Phương pháp nhánh cận

Nguyễn Chí Bằng

Ngày 1 tháng 3 năm 2024

TÓM TẮT

- Giới thiệu 2 mô hình chính trong phương pháp giải bài toán tối ưu tuyến tính nguyên:
    - Tối ưu nguyên hoàn toàn
    - Tối ưu nguyên bộ phận.
- Tập trung vào phương pháp giải bài toán tối ưu nguyên bộ phận thông qua thuật toán nhánh cận.
    - Cơ sở lý thuyết.
    - Sơ đồ thuật toán.
- Độ phức tạp của thuật toán.

NỘI DUNG

Giới thiệu bài toán

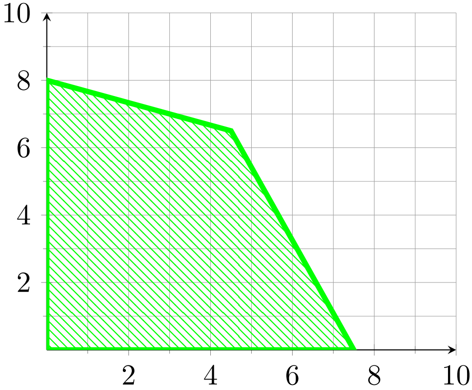
Tối ưu nguyên hoàn toàn (Pure integer linear program)

$$(H) \quad z_h = c^T x \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \end{cases} \qquad (1)$$

- Trong đó $c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$, A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in Z^n$.
- Bài toán (H) gọi là bài toán **Tối ưu nguyên hoàn toàn.**
- Tập $S_h := \{x \in Z^n_+ : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn.

Minh hoạ bài toán

$$2x_1 + 2x_2 \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ \dfrac{13}{3}x_1 + 2x_2 \leq 32.5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên hoàn toàn

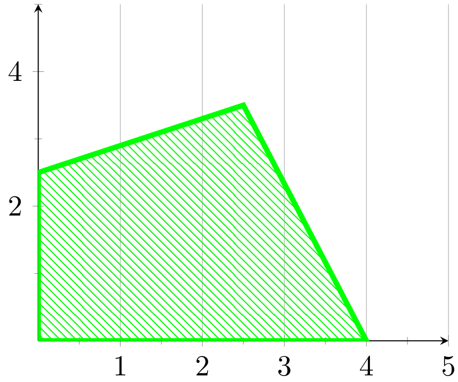
Tối ưu nguyên bộ phận (Mixed integer linear program)

$$(B) \quad z_b = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \\ y \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

- Trong đó $c^T = (c_1\ c_2\ \dots\ c_n)$, $h^T = (h_1\ h_2\ \dots\ h_p)$, A là ma trận $m \times n$, G là ma trận $m \times p$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in Z^n$ và $y \in R^p$.
- Bài toán (B) gọi là bài toán **Tối ưu nguyên bộ phận.**
- Tập $S_b := \{(x, y) \in Z_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận.

Minh hoạ bài toán

$$x_1 + 2x_2 \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + \dfrac{15}{7}x_2 \leq 20 \\ -2.4x_1 + \dfrac{30}{7}x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán Tối ưu nguyên bộ phận

Mục tiêu phương pháp

Bài toán quan tâm

$$(P) \quad z_p = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

- Trong đó (P) là bài toán (B) với nghiệm thuộc tập số thực.
- Bài toán (P) là một bài toán **Tối ưu tuyến tính thông thường** hay gọi đơn giản là bài toán Tối ưu tuyến tính (Natural linear programming relaxation).
- Tập $S_p := \{(x, y) \in R_+^n \times R_+^p : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu tuyến tính.

Mục tiêu

Giả sử ta nhận được tập phương án tối ưu của bài toán (3) sau hữu hạn lần giải, ký hiệu (x_b, y_b) và giá trị tối ưu là z_b thì ta có nhận xét sau:

Nhận xét 2.1

- *Nếu $S_b \subset S_p$ thì ta luôn nhận được $z_b \leq z_p$ và phương án có thể cải thiện.*
- *Nếu $S_b = S_p$ thì ta nhận được $z_b = z_p$ và bài toán được giải.*

Vì thế, ta chọn xử lý bài toán (B) thông qua bài toán (P) bằng cách cải thiện phương án thu được từ bài toán (P) sao cho thoả điều kiện của bài toán (B).

Ví dụ

$$(P) \quad 5.5x_1 + 2.1x_2 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -1x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1.3 \\ x_2 = 3.3 \\ z = 14.08 \end{cases}$$

Phương án có thể cải thiện.

Ví dụ

$$(P) \quad 3x_1 + 4x_2 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} 2.5x_1 + \dfrac{15}{4}x_2 \leq 20 \\ x_1 + \dfrac{5}{3}x_2 \leq \dfrac{50}{3} \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \\ z = 43 \end{cases}$$

Bài toán được giải.

Thuật toán nhánh cận (Branch-and-Bound)

Nội dung chính

Ở mục này, chúng ta sẽ làm rõ những ý tưởng sau:

- Định nghĩa cận và xác định cận của bài toán.
- Phương pháp xử lý bài toán nhỏ kèm ví dụ minh hoạ.
- Sơ đồ thuật giải và các ví dụ minh hoạ cho bài toán lớn.

Phương pháp xác định cận

Ta gọi x_j với $1 \leq j \leq n$ là nghiệm thu được từ bài toán (P).

Định lý 3.1

- *Với mỗi* $x_j \in \mathbb{R}$, *tồn tại duy nhất số nguyên* $k \in \mathbb{Z}$ *sao cho* $k \leq x_j < k + 1$.
  - *Giá trị* k *khi đó ta gọi là phần nguyên nhỏ nhất của* x_j, *ký hiệu là* $\lfloor x_j \rfloor$.
  - *Giá trị* $k + 1$ *gọi là phần nguyên lớn nhất của* x_j, *ký hiệu là* $\lceil x_j \rceil$.

Chứng minh.

- $\forall x_j \geq 0$, ta có:
  - $x_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor x_j \rfloor = x_j$. (đpcm)
  - $x_j \notin \mathbb{Z}$, ta đặt $S = \{m \in \mathbb{N} \mid m > x_j\}$
    Theo tiên đề Peano, luôn tồn tại một min$S$, vì thế ta dễ dàng nhận thấy min$S - 1 = k = \lfloor x_j \rfloor$ với $k \in \mathbb{Z}$ và thoả $k \leq x_j < k+1$ hay $\lfloor x_j \rfloor \leq x_j < \lceil x_j \rceil$.

□

Ví dụ 3.1

Ta có $x_1 = 3.3$, vậy khi đó phần nguyên nhỏ nhất của x_1 là $\lfloor x_1 \rfloor = 3$ và phần nguyên lớn nhất là $\lceil x_1 \rceil = 4$.

Phương pháp xử lý bài toán

- Từ (2.1) và (3.1), ta thấy rằng nếu $\exists x_j \notin \mathbb{Z}$, thì ta có thể tiếp tục cải thiện phương án cho đến khi $\forall x_j \in \mathbb{Z}$.
- Nếu nghiệm thu được là $x_j \notin \mathbb{Z}$ ta thiết lập được 2 bài toán con từ bài toán (P) ban đầu, ký hiệu (P_1) và (P_2).

$$(P_1) \quad z_1 = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b \\ x_j \leq \lfloor x_j \rfloor, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

- Tập $S_1 := S_p \cap \{(x, y) : x_j \leq \lfloor x_j \rfloor\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con (P_1).

$$(P_2) \quad z_2 = c^T x + h^T y \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \le b \\ x_j \ge \lceil x_j \rceil, \\ x, y \ge 0. \end{cases} \tag{7}$$

- Tập $S_2 := S_p \cap \{(x, y) : x_j \ge \lceil x_j \rceil\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con (P_2).

Điều kiện nghiệm

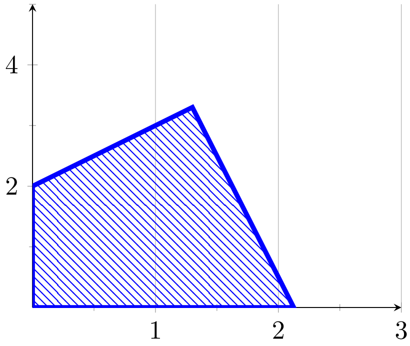
- Nếu tồn tại (P_i) với $i = 1, 2$ không giải được $(S_i = \emptyset)$, ta gọi bài toán **vô nghiệm**.
- Giả sử x^i là nghiệm tối ưu của bài toán (P_i) và giá trị tối ưu là z_i với $i = 1, 2$.
    - Nếu $\forall x^i \in Z^n_+$, ta nói S_i là tập nghiệm thoả mãn bài toán tối ưu nguyên bộ phận, z_i^* là giá trị tối ưu và bài toán con (P_i) được giải **(gọt bởi nghiệm nguyên)**.
    - Nếu $\exists x^i \notin Z^n_+$ đồng thời $z_i \leq z_i^*$, ta dừng phân nhánh và bỏ qua bài toán **(gọt bởi cận)**.
    - Nếu $\exists x^i \notin Z^n_+$ đồng thời $z_i > z_i^*$, bài toán chưa tối ưu và có thể tiếp tục cải thiện.

Ví dụ minh hoạ

$$(P) \quad z_p = 5.5x_1 + 2.1x_2 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình thông thường ta được nghiệm $x_1 = 1.3$, $x_2 = 3.3$ và $z_p = 14.08$.



Hình: Tập nghiệm của bài toán

Chọn $x_1 = 1.3$ để cải thiện phương án, ta thu được 2 bài toán con sau:

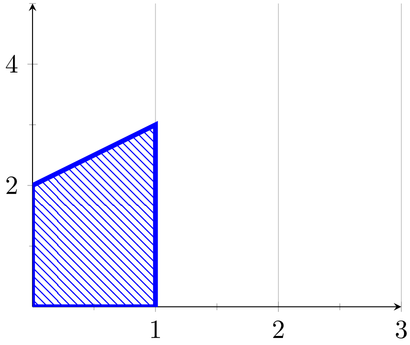
$$(P_1) \quad z_1 = 5.5x_1^1 + 2.1x_2^1 \qquad \begin{cases} -x_1^1 + x_2^1 \le 2 \\ 8x_1^1 + 2x_2^1 \le 17 \\ x_1^1 \le 1 \\ x_1^1 \ge 0 \\ x_2^1 \ge 0. \end{cases}$$

$$(P_2) \quad z_2 = 5.5x_1^2 + 2.1x_2^2 \qquad \begin{cases} -x_1^2 + x_2^2 \le 2 \\ 8x_1^2 + 2x_2^2 \le 17 \\ x_1^2 \ge 2 \\ x_1^2 \ge 0 \\ x_2^2 \ge 0. \end{cases}$$

$$(P_1) \quad z_1 = 5.5x_1^1 + 2.1x_2^1 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1^1 + x_2^1 \leq 2 \\ 8x_1^1 + 2x_2^1 \leq 17 \\ \color{blue}{x_1^1 \leq 1} \\ x_1^1 \geq 0 \\ x_2^1 \geq 0. \end{cases}$$

Giải bài toán ta được $x_1^1 = 1, x_2^1 = 3$ và $z_1 = 11.8$. Bài toán được giải **(gọt bởi nghiệm nguyên)**.



Hình: Tập nghiệm của bài toán (P_1)

Tương tự bài toán (P_2) ta được $x_1^2 = 2, x_2^2 = 0.5$ và $z_2 = 12.05$. Ta chọn $x_2^2 = 0.5$ để cải thiện phương án. Ta được 2 bài toán con (P_3) và (P_4):

$$(P_3) \quad z_3 = 5.5x_1^3 + 2.1x_2^3$$

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 \leq 2 \\ 8x_1^3 + 2x_2^3 \leq 17 \\ x_1^3 \geq 2 \\ x_2^3 \leq 0 \\ x_1^3 \geq 0 \\ x_2^3 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_4) \quad z_4 = 5.5x_1^4 + 2.1x_2^4$$

$$\begin{cases} -x_1^4 + x_2^4 \leq 2 \\ 8x_1^4 + 2x_2^4 \leq 17 \\ x_1^4 \geq 2 \\ x_2^4 \geq 1 \\ x_1^4 \geq 0 \\ x_2^4 \geq 0. \end{cases}$$

- Giải bài toán (P_3) ta được $x_1^3 = 2.125, x_2^3 = 0$ và $z_3 = 11.6875 \Rightarrow$ không khả thi do $z_3 < z_1$ **(gọt bởi cận)**.
- Bài toán (P_4) **vô nghiệm**.
- Vậy phương án tối ưu của bài toán là $x_1^1 = 1, x_2^1 = 3$ và $z = 11.8$.

Sơ đồ thuật toán

- Ta gọi bài toán (P) có nút ban đầu là N_0, tương ứng mỗi bài toán tối ưu tuyến tính thông thường (P_i) ứng với mỗi nút N_i trên sơ đồ nhánh và $\mathcal{L}$ là danh sách chứa các nút được lập thông qua lý thuyết xác định cận và lý thuyết nghiệm.
- Ta đánh dấu giá trị tối ưu tốt nhất và nghiệm tối ưu tốt nhất của bài toán lần lượt là z^* và (x^*, y^*).

Sơ đồ thuật toán

Bước 1. Thiết lập

Đặt $\mathcal{L} := \{N_0\}$, $z^* = z_p$ và $(x^*, y^*) = (x, y)$.

Bước 2. Kiểm tra

Nếu $\mathcal{L} = \emptyset$ thì nghiệm tối ưu của bài toán là (x^*, y^*), giá trị tối ưu là z^* và bài toán được giải.

Nếu $\mathcal{L} \neq \emptyset$, chuyển sang bước 3.

Bước 3. Chọn nút

Chọn nút N_i từ danh sách $\mathcal{L}$ và xoá khỏi $\mathcal{L}$ sau đó chuyển sang bước 4.

Bước 4. Xác định cận

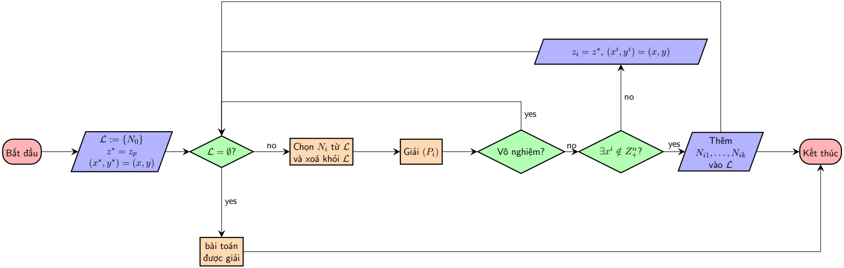
Giải bài toán (P_i), nếu bài toán vô nghiệm hoặc $z_i \leq z^*$, quay lại bước 2, nếu không, chuyển sang bước 5.

Bước 5. Gọt nghiệm

Nếu tồn tại $x^i \notin Z_+^n$, ta thêm nút $N_{i+1}, \ldots, N_k$ vào $\mathcal{L}$ và quay về bước 2.

Nếu không tồn tại $x^i \notin Z_+^n$, tức $\forall x^i \in Z_+^n$, ta đặt $z_i = z^*$, $(x^i, y^i) = (x^*, y^*)$ và quay lại bước 2.

Sơ đồ thuật toán



Hình: Lưu đồ giải thuật của thuật toán nhánh cận.

Ví dụ minh hoạ

$$(P) \quad z_p = 5.5x_1 + 2.1x_2 + 3x_3 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 17 \\ 9x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 20 \\ x_i \geq 0, \ i = \overline{1, \ldots, 3} \end{cases}$$

Giải bài toán (P) ta được $x_1 = 1.38, x_2 = 2.55, x_3 = 0.83$.
Ta chọn biến x_1 để phân nhánh. (x_2, x_3 tương tự)

Với $x_1^1 \leq 1$

$$(P_1) \quad z_p = 5.5x_1^1 + 2.1x_2^1 + 3x_3^1 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 \leq 2 \\ 8x_1^1 + 2x_2^1 + x_3^1 \leq 17 \\ 9x_1^1 + x_2^1 + 6x_3^1 \leq 20 \\ x_1^1 \leq 1 \\ x_i^1 \geq 0,\ i = \overline{1,\ldots,3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_1 = 13.24, x_1^1 = 1, x_2^1 = 1.4, x_3^1 = 1.6$

Với $x_1^2 \geq 2$

$$(P_2) \quad z_p = 5.5x_1^2 + 2.1x_2^2 + 3x_3^2 \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2 \\ 8x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \leq 17 \\ 9x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 \leq 20 \\ x_1^2 \geq 2 \\ x_i^2 \geq 0, \; i = \overline{1, \ldots, 3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_2 = 12.58, x_1^2 = 2, x_2^2 = 0.36, x_3^2 = 0.27$

Ta tiếp tục chọn $x_2^1 = 1.4$ từ (P_1). Với $x_2^3 \leq 1$

$$(P_3) \quad z_p = 5.5x_1^3 + 2.1x_2^3 + 3x_3^3 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \leq 2 \\ 8x_1^3 + 2x_2^3 + x_3^3 \leq 17 \\ 9x_1^3 + x_2^3 + 6x_3^3 \leq 20 \\ x_1^3 \leq 1 \\ x_2^3 \leq 1 \\ x_i^3 \geq 0, \ i = \overline{1,\ldots,3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_3 = 12.6, x_1^3 = 1, x_2^3 = 1, x_3^3 = 1.66$

Với $x_2^4 \geq 2$

$$(P_4) \quad z_p = 5.5x_1^4 + 2.1x_2^4 + 3x_3^4 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \leq 2 \\ 8x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4 \leq 17 \\ 9x_1^4 + x_2^4 + 6x_3^4 \leq 20 \\ x_1^4 \leq 1 \\ x_2^4 \geq 2 \\ x_i^4 \geq 0, \ i = \overline{1, \ldots, 3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_4 = 12.7, x_1^4 = 1, x_2^4 = 2, x_3^4 = 1 \rightarrow$ **gọt bởi nghiệm nguyên**.

Ta chọn $x_3^3 = 1.66$ từ (P_3). Với $x_3^5 \leq 1$.

$$(P_5) \quad z_p = 5.5x_1^5 + 2.1x_2^5 + 3x_3^5 \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} -x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 \leq 2 \\ 8x_1^5 + 2x_2^5 + x_3^5 \leq 17 \\ 9x_1^5 + x_2^5 + 6x_3^5 \leq 20 \\ x_1^5 \leq 1 \\ x_2^5 \leq 1 \\ x_3^5 \leq 1 \\ x_i^5 \geq 0,\ i = \overline{1, \ldots, 3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_5 = 10.6, x_1^5 = 1, x_2^5 = 1, x_3^5 = 1 \rightarrow$ gọt bởi nghiệm nguyên nhưng $z_5 < z_4 \rightarrow$ loại.

Với $x_3^6 \geq 2$.

$$(P_6) \quad z_p = 5.5x_1^6 + 2.1x_2^6 + 3x_3^6 \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} -x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 \leq 2 \\ 8x_1^6 + 2x_2^6 + x_3^6 \leq 17 \\ 9x_1^6 + x_2^6 + 6x_3^6 \leq 20 \\ x_1^6 \leq 1 \\ x_2^6 \leq 1 \\ x_3^6 \geq 2 \\ x_i^6 \geq 0,\ i = \overline{1, \ldots, 3} \end{cases}$$

$\rightarrow z_6 = 12.08, x_1^6 = 0.8, x_2^6 = 0.8, x_3^6 = 2 \rightarrow$ **gọt bởi cận**.

Ta chọn $x_2^2 = 0.36$ từ (P_2)

- (P_7) cho $z_7 = 12.1, x_1^7 = 2.1, x_2^7 = 0, x_3^7 = 0.17$, do $z_7 < z_4 \rightarrow$ loại.
- (P_8) cho kết quả **vô nghiệm**.

Vậy nghiệm tối ưu của bài toán là $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$ và giá trị tối ưu $z = 12.7$.