ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

ĐỖ NGỌC MINH THƯ
NGUYỄN CHÍ BẰNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU TUYẾN TÍNH NGUYÊN

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC SINH VIÊN
CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

Thành phố Hồ Chí Minh, năm 2021

ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

ĐỖ NGỌC MINH THƯ
NGUYỄN CHÍ BẰNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU TUYẾN TÍNH NGUYÊN

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC SINH VIÊN
CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

Người hướng dẫn

PGS.TS. TẠ QUANG SƠN

Thành phố Hồ Chí Minh, năm 2021

Lời cam đoan

Chúng tôi tên là Đỗ Ngọc Minh Thư và Nguyễn Chí Bằng, là các sinh viên lớp DTU1221, khoa Toán - Ứng dụng , khóa 2022-2026, thuộc trường Đại học Sài Gòn. Xin cam đoan rằng: Toàn bộ nội dung được trình bày trong đề tài này này đều do chúng tôi thực hiện dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Tạ Quang Sơn. Những kết quả nghiên cứu của tác giả khác được sử dụng trong đề tài đều có trích dẫn đầy đủ. Chúng tôi xin chịu trách nhiệm nếu có các nội dung sao chép không hợp lệ hoặc vi phạm quy chế đào tạo.

Tp. HCM, tháng ... năm 2024

Tác giả

Đỗ Ngọc Minh Thư

Lời cảm ơn

Đề tài nghiên cứu khoa học này được hoàn thành tại trường Đại Học Sài Gòn dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Tạ Quang Sơn. Chúng em xin bày tỏ sự kính trọng cùng lòng biết ơn chân thành và sâu sắc với Thầy. Sự tận tâm và nhiệt tình hướng dẫn của Thầy đã giúp chúng em nâng cao hiểu biết và hoàn thành đề tài nghiên cứu khoa học này.

Xin cám ơn Phòng Đào tạo và Khoa Toán - Ứng dụng, Trường Đại học Sài Gòn, đã tạo nhiều điều kiện thuận lợi, hỗ trợ giúp chúng em nâng cao chất lượng và nhiệm vụ học tập qua việc thực hiện đề tài này.

Tp. HCM, tháng ... năm 2024

Tác giả

Đỗ Ngọc Minh Thư

Mục lục

Danh mục các kí hiệu

$\mathbb{R}$	Tập các số thực
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclide n-chiều
F	Tập chấp nhận được của bài toán tối ưu
$\langle u, v\rangle$	Tích vô hướng của hai véc tơ u và v trong $\mathbb{R}^n$

Lời nói đầu

Thực tế cho thấy rằng trong nhiều bài toán tối ưu, nghiệm tìm được mong muốn phải là các số nguyên hoặc một bộ phận nghiệm của bài toán phải là các số nguyên. Điều này có thể thấy ở các bài toán như phân phối hàng hóa, sắp xếp tối ưu nhân lực, bài toán trên mạng, phân luồng giao thông,...
Đã từng có nhận định về việc tìm nghiệm nguyên của bài toán tối ưu là sau khi tìm được nghiệm tối ưu thì thưc hiện việc làm tròn nghiệm. Cách thức này thường không cho kết quả như mong muốn. Bởi lẽ nghiệm làm tròn có thể không thuộc miền chấp nhận được hoặc có thể việc làm tròn như thế không chắc đã cho nghiệm tốt nhất như mong muốn. Lý thuyết về việc tìm nghiệm nguyên cho các bài toán tối ưu đáp ứng điều mong đợi nêu trên.

Bài toán tối ưu thường được xem xét dưới dạng

$$\begin{aligned} \text{Min (Max)} \quad & f(x) \\ & x \in F, \end{aligned}$$

trong đó $f(x)$ là hàm mục tiêu tối ưu cần xác định, phụ thuộc vào biến x, xác định trên một không gian cho trước và F là tập ràng buộc còn gọi là tập chấp nhận được. Mục tiêu của bài toán là đi tìm $x \in F$ sao cho hàm mục tiêu $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất hay bé nhất. Vì bài toán Max có thể đưa về bài toán Min và ngược lại, nên trong nhiều trường hợp để xây dựng các thuật toán tìm nghiệm cho bài toán, người ta chỉ cần xét một trong hai dạng nêu trên là đủ.

Trong đề tài này chúng tôi quan tâm tìm hiểu về nghiệm nguyên cho bài toán có hàm mục tiêu tuyến tính trên tập chấp nhận được xác định bởi các hàm tuyến tính. Bài toán có dạng như sau

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\ \text{s.t.} & \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Trong đó, $c_i, i = 1, ..., n$, các hệ số a_{ij} với $i = 1, ..., m$ và $j = 1, ..., n$, và b_i với $i = 1, ..., m$ là các số thực cho trước.

Bằng cách dùng ký hiệu véc tơ và ma trận, bài toán nêu trên được viết dưới dạng

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} & \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Trong đó, cho trước A là ma trận có m dòng và n cột, c là véc tơ n chiều và b là véc tơ m chiều. Chú ý rằng, các ràng buộc bất đẳng thức đều có thể biến đổi về ràng buộc đẳng thức. Vì thế trong nội dung của đề tài này, nếu không nói gì thêm, bài toán luôn được xét dưới dạng tổng quát

$$\begin{array}{ll} \text{(IP) Min} & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Các phương pháp mà đề tài này tìm hiểu là phương pháp sử dụng siêu phẳng cắt Gomory và phương pháp tìm nghiệm nguyên theo kiểu nhánh-cận do Land-Doig đề xuất.

Nội dung đề tài được tổ chức thành 3 chương trong đó

Chương 1; Dành để tóm lược lại một số kiến thức về Đại số tuyến tính liên quan đến véc tơ và ma trận. Đồng thời chương này cũng nhắc lại một số kết quả về phương pháp đơn hình khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

Chương 2: Là phần chính của nội dung đề tài. Trong đó được chia làm hai phần. Phần đầu dành để trình bày phương pháp dùng siêu phẳng cắt Gomory và phần tiếp theo dành để trình bày phương pháp nhánh-cận kiểu Land-Doig. Trong mỗi phần đều có các ví dụ minh họa. Ngoài ra, dựa trên thực tế, khi sử dụng các phương pháp này để giải bài toán Quy hoạch nguyên, đề tài cũng đưa ra những nhận xét về phương pháp.

Phần cuối của đề tài này là Chương 3. Chúng tôi thử áp dụng các phương pháp trên để khảo sát việc tìm nghiệm nguyên cho bài toán dạng phân thức tuyến tính.

Do lần đầu tham gia tập dượt nghiên cứu khoa học. Các tri thức chọn lọc và trình bày trong nội dung của đề tài này chưa đầy đủ hoặc còn sơ suất. Chúng em kính mong nhận được sự chỉ bảo từ quý thầy cô.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản về bài toán quy hoạch tuyến tính

Kiến thức trình bày trong chương này, hầu hết được tham khảo từ các tài liệu [?] và [?].

1.1. Một số kiến thức cơ bản về Bài toán tối ưu tuyến tính

1.1.1 Bài toán dạng chính tắc và chuẩn tắc

- **Bài toán dạng chính tắc**

  Ta có bài toán dạng:

$$f(x) = c^T x \quad \longrightarrow \text{Min}$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1.1}$$

  Thì ta gọi bài toán trên có dạng chính tắc và có thể viết lại dưới dạng:

$$(P) \quad \text{Min } f(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b, \\ x_j \geq 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Trong đó A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ và $c^T = (c_1\, c_2\, \ldots\, c_n)$.

- **Bài toán dạng chuẩn tắc**

  Nếu bài toán có dạng:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = c^T x \quad \longrightarrow \text{Min} \\
& \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

  Thì ta gọi bài toán trên có dạng chuẩn tắc và có thể viết lại dưới dạng:

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \text{Min } f(x) = c^T x \\
& \begin{cases} Ax \geq b, \\ x_j \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

  Tương tự A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ và $c^T = (c_1\, c_2\, \ldots\, c_n)$.

1.1.2 Chuyển bài toán về dạng chính tắc

Để thuận tiện, ta chỉ xét dạng bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát là **dạng chính tắc** và bất kỳ bài toán nào cũng có thể đưa về dạng chính tắc.

- **Phương pháp đưa về dạng chính tắc:**

  – Bài toán $\max f(x) \longrightarrow -\min[-f(x)]$.

– Bằng cách thêm ẩn phụ x_{n+i} tương ứng có hệ số trong hàm mục tiêu là $c_{n+i} = 0$, ta có thể đưa bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

hoặc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

lần lượt thành đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

hoặc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

– Nếu tồn tại bất kỳ x_k không có ràng buộc thì ta viết

$$x_k = x_k^{'} - x_k^{''}$$

với $x_k^{'} \geq 0$ và $x_k^{''} \geq 0$.

Kể từ đây, ta chỉ quan tâm bài toán (1.2).

1.2. Phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính

1.2.1 Phương pháp hình học

1.2.2 Phương pháp đơn hình

1.2.3 Phương pháp đơn hình đối ngẫu từ vựng

1.2.3.1 Bài toán đối ngẫu

- **Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu dạng chuẩn tắc:**

  Xét hai bài toán sau:

$$\begin{aligned}&\text{Min}\langle c,x\rangle\\ &\text{s.t}\begin{cases}Ax\geq b,\\ x\geq 0.\end{cases}\end{aligned}\qquad (1.5)\qquad\qquad \begin{aligned}&\text{Max}\langle b,y\rangle\\ &\text{s.t}\begin{cases}A^Ty\leq c,\\ y\geq 0.\end{cases}\end{aligned}\qquad (1.6)$$

Định nghĩa 1.1. *Cho bài toán QHTT dạng chuẩn* (1.5) *và bài toán* (1.6) *được gọi là các* ***bài toán đối ngẫu*** *(hay còn gọi là* ***cặp đối ngẫu****).*

Bài toán (1.5) gọi là *bài toán gốc*, bài toán (1.6) gọi là bài toán đối ngẫu.

- **Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu dạng chỉnh tắc:**

  Bài toán gốc Bài toán đối ngẫu

$$\begin{aligned}&\text{Min(Max)}\langle c,x\rangle\\ &\text{s.t}\begin{cases}Ax=b\\ x\geq 0\end{cases}\end{aligned}\qquad (1.7)\qquad\qquad \begin{aligned}&\text{Max(Min)}\langle b,y\rangle\\ &\text{s.t}\begin{cases}A^Ty\leq(\geq)c\\ y1cm \text{ tự do}\end{cases}\end{aligned}\qquad (1.8)$$

- **Các tính chất của cặp bài toán đối ngẫu**

  Định lý 1.1. *(Đối ngẫu yếu) Nếu x là một phương án bất kì của bài toán gốc* (1.5) *và y là phương án là một phương án bất kì của bài toán đối ngẫu* (1.6) *thì $f(x)\geq g(y)$.*

  Chứng minh 1.1. *Cho x là phương án của bài toán gốc* (1.5) *và y là phương án của bài toán đối ngẫu* (1.6)*, nên $Ax\geq b, A^Ty\leq c, x\geq 0, y\geq 0$ Từ đó ta có: $f(x)=(c,x)\geq(A^Ty,x)=(y,Ax)\geq(y,b)=g(y)$.*

  Định lý 1.2. *Nếu x^* là phương án bất kì của bài toán gốc* (1.5) *và y^* là phương án bất kì của bài toán đối ngẫu (*(1.6) *và có $f(x^*)=g(y^*)$ thì*

x^* là phương án tối ưu của bài toán gốc (1.5) và y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (1.6).

Chứng minh 1.2. *Giả sử x là một phương án bất kì của bài toán gốc (1.5), theo định lý (1.1) ta có $f(x) \geq g(y^*)$. Theo giả thiết, $f(x^*) = g(y^*)$, vậy $f(x) \geq f(x^*)$. Vậy x là phương án tối ưu của bài toán (1.5).*
Tương tự, y^* là phương án tối ưu của bài toán (1.6).

Định lý 1.3. *(Đối ngẫu mạnh)*
a) Nếu bài toán gốc có phương án tối ưu x^* thì bài toán đối ngẫu cũng có phương án tối ưu y^* và ngược lại, đồng thời $f(x^*) = g(y^*)$.
b) Nếu hàm mục tiêu của bài toán gốc không bị chặn dưới thì bài toán đối ngẫu không có phương án.
Nếu hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu không bị chặn trên thì bài toán gốc không có phương án .

Chứng minh 1.3.

Hệ quả 1.1. *Đối với mỗi cặp bài toán quy hoạch đối ngẫu chỉ có thể xảy ra một trong ba khả năng loại trừ nhau sau đây:*
a) Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều không có phương án.
b) Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều có phương. Khi đó cả hai bài toán đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu hàm mục tiêu của hai bài toán là bằng nhau.
c) Một bài toán có phương án và bài toán còn lại không có phương án. Khi đó, bài toán có phương án sẽ không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu của bài toán đó không bị chặn trong miền ràng buộc.

Hệ quả 1.2. *Điều kiện cần và đủ để cặp phương án tối ưu x^*, y^* là phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu (1.5),(1.6) là $c^T x^* = b^T y^*$.*

1.2.3.2 Phương pháp đơn hình đối ngẫu:

- **Cơ sở chấp nhận được đối ngẫu:**

$$\text{Min}\langle c, x\rangle$$
$$\text{s.t}\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Giả thiết rank $A = m$. Giả sử, $\{A_j | j \in J\}$ là hệ m vecto độcw lập tuyến tính của A, gọi là hệ vecto cơ sở. J là tập chỉ số cơ sở. Ký hiệu A_j lập nên từ các veto cơ sở, gọi là ma trận cơ sở.

Ký hiệu $H = \{1, 2, ..., n\} \setminus J$. Phương án cơ sở (x_J, x_H) của bài toán (1.9) tương ứng với cơ sở J thu được bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính $x_H = 0, A_J x_J = b$. Nghĩa là $x_H = 0; x_J A_J^{-1} b$.

Định nghĩa 1.2. *a) Ta gọi cơ sở J là chấp nhận được gốc nếu phương án cơ sở tương ứng với nó là phương án chấp nhận được, tức là nếu $x_J = A_J^{-1} b \geq 0$.*
b) Nếu phương án cơ sở tương ứng với J là phương án tối ưu thì J sẽ gọi là cơ sở tối ưu.

Xét bài toán đối ngẫu với bài toán (1.9)

$$\text{Max}\langle b, y\rangle$$
$$\text{s.t}\begin{cases} A^T y \leq c, \\ y \text{ tự do} \end{cases} \tag{1.10}$$

Định nghĩa 1.3. *a) Ta gọi phương án cơ sở đối ngẫu tương ứng với cơ sở J là vecto y thu được bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính $A_J^T y = c_J$ (nghĩa là $y = (A_J^T)^{-1} c_J$).*

b) Cơ sở J được gọi là cơ sở chấp nhận được đối ngẫu nếu phương án cơ sở đối ngẫu ứng với nó là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu.

Nếu J là cơ sở chấp nhận được đối ngẫu thì phương án cơ sở đối ngẫu tương ứng $y = (A_J^T)^{-1}c_J$ phải thỏa mãn ràng buộc $A^T y \leq c$, nghĩa là

$$A^T(A_J^T)^{-1}c_J - c \leq 0$$

.

Ta xét z^k từ biểu diễn $A^T = z^k A_J^T$, hay $z^k = A^T(A_J^T)^{-1}$.
Vậy J là cơ sở chấp nhận được đối ngẫu nếu $z_H c_J - c \leq 0$, hay $\sum_{j\in J} z_{jk}c_j - c_k \leq 0 (\forall k \notin J)$ và $= 0$ nếu $k \in J$. Đây là tiêu chuẩn tối ưu của cơ sở J. Ta suy ra khẳng định sau đây.

Mệnh đề 1.1. *Nếu cơ sở J vừa chấp nhận được gốc vừa chấp nhận được đối ngẫu, thì nó là cơ sở tối ưu của bài toán gốc.*

- **Thuật toán đơn hình đối ngẫu** Giả sử J là cơ sở chấp nhận được đối ngẫu. Giả thiết rằng $J = \{1, 2, ..., m\}$. Ta lập bảng giống như bảng đơn hình cho bài toán gốc với cơ sở J.

Cơ sở	Hệ số	Giả PA	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
x_J	c_J	x_J^0	c_1	c_2	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
x_1	c_1	x_1	z_{11}	z_{12}	$\dots$	z_{1k}	$\dots$	c_{1n}
x_2	c_2	x_2	z_{21}	z_{22}	$\dots$	z_{2k}	$\dots$	z_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	c_m	x_m	z_{m1}	z_{m2}	$\dots$	z_{mk}	$\dots$	z_{mn}
		$f(x)$	Δ_1	Δ_2	$\dots$	Δ_k	$\dots$	Δ_n

Ý nghĩa của các ký hiệu giống như là bảng đơn hình. Chỉ có cột giả phương án là khác, cột này được lấy từ hệ thống

$$x_0^J = A_J^{-1}b$$

Lưu ý hàng ước lượng Δ_k đề không dương vì giả thiết J là cơ sở chấp nhận được đối ngẫu.

THUẬT TOÁN:

Bước 1 Tìm giải phương án J, A_J, A_J^{-1}, giả phương án án x_J^0, Z_J.

Bước 2 (Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu)

Cơ sở đang xét sẽ là tối ưu nếu mọi thành phần x_j của cột giả phương án đều $x_J \geq 0$.Vì khi đó nó là cơ sở chấp nhận được gốc vì thế tối ưu.

a) Nếu $x_j \geq 0, \forall j \in J$ thì giả phương án (x_J, x_H) là phương án tối ưu, thuật toán dừng.

b) Nếu tồn tại $j \in J$ mà $x_j < 0$ thì ta chọn chỉ số r ứng với $x_r = min\{x_j, j \in J\}$.

Bước 3 Kiểm tra điều kiện để tập phương án khác rỗng.

a) Nếu có dòng ứng với $x_j < 0 (j \in J)$ mà $z_{jk} \geq 0$ với mọi $k = 1, 2.., n$.

b)Nếu trên mỗi dòng ứng với $x_j < 0$ đều tìm được ít nhất một phần tử $z_{jk} < 0$.Khi đó ta tiến hành một bước lặp đơn hình.

Tìm cột xoay thỏa mãn $\dfrac{\Delta_s}{z_{rs}} = min\{\dfrac{\Delta_j}{z_{rj}}; z_{rj} < 0\}$.

Bước 4 Thực hiện xoay hàng và cột để thiết lập bảng đơn hình mới. Cách làm giống như cách làm phương pháp đơn hình.

Lặp lại bước 2.

Ví dụ 1.1. *Giải bài toán quy hoạch tuyến tính chuẩn tắc*

$$f(x) = 15x_1 + 12x_2 + 10x_3 \longrightarrow min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 160 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 140 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc và đổi dấu hai vế ràng buộc đẳng thức. Ta nhận được bài toán như sau:

$$f(x) = 15x_1 + 12x_2 + 10x_3 \longrightarrow min$$
$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 160 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5 = 140 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Từ đay ta có được giả phương án ban đầu là $x^0 = (0, 0, 0, -160, -140)^T, f_0 = f(x^0) = 0$.

Ta lập được bảng đơn hình sau:

Cơ sở	*Hệ số*	*Giả PA*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_J	c_J	x_J^0	15	12	10	0	0
x_4	0	-160^*	-3	-4^*	-2	1	0
x_5	0	-140	-1	-2	-3	0	1
	Bảng 1	0	-15	-12	-10	0	0
x_2	12	40	3/4	1	1/2	$-1/4$	0
x_5	0	-60	1/2	0	-2^*	$-1/2$	1
	Bảng 2	480	-6	0	-4	-3	0
x_2	12	25	7/8	1	0	0	0
x_3	10	30	$-1/4$	0	1	1/4	$-1/2$
	Bảng 3	600	-7	0	0	-2	-2

Trong bảng 1, cột giả phương án có phần tử âm, nên ta chưa nhận được *phương án tối ưu. Ta chọn dòng x_4 (tương ứng với số âm nhỏ nhất -160) làm dòng quay. Cột quay là cột x_2 (tương ứng với số âm nhỏ nhất trong ba tỉ số $\frac{-15}{3}, \frac{-12}{-4}, \frac{-10}{-2}$). Phần tử quay bằng -4. Biến đổi bảng này theo quy tắc đơn hình ta nhận được Bảng 2.*

Trong Bảng 2,cột giả phương án vẫn còn phần tử âm. Ta chọn dòng x_5 làm dòng quay và chọn cột x_3 làm cột quay. Lúc này phần tử quay là -2. Ta tiếp tục biến đổi bảng đơn hình và nhận được Bảng 3.

Ở Bảng 3, mọi phần tử trong cột giả phương án đều dương nên ta nhận được phương án tối ưu: $x^* = (0, 25, 30)^T$ với $f_{\min} = 600$.

- **Thuật toán đơn hình đối ngẫu khi chưa có cơ sở chấp nhận được đối ngẫu:**

  Phương pháp đơn hình đối ngẫu luôn đòi hỏi biết một cơ sở đối ngẫu chấp nhận xuất phát. Nhưng đối với các bài toán không biết trước cơ sở chấp nhận được đối ngẫu bằng cách tìm cơ sở J của ma trận A. Không mất tính tổng quát ta giả sử cơ sở này gồm m cột đầu tiên của ma trận $A, J = \{1, 2..., m\}$.

  Giả sử cơ sở J không phải là chấp nhận được đối ngẫu (có thể cũng không chấp nhận được gốc).Để tìm cơ sở chấp nhận được đối ngẫu ta đưa thêm biến giả x_0 và thêm vào một ràng buộc dòng $i = 0$:

$$x_0 + x_{m+1} + x_{m+2} + ... + x_n = M$$

  trong đó $x_{m+1}, x_{m+2}, ..x_n$ là thành phần ngoài cơ sở J và M là đủ lớn.

  Ta có bài toán gốc khi thêm vào giả thiết trên được gọi là *bài toán mở rộng*.

$$F(x_0, x) = c^T x \longrightarrow min$$

$$\begin{cases} x_0 + \sum\limits_{j \notin J} x_j = M \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Gọi $\widetilde{A}$ là ma trân thêm dòng $i = 0$ vào A. Lập bảng đơn hình đối ngẫu cho bài toán mở rộng với cơ sở $\widetilde{J} = J \cup \{0\}$. Ma trận cơ sở $\widetilde{A}_{\widetilde{J}}$.

Chú ý cột giả phương án $\widetilde{x}_{\widetilde{J}} = x_J + \alpha_J M$.Để tiện tính toán tách cột giả phương án thành hai cột ghi x_J và α_J tương ứng.

Giả sử J không phải cơ sở chấp nhận được đối ngẫu. Ta thực hiện biến đổi bảng đơn hình với phần tử trụ z_{0s} nghĩa là đưa s vào và loại 0 ra khỏi cơ sở. Bảng đơn hình đối ngẫu mới sẽ có dòng ước lượng $\widetilde{\Delta}_k = \Delta_k - \Delta_s \leq 0 (k = 1, 2..., n)$.

Như vậy ta thu được bảng đơn hình đối ngẫu với cơ chấp nhận được đối ngẫu nên ta có thể tiến hành giải theo các bước đơn hình đối ngẫu.

Ta lưu ý trong khi giải không cần xác định cụ thể M mà chỉ xem M đủ lớn.

Thuật toán đơn hình đối ngẫu giải bài toán mở rộng sẽ kết thúc một trong cá trường hợp sau:

1) Bài toán mở rộng không có phương án. Khi đó bài toán xuất phát cũng không có phương án. Vì nếu bài toán ban đầu có phương án $x = (x_1, x_2, ..x_n)^T$ thì $\widetilde{x} = (x_0, x_1, .., x_n)^T$ với $x_0 = M - x_1 - x_2 - ... - x_n$ cũng là phương án của bài toán mở rộng.

2)Bài toán mở rộng có phương án tối ưu $\widetilde{x} = (\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1}, ..., \widetilde{x_n})^T$ và $x_0$là biến cơ sở. Trong trường hợp này hàm mục tiêu của bài toán mở rộng không phụ thuộc vào M. Do đó $(\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1}, ..., \widetilde{x_n})^T$ là phương án tối ưu của bài toán ban đầu.

3) Bài toán mở rộng có phương án tối ưu $\widetilde{x} = (\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1}, ..., \widetilde{x_n})^T$ và x_0 không là biến cơ sở.Trong trường hợp này biến cơ sở phụ thuộc vào M. Nên có hai khả năng xảy ra:

a) Nếu giá trị hàm mục tiêu của bài toán mở rộng phụ thuộc vào M thì khi $M \to +\propto$ giá trị hàm mục tiêu dần đến $-\propto$. Như vậy bài toán ban đầu có phương án chấp nhận được, nhưng hàm mục tiêu không bị chặn dưới nên bài toán ban đầu cũng không có nghiệm tối ưu.

b) Nếu giá trị hàm mục tiêu của bài toán mở rộng không phụ thuộc vào M thì bài toán ban đầu có phương án tối ưu và tìm bằng cách bỏ $\widetilde{x_0}$ và giảm dần M cho đến khi một trong các $\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1}, ..., \widetilde{x_n}$ trở thành 0.

- **Ví dụ** Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu:

$$f(x) = x_1 + 3x_2 + x_4 - 2x_6 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 3x_5 + 7x_6 = -5 \\ x_2 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 - 10x_6 = 8 \\ x_j \geq 0, j = 1, ...6 \end{cases}$$

Xét cơ sở $J = \{1, 2, 3\}$

Bảng đơn hình của cơ sở là

Cơ sở	Hệ số	Giả PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_J	c_J	x_J^0	1	3	0	1	0	-2
x_1	1	-5	1	0	0	1	-3	7
x_2	3	1	0	1	0	-1	1	-1
x_3	0	8	0	0	1	3	1	-10
	Bảng 1	-2	0	0	0	-3	0	6

Cơ sở J không phải là cơ sở chấp nhận gốc vì $x_1 = -5 < 0$. Cũng không phải là cơ sở chấp nhận được đối ngẫu vì có $\Delta_6 = 6 > 0$. Thiết lập bài toán mở rộng

$$g(x) = 0.x_0 + x_1 + 3x_2 + x_4 - 2x_6 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_0 + x_4 + x_5 + x_6 = M \\ x_1 + x_4 - 3x_5 + 7x_6 = -5 \\ x_2 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 - 10x_6 = 8 \\ x_j \geq 0, j = 0, 1, ...6 \end{cases}$$

Ta có $\widetilde{J} = \{0, 1, 2, 3\}$ là cơ sở bài toán mở rộng.

Bảng đơn hình tương ứng:

Cơ sở	Hệ số	Giả	PA	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_J	c_J	x_J^0	M	0	1	3	0	1	1	-2
x_0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
x_1	1	-5	0	0	1	3	0	1	1	-2
x_2	3	1	0	0	0	1	0	-1	1	-1
x_3	0	8	0	0	0	0	1	3	1	-10
	Bảng 2			0	0	0	0	-3	0	6

Thực hiện phép biến đổi bảng đơn hình, đưa x_0 ra khỏi cơ sở, đưa x_6 vào thay cho x_0, ta được bảng đơn hình

Cơ sở	Hệ số	Giả	PA	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_J	c_J	x_J^0	M	0	1	3	0	1	1	-2
x_6	-2	0	1	1	0	0	0	1	1	1
x_1	1	-5	-7	-7	1	0	0	-6	-10	0
x_2	3	1	1	1	0	1	0	0	2	0
x_3	0	8	10	10	0	0	1	13	11	0
	Bảng 3			-6	0	0	0	-9	-6	0

Tất cả ước lượng thỏa mãn $\Delta_k \leq 0$. Vậy $\widetilde{J} = \{6, 1, 2, 3$ là cơ sở chấp nhận được đối ngẫu.Bắt đầu đi giải bài toán theo thuật toán đơn hình đối ngẫu.

Cơ sở	Hệ số	Giả	PA	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_J	c_J	x_J^0	M	0	1	3	0	1	1	-2
x_6	-2	0	1	1	0	0	0	1	1	1
x_1	1	-5^*	-7^*	-7	1	0	0	-6	-10^*	0
x_2	3	1	1	1	0	1	0	0	2	0
x_3	0	8	10	10	0	0	1	13	11	0
	Bảng 4			-6	0	0	0	-9	-6	0
x_6	-2	$-1/2$	$3/10$	$3/10$	$1/10$	0	0	$4/10$	0	1
x_5	0	$-1/2$	$7/10$	$7/10$	$-1/10$	0	0	$6/10$	1	0
x_2	3	0	$-4/10^*$	$-4/10$	$2/10$	1	0	$-12/10^*$	0	0
x_3	0	$5/2$	$23/10$	$23/10$	$11/10$	0	1	$64/10$	0	0
	Bảng 5			$-18/10$	$-6/10$	0	0	$-54/10$	0	0

Sau khi thực hiện tính toán theo quy tắc thuật toán đơn hình đối ngẫu, ta thu được bảng đơn hình cuối.

Cơ sở	Hệ số	Giả	PA	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_J	c_J	x_J^0	M	0	1	3	0	1	1	-2
x_6	-2	$-1/2$	$3/10$	$3/10$	$1/10$	0	0	$4/10$	0	1
x_5	0	$1/2$	$1/2$	$7/10$	$-1/10$	0	0	0	1	0
x_4	1	0	$1/3$	$-4/10$	$2/10$	1	0	1	0	0
x_3	0	$5/2$	$1/6$	0	0	$-15/10$	$-54/2$	0	0	0
	Bảng 4	1	0	0	$-15/10$	$-54/2$	0	0	0	0

Ta thấy các phần tử trong cột giả phương án đều không âm khi $M \geq 3$.

$$\widetilde{x_6} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{6}M = \frac{1}{6}(M-3) \geq 0$$

$$\widetilde{x_5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}M \geq 0$$

$$\widetilde{x_4} = \frac{1}{3}M \geq 0, \widetilde{x_3} = \frac{5}{2} + \frac{1}{6}M \geq 0$$

Khi $M \geq 0$ bài toán mở rộng có phương án tối ưu $\widetilde{x} = (0, 0, \widetilde{x_3}, \widetilde{x_4}, \widetilde{x_5}, \widetilde{x_6})^T$. Lấy $M = 3$ ta được phương án tối ưu của bai toán gốc $x^* = (0, 0, 3, 1, 2, 0, 0^T$ và $f(x^*) = 1$.

1.2.3.3 Phương pháp đơn hình đối ngẫu từ vựng

- **So sánh theo nghĩa từ vựng**

Định nghĩa 1.4. *Vecto* $X = (x_1, x_2, ...x_n)$ *được gọi là dương từ vựng* $(X > 0)$ *nếu* $X \neq (0, 0, ..0)$ *và thành phần đầu tiên khác 0 là dương.*

- Vecto X gọi là lớn hơn từ vựng vecto Y (ký hiệu $X > Y$) nếu $X - Y > 0$.

- Vecto X gọi là không nhỏ hơn từ vựng vecto Y ($X \geq Y$) nếu $X - Y \geq 0$.

- X gọi là âm từ vừng nếu $-X > 0$.

- Tương tự ta có định nghĩa cho $X \leq 0, X < Y, X \leq Y$.

Định nghĩa 1.5. *Phương án* $x^* = (x_1^*, ...x_n^*)^T$ *là phương án tối ưu từ vựng (phương án l-tối ưu) nếu với mọi phương án ta có:*

$$x^* = (x_1^*, ...x_n^*)^T \geq x = (x_1, ..., x_n)^T$$

Vậy để tìm phương án tối ưu từ vựng của bài toán Tối ưu tuyến tính ta áp dụng thuật toán đơn hình đối ngẫu từ vựng tức là phương pháp đơn hình đối ngẫu với bảng đơn hình xuất phát có các cột là dương từ vựng. Phương pháp đơn hình đối ngẫu từ vựng này sẽ được áp dụng để giải các bài toán tối ưu tuyến tính nguyên với Thuật toán Gomory.

Chương 2

Bài toán tối ưu tuyến tính có nghiệm nguyên

Thực tế hiện nay cho thấy rằng việc tìm kết quả của các bài toán tối ưu tuyến tính với các biến ràng buộc là số thực là chưa đủ. Nhiều bài toán Quy hoạch tuyến tính đòi hỏi phải tìm được nghiệm là các biến nguyên, được gọi là mô hình tối ưu tuyến tính nguyên hay Bài toán tối ưu tuyến tính nguyên. Ở chương này chúng tôi sẽ giới thiệu về bài toán và phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính nguyên với thuật toán lát cắt Gomory và thuật toán nhánh cận Land-Doig.

2.1. Giới thiệu bài toán tối ưu nguyên

Bài toán Tối ưu nguyên có dạng chuẩn tắc:

$$\begin{aligned} &\text{Min(Max)}\langle c, x\rangle \\ &\text{s.t}\begin{cases} Ax \geq b, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n. \\ x_j \text{nguyên}, j = 1, 2.., n_1 (n_1 \leq n). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Bài toán trên gọi là bài toán tối ưu nguyên. Nếu $n_1 = n$ thì bài toán (2.1) gọi là bài toán nguyên hoàn toàn. Nếu $n_1 < n$ thì bài toán được gọi là bài toán tối ưu nguyên bộ phận.

Rõ ràng bài toán có dạng giống như một bài toán tối ưu tuyến tính thông thường chỉ khác biệt ở điều kiện nguyên của biến. Thế thì, có cần thiết phải có một lý thuyết riêng để tìm nghiệm của bài toán tối ưu nguyên không hay vẫn có thể sử dụng các phương pháp giải như các bài toán tối ưu tuyến tính thông thường? Ta xét một ví dụ sau đây:

$$\text{Max} 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Nếu giải bài toán thông thường, ta nhận được nghiệm $x_1 = 2.8, x_2 = 2$. Giả sử bài toán thêm điều kiện nghiệm nguyên, ta thử điều chỉnh nghiệm bằng cách làm tròn số từ nghiệm nhận được.

Trường hợp nếu, làm tròn $x_1 \to 3, x_2 \to 3$, thì lúc này điểm (x_1, x_2) không còn nằm trong miền chấp nhận được. Còn nếu làm tròn $x_1 \to 2, x_2 \to 2$, thì chưa biết còn thực sự đạt tối ưu hay chưa.

Vì thế, cần phải có lý thuyết riêng để giải các bài toán tối ưu nguyên. VẼ giùm cái hình ở đây

2.2. Phương pháp Gomory

2.2.1 Giới thiệu về phương pháp Gomory

Ta xét bài toán tối ưu nguyên dạng chính tắc:

$$\text{Min}\langle c, x\rangle$$
$$\text{s.t}\begin{cases} Ax = b, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n. \\ x_j \text{nguyên}, j = 1, 2.., n_1 (n_1 \leq n). \end{cases} \tag{2.2}$$

Ta gọi:

(L^N, C) là bài toán tối ưu nguyên.

L^N là miền xác định của bài toán.

$X(L^N, C)$ là phương án tối ưu.

Ta có thể xem các bài toán tối ưu nguyên thành các trường hợp sau:

1) Bài toán tối ưu nguyên hoàn toàn và giá trị hàm mục tiêu nguyên.

2) Bài toán tối ưu nguyên hoàn toàn và giá trị mục tiêu không nguyên.

3) Bài toán tối ưu nguyên bộ phận và giá trị hàm mục tiêu nguyên.

4) Bài toán tối ưu nguyên bộ phận và giá trị hàm mục tiêu không nguyên

Do trường hợp thứ nhất có thể được phát triển từ trường hợp thứ hai, trường hợp thứ ba có thể phát triển được từ trường hợp thứ tư. Do đó, ở đây chúng tôi chỉ khảo sát trên bài toán ở dạng thứ hai và thứ tư.

2.2.2 Tư tưởng về phương pháp cắt

Do không thể tìm nghiệm nguyên bằng cách làm tròn nghiệm từ một bài toán tối ưu thông thường. Vậy còn cách nào tìm nghiệm nguyên mà có thể liên hệ với bài toán tối ưu thông thường hay không? Có vài ý tưởng như sau:

Định lý 2.1. *Giả sử L là một đa diện lồi,L^N là tập các điểm nguyên của nó, $R \equiv V(L^N)$ là bao lồi tuyến tính của tập các điểm nguyên, khi đó:*

1) $R \equiv V(L^N)$ là một đa diện nguyên (các đỉnh là điểm nguyên).

2) $R^N = L^N$.

3) Tập R^* các phương án chấp nhận được của đa diện R chứa trong R^N:

$$R^* \subseteq R^N$$

.

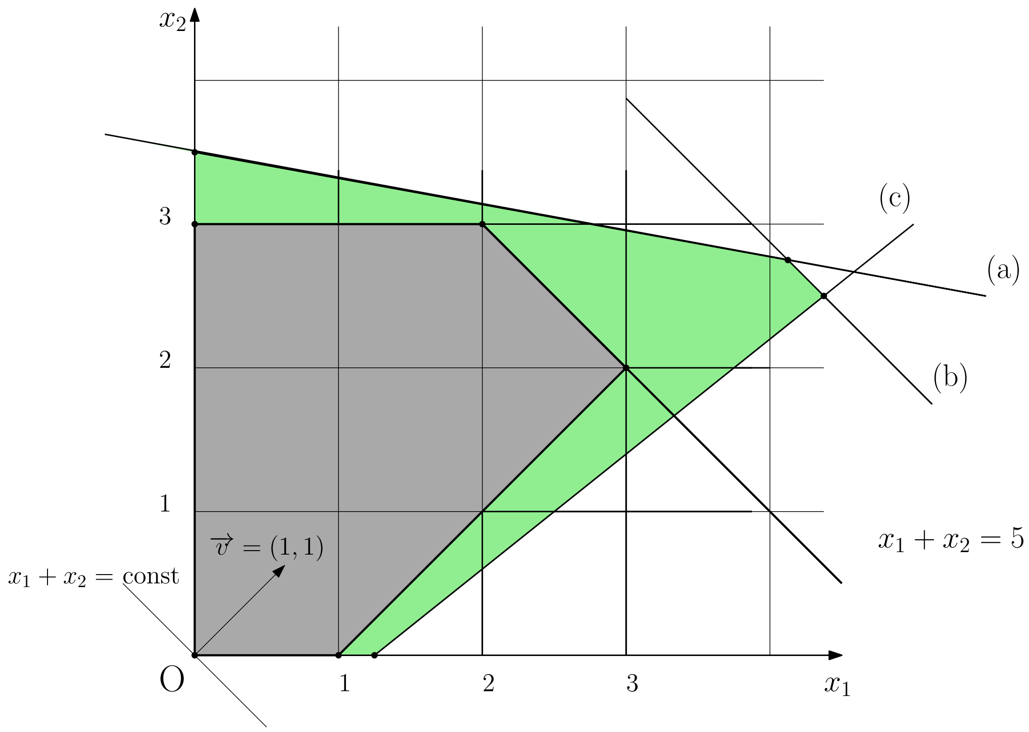
Hệ quả 2.1. *Giả sử $X(R, C)$ là phương án tựa tối ưu của bài toán (R, C), khi đó $X(R, C)$ cũng là phương án tối ưu của bài toán (L^N, C). Vì vậy để giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên (L^N, C) ta đi giải bài toán (R, C).*

Định lý 2.2. *Giả sử L là một đa diện lồi, U là một đa diện lồi nguyên và $U^N = L^N$, khi đó :*

$$U = R = V(L^N)$$

Ví dụ 2.1. *Minh họa*

BÀI TOÁN (L^N, C)	*BÀI TOÁN* (L, C)	*BÀI TOÁN* $(R \equiv V(L^N, C)$
$Max(x_1 + x_2)$ $2x_1 + 11x_2 \leq 38$ $x_1 + x_2 \leq 7$ $4x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_j \geq 0$ x_j *nguyên*	$Max(x_1 + x_2)$ $2x_1 + 11x_2 \leq 38 \quad (a)$ $x_1 + x_2 \leq 7 \quad (b)$ $4x_1 - 5x_2 \leq 5 \quad (c)$ $x_j \geq 0$	$Max(x_1 + x_2)$ $x_2 \leq 3$ $x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1 - x_2 \leq 1$ $x_j \geq 0$
$Max = 5$ *Tối ưu là 2 điểm* $(2; 3); (3; 2)$	$Max = 7$ *Tối ưu là một đoạn* $[(\frac{13}{3}, \frac{8}{3}); (\frac{40}{9}; \frac{23}{9})]$	$Max = 5$ *Tối ưu là đoạn* $[(2; 3); (3; 2)]$



Qua các định lý và hệ quả trên, đã từng có ý tưởng tìm nghiệm của bài toán tối ưu có miền xác định là một bao lồi R để giải bài toán tối ưu nguyên với miền xác định L^N. Tuy nhiên, việc tìm được một bao lồi R để thiết lập bài toán lại là một vấn đề khó giải quyết. Do đó, cần có một thuật toán khác hữu hiệu hơn.

- **Khái niệm lát cắt đúng** Giả sử bài toán (L^N, C) là bài toán quy hoạch nguyên nào đó và phương án tựa tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính tương ứng $X(L, C)$ không thoả mãn điều kiện nguyên, tức là $X(L, C) \notin L^N$. Khi đó bất đẳng thức:

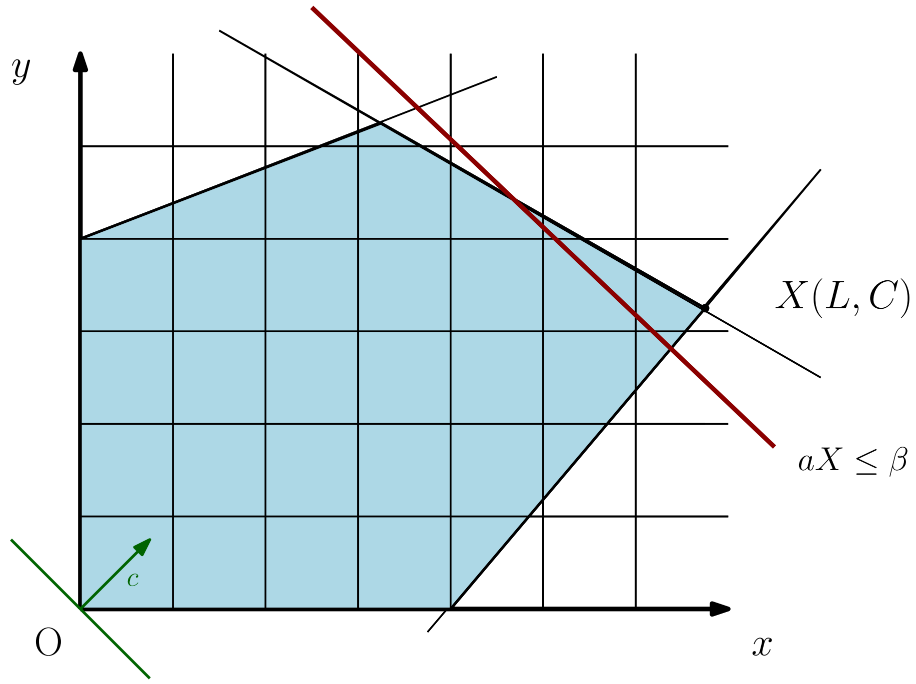
$$\sum_j a_j x_j \leq \beta$$

được gọi là lát cắt đúng nếu thỏa mãn hai điều kiện:

1) Điều kiện cắt: x không thỏa mãn điều kiện (2.2.3.2), tức là $Ax > \beta$.

2) Điều kiện đúng: nếu $X(L, C)$ là phương án của bài toán tối ưu nguyên thì $X(L, C)$ thỏa mãn điều kiện (2.2.3.2), tức là $L^N \subset \{X \mid aX \leq \beta\}$.

Nói cách khác, lát cắt thêm vào sẽ không cắt đi một phương án nguyên nào của bài toán.



- **Tư tưởng phương pháp cắt của Danzig**

  Việc giải một bài toán (L^N, C) là một quá trình gồm nhiều bước:

  a) Ở bước thứ r, giải bài toán bài toán quy hoạch tuyến tính phụ $(L_r, C), r = 0, 1, \ldots\ldots$ với$L_0 = L$

  b) Tập các điểm nguyên của tất cả các đa diện lồi là như nhau:

  $$L_0^N = L_1^N = L_2^N = ... = L_r^N = ...$$

  Do đó, nếu phương án tối ưu $X(L_r, C)$ của bài toán thoả mãn (L_r, C) điều kiện nguyên thì nó cũng là phương án tối ưu $X(L_0^N, C)$ của bài toán xuất phát (L_0^N, C) và quá trình kết thúc.

  c) Nếu $X(L_r, C)$ không thoả mãn điều kiện nguyên thì $X(L_r, C)$ không phải là phương án của bài toán $X(L_{r+1}, C)$, tức là $X(L_r, C) \notin L_{r+1}$.

  Chuyển từ bước r sang bước $r + 1$, tức là chuyển từ bài toán (L_r, C) sang (L_{r+1}, C) khi $X(L_r, C)$ không nguyên được thực hiện nhờ một lát cắt đúng $a_r x \leq \beta_r$

  Việc bổ sung lát cắt này vào ràng buộc của bài toán (L_r, C) sẽ chuyển đa diện lồi L_R thành L_{r+1}.

Nhận xét 2.1. *Phương pháp cắt có hai việc: xấp xỉ tuyến tính đúng nhiều bước đối với bài toán tối ưu nguyên và chuyển từ bước này sang bước khác bằng một lát cắt đúng. Ở đây tồn tại ba vấn đề cần giải quyết: xây dựng một lát cắt đúng, đảm bảo được tính hữu hạn của các bước lặp trong quá trình giải và số lượng lát cắt đúng không được tăng mãi.*

2.2.3 Thuật toán Gomory cho bài toán tối ưu nguyên hoàn toàn

Ở phần này, chúng tôi sẽ trình bày về thuật toán và tính hữu hạn của thuật toán Gomory đối với bài toán tối ưu nguyên hoàn toàn và giá trị hàm mục tiêu không nguyên.Thuật toán này sẽ giải quyết được cả ba vấn đề nêu ở Nhận xét (2.1) một cách hiệu quả.

2.2.3.1 Cơ sở lý thuyết

Ta xét bài toán tối ưu nguyên hoàn toàn:

$$\begin{aligned}&\text{Max}\langle c,x\rangle\\ &\text{s.t}\begin{cases}Ax=b,\\ x_j\geq 0, j=1,2,...,n.\\ x_j\text{nguyên}, j=1,2..,n.\end{cases}\end{aligned}\tag{2.3}$$

Giả sử $X(L,C)$ là phương án tối ưu của bài toán (L,C), từ đó ta có thể biểu diễn các biến qua Các biến phi cơ sở:

$$x_i=x_{i0}+\sum_{j\in N}x_{ij}(-x_j), i=\overline{0,m}.\tag{2.4}$$

Giả sử x là một số thực, ký hiệu $[x]$ là phần nguyên, (số nguyên lớn nhất không vượt quá x), $\{x\}=x-[x]$ là phần lẻ.

VD: $[-1.3]=-2, -1.3=0.7$.

Định lý 2.3. *Giả sử $X(L,C)$ có x_{i0} không nguyên với $1\leq i\leq n$ và:*

1)

$$z_i\equiv z_i(X)=-\{x_{i0}\}+\sum_{j\in\mathbb{N}}(-\{x_{ij}\})(-x_j), i=\overline{1,n}.\tag{2.5}$$

2) x là phương án của bài toán (L^N, C).

Khi đó:

a)

$$z_i \text{ nguyên} \tag{2.6}$$

b)

$$z_i \geq 0 \tag{2.7}$$

Chứng minh 2.1. *a) Từ* (2.4) *ta có* $x_i = [x_{i0}] + \{x_{i0}\} + \sum_{j \in \mathbb{N}} ([x_{ij}] + \{x_{ij}\})(-x_j)$

Kết hợp với (2.5) *ta có* $z_i = -x_i + \sum_{j \in \mathbb{N}} [x_{i0}] + ([x_{ij}])(-x_{ij})$

Do x_i, x_j *nguyên nên suy ra* z_i *nguyên.*

b) Giả sử rằng $z < 0$ *từ* (2.5) *ta có:*

$z_i \equiv z_i(x) = -\{x_{i0}\} + \sum_{j \in \mathbb{N}} (-\{x_{ij}\})(-x_j).$

Vì $-\{x_{i0}\} < -1; x_j \geq 0$ *và* $\{x_{ij}\} \in [0, 1)$ *nên* $-1 < z_i < 0$ *, tức là* z_i *không nguyên.*

Điều này mâu thuẫn với chứng minh câu a), do đó $z_i \geq 0$ *.*

Hệ quả 2.2. *Giả sử* $X(L, C)$ *không thoả mãn điều kiện nguyên, như vậy đối với i nào đó* $(1 \leq i \leq 0)$ x_{i0} *không nguyên . Khi đó các hệ thức* (2.5) *và* (2.7) *xác định một lát cắt đúng.*

Chứng minh 2.2. *a) Mọi phương án của bài toán* (L^N, C) *đều thoả mãn* (2.5) *và* (2.7) *(trong chứng minh định lý), do đó điều kiện đúng của lát cắt được thoả mãn.*

b) Đặt vào (2.5) *phương án tối ưu không nguyên* $X(L, C)$. *Do* $x_j(L, C) = 0$, $j \in \mathbb{N}$ *, suy ra* $z_i(X(L, C) = -\{x_{i0}\} + 0 \leq 0$ *, trái với* (2.7)*, tức là điều kiện cắt* *thoả mãn.*

Dấu hiệu bài toán không có lời giải:

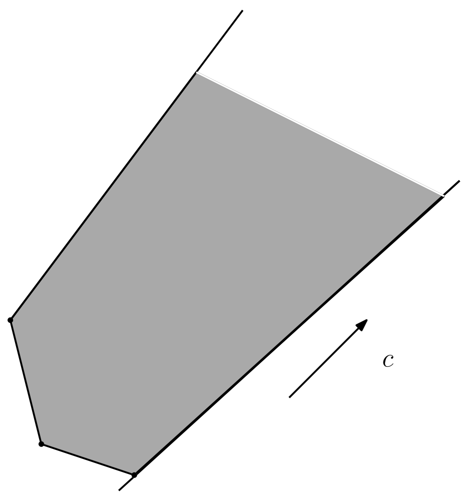
-Nếu bài toán (L, C) không có lời giải vì hàm mục tiêu không bị chặn trên khúc lồi L thì thuật toán Gomory không áp dụng được.

-Thuật toán cũng không áp dụng được cho trường hợp bài toán (L, C) có lời giải nhưng $l-$ bài toán$\overline{(L, C)}$ không có lời giải. Điều đó dường như là tập hợp các phương án tối ưu của bài toán (L, C) khác trống nhưng không bị chặn.

-Về sau ta sẽ giả thiết:

1) Hàm mục tiêu $x_0 \equiv CX$ bị chặn trên L.

2) Nếu tập hợp các phương án tối ưu của (L, C) khác trống thì nó phải bị chặn, tức là nếu bài toán(L, C) giải được thì bài toán (L, C) cũng giải được.



Hình 2.1: $\overline{(L, C)}$ không có lời giải

2.2.3.2 Thuật toán

Bước 1:

Giải bài toán $(L, C) \equiv (L_0, C)$ đã cho bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu.

-Nếu bài toán (L_0, C) không giải được thì bài toán (L_0^N, C) cũng không giải được.

- Nếu bài toán (L_0, C) giải được và $X(L_, C)$ thỏa mãn điều kiện nguyên thì nó cũng là phương án tối ưu của bài toán (L_0^N, C), còn nếu không giải được thì chuyển sang bước 2.

Bước 2: Chọn dòng đầu tiên ứng với thành phần không nguyên:
$k = min\{i \| i \in \{1, ..., n\}, x_{i0}^r \text{không nguyên}\}$ và xây dựng lát cắt đúng:

$$\begin{cases} x_{n+r+1} = -\{x_{k0}^r\} + \sum_{j \in N_r}(-\{x_{kj}^r\})(-x_j) \\ x_{n+r+1} \geq 0 \\ x_{n+r+1} \text{ nguyên} \end{cases}$$

Ta thêm lắt cắt này vào bảng đơn hình T_r, sau đó tiếp tục thực hiện các bước tính toán theo thuật toán đơn hình đối ngẫu từ vựng cho bài toán $(L_{r+1}^N$.

Bước 3: Sau khi tính toán với lát cắt nếu được phương án tối ưu thỏa mãn điều kiện nguyên thì thuật toán dừng lại. Nếu không thỏa mãn thì quay lại bước 2 cứ lần lượt như vậy thực hiện các bước lặp $r \geq 0$ cho đến khi thỏa mãn điều kiện. **Lưu ý:**
Để tránh cho bảng đơn hình không bị có số dòng và cột không xác định, mỗi khi biến phụ tương ứng với lát cắt bị đưa vào cơ sở thì cột tương ứng của nó cũng được xóa khỏi bảng đơn hình.

2.2.3.3 Tính hữu hạn của thuật toán:

Định lý 2.4. *Giả sử có các điều kiện sau:*
1) Tính nguyên của hàm mục tiêu $x_0 \equiv CX$ được đảm bảo và x_0 được xét khi chọn dòng xây dựng lát cắt đúng.
2) Một trong các khẳng định sau là đúng:

i) Hàm mục tiêu x_0 bị chặn dưới trên L_0.

ii) Bài toán (L_0^N, C) có ít nhất một phương án X'.

Khi đó thuật toán Gomory thứ nhất kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp lớn.

Để chứng minh định lý ta chứng minh các bổ đề trước.

Giả sử $X\overline{(L_r, C)} \equiv X^r \equiv (x_0^r, x_1^r, x_2^r, ..x_n^r)$. Kí hiệu $\overline{X^r}$ là giả phương án ứng với bảng $\overline{T_r}$ nhận được từ bảng T_r sau khi loại khỏi cơ sở x_{n+r+1} và xoá dòng tương ứng .

Bổ đề 2.1. *Ta có $X^r > \overline{X^r} \geq \overline{X^{r+1}}$.*

Chứng minh: *Bất đẳng thức đầu tiên suy ra từ công thức biến đổi bảng đơn hình và tính l-chuẩn của bảng đơn hình (cột đầu tiên của T_r được tính theo công thức $R_0^r - \dfrac{(-\{x_{k0}^r\})}{(-\{x_{kl}^r\})}.R_l^r$; R_l^r có số đầu tiên khác 0 là dương). Bất đẳng thức thứ hai là do cột 0 giảm khi dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu từ vựng.*

Bổ đề 2.2. *Các số $x_i^r (i = 0, 1, ..., n)$ bị chặn dưới.*

Chứng minh *Với $i = 1, ..., n$ điều đó suy ra từ điều kiện không âm $x_j \geq 0 (j = 1, ..., n)$. Với $i = 0$ (điều đó suy ra từ điều kiện 2 của định lý 2.4). Thật vậy, nếu i) là đúng thì bổ đề 2.2 hiển nhiên đúng. Nếu điều kiện ii) được thỏa mãn thì $X^r \geq X^{'}$ suy ra $x_0^r \geq x_0^{'}$.*

Bổ đề 2.3. *Nếu X^r không thỏa mãn điều kiện nguyên và $x_p^r \equiv x_{p0}^r$ không nguyên thì:*

$(x_0^r, x_1^r, ..., x_{p-1}^r, [x_p^r]) \geq (\overline{x_0^r}, ..., \overline{x_p^r})$.

Chứng minh

Giả sử $k = min\{i | i \in \{0, 1, ..., n\}, x_{i0}^r$ không nguyên$\}$, suy ra $k \geq p$. Giả sử:

$$\frac{R_l^r}{\{x_{kl}^r\}} = lexmin\{\frac{R_j^r}{\{x_{kj}^r\}} | j \in N_r, \{x_{kj}^r\} \neq 0\}$$

(dòng quay là lát cắt mới thêm) và $h(R_l^r) = min\{i | i \in (0, 1, ..., n); x_{il}^r \neq 0\}$ (hàng

đầu tiên của cột R_l có hệ số $\neq 0$, cụ thể là $x^r_{hl} \geq 0$ do $R^r_l > 0$).

Vì $\{x^r_{kl}\} \neq 0 \to h(R^r_l) \leq k \leq p$. Có hai khả năng xảy ra:

1) $h(R^r_l) \equiv q < p$.

2) $h(R^r_l) \equiv q = p$.

Trong trường hợp 1) theo quy tắc của l-phương pháp $\overline{x^r_q} < x^r_q$ vì

$\overline{x^r_q} = x^r_q - \frac{\{x^r_{k0}\}}{\{x^r_{kl}\}} x^r_{ql} < x^r_q$ (do $x^r_{ql} > 0$), bổ đề được chứng minh. Nếu trường hợp 2) ta có $h(R^r_l) \equiv= k =$. Vì vậy $\overline{x^r_{i0}} = x^r_{i0}$ với $i < k = h(R^r_l)$ (h là chỉ số đầu tiên, x^r_{hl} khác không) và $\overline{x^r_{k0}} = x^r_{k0} - \frac{\{x^r_{k0}\}}{\{x^r_{kl}\}} x^r_{kl}$.

Vì $x^r_{kl} = X^r_{hl} > 0$, nên $x^r_{kl} \geq \{x^r_{kl}\}$. Từ đó ta có:

$\overline{x^r_{k0}} < x^r_{k0} - \{x^r_{k0}\} = [x^r_{k0}]$.

Do $k = p$ nên bổ đề được chứng minh.

Chứng minh định lí 2.4

Giả sử

$$X^0, X^1, ..., X^r, ...\text{vô hạn} \tag{2.8}$$

Khi đó theo bổ đề 2.1 và 2.2 tồn tại $i_0, 0 \leq i_0 \leq n$ tồn tại $r_0 \geq 0$ và một dãy vô hạn:

$$r_1 < r_2 < ..., r_v < ...(r_1 > r_0) \tag{2.9}$$

sao cho ta có:

$$x^{r+1}_i = x^r_i; r \geq r_0; 0 \leq i \leq i_0 - 1 \tag{2.10}$$

$$x^{r_v+1}_{i_0} < x^{r_v}_{i_0}, (v = 1, 2, ...) \tag{2.11}$$

Từ bổ đề 2.1 và (2.9) ta có

$$x_{i_0}^{r+1} \leq x_{i_0}^{r}, r \geq r_0 \quad (2.12)$$

Từ (2.11) và ((2.12) và bổ đề 2.1, suy ra tồn tại số $r' > r_0$ và các số nguyên z_0 và $z_0 + 1$ sao cho:

$$z_0 < x_{i_0}^{r} < z_0 + 1 (r \geq r') \quad (2.13)$$

Từ (2.12) và (2.13) và bổ đề 2.3 suy ra $x_{i_0}^{r+1} \leq \overline{x_{i_0}^{r}} \geq [x_{i_0}^{r}] = z_0$. Điều này mâu thuẫn với (2.13). Định lí được chứng minh.

2.2.3.4 Ví dụ

$$x_1 + 4x_2 \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{nguyên} \end{cases}$$

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc. Ta được bài toán mở rộng:

$$x_1 + 4x_2 \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 10x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{nguyên} \end{cases}$$

Ta lập bảng đơn hình:

Cơ sở	Hệ số	PA	x_1	x_2	x_3	x_4
x_J	c_J	x_J^0	1	4	0	0
x_3	0	7	2	4^*	1	0
x_4	0	15	10	3	0	1
		Δ	-1	-4^*	0	0
x_2	4	7/4	1/2	1	1/4	0
x_4	0	39/4	17/2	0	$-3/4$	1
		Δ	1	0	3	0

Ta thấy bài toán đã đạt tối ưu nhưng chưa thỏa mãn điều kiện nguyên. Do đó, ta tạo biến x_5 theo quy tắc lát cắt Gomory dựa trên biến x_2,

$$\frac{-3}{4} = \frac{-1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_5$$

. Ta thêm dòng này vào bảng đơn hình.

Cơ sở	Hệ số	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_J	c_J	x_J^0	1	4	0	0	0
x_2	4	7/4	1/2	1	1/4	0	0
x_4	0	39/4	17/2	0	$-3/4$	1	0
x_5	0	$-3/4$	$-1/2^*$	0	$-1/4$	0	1
		Δ	1^*	0	1	0	0
x_2	4	1	0	1	0	0	1
$x-4$	0	-3^*	0	0	-5^*	1	17
x_1	1	3/2	1	0	1/2	0	-2
		Δ	0	0	1/2	0	2
x_2	4	1	0	1	0	0	1
x_3	0	3/5	0	0	1	$-1/5$	$-17/5$
x_1	1	6/5	1	0	1	1/10	$-3/10$
		Δ	0	0	0	1/10	37/10

Ta thêm lát cắt mới dựa trên biến x_1,

$$\frac{-1}{5} = \frac{-1}{10}x_4 + \frac{7}{10}x_5 + x_6$$

Cơ sở	Hệ số	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_J	c_J	x_J^0	1	4	0	0	0	0
x_2	4	1	0	1	0	0	1	0
x_3	0	3/5	0	0	1	$-1/5$	$-17/5$	0
x_1	1	6/5	1	0	1	1/10	$-3/10$	0
x_6	0	$-1/5$	0	0	0	$-1/10$*	7/10	1
		Δ	0	0	0	1/10	37/10	0
x_2	4	1	0	1	0	0	1	0
x_3	0	1	0	0	1	0	$-24/5$	-2
x_1	1	1	1	0	0	0	2/5	1
x_4	0	2	0	0	0	1	-7	-10
		Δ	0	0	0	0	22/5	1

Bài toán đã đạt tối ưu đồng thời thỏa điều kiện nguyên nên ta dừng thuật toán và kết luận được $x = (x_1, x_2) = (1, 1)$ và giá trị hàm mục tiêu là 5.

2.2.4 Thuật toán Gomory cho bài toán tối ưu nguyên bộ phận

Đối với bài toán tối ưu nguyên bộ phận ta có tất cả các lý thuyết cơ sở cũng như thuật toán tương tự như ở bài toán tối ưu nguyên hoàn toàn.Tuy nhiên, ở việc chọn dòng để hình thành lát cắt: $k = min\{i \| i \in \{1, ..., n\}, x_{i0}^r \text{không nguyên}\}$, trong đó ta chỉ xét trên các biến mà đề bài bắt buộc nguyên, và trực tiếp bỏ qua các biến không có điều kiện nguyên.

2.2.4.1 Ví dụ

Ta xét bài toán sau:

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + +4x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_3 \text{nguyên} \end{cases}$$

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + +4x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, x_6 \geq 0 \\ x_1, x_3 \text{nguyên} \end{cases}$$

Cơ sở	Hệ số	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_J	c_J	x_J^0	4	5	3	0	0	0
x_4	0	10	3	0	4	1	0	0
x_5	0	7	2	1	1	0	1	0
x_6	0	12	3	4*	1	0	0	1
		Δ	-4	-5	-3	0	0	0

Cơ sở	Hệ số	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_J	c_J	x_J^0	4	5	3	0	0	0
x_4	0	10	3	0	4^*	1	0	0
x_5	0	4	5/4	0	3/4	0	1	$-1/4$
x_2	5	3	3/4	1	1/4	0	0	1/4
		Δ	$-1/4$	0	-3^*	0	0	5/4
x_3	3	5/2	3/4	0	1	1/4	0	0
x_5	0	17/8	11/16	0	0	$-3/16$	0	$-1/4$
x_2	5	19/8	9/16	1	0	$-1/16$	1	1/4
		Δ	17/16	0	0	7/16	0	5/4

Lúc này bài toán đạt tối ưu nhưng chưa thỏa điều kiện nguyên, ta xét biến x_3 để tạo lát cắt Gomory, bỏ qua x_2 vì đề bài chỉ yêu cầu x_1, x_3 phải nguyên.

$$\frac{-1}{2} = \frac{-3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4 + x_7$$

.

Cơ sở	Hệ số	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_J	c_J	x_J^0	4	5	3	0	0	0	0
x_3	3	5/2	3/4	0	1	1/4	0	0	0
x_5	0	17/8	11/16	0	0	$-3/16$	0	$-1/4$	0
x_2	5	19/8	9/16	1	0	$-1/16$	1	1/4	0
x_7	0	$-1/2$	$-3/4$	0	0	$-1/4^*$	0	0	1
		Δ	17/16	0	0	7/16	0	5/4	0
x_3	3	2	3/4	0	1	0	0	0	1
x_5	0	5/2	5/4	0	0	0	1	$-1/4$	$-3/4$
$x-2$	5	5/2	3/4	1	0	0	0	1/4	$-1/4$
x_4	0	2	3^*	0	0	1	0	0	-4
		Δ	$-1/4$	0	0	0	0	5/4	7/4

Cơ sở	Hệ số	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_J	c_J	x_J^0	4	5	3	0	0	0	0
x_3	3	2	0	0	1	0	0	0	1
x_5	0	5/3	0	0	0	5/12	1	$-1/4$	11/2
x_2	5	2	0	1	0	$-1/4$	0	1/4	3/4
x_1	4	2/3	1	0	0	1/3	0	0	$-4/3$
		Δ	0	0	0	1/12	0	5/4	17/12

Ta xét x_1 và lập lát cắt mới, $\frac{-2}{3} = \frac{-1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_7 + x_8$.

Cơ sở	Hệ số	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_J	c_J	x_J^0	4	5	3	0	0	0	0	0
x_3	3	2	0	0	1	0	0	0	1	0
x_5	0	5/3	0	0	0	5/12	1	$-1/4$	11/2	0
x_2	5	2	0	1	0	$-1/4$	0	1/4	3/4	0
x_1	4	2/3	1	0	0	1/3	0	0	$-4/3$	0
x_8	0	$-2/3$	0	0	0	$-1/3^*$	0	0	1/3	1
		Δ	0	0	0	1/12	0	5/4	17/12	0
x_3	3	2	0	0	1	0	0	1	0	0
x_5	0	5/6	0	0	0	0	1	$-1/4$	71/12	5/4
x_2	5	5/2	0	1	0	0	0	1/4	1/2	$-3/4$
x_1	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
x_4	0	2	0	0	0	1	0	0	-1	-3
		Δ	0	0	0	0	0	5/4	3/2	1/4

Ta dừng thuật toán và kết luận nghiệm của bài toán đã cho là $x = (x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{5}{2}, 2)$ và giá trị tối ưu của hàm mục tiêu là 18.5.

2.2.5 Ý nghĩa của phương pháp Gomory

2.3. Phương pháp Land-Doig

2.3.1 Giới thiệu phương pháp và ý nghĩa

2.3.2 Các bước thực hiện của phương pháp

2.3.3 Ví dụ minh họa

Chương 3

Mở rộng kết quả cho bài toán dạng phân thức tuyến tính

Kết luận

Luận văn này đạt được các vấn đề sau đây:

-
-
-

Tài liệu tham khảo

[1] Erik B. Bajanilov, *Linear fractional programming: Theory, Mẹthods, Applications, and Software*, Springer, 2003.

[2] Stancu Minasian, *Fractional Programming: Theory, Methods, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1992.