

# Phương pháp nhánh cận

**Nguyễn Chí Bằng**

Ngày 22 tháng 12 năm 2023

# TÓM TẮT

- Giới thiệu 2 mô hình chính trong phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính nguyên:
  - Tối ưu nguyên hoàn toàn
  - Tối ưu nguyên bộ phận.
- Tập trung vào phương pháp giải bài toán tối ưu nguyên bộ phận thông qua thuật toán nhánh cận.
  - Cơ sở lý thuyết.
  - Sơ đồ thuật toán.
- Độ phức tạp của thuật toán.

# NỘI DUNG

- 1 Giới thiệu
- 2 Mục tiêu
- 3 Thuật toán nhánh cận
- 4 Độ phức tạp



# Tối ưu nguyên hoàn toàn (Pure integer linear program)

$$(H) \quad z_h = c^T x \quad \longrightarrow \quad Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \end{cases} \quad (1)$$

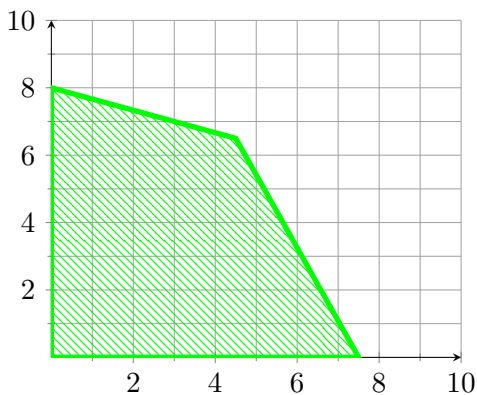
- Trong đó  $c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ ,  $A$  là ma trận  $m \times n$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ , với

$$x \in Z^n.$$

- Bài toán (H) gọi là bài toán **Tối ưu nguyên hoàn toàn**.
- Tập  $S_h := \{x \in Z_+^n : Ax \leq b\}$  là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn.

# Minh họa bài toán

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ \frac{13}{3}x_1 + 2x_2 \leq 32.5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$



**Hình:** Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn

# Tối ưu nguyên bộ phận (Mixed integer linear program)

$$(B) \quad z_b = c^T x + h^T y \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

- Trong đó  $c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ ,  $h^T = (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_p)$ ,  $A$  là ma trận

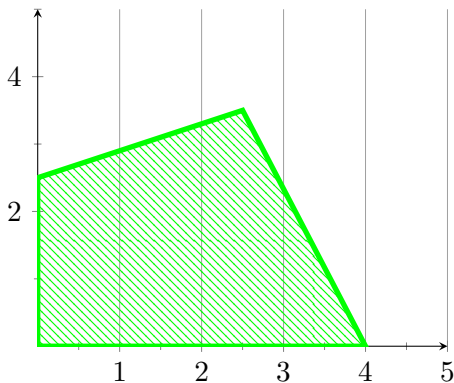
$$m \times n, G \text{ là ma trận } m \times p, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ với } x \in Z^n \text{ và } y \in R^p.$$

- Bài toán (B) gọi là bài toán **Tối ưu nguyên bộ phận**.
- Tập  $S_b := \{(x, y) \in Z_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$  là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận.



# Minh họa bài toán

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} 5x_1 + \frac{15}{7}x_2 \leq 20 \\ -2.4x_1 + \frac{30}{7}x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$



**Hình:** Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận

## Mục tiêu phương pháp

# Bài toán quan tâm

$$(P) \quad z_p = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

- Trong đó  $(P)$  là bài toán  $(B)$  với nghiệm thuộc tập số thực.
- Bài toán  $(P)$  là một bài toán **Tối ưu tuyến tính thông thường** hay gọi đơn giản là bài toán Tối ưu tuyến tính (Natural linear programming relaxation).
- Tập  $S_p := \{(x, y) \in R_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$  là tập nghiệm của bài toán Tối ưu tuyến tính.

# Mục tiêu

Giả sử ta nhận được tập phương án tối ưu của bài toán (3) sau hữu hạn lần giải, ký hiệu  $(x_b, y_b)$  và giá trị tối ưu là  $z_b$  thì ta có nhận xét sau:

## Nhận xét 2.1

- Nếu  $S_b \subset S_p$  thì ta luôn nhận được  $z_b \leq z_p$  và phương án có thể cải thiện.
- Nếu  $S_b = S_p$  thì ta nhận được  $z_b = z_p$  và bài toán được giải.

Vì thế, ta chọn xử lý bài toán  $(B)$  thông qua bài toán  $(P)$  bằng cách cải thiện phương án thu được từ bài toán  $(P)$  sao cho thoả điều kiện của bài toán  $(B)$ .

## Ví dụ

$$(P) \quad 5.5x_1 + 2.1x_2 \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} -1x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 1.3 \\ x_2 = 3.3 \\ z = 14.08 \end{cases}$$

Phương án có thể cải thiện.

## Ví dụ

$$(P) \quad 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} 2.5x_1 + \frac{15}{4}x_2 \leq 20 \\ x_1 + \frac{5}{3}x_2 \leq \frac{50}{3} \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \\ z = 43 \end{cases}$$

Bài toán được giải.







## Phương pháp xác định cận

Ta gọi  $x_j$  với  $1 \leq j \leq n$  là nghiệm thu được từ bài toán  $(P)$ .

### Định lý 3.1

- Với mỗi  $x_j \in \mathbb{R}$ , tồn tại duy nhất số nguyên  $k \in \mathbb{Z}$  sao cho  $k \leq x_j < k + 1$ .
  - Giá trị  $k$  khi đó ta gọi là phần nguyên nhỏ nhất của  $x_j$ , ký hiệu là  $\lfloor x_j \rfloor$ .
  - Giá trị  $k + 1$  gọi là phần nguyên lớn nhất của  $x_j$ , ký hiệu là  $\lceil x_j \rceil$ .

## Chứng minh.

- $\forall x_j \geq 0$ , ta có:

- $x_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor x_j \rfloor = x_j$ . (đpcm)
- $x_j \notin \mathbb{Z}$ , ta đặt  $S = \{m \in \mathbb{N} \mid m > x_j\}$

Theo tiên đề Peano, luôn tồn tại một  $\min S$ , vì thế ta dễ dàng nhận thấy  $\min S - 1 = k = \lfloor x_j \rfloor$  với  $k \in \mathbb{Z}$  và thoả  $k \leq x_j < k + 1$  hay  $\lfloor x_j \rfloor \leq x_j < \lceil x_j \rceil$ .



## Ví dụ 3.1

Ta có  $x_1 = 3.3$ , vậy khi đó phần nguyên nhỏ nhất của  $x_1$  là  $\lfloor x_1 \rfloor = 3$  và phần nguyên lớn nhất là  $\lceil x_1 \rceil = 4$ .

# Phương pháp xử lý bài toán

- Từ (2.1) và (3.1), ta thấy rằng nếu  $\exists x_j \notin \mathbb{Z}$ , thì ta có thể tiếp tục cải thiện phương án cho đến khi  $\forall x_j \in \mathbb{Z}$ .
- Nếu nghiệm thu được là  $x_j \notin \mathbb{Z}$  ta thiết lập được 2 bài toán con từ bài toán  $(P)$  ban đầu, ký hiệu  $(P_1)$  và  $(P_2)$ .

$$(P_1) \quad z_1 = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j \leq \lfloor x_j \rfloor, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

- Tập  $S_1 := S_p \cap \{(x, y) : x_j \leq \lfloor x_j \rfloor\}$  là tập nghiệm tối ưu của bài toán con  $(P_1)$ .

$$(P_2) \quad z_2 = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j \geq \lceil x_j \rceil, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

- Tập  $S_2 := S_p \cap \{(x, y) : x_j \geq \lceil x_j \rceil\}$  là tập nghiệm tối ưu của bài toán con  $(P_2)$ .

# Điều kiện nghiệm

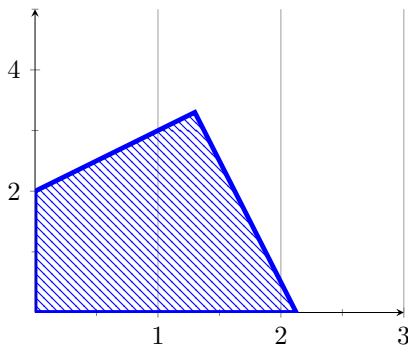
- Nếu tồn tại  $(P_i)$  với  $i = 1, 2$  không giải được ( $S_i = \emptyset$ ), ta gọi bài toán **vô nghiệm**.
- Giả sử  $x^i$  là nghiệm tối ưu của bài toán  $(P_i)$  và giá trị tối ưu là  $z_i$  với  $i = 1, 2$ .
  - Nếu  $\forall x^i \in Z_+^n$ , ta nói  $S_i$  là tập nghiệm thoả mãn bài toán tối ưu nguyên bộ phận,  $z_i^*$  là giá trị tối ưu và bài toán con  $(P_i)$  được giải (**gọt bởi nghiệm nguyên**).
  - Nếu  $\exists x^i \notin Z_+^n$  đồng thời  $z_i \leq z_i^*$ , ta dừng phân nhánh và bỏ qua bài toán (**gọt bởi cận**).
  - Nếu  $\exists x^i \notin Z_+^n$  đồng thời  $z_i > z_i^*$ , bài toán chưa tối ưu và có thể tiếp tục cải thiện.

# Ví dụ minh họa

$$(P) \quad z_p = 5.5x_1 + 2.1x_2 \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$



Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình thông thường ta được nghiệm  $x_1 = 1.3$ ,  $x_2 = 3.3$  và  $z_p = 14.08$ .



Hình: Tập nghiệm của bài toán

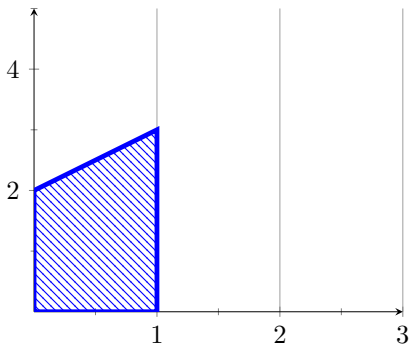
Chọn  $x_1 = 1.3$  để cải thiện phương án, ta thu được 2 bài toán con sau:

$$(P_1) \quad z_1 = 5.5x_1^1 + 2.1x_2^1$$
$$\begin{cases} -x_1^1 + x_2^1 \leq 2 \\ 8x_1^1 + 2x_2^1 \leq 17 \\ x_1^1 \leq 1 \\ x_1^1 \geq 0 \\ x_2^1 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_2) \quad z_2 = 5.5x_1^2 + 2.1x_2^2$$
$$\begin{cases} -x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \\ 8x_1^2 + 2x_2^2 \leq 17 \\ x_1^2 \geq 2 \\ x_1^2 \geq 0 \\ x_2^2 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_1) \quad z_1 = 5.5x_1^1 + 2.1x_2^1 \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} -x_1^1 + x_2^1 \leq 2 \\ 8x_1^1 + 2x_2^1 \leq 17 \\ x_1^1 \leq 1 \\ x_1^1 \geq 0 \\ x_2^1 \geq 0. \end{cases}$$

Giải bài toán ta được  $x_1^1 = 1$ ,  $x_2^1 = 3$  và  $z_1 = 11.8$ . Bài toán được giải (**gọt bởi nghiệm nguyên**).



Hình: Tập nghiệm của bài toán ( $P_1$ )

Tương tự bài toán  $(P_2)$  ta được  $x_1^2 = 2, x_2^2 = 0.5$  và  $z_2 = 12.05$ .  
Ta chọn  $x_2^2 = 0.5$  để cải thiện phương án. Ta được 2 bài toán con  $(P_3)$  và  $(P_4)$ :

$$(P_3) \quad z_3 = 5.5x_1^3 + 2.1x_2^3$$
$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 \leq 2 \\ 8x_1^3 + 2x_2^3 \leq 17 \\ x_1^3 \geq 2 \\ x_2^3 \leq 0 \\ x_1^3 \geq 0 \\ x_2^3 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_4) \quad z_4 = 5.5x_1^4 + 2.1x_2^4$$
$$\begin{cases} -x_1^4 + x_2^4 \leq 2 \\ 8x_1^4 + 2x_2^4 \leq 17 \\ x_1^4 \geq 2 \\ x_2^4 \geq 1 \\ x_1^4 \geq 0 \\ x_2^4 \geq 0. \end{cases}$$

- Giải bài toán ( $P_3$ ) ta được  $x_1^3 = 2.125$ ,  $x_2^3 = 0$  và  $z_3 = 11.6875 \Rightarrow$  không khả thi do  $z_3 < z_1$  (**gọt bởi cận**).
- Bài toán ( $P_4$ ) **vô nghiệm**.
- Vậy phương án tối ưu của bài toán là  $x_1^1 = 1$ ,  $x_2^1 = 3$  và  $z = 11.8$ .

# Sơ đồ thuật toán

- Ta gọi bài toán  $(P)$  có nút ban đầu là  $N_0$ , tương ứng mỗi bài toán tối ưu tuyến tính thông thường  $(P_i)$  ứng với mỗi nút  $N_i$  trên sơ đồ nhánh và  $\mathcal{L}$  là danh sách chứa các nút được lập thông qua lý thuyết xác định cận và lý thuyết nghiệm.
- Ta đánh dấu giá trị tối ưu tốt nhất và nghiệm tối ưu tốt nhất của bài toán lần lượt là  $z^*$  và  $(x^*, y^*)$ .

# Sơ đồ thuật toán

## Bước 1. Thiết lập

Đặt  $\mathcal{L} := \{N_0\}$ ,  $z^* = z_p$  và  $(x^*, y^*) = (x, y)$ .

## Bước 2. Kiểm tra

Nếu  $\mathcal{L} = \emptyset$  thì nghiệm tối ưu của bài toán là  $(x^*, y^*)$ , giá trị tối ưu là  $z^*$  và bài toán được giải.

Nếu  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ , chuyển sang bước 3.

## Bước 3. Chọn nút

Chọn nút  $N_i$  từ danh sách  $\mathcal{L}$  và xoá khỏi  $\mathcal{L}$  sau đó chuyển sang bước 4.

## Bước 4. Xác định cận

Giải bài toán  $(P_i)$ , nếu bài toán vô nghiệm hoặc  $z_i \leq z^*$ , quay lại bước 2, nếu không, chuyển sang bước 5.

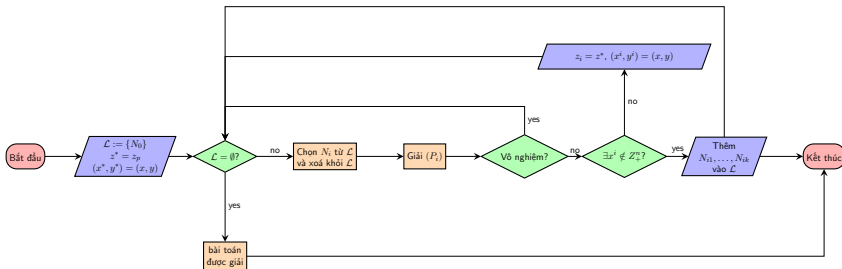
## Bước 5. Gọt nghiệm

Nếu tồn tại  $x^i \notin Z_+^n$ , ta thêm nút  $N_{i+1}, \dots, N_k$  vào  $\mathcal{L}$  và quay về bước 2.

Nếu không tồn tại  $x^i \notin Z_+^n$ , tức  $\forall x^i \in Z_+^n$ , ta đặt  $z_i = z^*$ ,  $(x^i, y^i) = (x^*, y^*)$  và quay lại bước 2.



# Sơ đồ thuật toán



Hình: Lưu đồ giải thuật của thuật toán nhánh cận.

## Ví dụ minh họa

$$(P) \quad z_p = 5.5x_1 + 2.1x_2 + 3x_3 \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 17 \\ 9x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 20 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, \dots, 3} \end{cases}$$

Giải bài toán  $(P)$  ta được  $x_1 = 1.38, x_2 = 2.55, x_3 = 0.83$ .  
Ta chọn biến  $x_1$  để phân nhánh. ( $x_2, x_3$  tương tự)

Với  $x_1^1 \leq 1$

$$(P_1) \quad z_p = 5.5x_1^1 + 2.1x_2^1 + 3x_3^1 \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} -x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 \leq 2 \\ 8x_1^1 + 2x_2^1 + x_3^1 \leq 17 \\ 9x_1^1 + x_2^1 + 6x_3^1 \leq 20 \\ x_1^1 \leq 1 \\ x_i^1 \geq 0, \quad i = \overline{1, \dots, 3} \end{cases}$$

$$\rightarrow z_1 = 13.24, x_1^1 = 1, x_2^1 = 1.4, x_3^1 = 1.6$$

Với  $x_1^2 \geq 2$

$$(P_2) \quad z_p = 5.5x_1^2 + 2.1x_2^2 + 3x_3^2 \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2 \\ 8x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \leq 17 \\ 9x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 \leq 20 \\ x_1^2 \geq 2 \\ x_i^2 \geq 0, \quad i = \overline{1, \dots, 3} \end{cases}$$

$$\rightarrow z_2 = 12.58, x_1^2 = 2, x_2^2 = 0.36, x_3^2 = 0.27$$

Ta tiếp tục chọn  $x_2^1 = 1.4$  từ  $(P_1)$ . Với  $x_2^3 \leq 1$

$$(P_3) \quad z_p = 5.5x_1^3 + 2.1x_2^3 + 3x_3^3 \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \leq 2 \\ 8x_1^3 + 2x_2^3 + x_3^3 \leq 17 \\ 9x_1^3 + x_2^3 + 6x_3^3 \leq 20 \\ x_1^3 \leq 1 \\ x_2^3 \leq 1 \\ x_i^3 \geq 0, i = \overline{1, \dots, 3} \end{cases}$$

$$\rightarrow z_3 = 12.6, x_1^3 = 1, x_2^3 = 1, x_3^3 = 1.66$$

Với  $x_2^4 \geq 2$

$$(P_4) \quad z_p = 5.5x_1^4 + 2.1x_2^4 + 3x_3^4 \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} -x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \leq 2 \\ 8x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4 \leq 17 \\ 9x_1^4 + x_2^4 + 6x_3^4 \leq 20 \\ x_1^4 \leq 1 \\ x_2^4 \geq 2 \\ x_i^4 \geq 0, i = \overline{1, \dots, 3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_4 = 12.7, x_1^4 = 1, x_2^4 = 2, x_3^4 = 1 \rightarrow$  **gọt bởi nghiệm nguyên.**

Ta chọn  $x_3^3 = 1.66$  từ  $(P_3)$ . Với  $x_3^5 \leq 1$ .

$$(P_5) \quad z_p = 5.5x_1^5 + 2.1x_2^5 + 3x_3^5 \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} -x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 \leq 2 \\ 8x_1^5 + 2x_2^5 + x_3^5 \leq 17 \\ 9x_1^5 + x_2^5 + 6x_3^5 \leq 20 \\ x_1^5 \leq 1 \\ x_2^5 \leq 1 \\ x_3^5 \leq 1 \\ x_i^5 \geq 0, i = \overline{1, \dots, 3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_5 = 10.6, x_1^5 = 1, x_2^5 = 1, x_3^5 = 1 \rightarrow$  gọt bởi nghiệm nguyên nhưng  $z_5 < z_4 \rightarrow$  loại.

Với  $x_3^6 \geq 2$ .

$$(P_6) \quad z_p = 5.5x_1^6 + 2.1x_2^6 + 3x_3^6 \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} -x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 \leq 2 \\ 8x_1^6 + 2x_2^6 + x_3^6 \leq 17 \\ 9x_1^6 + x_2^6 + 6x_3^6 \leq 20 \\ x_1^6 \leq 1 \\ x_2^6 \leq 1 \\ x_3^6 \geq 2 \\ x_i^6 \geq 0, i = \overline{1, \dots, 3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_6 = 12.08, x_1^6 = 0.8, x_2^6 = 0.8, x_3^6 = 2 \rightarrow$  **gọt bởi cận.**



Ta chọn  $x_2^2 = 0.36$  từ  $(P_2)$

- $(P_7)$  cho  $z_7 = 12.1, x_1^7 = 2.1, x_2^7 = 0, x_3^7 = 0.17$ , do  $z_7 < z_4 \rightarrow$  loại.
- $(P_8)$  cho kết quả **vô nghiệm**.

Vậy nghiệm tối ưu của bài toán là  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$  và giá trị tối ưu  $z = 12.7$ .

