar).
Al problema con las variables artificiales se le denomina problema ampliado.

Volviendo al problema anterior,

$$min\ 3x_1 + 5x_2 + Mz_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + s_1 = 4 \\ x_2 + s_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - s_3 + z_3 = 18 \end{cases}$$

Recordemos lo siguiente:

- Las variables de holgura sirven para transformar las restricciones $(\leq)$ o $(\geq)$ en $(=)$
- Las variables artificiales sirven para iniciar el método SIMPLEX con una solución básica factible.

Observemos que

- El problema ampliado no es equivalente al problema original.
- Solo coincide cuando en la solución del problema ampliado las variables artificiales sean 0, z_i para todo i.
- Si x_0 es solución óptima del problema ampliado y todos los $z_i = 0$, entonces x_0 es solución óptima del problema original.
- El problema ampliado siempre tiene solución.
- Si x_0 es solución óptima del problema ampliado y existe algún $z_i \neq 0$
  Entonces el problema original NO tiene solución.

- Si el problema ampliado es no acotado entonces el problema original también es no acotado.

Resolvamos entonces:

$$min\ 3x_1 + 5x_2 + Mz_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + s_1 = 4 \\ x_2 + s_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - s_3 + z_3 = 18 \end{cases}$$

	3	5	0	0	0	M	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z_3	b
$0\ s_1$	1	0	1	0	0	0	4
$0\ s_2$	0	1	0	1	0	0	6
$M\ z_3$	3	2	0	0	-1	1	18
	$3M-3$	$2M-5$	0	0	$-M$	0	$18M$

En este caso entra x_1 y sale s_1

$$F_3' = F_3 - 3F_1$$

	3	5	0	0	0	M	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z_3	b
$3\ x_1$	1	0	1	0	0	0	4
$0\ s_2$	0	1	0	1	0	0	6
$M\ z_3$	0	2	-3	0	-1	1	6
	0	$2M-5$	$-3M+3$	0	$-M$	0	$6M+12$

Entra x_2 y sale z_3.
El lector debe continuar este ejercicio.

3.3.3. Método de las dos fases

Otro método que se puede utilizar para calcular una solución básica es el método de las dos fases, para ello:

1. Fase 1

   a) Añadimos una variable artificial z_i para cada restricción de $(=)$ o $(\geq)$ igual que en el método de las penalizaciones.

   b) Cambiamos la función objetivo por

   $$min \sum_{i=1}^{k} z_i$$

   c) Si el problema de la fase 1 tiene solución optima con alguna variable artificial no nula, entonces el problema original no tiene solución.

d) Si tiene solución óptima y todas las variables artificiales son cero, entonces pasamos a la fase 2.

2. Fase 2

a) Cambiamos la función objetivo de la fase 1 por la función objetivo original y eliminamos las columnas de las variables artificiales.

Ejemplo 9

$$min\ 3x_1 + 5x_2 + Mz_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + s_1 = 4 \\ x_2 + s_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - s_3 + z_3 = 18 \end{cases}$$

Fase 1

$$min\ z_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + s_1 = 4 \\ x_2 + s_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - s_3 + z_3 = 18 \end{cases}$$

	0	0	0	0	0	1	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z_3	b
$0\ s_1$	1	0	1	0	0	0	4
$0\ s_2$	0	1	0	1	0	0	6
$1\ z_3$	3	2	0	0	-1	1	18
	3	2	0	0	-1	0	18

	0	0	0	0	0	1	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z_3	b
$0\ x_1$	1	0	1	0	0	0	4
$0\ s_2$	0	1	0	1	0	0	6
$1\ z_3$	0	2	-3	0	-1	1	6
	0	2	-3	0	-1	0	6

	0	0	0	0	0	1	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z_3	b
$0\ x_1$	1	0	1	0	0	0	4
$0\ s_2$	0	0	$3/2$	1	$1/2$	$-1/2$	3
$1\ x_2$	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	$1/2$	3
	0	0	0	0	0	-1	0

Fase 2:

	3	5	0	0	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$3\ x_1$	1	0	1	0	0	4
$0\ s_2$	0	0	$3/2$	1	$1/2$	3
$5\ x_2$	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	3
	0	0	$-9/2$	0	$5/2$	27

3.4. Coste computacional

Supongamos que tenemos un problema de programación lineal de maximizar escrito en formato estándar. Vamos a contar el número de operaciones máximas para resolver un problema de programación lineal.

3.4.1. Operaciones de una iteración

Cálculo de los costes relativos

Tenemos que calcular los costes relativos de las variables no básicas, por tanto por cada variable no básica, calcular el coste relativo nos cuesta:

1. m multiplicaciones.
2. m sumas.
3. 1 resta.

Por tanto hay que hacer $2m + 1$ operaciones para calcular cada coste relativo.
Además, tenemos $n - m$ variables no básicas, esto hace un total de:

$$(2m + 1) \cdot (n - m) = 2mn - 2m^2 + n - m$$

Si $n >> m$, se tiene que calcular el coste relativo tiene un coste $o(mn)$

Calculo del mínimo de los costes relativos

Para cálcular el mínimo de los costes relativos tenemos que iterar entre todos los costes relativos de las variables no básicas, esto es que tenemos que hacer $n - m$ comparaciones.

3.4.2. Operaciones totales

De esta forma, dado que el método simplex explora todos los puntos extremos, y el número máximo de puntos extremos viene dado por

$$\binom{n}{m}$$

Supongamos que $n \geq 2m$, entonces:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \geq \left(\frac{n}{m}\right)^m \geq 2^m$$

Por tanto, parece lógico temerse que vamos a tener un número de iteraciones exponencial. En la práctica se observa, que el orden del método simplex $o(m^2n)$, para ver casos extremos donde el método simplex alcanza un orden exponencial se puede ver el ejemplo clásico de Klee y Minty.

4

Problema dual de la programación lineal

5

Análisis de post-optimalidad

6

Problemas de transportes