

Phương pháp nhánh cận

Nguyễn Chí Bằng

Ngày 22 tháng 12 năm 2023

TÓM TẮT

- Giới thiệu 2 mô hình chính trong phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính nguyên:
 - Tối ưu nguyên hoàn toàn
 - Tối ưu nguyên bộ phận.
- Tập trung vào phương pháp giải bài toán tối ưu nguyên bộ phận thông qua thuật toán nhánh cận.
 - Cơ sở lý thuyết.
 - Sơ đồ thuật toán.
- Độ phức tạp của thuật toán.

NỘI DUNG

- 1 Giới thiệu
- 2 Mục tiêu
- 3 Thuật toán nhánh cận
- 4 Độ phức tạp

Tối ưu nguyên hoàn toàn (Pure integer linear program)

$$(H) \quad z_h = c^T x \quad \longrightarrow \quad Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \end{cases} \quad (1)$$

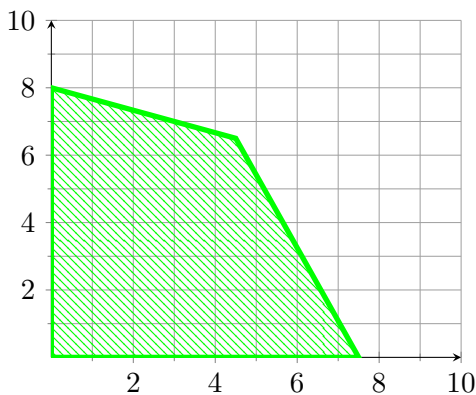
- Trong đó $c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$, A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với

$$x \in Z^n.$$

- Bài toán (H) gọi là bài toán **Tối ưu nguyên hoàn toàn**.
- Tập $S_h := \{x \in Z_+^n : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn.

Minh họa bài toán

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ \frac{13}{3}x_1 + 2x_2 \leq 32.5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn

Tối ưu nguyên bộ phận (Mixed integer linear program)

$$(B) \quad z_b = c^T x + h^T y \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

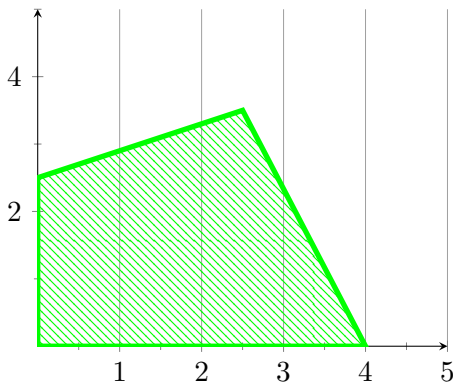
- Trong đó $c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$, $h^T = (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_p)$, A là ma trận

$$m \times n, G \text{ là ma trận } m \times p, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ với } x \in Z^n \text{ và } y \in R^p.$$

- Bài toán (B) gọi là bài toán **Tối ưu nguyên bộ phận**.
- Tập $S_b := \{(x, y) \in Z_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận.

Minh họa bài toán

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\longrightarrow Max \\ \begin{cases} 5x_1 + \frac{15}{7}x_2 \leq 20 \\ -2.4x_1 + \frac{30}{7}x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận

Mục tiêu phương pháp

Bài toán quan tâm

$$(P) \quad z_p = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow \quad Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

- Trong đó (P) là bài toán (B) với nghiệm thuộc tập số thực.
- Bài toán (P) là một bài toán **Tối ưu tuyến tính thông thường** hay gọi đơn giản là bài toán Tối ưu tuyến tính (Natural linear programming relaxation).
- Tập $S_p := \{(x, y) \in R_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu tuyến tính.

Mục tiêu

Giả sử ta nhận được tập phương án tối ưu của bài toán (3) sau hữu hạn lần giải, ký hiệu (x_b, y_b) và giá trị tối ưu là z_b thì ta có nhận xét sau:

Nhận xét 2.1

- Nếu $S_b \subset S_p$ thì ta luôn nhận được $z_b \leq z_p$ và phương án có thể cải thiện.
- Nếu $S_b = S_p$ thì ta nhận được $z_b = z_p$ và bài toán được giải.

Vì thế, ta chọn xử lý bài toán (B) thông qua bài toán (P) bằng cách cải thiện phương án thu được từ bài toán (P) sao cho thoả điều kiện của bài toán (B) .

Ví dụ

$$(P) \quad 5.5x_1 + 2.1x_2 \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} -1x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 1.3 \\ x_2 = 3.3 \\ z = 14.08 \end{cases}$$

Phương án có thể cải thiện.

Ví dụ

$$(P) \quad 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} 2.5x_1 + \frac{15}{4}x_2 \leq 20 \\ x_1 + \frac{5}{3}x_2 \leq \frac{50}{3} \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \\ z = 43 \end{cases}$$

Bài toán được giải.

Thuật toán nhánh cận (Branch-and-Bound)

Nội dung chính

Ở mục này, chúng ta sẽ làm rõ những ý tưởng sau:

- Định nghĩa cận và xác định cận của bài toán.
- Phương pháp xử lý bài toán nhỏ kèm ví dụ minh họa.
- Sơ đồ thuật giải và các ví dụ minh họa cho bài toán lớn.

Phương pháp xác định cận

Ta gọi x_j với $1 \leq j \leq n$ là nghiệm thu được từ bài toán (P) .

Định lý 3.1

- Với mỗi $x_j \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất số nguyên $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $k \leq x_j < k + 1$.
 - Giá trị k khi đó ta gọi là phần nguyên nhỏ nhất của x_j , ký hiệu là $\lfloor x_j \rfloor$.
 - Giá trị $k + 1$ gọi là phần nguyên lớn nhất của x_j , ký hiệu là $\lceil x_j \rceil$.

Chứng minh.

- $\forall x_j \geq 0$, ta có:

- $x_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor x_j \rfloor = x_j$. (đpcm)
- $x_j \notin \mathbb{Z}$, ta đặt $S = \{m \in \mathbb{N} \mid m > x_j\}$

Theo tiên đề Peano, luôn tồn tại một $\min S$, vì thế ta dễ dàng nhận thấy $\min S - 1 = k = \lfloor x_j \rfloor$ với $k \in \mathbb{Z}$ và thoả $k \leq x_j < k + 1$ hay $\lfloor x_j \rfloor \leq x_j < \lceil x_j \rceil$.



Ví dụ 3.1

Ta có $x_1 = 3.3$, vậy khi đó phần nguyên nhỏ nhất của x_1 là $\lfloor x_1 \rfloor = 3$ và phần nguyên lớn nhất là $\lceil x_1 \rceil = 4$.

Phương pháp xử lý bài toán

- Từ (2.1) và (3.1), ta thấy rằng nếu $\exists x_j \notin \mathbb{Z}$, thì ta có thể tiếp tục cải thiện phương án cho đến khi $\forall x_j \in \mathbb{Z}$.
- Nếu nghiệm thu được là $x_j \notin \mathbb{Z}$ ta thiết lập được 2 bài toán con từ bài toán (P) ban đầu, ký hiệu (P_1) và (P_2) .

$$(P_1) \quad z_1 = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow \quad Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j \leq \lfloor x_j \rfloor, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

- Tập $S_1 := S_p \cap \{(x, y) : x_j \leq \lfloor x_j \rfloor\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con (P_1) .

$$(P_2) \quad z_2 = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow \quad Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j \geq \lceil x_j \rceil, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

- Tập $S_2 := S_p \cap \{(x, y) : x_j \geq \lceil x_j \rceil\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con (P_2) .

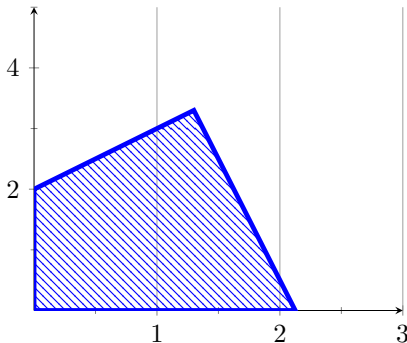
Điều kiện nghiệm

- Nếu tồn tại (P_i) với $i = 1, 2$ không giải được ($S_i = \emptyset$), ta gọi bài toán **vô nghiệm**.
- Giả sử x^i là nghiệm tối ưu của bài toán (P_i) và giá trị tối ưu là z_i với $i = 1, 2$.
 - Nếu $\forall x^i \in Z_+^n$, ta nói S_i là tập nghiệm của bài toán tối ưu nguyên bộ phận, z_i^* là giá trị tối ưu và bài toán con (P_i) được giải (**gọt bởi nghiệm nguyên**).
 - Nếu $\exists x^i \notin Z_+^n$ đồng thời $z_i \leq z_i^*$, ta dừng phân nhánh và bỏ qua bài toán (**gọt bởi cận**).
 - Nếu $\exists x^i \notin Z_+^n$ đồng thời $z_i > z_i^*$, bài toán chưa tối ưu và có thể tiếp tục cải thiện.

Ví dụ minh họa

$$(P) \quad z_p = 5.5x_1 + 2.1x_2 \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình thông thường ta được nghiệm $x_1^0 = 1.3$, $x_2^0 = 3.3$ và $z_p = 14.08$.



Hình: Tập nghiệm của bài toán

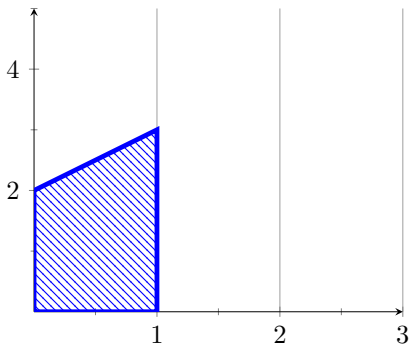
Chọn $x_1^0 = 1.3$ để cải thiện phương án, ta thu được 2 bài toán con sau:

$$(P_1) \quad z_1 = 5.5x_1 + 2.1x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_2) \quad z_2 = 5.5x_1 + 2.1x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_1) \quad z_1 = 5.5x_1 + 2.1x_2 \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Giải bài toán ta được $x_1^1 = 1$, $x_2^1 = 3$ và $z_1 = 11.8$. Bài toán được giải (**gọt bởi nghiệm nguyên**).



Hình: Tập nghiệm của bài toán (P_1)

Tương tự bài toán (P_2) ta được $x_1^1 = 2, x_2^1 = 0.5$ và $z_2 = 12.05$.
Ta chọn $x_2^1 = 0.5$ để cải thiện phương án. Ta được 2 bài toán con (P_3) và (P_4) :

$$(P_3) \quad z_3 = 5.5x_1 + 2.1x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_4) \quad z_4 = 5.5x_1 + 2.1x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- Giải bài toán (P_3) ta được $x_1^2 = 2.125, x_2^2 = 0$ và $z_3 = 11.6875 \Rightarrow$ không khả thi do $z_3 < z_1$ (**gọt bởi cận**).
- Bài toán (P_4) **vô nghiệm**.
- Vậy phương án tối ưu của bài toán là $x_1 = 1, x_2 = 3$ và $z = 11.8$.

Sơ đồ thuật giải

- Ta gọi bài toán (P) có nút ban đầu là N_0 , tương ứng mỗi bài toán tối ưu tuyến tính thông thường (P_i) ứng với mỗi nút N_i trên sơ đồ nhánh và \mathcal{L} là danh sách chứa các nút.
- Ta đặt z^* là giá trị tối ưu tốt nhất và (x^*, y^*) là nghiệm tối ưu tốt nhất của bài toán được đánh dấu.

Bước 1. Thiết lập Đặt $\mathcal{L} := \{N_0\}$, $z^* = z_p$ và $(x^*, y^*) = (x, y)$.

Sơ đồ thuật giải

