Códigos y criptografía

José Carlos García

17 de febrero de 2016

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Cuerpos finitos

Definición 1. *Un **cuerpo** es un anillo conmutativo con unidad en el que todo elemento distinto de 0 tiene inverso.*

Ejemplo 1. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *es anillo conmutativo con unidad, además, si* n *es primo entonces* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *es un cuerpo.*

La suma y el producto de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ se define como el resto de la suma de los elementos, para el producto de forma análoga.

Teorema 1. *Si un* K *es finito, entonces* $card(K) = p^r$ *con* $p \in \mathbb{P}$ *y* $r \in \mathbb{N}$

Teorema 2. *Dado* $p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N}$ *entonces existe un cuerpo* K *tal que* $card(K) = p^r$*. Además, dos cuerpos finitos con el mismo cardinal son isomorfos.*

Definición 2. *Si* $q = p^r$ *denotamos por* $\mathbb{F}_q$ *el cuerpo finito de* q *elementos.*

Ejemplo 2. *Construir un cuerpo con 4 elementos.*
Consideremos $\mathbb{F}_2[x]$ *y el ideal* $< x^2 + x + 1 >$*, claramente* $< x^2 + x + 1 >$ *es irreducible en* $\mathbb{F}_2[x]$*, además* $\mathbb{F}_2[x]$ *es D.I.P., no existe ningún ideal* I*,* $< x^2 + x + 1 > \subset I \subset \mathbb{F}_2[x]$*, por tanto* $< x^2 + x + 1 >$ *es maximal, de aquí, se tiene que* $\mathbb{F}_2[x]/ < x^2 + x + 1 >$ *es cuerpo.*
Hacemos $\alpha = x + (x^2 + x + 1)$*. Los elementos de* $\mathbb{F}_2[x]/ < x^2 + x + 1 >$ *son:*

$$\begin{aligned} \alpha &= x + (x^2 + x + 1) \\ \alpha + 1 &= (x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ 1 &= 1 + (x^2 + x + 1) \\ 0 &= 0 + (x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$card(\mathbb{F}_2[x]/ < x^2 + x + 1 >) = 4$ *de la observación anterior.*

Algoritmo 1. *Se define el **algoritmo de Euclides** para calcular**máximo común divisor**, de* *forma que sean* $a, b \in \mathbb{N}$, *con* $a \geq b$ *hacemos:*

$$\begin{aligned} a &= c_1 b + r_1 \\ b &= c_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= c_3 r_2 + r_3 \\ r_2 &= c_4 r_3 + r_4 \\ &\dots \\ r_{s-2} &= c_s + r_{s-1} + r_s \\ r_{s-1} &= c_{s+1} + r_s \end{aligned}$$

Podemos obtener $r_s = mcd(a, b)$ *del modo siguiente:*

$$\begin{aligned} r_1 &= a - c_1 b \\ b &= c_2(a - c_1 b) + r_2 \\ r_2 &= -c_2 a + (1 + c_1) b \end{aligned}$$

De este modo, podemos obtener r_s *como continuación de* a, b, *de modo:*
$mcd(a, b) = r_s = \lambda a + \mu b$

Observación 1. λ, μ *se obtienen de modo efectivo a partir de las divisiones anteriores.*

Ejemplo 3. *Calcular* $mcd(139, 20)$.
Y además, $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ *tales que* $\lambda 139 + \mu 20 = mcd(139, 20)$.
Aplicando el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} 139 &= 6 \cdot 20 + 19 \\ 20 &= 1 \cdot 19 + 1 \\ 19 &= 139 - 6 \cdot 20 \\ 1 = 20 - 1 \cdot 19 = 20 - 1(139 - 6 \cdot 20) &= 7 \cdot 20 - 1 \cdot 139 \end{aligned}$$

Observación 2. *El inverso de* 20 *en* $\mathbb{F}_{139}$*:*
$7 \cdot 20 - 1 \cdot 139 = 1$.
Si reducimos $\mod 139$*:*

$$7 \cdot 20 = 1 \mod 139$$

El inverso de 20 *en* $\mathbb{F}_{139}$ *es* 7

Capítulo 2

Códigos autocorrectores

2.1. Parámetros de un código

Definición 3. *Decimos que $\mathcal{A}$ es un* ***alfabeto finito*** *si $\mathcal{A}$ es conjunto finito de q símbolos.*

Definición 4. *Decimos que $\mathcal{C}$ es un* ***código*** *si $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^n$, $\mathcal{C} \neq \emptyset$*

Definición 5. *Decimos que x es una* ***palabra*** *si $x \in \mathcal{A}$.*

Definición 6. *Decimos que c es una* ***palabra-código*** *si $c \in \mathcal{C}$.*

Ejemplo 4. *$\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$. Tomamos $\mathcal{C} = \mathcal{A}$, aquí hay más probabilidad de error. $\mathcal{C}_2 = \{(000), (111)\} \subset \mathbb{F}_2^3$ código.*

Definición 7. *Los* ***parámetros de un código*** *son:*

- ***Longitud***: *n.*
- ***Razón de información:*** $\dfrac{\log_q \#\mathcal{C}}{n}$
- ***Distancia de Hamming:*** *Sean $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{A}^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathcal{A}^n$ se define $\mathrm{d}(x, y) = \#\{i : x_i \neq y_i\}$. Define una distancia métrica.*
- ***Distancia mínima:*** $\mathrm{d}(\mathcal{C}) = \text{mín}\{d(c, c') : c, c' \in \mathcal{C}, c' \neq c\}$

Observación 3. *Sea $\mathcal{C}$ un código con distancia mínima $2d(\mathcal{C}) + 1$. Además:*

$$d(x, c_1) \leq d(\mathcal{C})$$

$$d(x, c_2) \leq d(\mathcal{C})$$

Ahora, por la desigualdad triangular

$$d(c_1, c_2) \leq d(c_1, x) + d(c_2, x) \leq d(\mathcal{C}) + d(\mathcal{C})$$

Por tanto, el código se decodificará con mayor facilidad.

Observación 4. *Si $d(\mathcal{C}) = 2d(\mathcal{C}) + 1$, dos bolas cualesquiera $B(c_1, d(\mathcal{C}))$, $B(c_2, d(\mathcal{C}))$, $c_1 \neq c_2 \in \mathcal{C}$ son disjuntos.*

Definición 8. *Un **código perfecto** es un código con* $d(\mathcal{C}) = 2d(\mathcal{C}) + 1$ *y tal que* $\{B(c, d(\mathcal{C}) : c \in \mathcal{C})\} = \mathcal{A}^n$

El **Ejemplo 4** corresponde a un código perfecto.

Notación 1. *Escribimos* $[n, M, d] -$ *código si queremos representar un código de longitud* n*,* M *elementos y diistancia mínima* d*.*

Ejemplo 5. *Sea* $\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}$ *y* $\mathcal{C}_2 = \{(000), (111)\} \subset \mathbb{F}_2^3$*.*
Sea $0 < p < \dfrac{1}{2}$ *la probabilidad de que se produzca un error al trasmitir un bit.*
Como $p < \dfrac{1}{2}$ *proponemos un algoritmo de decodificación, por **máximo verosimilitud**, lo más probable es que la palabra enviada del código sea la palabra de las del código que está más cercana a la palabra recibida.*
Para $\mathcal{C}_1$*, la probabilidad de decodificar correctamente la palabra recibida es* $1 - p$*.*
Para $\mathcal{C}_2$*:* (000) *la decodificamos correctamente si al enviarla nos llega* (000)*, la probabilidad de que sea correcta sería* $(1-p)^3$*,* (100)*, la probabilidad de que sea correcta sería* $p(1-p)^2$*,* (010)*, la probabilidad de que sea correcta sería* $p(1-p)^2$ *y* (001) *la probabilidad de que sea correcta sería* $p(1-p)^2$*.*
Por tanto, la probabilidad sería $(1-p)^3 + 3p(1-p)^2$*.*
Si tomamos $p = 0{,}1$*, tendríamos para* $\mathcal{C}_1 : 0{,}9$ *y para* $\mathcal{C}_2 : 0{,}972$*.*

Ejemplo 6. *Sea* $\mathcal{C} = \{(000), (111)\} \subset \mathbb{F}_2^3$*.*

Recibida	Decodificar
(000)	(100)
(100)	(100)
(110)	(100)
(101)	(100)
(010)	(100)
(001)	(100)
(011)	(111)
(111)	(111)

De los que decodificamos como (100) *tenemos una probabilidad de acierto de* $(1-p)^3 + 3p(1-p)^2 + 2p^2(1-p)$*, en el otro caso tenemos* $(1-p)^3 + p(1-p)^2$*.*

2.2. Códigos lineales

Definición 9. *Un **código lineal*** $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_q^n$ *donde* $\mathcal{C}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{F}_q^n$

Gracias a que es una estructura lineal, el código podemos simplificarlo teniendo en cuenta la base del subespacio vectorial.

Definición 10. *Sea* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{F}_q^n$*. El **peso** de* x *es* $w(x) = \#\{i : x_i \neq 0\}$

Notación 2. $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_q^n$*. Se define* $W(\mathcal{C}) = \text{mín}\{w(x) : x \in \mathcal{C}/\{0\}\}$

Proposición 1. *Si $\mathcal{C}$ es lineal, entonces $d(\mathcal{C}) = W(\mathcal{C})$*

Demostración. Sean $c_1 \neq c_2 \in \mathcal{C}$ que cumplen que $d(c_1, c_2) = d(\mathcal{C})$
Dado que $d(\mathcal{C}) = d(c_1, c_2) = w(c_1 - c_2)$, pero dado que $c_1 - c_2 \neq 0$, tenemos que $w(c_1 - c_2) \geq W(\mathcal{C})$, por tanto, $d(\mathcal{C}) \geq W(\mathcal{C})$.
Sea $c \in \mathcal{C} - \{0\}$, tal que cumple que $w(c) = W(\mathcal{C})$.
$W(\mathcal{C}) = w(c) = w(c - 0) = d(c, 0) \geq d()$ □

Notación 3. *Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_q^n$ lineal, $dim_{\mathbb{F}_1}\mathcal{C} = k$ decimos que $\mathcal{C}$ es un $[n, k] -$ código.*

Definición 11. ***Matriz generadora*** *de un $[n, k] -$ código es un matriz G, con dimensiones $k \times n$ cuyas filas forman una base de $\mathcal{C}$*

Ejemplo 7. *Si $\mathcal{C} = \{(000), (111)\}$, la matriz generadora es (111)*

Definición 12. ***Matriz de control de paridad*** *de un $[n, k] -$ código lineal es una matriz H de orden $(n - k) \times n$ tal que:*

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{F}_q^n : xH^t = 0\}$$

Observación 5. *Si $\mathcal{G} = (I_k|P)$ es generadora, con P con $n - k$ columnas, entonces $H = (-p^t|I_{n-k})$ es de control de paridad.*

Ejemplo 8. *En $\mathbb{F}_3^5$ consideramos el código con matriz generadora:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tratemos de dar una base de la matriz:

$$\mathcal{C} = \{\lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + \lambda_3\vec{u_3} : \lambda_i \in \mathbb{F}_3\}$$

$$= \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3) : \lambda_i \in \mathbb{F}_3\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_4) \in \mathbb{F}_3^5 : (-x_3 - x_2 + x_4 = 0, x_4 = x_1 + x_2, x_5 = x_1 + x_3)\} =$$

La matriz de las ecuaciones anterior es:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

La transpuesta de la matriz anterior es la matriz de control de paridad de $\mathcal{C}$

Algoritmo 2 (Algoritmo de decodificación usando el síndrome)**.** *Supongamos que $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_q$ es un código lineal, sea $x \in \mathbb{F}_q^n$, podemos decodificar x usando el código $\mathcal{C}$ comparando x con cada una de las palabras del código.*
Consideramos:

$$x - \mathcal{C} = \{x - c : c \in \mathcal{C}\} = x + \mathcal{C}$$

$x + \mathcal{C}$ es el conjunto de elementos que están en la misma clase $\mathbb{F}_q^n/\mathcal{C}$.
En el conjunto $x - \mathcal{C}$ consideramos un elemento e que tenga peso mínimo.
Si $e \in \mathcal{C}$ será de la forma $e = x - c$. Entonces $c \in \mathcal{C}$ está a la menor distancia de la palabra x.
Podemos decodificar la palabra x por la palabra c, que es $c = x - e$.
A la palabra e se le llama ***vector error*** *(asociado a x).*

Definición 13. *Sea H la matriz de control de paridad del código $\mathcal{C}$, consideramos $x \in \mathbb{F}_q^n$, se define* ***el síndrome*** *de x como $xH \in \mathbb{F}_q^{n-k}$.*

Observación 6. *Dos palabras $x, x' \in \mathbb{F}_q^n$ tienen el mismo síndrome si y sólo si $x + \mathcal{C} = x' + \mathcal{C}$. En efecto, si $x + \mathcal{C} = x' + \mathcal{C} \Longleftrightarrow xH^t - x'H^t = 0 \Longleftrightarrow xH^t = x'H^t$*

Algoritmo 3. *A continuación se nuestra el* ***algoritmo de decodificación usando síndrome***

1. *Para cada clase $x + \mathcal{C}$ de $\mathbb{F}_q^n/\mathcal{C}$ consideramos un $e \in x + \mathcal{C}$ de peso mínimo.*

2. *Para cada clase $x + \mathcal{C}$ calculamos el síndrome xH^t. Asociamos a ese síndrome el vector error e.*

3. *Cuando recibimos una palabra x, calculamos su síndrome, que tiene asociado un vector error e, y decodificamos x por $c = x - e$.*

Ejemplo 9. *En $\mathbb{F}_2^5$ consideramos el código $\mathcal{C}$ con matriz generadora:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3. Algunos códigos buenos

2.4. Códigos cíclicos

Capítulo 3

Criptografía

3.1. Criptosistemas simétricos

3.2. Criptosistemas de clave pública