

Obliczenia inżynierskie w środowisku MATLAB

Techniki Monte Carlo w obliczeniach wielowymiarowych

Paweł Wachel

1. Rozpatrzmy d -wymiarową przestrzeń liniową z normą l_p . Dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^d$ mamy więc

$$\|v\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (1)$$

oraz $\|v\|_p = \max_d \{|v_k|\}$ dla $p = \infty$.

2. W przypadku $d = 3$, $p = 2$ otrzymujemy oczywiście

$$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

a zatem $\|v\|_2$ jest długością (wektora) w powszechnym, intuicyjnym, rozumieniu.

3. Posłużymy się nieformalną definicją pojęcia kuli jako zbioru punktów przestrzeni, **oddalonych** od ustalonego punktu v_0 (zwanego środkiem) o odległość nie większą niż stała r (promień).

Uwaga: dla uproszczenia rozważymy tylko kule o środkach w początku układu współrzędnych i promieniu jednostkowym $r = 1$.

4. Zgodnie z powyższą definicją oraz definicją normy l_p (wzór (1)) interesujące nas kule będziemy oznaczać symbolem K_p^d , gdzie d to wymiar przestrzeni, a p to zastosowana norma.

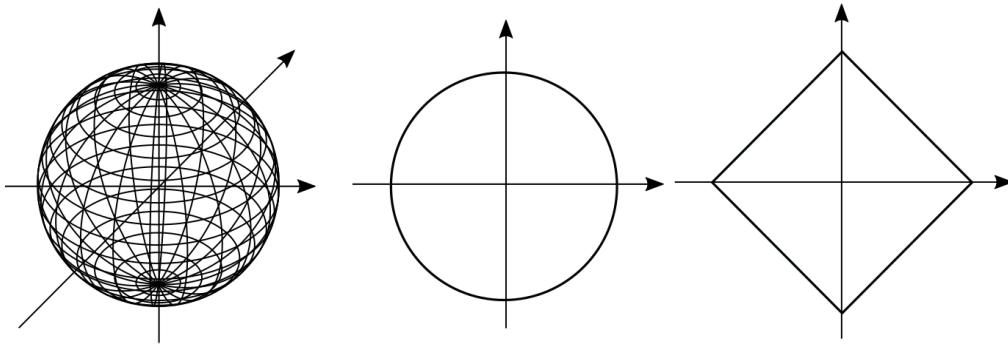


Figure 1: Przykładowe kule K_2^3 , K_2^2 oraz K_1^2

Zadania do wykonania:

1. Skonstruować program wykreślający kulę K_p^2 dla zadanej wartości $p \in [1, \infty]$ oraz przedstawić uzyskane wyniki dla różnych (samodzielnie wybranych) wartości p . Przedyskutować kształt obiektów również dla $p \in (0, 1)$. Dla jakich wartości p otrzymane zbiory są wklęsłe, a dla jakich wypukłe?
2. Posługując się technikami Monte Carlo oszacować objętość kuli K_1^2 (a więc pola kwadratu o boku równym $\sqrt{2}$).
3. Posługując się technikami Monte Carlo oszacować objętość kuli K_2^3 (a więc „klasycznej” kuli jednostkowej w przestrzeni trójwymiarowej).
4. Posługując się technikami Monte Carlo oszacować objętość kul K_2^d dla $d = 1, 2, \dots, 10$. Uzyskane rezultaty przedstawić w formie wykresu (zależność K_2^d od d). Jak zmienia się objętość kuli jednostkowej wraz ze wzrostem wymiarowości przestrzeni?
5. Powtórzyć symulacje z punktu 4. dla normy l_1 (lub/oraz innych samodzielnie wybranych wartości p). Dokonać interpretacji uzyskanych wyników.