# Phương pháp nhánh cận

**Nguyễn Chí Bằng**

Ngày 24 tháng 11 năm 2023

# TÓM TẮT

- Giới thiệu về 2 mô hình chính trong phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính nguyên:
    - Tối ưu nguyên hoàn toàn
    - Tối ưu nguyên bộ phận.
- Tập trung vào phương pháp giải bài toán tối ưu nguyên bộ phận thông qua thuật toán nhánh cận.

# NỘI DUNG

# Giới thiệu bài toán

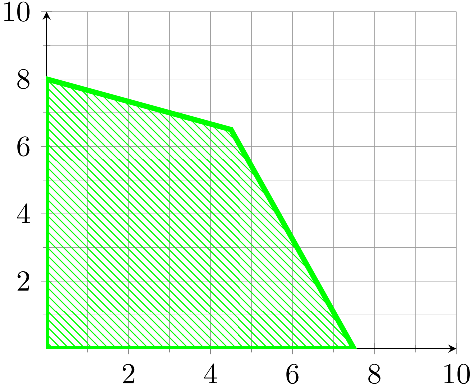
# Tối ưu nguyên hoàn toàn (Pure integer linear program)

$$(H) \quad z_h = c^T x \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0, \text{ nguyên} \end{cases} \qquad (1)$$

- Trong đó $c^T = (c_1\ c_2\ \dots\ c_n)$, $A$ là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in Z^n$.
- Bài toán $(H)$ gọi là bài toán **Tối ưu nguyên hoàn toàn.**
- Tập $S_h := \{x \in Z_+^n : Ax \le b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn.

# Minh hoạ bài toán

$$2x_1 + 2x_2 \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ \dfrac{13}{3}x_1 + 2x_2 \leq 32.5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$




Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn

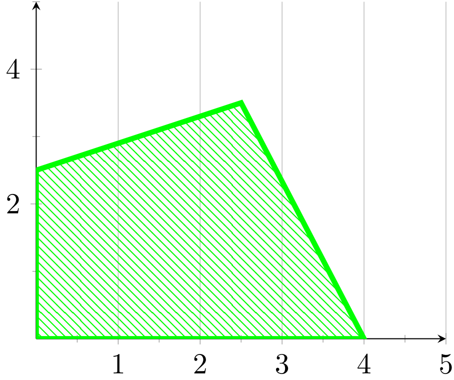
# Tối ưu nguyên bộ phận (Mixed integer linear program)

$$(B) \quad z_b = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \\ y \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

- Trong đó $c^T = (c_1\ c_2\ \dots\ c_n)$, $h^T = (h_1\ h_2\ \dots\ h_p)$, $A$ là ma trận $m \times n$, $G$ là ma trận $m \times p$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in Z^n$ và $y \in R^p$.
- Bài toán $(B)$ gọi là bài toán **Tối ưu nguyên bộ phận.**
- Tập $S_b := \{(x, y) \in Z_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận.

# Minh hoạ bài toán

$$
\begin{aligned}
& x_1 + 2x_2 \quad \longrightarrow Max \\
& \begin{cases}
5x_1 + \dfrac{15}{7}x_2 \leq 20 \\
-2.4x_1 + \dfrac{30}{7}x_2 \leq 15 \\
x_1, x_2 \geq 0.
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4}
$$




Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận

# Mục tiêu phương pháp

# Bài toán quan tâm

$$(P) \quad z_p = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

- Trong đó $(P)$ là bài toán $(B)$ với nghiệm thuộc tập số thực.
- Bài toán $(P)$ là một bài toán **Tối ưu tuyến tính thông thường** hay gọi đơn giản là bài toán Tối ưu tuyến tính (Natural linear programming relaxation).
- Tập $S_p := \{(x, y) \in R_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu tuyến tính.

# Mục tiêu

Giả sử ta nhận được tập phương án tối ưu của bài toán (3) sau hữu hạn lần giải, ký hiệu $(x_b, y_b)$ và giá trị tối ưu là $z_b$ thì ta có nhận xét sau:

## Nhận xét 2.1

- *Nếu $S_b \subset S_p$ thì ta luôn nhận được $z_b < z_p$ và phương án có thể cải thiện.*
- *Nếu $S_b = S_p$ thì ta nhận được $z_b = z_p$ và bài toán được giải.*

Vì thế, ta chọn xử lý bài toán $(B)$ thông qua bài toán $(P)$ bằng cách cải thiện phương án thu được từ bài toán $(P)$ sao cho thoả điều kiện của bài toán $(B)$.

# Ví dụ

$$(P) \quad 5.5x_1 + 2.1x_2 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -1x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \text{nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1.3 \\ x_2 = 3.3 \\ z = 14.08 \end{cases}$$

Phương án có thể cải thiện.

# Ví dụ

$$(P) \quad 3x_1 + 4x_2 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} 2.5x_1 + \dfrac{15}{4}x_2 \leq 20 \\ x_1 + \dfrac{5}{3}x_2 \leq \dfrac{50}{3} \\ x_1 \geq 0, \text{nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \\ z = 43 \end{cases}$$

Bài toán được giải.

# Thuật toán nhánh cận (Branch-and-Bound)

# Khái niệm và ký hiệu

Ở mục này, chúng ta sẽ làm rõ những ý tưởng sau:

- Định nghĩa cận và xác định cận của bài toán.
- Phương pháp xử lý bài toán kèm ví dụ minh hoạ và thuật toán.

# Xác định cận

Ta gọi $x_j$ với $1 \leq j \leq n$ là nghiệm thu được từ bài toán $(P)$.

## Định lý 3.1

- *Với mỗi $x_j \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất số nguyên $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $k \leq x_j < k+1$.*
  - *Giá trị $k$ khi đó ta gọi là phần nguyên nhỏ nhất của $x_j$, ký hiệu là $\lfloor x_j \rfloor$.*
  - *Giá trị $k+1$ gọi là phần nguyên lớn nhất của $x_j$, ký hiệu là $\lceil x_j \rceil$.*

## Chứng minh.

- $\forall x_j \geq 0$, ta có:
  - $x_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor x_j \rfloor = x_j$. (đpcm)
  - $x_j \notin \mathbb{Z}$, ta đặt $S = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m > x_j\}$
    Theo tiên đề Peano, luôn tồn tại một min$S$, vì thế ta dễ dàng nhận thấy min$S - 1 = k = \lfloor x_j \rfloor$ với $k \in \mathbb{Z}$ và thoả $k \leq x_j < k + 1$ hay $\lfloor x_j \rfloor \leq x_j < \lceil x_j \rceil$.

$\square$

## Ví dụ 3.1

*Ta có $x_1 = 3.3$, vậy khi đó phần nguyên nhỏ nhất của $x_1$ là $\lfloor x_1 \rfloor = 3$ và phần nguyên lớn nhất là $\lceil x_1 \rceil = 4$.*

# Phương pháp

- Từ (2.1) và (3.1), ta thấy rằng nếu $\exists x_j \notin \mathbb{Z}$, ký hiệu $x_j^0$, thì ta có thể tiếp tục cải thiện phương án cho đến khi $\forall x_j \in \mathbb{Z}$.
- Nếu nghiệm thu được là $x_j^0$ ta thiết lập được 2 bài toán con từ bài toán $(P)$ ban đầu, ký hiệu $(P_1)$ và $(P_2)$.

$$(P_1) \quad z_p = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j^0 \leq \lfloor x_j^0 \rfloor, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

- Tập $S_1 := S_p \cap \{(x, y) : x_j^0 \leq \lfloor x_j^0 \rfloor\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con $(P_1)$.

$$(P_2) \quad z_p = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j^0 \geq \lceil x_j^0 \rceil, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

- Tập $S_1 := S_p \cap \{(x,y) : x_j^0 \geq \lceil x_j^0 \rceil\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con $(P_2)$.

# Ví dụ minh hoạ