Obliczenia inżynierskie w środowisku MATLAB
Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych – podstawy

Paweł Wachel

Rozważania zawęzimy do klasy równań różniczkowych zwyczajnych, w szczególności do tzw. zagadnienia początkowego (Cauchy'ego), tj. do równania różniczkowego z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x(t), t) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $f()$ jest znaną funkcją ciągłą. Przyjmiemy dodatkowo (chwilowo), że interesuje nas problem skalarny, tj. $x \in \mathbb{R}^1$. Zadanie polega na (numerycznym) rozwiązaniu równania, tj. na numerycznym przybliżeniu funkcji $x(t)$ spełniającej warunki (1). Wychodząc od definicji pochodnej (granica ilorazu różnicowego) zauważamy, że

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \tag{2}$$

gdzie $h > 0$ jest pewną stałą. Wstawiając (2) do (1) otrzymujemy

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \approx f(x(t), t) \Rightarrow x(t+h) \approx x(t) + hf(x(t), t). \tag{3}$$

Zgodnie z powyższą zależnością, numeryczny schemat rozwiązywania równania (1) polega na sekwencyjnym wyznaczaniu przybliżeń $x(h), x(2h), ...$ przy założeniu, że znana jest wartość $x(0)$. Schmemat ten jest jedną z technik znanych pod nazwą Metoda Eulera.

Zadania do wykonania:

1. Dane jest równanie
$$\frac{dx}{dt} = ax$$
z warunkiem początkowym $x(0) = 1$, którego rozwiązaniem jest $x(t) = e^{at}$. Przyjąć arbitralnie wartość h i zaimplementować numeryczny algorytm oparty na zależności (3). Wykreślić rozwiązanie numeryczne (oznaczane dalej jako x_{num}) oraz rozwiązanie analityczne (x_{an}) na wspólnym wykresie. Wykreślić przebieg błędu $x_{num} - x_{an}$ i przedyskutować jego charakter dla różnych wartości h. Co wpływa na charakter uzyskanego błędu (pomijając błędy w implementacji oczywiście)?

2. Rozpatrzymy następnie problem dwuwymiarowy
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ax. \tag{4}$$
Dokonując podstawienia $v_1 = x$ oraz $v_2 = \frac{dx}{dt}$, równanie (4) przepiszemy w postaci
$$\frac{dv_1}{dt} = v_2 \tag{5}$$
$$\frac{dv_2}{dt} = -av_1. \tag{6}$$

Przyjmujemy warunek początkowy $x(0) = c_1$ oraz $x'(0) = c_2$, gdzie c_1, c_2 to dowolnie wybrane stałe oraz $a > 0$. Posługując się omawianym schematem numerycznym zaimplementować algorytm przybliżający rozwiązanie równania (5)–(6).

3. Dla układu (5)-(6) wyznaczyć rozwiązanie analityczne $v_1(t)$ i $v_2(t)$. Wykreślić na osobnych wykresach analityczne przebiegi $v_1(t)$ oraz $v_2(t)$ i nanieść na nie rozwiązania numeryczne. Przedyskutować uzyskane rezultaty w kontekście uzyskiwanych błędów numerycznych. Czy błędy rozwiązania dla v_1 wpływają na rozwiązanie v_2 (lub odwrotnie)?