

# Tối ưu nguyên

**Đỗ Ngọc Minh Thư**

Ngày 9 tháng 5 năm 2024

# NỘI DUNG

- 1 Ý tưởng về phương pháp cắt
- 2 Thuật toán Gomory cho bài toán nguyên hoàn toàn

# Giới thiệu

Ta xét:

$$\begin{array}{ll} (P) & \text{Min} \quad \langle c, x \rangle \\ & \text{s.t} \quad \begin{cases} Ax = b, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{array} \quad (1)$$

Ta ký hiệu tập  $F \subset \mathbb{R}^n$  là miền xác định của bài toán (P).

# Giới thiệu

$$\begin{aligned}
 (P^N) \quad & \text{Min} \quad \langle c, x \rangle \\
 \text{s.t} \quad & \begin{cases} Ax = b, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \\ x_j \text{ nguyên}, j = 1, 2, \dots, n_1 \ (n_1 \leq n). \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Ta gọi:

$P^N$  là bài toán tối ưu nguyên.

$F^N$  là miền xác định của bài toán.

## Sử dụng bao lỗi của đa diện lỗi

Ta kí hiệu  $co(F)$  là bao lồi của đa diện lồi  $F$

## Định lý 1.1

Giả sử  $F$  là một đa diện lồi,  $F^N$  là tập các điểm nguyên của nó,  $R$  là bao lồi của  $F^N$  (tức là  $R = co(F^N)$ ) khi đó:

- 1)  $R$  là một đa diện nguyên.
- 2)  $R^N = F^N$ .
- 3) Tập  $R^*$  các phương án chấp nhận được của đa diện  $R$  chứa trong  $R^N$ :

$$R^* \subset R^N$$

# Sử dụng bao lồi của đa diện lồi

## Hệ quả 1.1

*Giả sử  $X$  là phương án tựa tối ưu của bài toán  $Q$  (bài toán tối ưu tuyến tính có miền xác định là đa diện  $R$ , khi đó  $X$  cũng là phương án tối ưu của bài toán  $P^N$ . Vì vậy để giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên  $P^N$  ta đi giải bài toán  $Q$ .*

## Định lý 1.2

*Giả sử  $L$  là một đa diện lồi,  $U$  là một đa diện lồi nguyên và  $U^N = F^N$ , khi đó :*

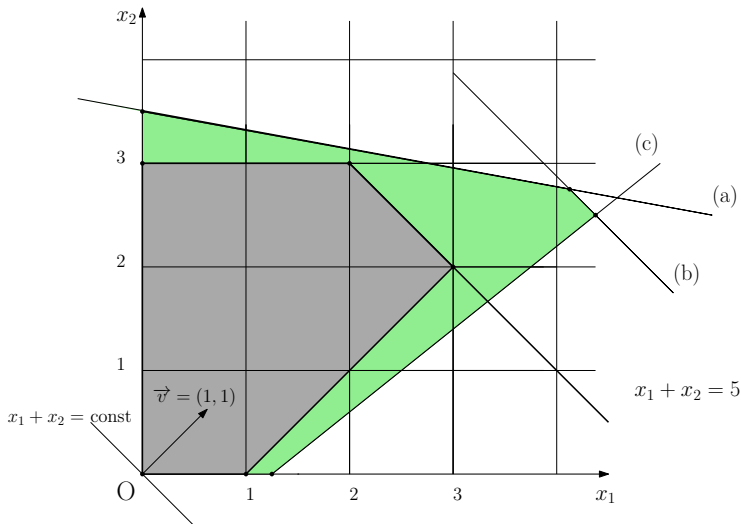
$$U = R = co(F^N)$$

# Sử dụng bao lồi của đa diện lồi

Ví dụ minh họa:

BÀI TOÁN ( $P^N$ )	BÀI TOÁN ( $P$ )	BÀI TOÁN ( $Q$ )
$Max(x_1 + x_2)$ $2x_1 + 11x_2 \leq 38$ (a) $x_1 + x_2 \leq 7$ (b) $4x_1 - 5x_2 \leq 5$ c $x_j \geq 0$ $x_j$ nguyên	$Max(x_1 + x_2)$ $2x_1 + 11x_2 \leq 38$ (a) $x_1 + x_2 \leq 7$ (b) $4x_1 - 5x_2 \leq 5$ (c) $x_j \geq 0$	$Max(x_1 + x_2)$ $x_2 \leq 3$ $x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1 - x_2 \leq 1$ $x_j \geq 0$
$Max = 5$ Tối ưu là 2 điểm $(2;3); (3;2)$	$Max = 7$ Tối ưu là một đoạn $[(\frac{13}{3}, \frac{8}{3}); (\frac{40}{9}, \frac{23}{9})]$	$Max = 5$ Tối ưu là đoạn $[(2;3); (3;2)]$

# Sử dụng bao lồi của đa diện lồi



Hình: Ảnh minh họa



# Khái niệm lát cắt đúng

Giả sử bài toán  $P^N$  là bài toán quy hoạch nguyên nào đó và phương án tựa tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính tương ứng  $X$  không thỏa mãn điều kiện nguyên, tức là  $X \notin F^N$ .

Khi đó, bất đẳng thức:

$$\sum_j a_j x_j \leq \beta$$

được gọi là lát cắt đúng nếu thỏa mãn hai điều kiện.

## 1) Điều kiện cắt:

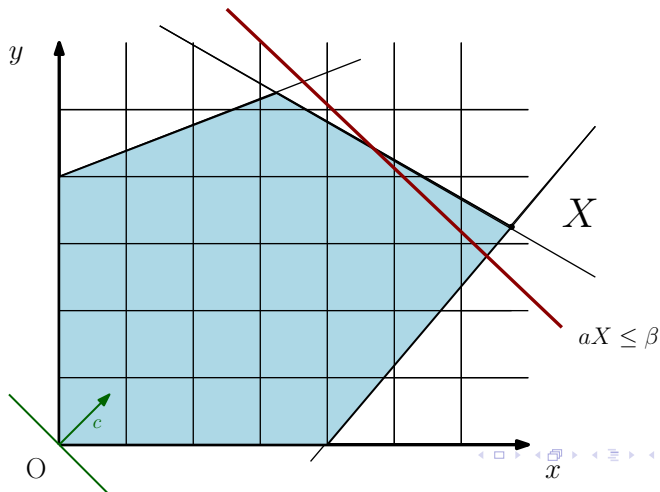
$X$  không thỏa mãn điều kiện (20), tức là  $Ax > \beta$ .

## 2) Điều kiện đúng:

Nếu  $X$  là phương án của bài toán tối ưu nguyên thì  $X$  thỏa mãn điều kiện (20), tức là  $F^N \subset \{X \mid aX \leq \beta\}$ .

## Khái niệm lát cắt đúng

Nói cách khác, lát cắt thêm vào sẽ không cắt đi một phương án nguyên nào của bài toán.



# Ý tưởng phương pháp cắt của Danzig

Việc giải một bài toán  $P^N$  là một quá trình gồm nhiều bước:

- a) Ở bước thứ  $r$ , giải bài toán quy hoạch tuyến tính phụ  $P_r, r = 0, 1, \dots$  với  $F_0 = F$
- b) Tập các điểm nguyên của tất cả các đa diện lồi là như nhau:

$$F_0^N = F_1^N = F_2^N = \dots = F_r^N = \dots$$

Do đó, nếu phương án tối ưu  $X_r^*$  của bài toán  $P_r$  thoả mãn điều kiện nguyên thì nó cũng là phương án tối ưu  $X_0$  của bài toán xuất phát  $P_0^N$  và quá trình kết thúc.

# Ý tưởng phương pháp cắt của Danzig

c) Nếu  $X_r^*$  không thoả mãn điều kiện nguyên thì  $X_r^*$  không phải là phương án của bài toán  $P_{r+1}$ , tức là  $X_r^* \notin F_{r+1}$ .

Chuyển từ bước  $r$  sang bước  $r+1$ , tức là chuyển từ bài toán  $P_r$  sang  $P_{r+1}$  khi  $X_r^*$  không nguyên được thực hiện nhờ một lát cắt đúng  $a_rx \leq \beta_r$ .

Việc bổ sung lát cắt này vào ràng buộc của bài toán  $P_r$  sẽ chuyển đa diện lồi  $F_r$  thành  $F_{r+1}$ .

# Cơ sở lý thuyết

Ta xét bài toán tối ưu nguyên hoàn toàn:

$$\begin{aligned} (P^N) \quad & \text{Max} \langle c, x \rangle \\ \text{s.t} \quad & \begin{cases} Ax = b, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \\ x_j \text{ nguyên}, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

## Định nghĩa 2.1

*Giả sử hệ véc-tơ  $\{A^j, j \in J\}$  là cơ sở tương ứng với phương án cực biên ban đầu của bài toán  $P^N$ , các véc-tơ  $A^j$  và các biến  $x_j$  với  $j \in J$  được gọi là các véc-tơ cơ sở và biến cơ sở; còn các véc-tơ  $A^j$  và các biến  $x_j$  mà  $j \notin J$  được gọi là các véc-tơ tự do và các biến tự do (biến phi cơ sở).*

# Cơ sở lý thuyết

Giả sử  $X$  là phương án tối ưu của bài toán  $P^N$ , từ đó ta có thể biểu diễn các biến cơ sở qua Các biến phi cơ sở:

$$x_i = x_{i0} + \sum_{j \in N} x_{ij}(-x_j), i = \overline{0, m}. \quad (4)$$

# Cơ sở lý thuyết

## Định lý 2.1

Giả sử  $X$  có  $x_{i0}$  không nguyên với  $1 \leq i \leq n$  và:

1)

$$z_i \equiv z_i(X) = -\{x_{i0}\} + \sum_{j \in \mathbb{N}} (-\{x_{ij}\})(-x_j), i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

2)  $x$  là phương án của bài toán  $P^N$ .

Khi đó:

a)  $z_i$  nguyên.

b)  $z_i \geq 0$ .

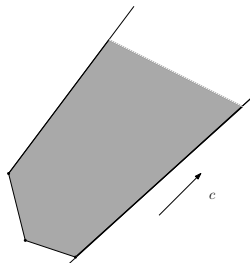
# Cơ sở lý thuyết

## Hệ quả 2.1

Giả sử  $X(L, C)$  không thoả mãn điều kiện nguyên, như vậy đối với  $i$  nào đó ( $1 \leq i \leq 0$ )  $x_{i0}$  không nguyên. Khi đó các hệ thức (5) và  $z_i \geq 0$  xác định một lát cắt đúng.



## Dấu hiệu bài toán không có lời giải



Hình:  $\bar{P}$  không có lời giải

## Dấu hiệu bài toán không có lời giải

Về sau ta sẽ giả thiết:

- 1) Hàm mục tiêu  $x_0 \equiv CX$  bị chặn trên  $F$ .
- 2) Nếu tập hợp các phương án tối ưu của  $P$  khác trống thì nó phải bị chặn, tức là nếu bài toán  $P$  giải được thì bài toán  $\bar{P}$  cũng giải được.

# Thuật toán Gomory

**Bước 1:** Giải bài toán  $P \equiv P_0$  đã cho bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu.

- Nếu  $P_0$  không giải được thì  $P_0^N$  cũng không giải được.
- Nếu  $P_0$  giải được và nghiệm của nó thỏa mãn điều kiện nguyên thì nó cũng là phương án tối ưu của  $P_0^N$ , còn nếu chưa thỏa điều kiện thì chuyển sang bước 2.

## Thuật toán Gomory

**Bước 2:** Chọn dòng đầu tiên ứng với thành phần không nguyên:  
 $k = \min\{i | i \in \{1, \dots, n\}, x_{i0}^r \text{ không nguyên}\}$  và xây dựng lát cắt đúng:

$$\begin{cases} x_{n+r+1} = -\{x_{k0}^r\} + \sum_{j \in N_r} (-\{x_{kj}^r\})(-x_j) \\ x_{n+r+1} \geq 0 \\ x_{n+r+1} \text{ nguyên} \end{cases}$$

Thêm lát cắt vào bảng đơn hình và tiếp tục giải bài toán  $P_{r+1}^N$ .

**Bước 3:** Sau khi tính toán với lát cắt nếu được phương án tối ưu thỏa mãn điều kiện nguyên thì thuật toán dừng lại. Nếu không thỏa mãn thì quay lại bước 2 cứ lần lượt như vậy thực hiện các bước lặp  $r \geq 0$  cho đến khi thỏa mãn điều kiện.

# Tính hữu hạn của thuật toán

## Định lý 2.2

*Giả sử có các điều kiện sau:*

- 1) Tính nguyên của hàm mục tiêu  $x_0 \equiv CX$  được đảm bảo và  $x_0$  được xét khi chọn dòng xây dựng lát cắt đúng.

- 2) Một trong các khẳng định sau là đúng:

- i) Hàm mục tiêu  $x_0$  bị chặn dưới trên  $F_0$ .

- ii) Bài toán  $P_0^N$  có ít nhất một phương án  $X'$ .

Khi đó thuật toán Gomory thứ nhất kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp lớn.