

# Phương pháp nhánh cận

**Nguyễn Chí Bằng**

Ngày 22 tháng 11 năm 2023

# TÓM TẮT

- Giới thiệu về 2 mô hình chính trong phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính nguyên:
  - Tối ưu nguyên hoàn toàn
  - Tối ưu nguyên bộ phận.
- Tập trung vào phương pháp giải bài toán tối ưu nguyên bộ phận thông qua thuật toán nhánh cận.

# NỘI DUNG

- 1 Giới thiệu
- 2 Mục tiêu
- 3 Thuật toán nhánh cận

# Giới thiệu bài toán

# Tối ưu nguyên hoàn toàn (Pure integer linear program)

$$(H) \quad z_h = c^T x \quad \longrightarrow \quad Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \end{cases} \quad (1)$$

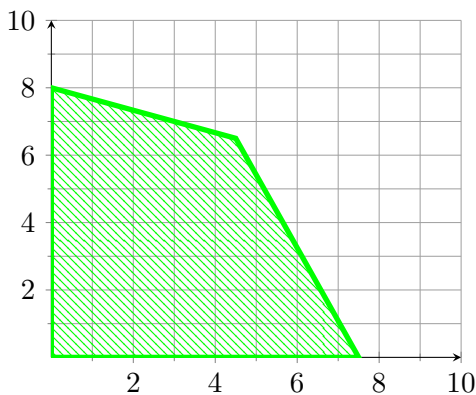
- Trong đó  $c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ ,  $A$  là ma trận  $m \times n$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ , với

$$x \in Z^n.$$

- Bài toán  $(H)$  gọi là bài toán **Tối ưu nguyên hoàn toàn**.
- Tập  $S_h := \{x \in Z_+^n : Ax \leq b\}$  là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn.

# Minh họa bài toán

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ \frac{13}{3}x_1 + 2x_2 \leq 32.5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn

# Tối ưu nguyên bộ phận (Mixed integer linear program)

$$(B) \quad z_b = c^T x + h^T y \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

- Trong đó  $c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ ,  $h^T = (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_p)$ ,  $A$  là ma trận

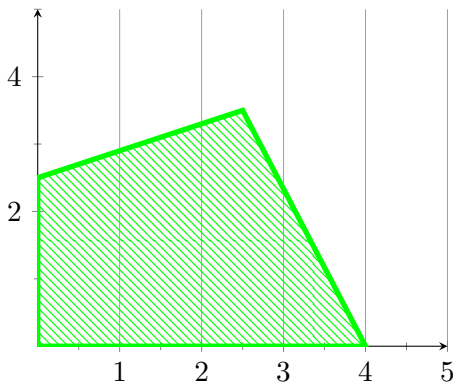
$$m \times n, G \text{ là ma trận } m \times p, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ với } x \in Z^n \text{ và } y \in R^p.$$

- Bài toán (B) gọi là bài toán **Tối ưu nguyên bộ phận**.
- Tập  $S_b := \{(x, y) \in Z_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$  là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận.



# Minh họa bài toán

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} 5x_1 + \frac{15}{7}x_2 \leq 20 \\ -2.4x_1 + \frac{30}{7}x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận

# Mục tiêu phương pháp

# Bài toán quan tâm

$$(P) \quad z_p = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

- Trong đó  $(P)$  là bài toán  $(B)$  với nghiệm thuộc tập số thực.
- Bài toán  $(P)$  là một bài toán **Tối ưu tuyến tính thông thường** hay gọi đơn giản là bài toán Tối ưu tuyến tính (Natural linear programming relaxation).
- Tập  $S_p := \{(x, y) \in R_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$  là tập nghiệm của bài toán Tối ưu tuyến tính.

# Mục tiêu

Giả sử ta nhận được tập phương án tối ưu của bài toán (3) sau hữu hạn lần giải, ký hiệu  $(x_b, y_b)$  và giá trị tối ưu là  $z_b$  thì ta có nhận xét sau:

## Nhận xét 2.1

- Nếu  $S_b \subset S_p$  thì ta luôn nhận được  $z_b < z_p$  và phương án có thể cải thiện.
- Nếu  $S_b = S_p$  thì ta nhận được  $z_b = z_p$  và bài toán được giải.

Vì thế, ta chọn xử lý bài toán  $(B)$  thông qua bài toán  $(P)$  bằng cách cải thiện phương án thu được từ bài toán  $(P)$  sao cho thoả điều kiện của bài toán  $(B)$ .

## Ví dụ

$$(P) \quad 5.5x_1 + 2.1x_2 \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} -1x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \text{ nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 1.3 \\ x_2 = 3.3 \\ z = 14.08 \end{cases}$$

Phương án có thể cải thiện.

## Ví dụ

$$(P) \quad 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} 2.5x_1 + \frac{15}{4}x_2 \leq 20 \\ x_1 + \frac{5}{3}x_2 \leq \frac{50}{3} \\ x_1 \geq 0, \text{ nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \\ z = 43 \end{cases}$$

Bài toán được giải.

# Thuật toán nhánh cận (Branch-and-Bound)





