# Phương pháp nhánh cận

**Nguyễn Chí Bằng**

Ngày 10 tháng 5 năm 2024

# TÓM TẮT

- Giới thiệu 2 mô hình chính trong phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính nguyên:
  - Tối ưu nguyên hoàn toàn
  - Tối ưu nguyên bộ phận.
- Tập trung vào phương pháp giải bài toán tối ưu nguyên bộ phận thông qua thuật toán nhánh cận.
  - Cơ sở lý thuyết.
  - Sơ đồ thuật toán.
- Độ phức tạp của thuật toán.

# NỘI DUNG

# Giới thiệu bài toán

# Tối ưu nguyên hoàn toàn (Pure integer linear program)

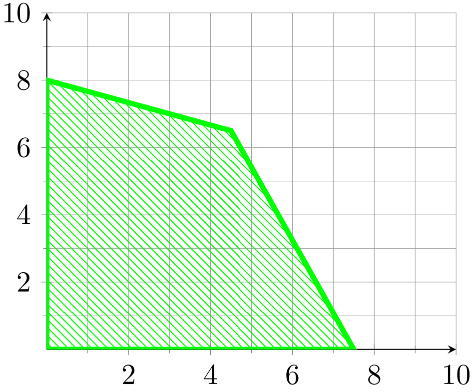
$$(H) \quad z_h = c^T x \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0, \text{ nguyên} \end{cases} \tag{1}$$

- Trong đó $c^T = (c_1 \; c_2 \; \dots \; c_n)$, $A$ là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in Z^n$.
- Bài toán $(H)$ gọi là bài toán **Tối ưu nguyên hoàn toàn.**
- Tập $S_h := \{x \in Z^n_+ : Ax \le b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn.

# Minh hoạ bài toán

$$2x_1 + 2x_2 \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ \dfrac{13}{3}x_1 + 2x_2 \leq 32.5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$




Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn

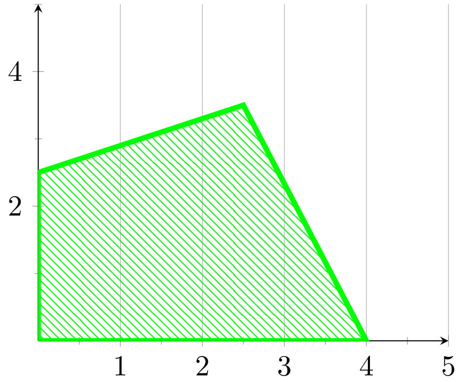
# Tối ưu nguyên bộ phận (Mixed integer linear program)

$$(B) \quad z_b = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x \geq 0, \ \text{nguyên} \\ y \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

- Trong đó $c^T = (c_1 \ c_2 \ \ldots \ c_n)$, $h^T = (h_1 \ h_2 \ \ldots \ h_p)$, $A$ là ma trận $m \times n$, $G$ là ma trận $m \times p$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in Z^n$ và $y \in R^p$.
- Bài toán $(B)$ gọi là bài toán **Tối ưu nguyên bộ phận.**
- Tập $S_b := \{(x, y) \in Z^n_+ \times R^p_+ : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận.

# Minh hoạ bài toán

$$x_1 + 2x_2 \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + \dfrac{15}{7}x_2 \leq 20 \\ -2.4x_1 + \dfrac{30}{7}x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$




Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận

# Mục tiêu phương pháp

# Bài toán quan tâm

$$(P) \quad z_p = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \le b, \\ x, y \ge 0. \end{cases} \qquad (5)$$

- Trong đó $(P)$ là bài toán $(B)$ với nghiệm thuộc tập số thực.
- Bài toán $(P)$ là một bài toán **Tối ưu tuyến tính thông thường** hay gọi đơn giản là bài toán Tối ưu tuyến tính (Natural linear programming relaxation).
- Tập $S_p := \{(x, y) \in R_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \le b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu tuyến tính.

# Mục tiêu

Giả sử ta nhận được tập phương án tối ưu của bài toán (3) sau hữu hạn lần giải, ký hiệu $(x_b, y_b)$ và giá trị tối ưu là $z_b$ thì ta có nhận xét sau:

## Nhận xét 2.1

- *Nếu $S_b \subseteq S_p$ thì ta luôn nhận được $z_b \leq z_p$ và phương án có thể cải thiện.*
- *Nếu $S_b = S_p$ thì ta nhận được $z_b = z_p$ và bài toán được giải.*

Vì thế, ta chọn xử lý bài toán $(B)$ (hoặc $(H)$) thông qua bài toán $(P)$ bằng cách cải thiện phương án thu được từ bài toán $(P)$ sao cho thoả điều kiện của bài toán $(B)$ (hoặc $(H)$).

# Ví dụ

$$(H) \quad 5.5x_1 + 2.1x_2 \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -1x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ 8x_1 & +2x_2 & \leq & 17 \\ x_1 & & \geq & 0, \text{ nguyên} \\ & x_2 & \geq & 0, \text{ nguyên.} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 1.3 \\ x_2 & = & 3.3 \\ z & = & 14.08 \end{cases}$$

Phương án có thể cải thiện.

# Ví dụ

$$
(H) \quad 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow Max
$$

$$
\begin{cases} 2.5x_1 & +\frac{15}{4}x_2 & \leq & 20 \\ x_1 & +\frac{5}{3}x_2 & \leq & \frac{50}{3} \\ x_1 & & \geq & 0, \\ & x_2 & \geq & 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 5 \\ x_2 & = & 7 \\ z & = & 43 \end{cases} \qquad (6)
$$

Bài toán được giải.

# Thuật toán nhánh cận (Branch-and-Bound)

# Phương pháp xác định cận

Ta gọi $x_j$ với $1 \leq j \leq n$ là nghiệm thu được từ bài toán $(P)$.

## Định lý 3.1

- *Với mỗi $x_j \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất số nguyên $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $k \leq x_j < k+1$.*
  - *Giá trị $k$ khi đó ta gọi là phần nguyên nhỏ nhất của $x_j$, ký hiệu là $\lfloor x_j \rfloor$.*
  - *Giá trị $k+1$ gọi là phần nguyên lớn nhất của $x_j$, ký hiệu là $\lceil x_j \rceil$.*

## Ví dụ 3.1

*Ta có $x_1 = 3.3$, vậy khi đó phần nguyên nhỏ nhất của $x_1$ là $\lfloor x_1 \rfloor = 3$ và phần nguyên lớn nhất là $\lceil x_1 \rceil = 4$.*

# Phương pháp xử lý bài toán

- Từ (2.1) và (3.1), ta thấy rằng nếu $\exists x_j \notin \mathbb{Z}$, thì ta có thể tiếp tục cải thiện phương án cho đến khi $\forall x_j \in \mathbb{Z}$.
- Nếu nghiệm thu được là $x_j \notin \mathbb{Z}$ ta thiết lập được 2 bài toán con từ bài toán $(P)$ ban đầu, ký hiệu $(P_1)$ và $(P_2)$.

$$(P_1) \quad z_1 = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j \leq \lfloor x_j \rfloor, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

- Tập $S_1 := S_p \cap \{(x, y) : x_j \leq \lfloor x_j \rfloor\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con $(P_1)$.

$$(P_2) \quad z_2 = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j \geq \lceil x_j \rceil, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{8}$$

- Tập $S_2 := S_p \cap \{(x, y) : x_j \geq \lceil x_j \rceil\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con $(P_2)$.

# Điều kiện nghiệm

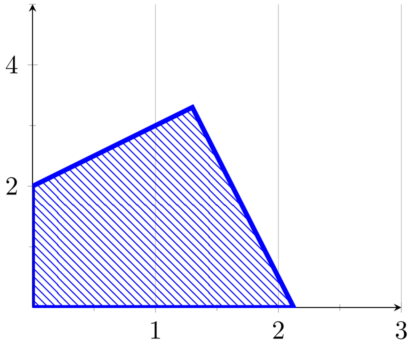
- Nếu tồn tại $(P_i)$ với $i = 1, 2$ không giải được $(S_i = \emptyset)$, ta gọi bài toán **vô nghiệm**.
- Giả sử $x^i$ là nghiệm tối ưu của bài toán $(P_i)$ và giá trị tối ưu là $z_i$ với $i = 1, 2$.
  - Nếu $\forall x^i \in Z_+^n$, ta nói $S_i$ là tập nghiệm thoả mãn bài toán tối ưu nguyên bộ phận, $z_i^*$ là giá trị tối ưu và bài toán con $(P_i)$ được giải **(gọt bởi nghiệm nguyên)**.
  - Nếu $\exists x^i \notin Z_+^n$ đồng thời $z_i \leq z_i^*$, ta dừng phân nhánh và bỏ qua bài toán **(gọt bởi cận)**.
  - Nếu $\exists x^i \notin Z_+^n$ đồng thời $z_i > z_i^*$, bài toán chưa tối ưu và có thể tiếp tục cải thiện.

# Ví dụ minh hoạ

$$(P) \quad z_p = 5.5x_1 + 2.1x_2 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình thông thường ta được nghiệm $x_1 = 1.3$, $x_2 = 3.3$ và $z_p = 14.08$.




Hình: Tập nghiệm của bài toán

Chọn $x_1 = 1.3$ để cải thiện phương án, ta thu được 2 bài toán con sau:

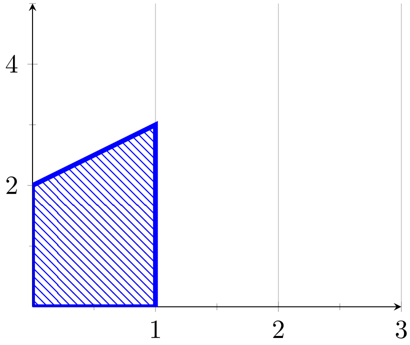
$$(P_1) \quad z_1 = 5.5x_1^1 + 2.1x_2^1 \qquad \begin{cases} -x_1^1 + x_2^1 \leq 2 \\ 8x_1^1 + 2x_2^1 \leq 17 \\ x_1^1 \leq 1 \\ x_1^1 \geq 0 \\ x_2^1 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_2) \quad z_2 = 5.5x_1^2 + 2.1x_2^2 \qquad \begin{cases} -x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \\ 8x_1^2 + 2x_2^2 \leq 17 \\ x_1^2 \geq 2 \\ x_1^2 \geq 0 \\ x_2^2 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_1) \quad z_1 = 5.5x_1^1 + 2.1x_2^1 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1^1 + x_2^1 \leq 2 \\ 8x_1^1 + 2x_2^1 \leq 17 \\ {\color{blue} x_1^1 \leq 1} \\ x_1^1 \geq 0 \\ x_2^1 \geq 0. \end{cases}$$

Giải bài toán ta được $x_1^1 = 1, x_2^1 = 3$ và $z_1 = 11.8$. Bài toán được giải **(gọt bởi nghiệm nguyên)**.




Hình: Tập nghiệm của bài toán $(P_1)$

Tương tự bài toán $(P_2)$ ta được $x_1^2 = 2, x_2^2 = 0.5$ và $z_2 = 12.05$. Ta chọn $x_2^2 = 0.5$ để cải thiện phương án. Ta được 2 bài toán con $(P_3)$ và $(P_4)$:

$$(P_3) \quad z_3 = 5.5x_1^3 + 2.1x_2^3$$

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 \leq 2 \\ 8x_1^3 + 2x_2^3 \leq 17 \\ x_1^3 \geq 2 \\ x_2^3 \leq 0 \\ x_1^3 \geq 0 \\ x_2^3 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_4) \quad z_4 = 5.5x_1^4 + 2.1x_2^4$$

$$\begin{cases} -x_1^4 + x_2^4 \leq 2 \\ 8x_1^4 + 2x_2^4 \leq 17 \\ x_1^4 \geq 2 \\ x_2^4 \geq 1 \\ x_1^4 \geq 0 \\ x_2^4 \geq 0. \end{cases}$$

- Giải bài toán $(P_3)$ ta được $x_1^3 = 2.125, x_2^3 = 0$ và $z_3 = 11.6875 \Rightarrow$ không khả thi do $z_3 < z_1$ **(gọt bởi cận)**.
- Bài toán $(P_4)$ **vô nghiệm**.
- Vậy phương án tối ưu của bài toán là $x_1^1 = 1, x_2^1 = 3$ và $z = 11.8$.

# Sơ đồ thuật toán

- Ta gọi bài toán $(P)$ có nút ban đầu là $N_0$, tương ứng mỗi bài toán tối ưu tuyến tính thông thường $(P_i)$ ứng với mỗi nút $N_i$ trên sơ đồ nhánh và $\mathcal{L}$ là danh sách chứa các nút được lập thông qua lý thuyết xác định cận và lý thuyết nghiệm.
- Ta đánh dấu giá trị tối ưu tốt nhất và nghiệm tối ưu tốt nhất của bài toán lần lượt là $z^*$ và $(x^*, y^*)$.

# Sơ đồ thuật toán

**Bước 1. Thiết lập**

Đặt $\mathcal{L} := \{N_0\}$, $z^* = z_p$ và $(x^*, y^*) = (x, y)$.

**Bước 2. Kiểm tra**

Nếu $\mathcal{L} = \emptyset$ thì nghiệm tối ưu của bài toán là $(x^*, y^*)$, giá trị tối ưu là $z^*$ và bài toán được giải.

Nếu $\mathcal{L} \neq \emptyset$, chuyển sang bước 3.

**Bước 3. Chọn nút**

Chọn nút $N_i$ từ danh sách $\mathcal{L}$ và xoá khỏi $\mathcal{L}$ sau đó chuyển sang bước 4.

**Bước 4. Xác định cận**

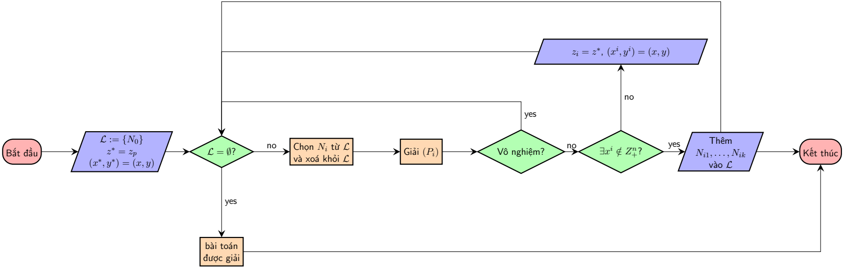
Giải bài toán $(P_i)$, nếu bài toán vô nghiệm hoặc $z_i \leq z^*$, quay lại bước 2, nếu không, chuyển sang bước 5.

**Bước 5. Gọt nghiệm**

Nếu tồn tại $x^i \notin Z_+^n$, ta thêm nút $N_{i+1}, \ldots, N_k$ vào $\mathcal{L}$ và quay về bước 2.

Nếu không tồn tại $x^i \notin Z_+^n$, tức $\forall x^i \in Z_+^n$, ta đặt $z_i = z^*$, $(x^i, y^i) = (x^*, y^*)$ và quay lại bước 2.

# Sơ đồ thuật toán




Hình: Lưu đồ giải thuật của thuật toán nhánh cận.

# Ví dụ minh hoạ

$$(P) \quad z_p = 5.5x_1 + 2.1x_2 + 3x_3 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 17 \\ 9x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 20 \\ x_i \geq 0, \; i = \overline{1, \dots, 3} \end{cases}$$

Giải bài toán $(P)$ ta được $x_1 = 1.38, x_2 = 2.55, x_3 = 0.83$.
Ta chọn biến $x_1$ để phân nhánh. $(x_2, x_3$ tương tự)

Với $x_1^1 \leq 1$

$$(P_1) \quad z_p = 5.5x_1^1 + 2.1x_2^1 + 3x_3^1 \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} -x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 \leq 2 \\ 8x_1^1 + 2x_2^1 + x_3^1 \leq 17 \\ 9x_1^1 + x_2^1 + 6x_3^1 \leq 20 \\ x_1^1 \leq 1 \\ x_i^1 \geq 0, \ i = \overline{1,\ldots,3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_1 = 13.24, x_1^1 = 1, x_2^1 = 1.4, x_3^1 = 1.6$

Với $x_1^2 \geq 2$

$$(P_2) \quad z_p = 5.5x_1^2 + 2.1x_2^2 + 3x_3^2 \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2 \\ 8x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \leq 17 \\ 9x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 \leq 20 \\ x_1^2 \geq 2 \\ x_i^2 \geq 0,\ i = \overline{1,\ldots,3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_2 = 12.58, x_1^2 = 2, x_2^2 = 0.36, x_3^2 = 0.27$

Ta tiếp tục chọn $x_2^1 = 1.4$ từ $(P_1)$. Với $x_2^3 \leq 1$

$$(P_3) \quad z_p = 5.5x_1^3 + 2.1x_2^3 + 3x_3^3 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \leq 2 \\ 8x_1^3 + 2x_2^3 + x_3^3 \leq 17 \\ 9x_1^3 + x_2^3 + 6x_3^3 \leq 20 \\ x_1^3 \leq 1 \\ x_2^3 \leq 1 \\ x_i^3 \geq 0, \; i = \overline{1, \ldots, 3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_3 = 12.6, x_1^3 = 1, x_2^3 = 1, x_3^3 = 1.66$

Với $x_2^4 \geq 2$

$$(P_4) \quad z_p = 5.5x_1^4 + 2.1x_2^4 + 3x_3^4 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \leq 2 \\ 8x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4 \leq 17 \\ 9x_1^4 + x_2^4 + 6x_3^4 \leq 20 \\ x_1^4 \leq 1 \\ x_2^4 \geq 2 \\ x_i^4 \geq 0, \; i = \overline{1, \ldots, 3} \end{cases}$$

$\to z_4 = 12.7, x_1^4 = 1, x_2^4 = 2, x_3^4 = 1 \to$ **gọt bởi nghiệm nguyên**.

Ta chọn $x_3^3 = 1.66$ từ $(P_3)$. Với $x_3^5 \leq 1$.

$$(P_5) \quad z_p = 5.5x_1^5 + 2.1x_2^5 + 3x_3^5 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 \leq 2 \\ 8x_1^5 + 2x_2^5 + x_3^5 \leq 17 \\ 9x_1^5 + x_2^5 + 6x_3^5 \leq 20 \\ x_1^5 \leq 1 \\ x_2^5 \leq 1 \\ x_3^5 \leq 1 \\ x_i^5 \geq 0,\ i = \overline{1, \ldots, 3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_5 = 10.6, x_1^5 = 1, x_2^5 = 1, x_3^5 = 1 \rightarrow$ gọt bởi nghiệm nguyên nhưng $z_5 < z_4 \rightarrow$ loại.

Với $x_3^6 \geq 2$.

$$(P_6) \quad z_p = 5.5x_1^6 + 2.1x_2^6 + 3x_3^6 \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 \leq 2 \\ 8x_1^6 + 2x_2^6 + x_3^6 \leq 17 \\ 9x_1^6 + x_2^6 + 6x_3^6 \leq 20 \\ x_1^6 \leq 1 \\ x_2^6 \leq 1 \\ x_3^6 \geq 2 \\ x_i^6 \geq 0, \; i = \overline{1, \ldots, 3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_6 = 12.08, x_1^6 = 0.8, x_2^6 = 0.8, x_3^6 = 2 \rightarrow$ **gọt bởi cận**.

Ta chọn $x_2^2 = 0.36$ từ $(P_2)$

- $(P_7)$ cho $z_7 = 12.1, x_1^7 = 2.1, x_2^7 = 0, x_3^7 = 0.17$, do $z_7 < z_4 \rightarrow$ loại.
- $(P_8)$ cho kết quả **vô nghiệm**.

Vậy nghiệm tối ưu của bài toán là $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$ và giá trị tối ưu $z = 12.7$.