Phương pháp nhánh cận

Nguyễn Chí Bằng

Ngày 24 tháng 11 năm 2023

TÓM TẮT

- Giới thiệu về 2 mô hình chính trong phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính nguyên:
  - Tối ưu nguyên hoàn toàn
  - Tối ưu nguyên bộ phận.
- Tập trung vào phương pháp giải bài toán tối ưu nguyên bộ phận thông qua thuật toán nhánh cận.

NỘI DUNG

Giới thiệu bài toán

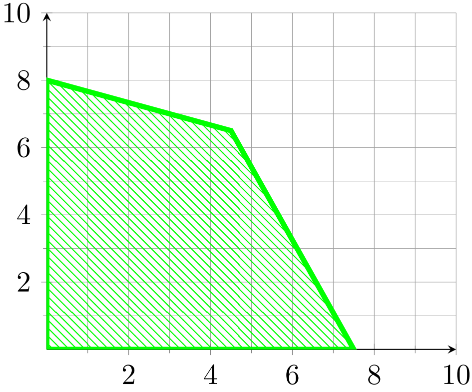
Tối ưu nguyên hoàn toàn (Pure integer linear program)

$$(H) \quad z_h = c^T x \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \end{cases} \qquad (1)$$

- Trong đó $c^T = (c_1 \; c_2 \; \dots \; c_n)$, A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in Z^n$.
- Bài toán (H) gọi là bài toán **Tối ưu nguyên hoàn toàn.**
- Tập $S_h := \{x \in Z_+^n : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn.

Minh hoạ bài toán

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 2x_2 \quad \longrightarrow Max \\
&\begin{cases}
x_1 + 3x_2 \le 24 \\
\dfrac{13}{3}x_1 + 2x_2 \le 32.5 \\
x_1, x_2 \ge 0.
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2}
$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn

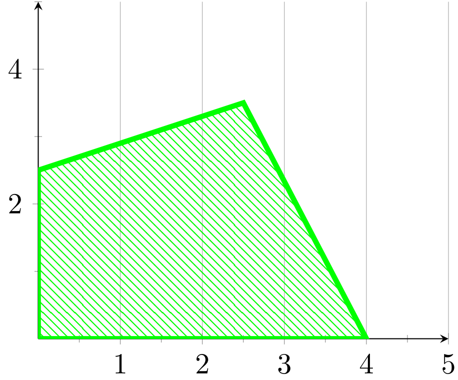
Tối ưu nguyên bộ phận (Mixed integer linear program)

$$(B) \quad z_b = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \\ y \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

- Trong đó $c^T = (c_1\ c_2\ \ldots\ c_n)$, $h^T = (h_1\ h_2\ \ldots\ h_p)$, A là ma trận $m \times n$, G là ma trận $m \times p$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in Z^n$ và $y \in R^p$.
- Bài toán (B) gọi là bài toán **Tối ưu nguyên bộ phận.**
- Tập $S_b := \{(x, y) \in Z_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận.

Minh hoạ bài toán

$$
\begin{aligned}
& x_1 + 2x_2 \quad \longrightarrow Max \\
& \begin{cases}
5x_1 + \dfrac{15}{7}x_2 \leq 20 \\
-2.4x_1 + \dfrac{30}{7}x_2 \leq 15 \\
x_1, x_2 \geq 0.
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4}
$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận

Mục tiêu phương pháp

Bài toán quan tâm

$$(P) \quad z_p = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

- Trong đó (P) là bài toán (B) với nghiệm thuộc tập số thực.
- Bài toán (P) là một bài toán **Tối ưu tuyến tính thông thường** hay gọi đơn giản là bài toán Tối ưu tuyến tính (Natural linear programming relaxation).
- Tập $S_p := \{(x, y) \in R_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu tuyến tính.

Mục tiêu

Giả sử ta nhận được tập phương án tối ưu của bài toán (3) sau hữu hạn lần giải, ký hiệu (x_b, y_b) và giá trị tối ưu là z_b thì ta có nhận xét sau:

Nhận xét 2.1

- *Nếu $S_b \subset S_p$ thì ta luôn nhận được $z_b < z_p$ và phương án có thể cải thiện.*
- *Nếu $S_b = S_p$ thì ta nhận được $z_b = z_p$ và bài toán được giải.*

Vì thế, ta chọn xử lý bài toán (B) thông qua bài toán (P) bằng cách cải thiện phương án thu được từ bài toán (P) sao cho thoả điều kiện của bài toán (B).

Ví dụ

$$(P) \quad 5.5x_1 + 2.1x_2 \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -1x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \text{nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1.3 \\ x_2 = 3.3 \\ z = 14.08 \end{cases}$$

Phương án có thể cải thiện.

Ví dụ

$$(P) \quad 3x_1 + 4x_2 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} 2.5x_1 + \dfrac{15}{4}x_2 \leq 20 \\ x_1 + \dfrac{5}{3}x_2 \leq \dfrac{50}{3} \\ x_1 \geq 0, \text{nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \\ z = 43 \end{cases}$$

Bài toán được giải.

Thuật toán nhánh cận (Branch-and-Bound)

Khái niệm và ký hiệu

Ở mục này, chúng ta sẽ làm rõ những ý tưởng sau:

- Định nghĩa cận và xác định cận của bài toán.
- Phương pháp xử lý bài toán kèm ví dụ minh hoạ và thuật toán.

Xác định cận

Ta gọi x_j với $1 \leq j \leq n$ là nghiệm thu được từ bài toán (P).

Định lý 3.1

- *Với mỗi* $x_j \in \mathbb{R}$, *tồn tại duy nhất số nguyên* $k \in \mathbb{Z}$ *sao cho* $k \leq x_j < k+1$.
    - *Giá trị* k *khi đó ta gọi là phần nguyên nhỏ nhất của* x_j, *ký hiệu là* $\lfloor x_j \rfloor$.
    - *Giá trị* $k+1$ *gọi là phần nguyên lớn nhất của* x_j, *ký hiệu là* $\lceil x_j \rceil$.

Chứng minh.

- $\forall x_j \geq 0$, ta có:
  - $x_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor x_j \rfloor = x_j$. (đpcm)
  - $x_j \notin \mathbb{Z}$, ta đặt $S = \{m \in \mathbb{N} \mid m > x_j\}$
    Theo tiên đề Peano, luôn tồn tại một min$S$, vì thế ta dễ dàng nhận thấy min$S - 1 = k = \lfloor x_j \rfloor$ với $k \in \mathbb{Z}$ và thoả $k \leq x_j < k + 1$ hay $\lfloor x_j \rfloor \leq x_j < \lceil x_j \rceil$.

□

Ví dụ 3.1

Ta có $x_1 = 3.3$, vậy khi đó phần nguyên nhỏ nhất của x_1 là $\lfloor x_1 \rfloor = 3$ và phần nguyên lớn nhất là $\lceil x_1 \rceil = 4$.

Phương pháp

- Từ (2.1) và (3.1), ta thấy rằng nếu $\exists x_j \notin \mathbb{Z}$, ký hiệu x_j^0, thì ta có thể tiếp tục cải thiện phương án cho đến khi $\forall x_j \in \mathbb{Z}$.
- Nếu nghiệm thu được là x_j^0 ta thiết lập được 2 bài toán con từ bài toán (P) ban đầu, ký hiệu (P_1) và (P_2).

$$(P_1) \quad z_1 = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j^0 \leq \lfloor x_j^0 \rfloor, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

- Tập $S_1 := S_p \cap \{(x, y) : x_j^0 \leq \lfloor x_j^0 \rfloor\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con (P_1).

$$(P_2) \quad z_2 = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j^0 \geq \lceil x_j^0 \rceil, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

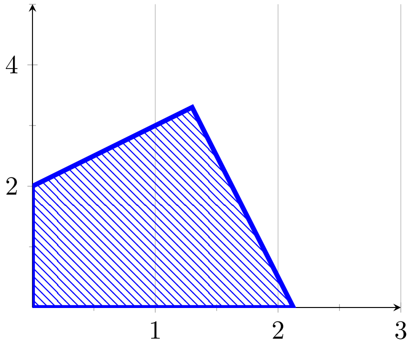
- Tập $S_2 := S_p \cap \{(x, y) : x_j^0 \geq \lceil x_j^0 \rceil\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con (P_2).

Ví dụ minh hoạ

$$(P) \quad z_p = 5.5x_1 + 2.1x_2 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \text{nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình thông thường ta được nghiệm $x_1^0 = 1.3$, $x_2^0 = 3.3$ và $z_p = 14.08$.



Hình: Tập nghiệm của bài toán

Chọn $x_1^0 = 1.3$ để cải thiện phương án, ta thu được 2 bài toán con sau:

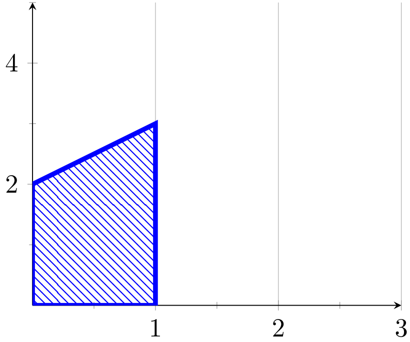
$$(P_1) \quad z_1 = 5.5x_1 + 2.1x_2 \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \text{nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_2) \quad z_2 = 5.5x_1 + 2.1x_2 \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, \text{nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_1) \quad z_1 = 5.5x_1 + 2.1x_2 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \text{nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Giải bài toán ta được $x_1^1 = 1, x_2^1 = 3$ và $z_1 = 11.8$. **Bài toán được giải.**



Hình: Tập nghiệm của bài toán (P_1)

Tương tự bài toán (P_2) ta được $x_1^1 = 2, x_2^1 = 0.5$ và $z_2 = 12.05$.
Ta chọn $x_2^1 = 0.5$ để cải thiện phương án. Ta được 2 bài toán con (P_3) và (P_4):

$$(P_3) \quad z_3 = 5.5x_1 + 2.1x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, \text{nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_4) \quad z_4 = 5.5x_1 + 2.1x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, \text{nguyên} \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- Giải bài toán (P_3) ta được $x_1^2 = 2.125, x_2^2 = 0$ và $z_3 = 11.6875 \Rightarrow$ không khả thi do $z_3 < z_1$.
- Bài toán (P_4) vô nghiệm.
- Vậy phương án tối ưu của bài toán là $x_1 = 1, x_2 = 3$ và $z = 11.8$.