Tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên

Nguyễn Chí Bằng

Ngày 15 tháng 3 năm 2024

TÓM TẮT

- Giới thiệu về bài toán tối ưu phân tuyến tính:
  - Cơ sở lý thuyết.
  - Thuật toán Dinkelbach.
- Phương pháp giải bài toán tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên bằng thuật toán nhánh cận (LandDoig).

NỘI DUNG

Giới thiệu bài toán

Tối ưu phân tuyến tính (Linear-Fractional Programming)

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

- Bài toán (F) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính.**
- Trong đó A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in \mathbb{R}^n_+$. Tập $S_F := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính.
- $P(x) = p^T x + p_0$, với $p^T = (p_1 \, p_2 \, \ldots \, p_n)$ và $D(x) = d^T x + d_0$, với $d^T = (d_1 \, d_2 \, \ldots \, d_n)$ $(D(x) > 0, \forall x \in S_F)$.

Bài toán minh hoạ

$$Q(x) = \frac{4x_1 + 2x_2 - 6}{3x_1 + 2x_2 - 5} \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Mối quan hệ với bài toán tối ưu tuyến tính

- Nếu $d^T = 0$ và $d_0 = 1$, bài toán (F) trở thành bài toán tối ưu tuyến tính (P) và ta gọi (F) là bài toán mở rộng của (P):

$$(P) \quad P(x) = p^T x + p_0 \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

- Nếu $d^T = 0$ và $d_0 \neq 0$, ta thu được bài toán tuyến tính (Q):

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{p^T}{d_0} x + \frac{p_0}{d_0} = \frac{P(x)}{d_0} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

- Ngược lại nếu $p^T = 0$ và $p_0 \neq 0$:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{p_0}{d^T x + d_0} = \frac{p_0}{D(x)} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Tương tự bài toán:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{d^T x + d_0}{p_0} = \frac{D(x)}{p_0} \quad \longrightarrow Min$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

- Nếu p^T và d^T phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại $\mu \neq 0$ và $p^T = \mu d^T$, ta thu được hàm:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{\mu d^T x + p_0}{d^T x + d_0} = \mu + \frac{p_0 - \mu d_0}{d^T x + d_0} \qquad (7)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

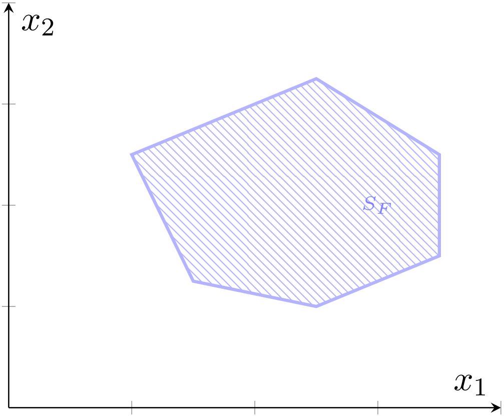
Ta thay bằng hàm $D(x)$ với điều kiện:

- Nếu $p_0 - \mu d_0 > 0$, $D(x) \longrightarrow Min$.
- Nếu $p_0 - \mu d_0 < 0$, $D(x) \longrightarrow Max$.
- Nếu $p_0 - \mu d_0 = 0$ thì $Q(x) = \mu =$ hằng số $(\forall x \in S_F)$, ta bỏ qua bài toán.

Phương pháp hình học

Bài toán trên không gian $\mathbb{R}^2$

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_0} \quad \longrightarrow Max \tag{8}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \text{ trong đó } A = m \times 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$



Hình: Tập nghiệm minh hoạ của bài toán (F)

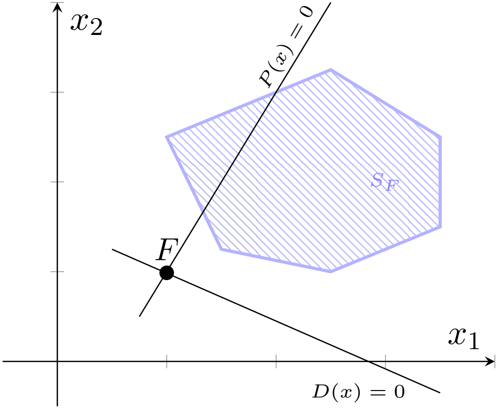
Tính chất

Đặt $Q(x) = K$ ($K \in \mathbb{R}$), ta được:

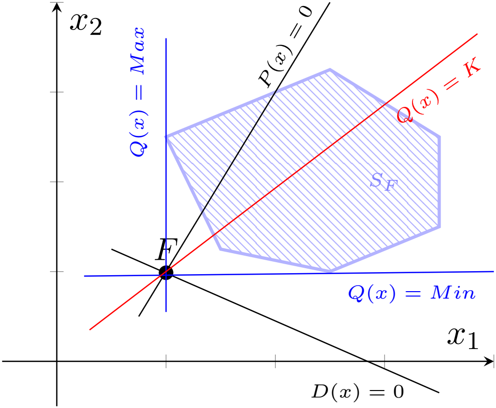
$$(p_1 - Kd_1)x_1 + (p_2 - Kd_2)x_2 + (p_0 - Kd_0) = 0 \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + p_0 & = & 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_0 & = & 0 \end{cases} \tag{10}$$

- $Q(x) = K$ là đường mức quét qua tập S_F, đến khi gặp *cực điểm* thì ở đó ta nhận được giá trị K là giá trị tối ưu của bài toán (F).
- Ta xác định được điểm cố định F là nghiệm của phương trình (9), nói cách khác, điểm cố định F là điểm giao của 2 đường thẳng $P(x) = 0$ và $D(x) = 0$.
- Trường hợp $P(x) = 0$ song song với $D(x) = 0$, hay nói cách khác hệ (9) vô nghiệm thì điểm cố định F không tồn tại.



Hình: Minh hoạ điểm cố định F



Hình: Minh hoạ đường mức $Q(x) = K$

Xét tính biến thiên

Từ phương trình (9), ta có:

$$x_2 = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}x_1 - \frac{p_0 - Kd_0}{p_2 - Kd_2}. \tag{11}$$

Đạo hàm 2 vế ta được:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\left[-\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}x_1\right] - \frac{d}{dx_1}\left[\frac{p_0 - Kd_0}{p_2 - Kd_2}\right]$$

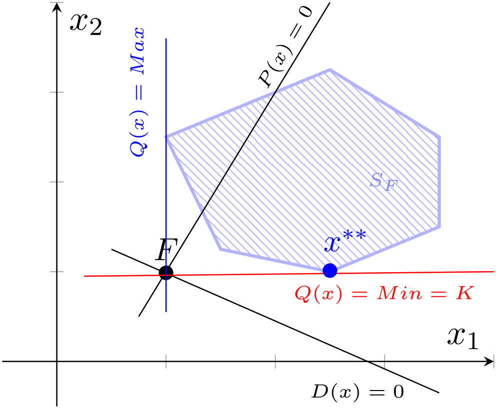
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}$$

$$k = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2} \text{ (Đặt } k = \frac{dx_2}{dx_1}\text{)}$$

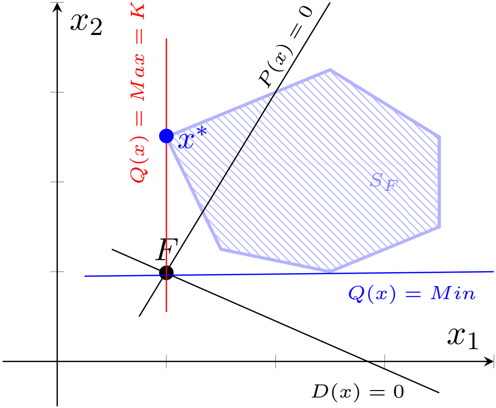
- Ta thấy hệ số góc k phụ thuộc vào tham số K, Khảo sát sự biến thiên của k theo K, ta có:

$$\frac{dk}{dK} = \frac{d_1p_2 - d_2p_1}{(p_2 - Kd_2)^2} \quad (12)$$

- Giá trị của $Q(x)$ tăng hay giảm phụ thuộc vào $(d_1p_2 - d_2p_1)$, do đó k biến thiên theo 1 chiều nhất định. Từ đây, ta có thể tìm được nghiệm tối ưu của bài toán (F).
- Quay đường mức $Q(x) = K$ quanh điểm F đến khi trùng với cực điểm x^* ta nhận được giá trị cực đại của hàm $Q(x)$, x^{**} ta nhận được giá trị cực tiểu của hàm $Q(x)$.



Hình: $Q(x)$ đạt giá trị tối ưu lại điểm x^{**}

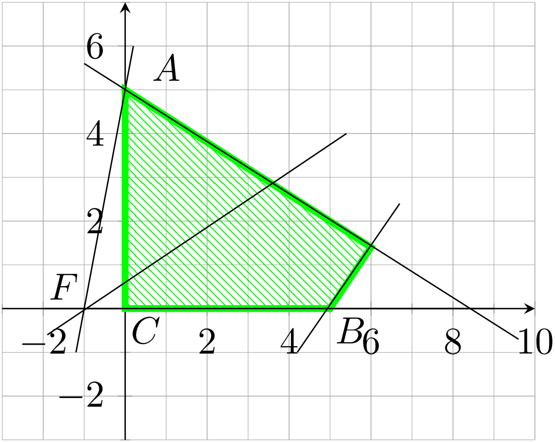


Hình: $Q(x)$ đạt giá trị tối ưu lại điểm x^*

Ví dụ minh hoạ

$$(F) \quad Q(x) = \frac{6x_1 + 3x_2 + 6}{5x_1 + 2x_2 + 5} \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{13}$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán

Ta có hệ:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = -6, \\ 5x_1 + 2x_2 = -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ điểm cố định $F = (-1, 0)$ Ta có các cực điểm

$$A = (0, 5), B = (5, 0), C = (0, 0)$$

với giá trị

$$Q(A) = \frac{21}{15}, Q(B) - \frac{18}{15}, Q(C) = \frac{18}{15}$$

Hàm $Q(x)$ đạt cực đại tại $A = (0, 5)$.

Thuật toán Dinkelbach

Tính chất

- Quay lại bài toán:

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{14}$$

- Ta đặt hàm:

$$F(\lambda) = \max_{x \in S_F}\{P(x) - \lambda D(x)\}, \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{15}$$

Định lý 3.1

Vector x^* là nghiệm tối ưu của bài toán (F) nếu và chỉ nếu

$$F(\lambda^*) = \max_{x \in S_F}\{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0 \tag{16}$$

Với

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \tag{17}$$

Chứng minh.

Nếu vector x^* là nghiệm tối ưu của bài toán (F), ta có:

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \geq \frac{P(x)}{D(x)}, \ \forall x \in S_F$$

Tương tự,

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq 0, \forall x \in S_F \tag{18}$$

Từ bất phương trình (18), ta được:

$$\Rightarrow \max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0$$

Nếu vector x^* là nghiệm tối ưu thì:

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq P(x^*) - \lambda^* D(x^*) = 0, \ \forall x \in S_F$$

Với $D(x) > 0, \forall x \in S_F$, ta có:

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} = -D(x) < 0 \tag{19}$$

Đồng nghĩa $F(\lambda)$ giảm theo λ, từ đó ta thiết lập được thuật toán Dinkelbach.

Thuật toán Dinkelbach

Bước 1. Thiết lập

Đặt $x^{(0)} \in S_F$, tính $\lambda^{(1)} := \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})}$, $k := 1$.

Bước 2. Tìm nghiệm

Tìm $x^{(k)}$ là nghiệm của bài toán $\max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda^{(k)} D(x)\}$

Bước 3. Kiểm tra

Nếu $F(\lambda^{(k)}) = 0$ thì $x^* = x^{(k)}$ là nghiệm tối ưu và bài toán được giải, nếu không chuyển sang bước 4.

Bước 4. Cải thiện

Đặt $\lambda^{(k+1)} := \frac{P(x^{(k)})}{D(x^{(k)})}$, $k := k + 1$ và quay lại bước 2.

Ví dụ minh hoạ

$$(F) \quad Q(x) = \frac{x_1 + x_2 + 5}{3x_1 + 2x_2 + 15} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{20}$$

Với $x = (0,0)^T$ ta có $x^{(0)} \in S_F$, cho $x^{(0)} = (0,0)^T$ ta có

$$\lambda^{(1)} = \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})} = \frac{1}{3}$$

Ta giải bài toán

$$P(x) - \lambda^{(1)} D(x) = P(x) - \frac{1}{3} D(x) = \frac{1}{3} x_2 \to \max$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = (0,3)^T, F(\lambda^{(1)}) = 1$$

vì $F(\lambda^{(1)}) \neq 0$

$$\lambda^{(2)} = \frac{P(x^{(1)})}{D(x^{(1)})} = \frac{8}{21}$$

$$P(x) - \lambda^{(2)} D(x) = -\frac{1}{7} x_1 + \frac{5}{21} x_2 - \frac{5}{7} \to \max$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = (0,3)^T, F(\lambda^{(2)}) = 0$$

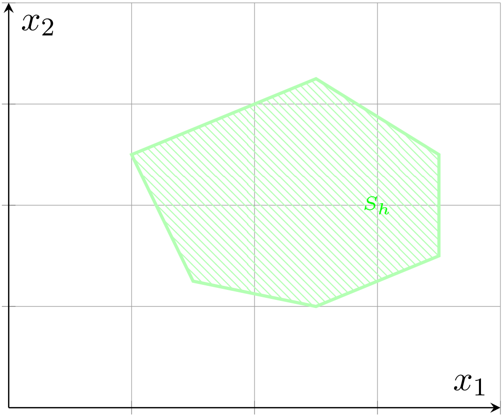
Vậy nghiệm tối ưu của bài toán (F) là $x^* = (0,3)^T$ và giá trị tối ưu $Q(x^*) = \frac{8}{21}$.

Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

Tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn

$$(H) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \quad \longrightarrow Max \tag{21}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0, \text{nguyên} \end{cases}$$

- Bài toán (H) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn.**
- Trong đó A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in \mathbb{Z}_+^n$. Tập $S_h := \{x \in \mathbb{Z}_+^n : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn.
- $P(x) = p^T x + p_0$, với $p^T = (p_1\, p_2\, \ldots\, p_n)$ và $D(x) = d^T x + d_0$, với $d^T = (d_1\, d_2\, \ldots\, d_n)$ $(D(x) > 0, \forall x \in S_h)$.



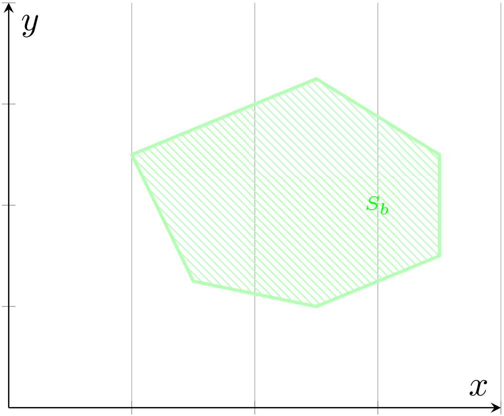
Hình: Tập nghiệm minh hoạ của bài toán (H)

Tối ưu phân tuyến tính nguyên bộ phận

$$(B) \quad Q(x,y) = \frac{P(x,y)}{D(x,y)} \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x \geq 0, \text{nguyên} \\ y \geq 0. \end{cases} \tag{22}$$

- Bài toán (B) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính nguyên bộ phận.**
- Trong đó A là ma trận $m \times n$, G là ma trận $m \times t$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in \mathbb{Z}_+^n$ và $y \in \mathbb{R}_+^t$. Tập $S_b := \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{R}_+^t : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính nguyên bộ phận.
- $P(x, y) = p_1^T x + p_2^T y + p_0$, với $p_1^T = (p_1\ p_2\ \ldots\ p_n)$ và $p_2^T = (p_1\ p_2\ \ldots\ p_t)$.
- $D(x, y) = d_1^T x + d_2^T y + d_0$, với $d_1^T = (d_1\ d_2\ \ldots\ d_n)$ và $d_2^T = (d_1\ d_2\ \ldots\ d_t)$ $(D(x, y) > 0, \forall x \in S_b)$.



Hình: Tập nghiệm minh hoạ của bài toán (B)

Mục tiêu phương pháp

Bài toán quan tâm

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \quad \longrightarrow Max \\ \begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{23}$$

- Trong đó (F) là bài toán (H) với nghiệm thuộc tập số thực, ta nói (F) là bài toán mở rộng của (H).
- Bài toán (F) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính thông thường** hay gọi đơn giản là bài toán Tối ưu phân tuyến tính (LFP relaxation).
- Tập $S_F := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính.

Phương pháp xử lý bài toán

Giải bài toán (F) ta được nghiệm tối ưu ban đầu, ký hiệu vector $x_j \;\; (j = 1, \ldots, n)$.

- Nếu $x_j \in \mathbb{Z}_+^n \;\; (j = 1, \ldots, n)$, thì bài toán (H) được giải.
- Nếu $\exists x_j \notin \mathbb{Z}_+^n \;\; (j = 1, \ldots, n)$, ta thêm vào các ràng buộc

$$x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor \text{ và } x_j^i \geq \lceil x_j \rceil$$

vào bài toán (F) bằng *lý thuyết nhánh cận* và ta thiết lập được 2 bài toán con từ bài toán (F) ban đầu, ký hiệu (F_1) và (F_2):

$$(F_1) \quad \max_{x \in S_1} Q_1(x),$$

và

$$(F_2) \quad \max_{x \in S_2} Q_2(x).$$

Lặp lại quá trình đến khi $\forall x_j \in \mathbb{Z}_+^n$.

$$(F_1) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{24}$$

- Tập $S_1 := S_F \cap \{x : x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con (F_1).

$$(F_1) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x_j^i \geq \lceil x_j \rceil \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{25}$$

- Tập $S_2 := S_F \cap \{x : x_j^i \geq \lceil x_j \rceil\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con (F_2).

Điều kiện nghiệm

- Nếu tồn tại (F_i) với $i = 1, 2$ không giải được $(S_i = \emptyset)$, ta gọi bài toán **vô nghiệm**.
- Giả sử x^i là nghiệm tối ưu của bài toán (F_i) và giá trị tối ưu là $Q_i(x)$ với $i = 1, 2$.
  - Nếu $\forall x^i \in Z_+^n$, ta nói S_i là tập nghiệm thoả mãn bài toán tối ưu phần tuyến tính nguyên hoàn toàn, $Q_i^*(x)$ là giá trị tối ưu và bài toán con (F_i) được giải **(gọt bởi nghiệm nguyên)**.
  - Nếu $\exists x^i \notin Z_+^n$ đồng thời $Q_i(x) \leq Q_i^*(x)$, ta dừng phân nhánh và bỏ qua bài toán **(gọt bởi cận)**.
  - Nếu $\exists x^i \notin Z_+^n$ đồng thời $Q_i(x) > Q_i^*(x)$, bài toán chưa tối ưu và có thể tiếp tục cải thiện.

Ví dụ minh hoạ

Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

- Ta gọi bài toán (F) có nút ban đầu là N_0, tương ứng mỗi bài toán tối ưu phân tuyến tính thông thường (F_i) ứng với mỗi nút N_i trên sơ đồ nhánh và $\mathcal{L}$ là danh sách chứa các nút được lập thông qua lý thuyết xác định cận và lý thuyết nghiệm.
- Ta đánh dấu giá trị tối ưu tốt nhất và nghiệm tối ưu tốt nhất của bài toán lần lượt là $Q^*(x)$ và x^*.

Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

Bước 0. Thiết lập

Đặt $\mathcal{L} := N_0$.

Giải bài toán (F) được nghiệm $x^* = x$ và $Q^*(x) = Q(x)$.

Bước 1. Kiểm tra

Nếu $\forall x_j^i \in \mathbb{Z}_+^n$ thì vector x là nghiệm của bài toán (H), tương ứng $\mathcal{L} = \emptyset$ và bài toán được giải.

Nếu $\exists x_j^i \notin \mathbb{Z}_+^n$, tương ứng $\mathcal{L} \neq \emptyset$, ta chuyển sang bước 2.

Bước 2. Phân nhánh

Chọn nút N_i ($x_j^i \notin \mathbb{Z}_+^n$ có phần thập phân lớn nhất) để phân nhánh bằng cách thêm vào S_k ràng buộc:

$$x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor \text{ và } x_j^i \geq \lceil x_j \rceil$$

lần lượt thành 2 bài toán con S_i và S_k $(k := i + 1)$.

Bước 3. Thiết lập bài toán con (các nút)

Ta tập trung xử lý 2 bài toán con (các nút):

$$(F_i) \quad \max_{x \in S_i} Q_i(x),$$

và

$$(F_k) \quad \max_{x \in S_k} Q_k(x).$$

bằng cách dùng *thuật toán Dinkelbach*.

Nếu bài toán vô nghiệm hoặc $Q_i(x) \leq Q^*(x)$, đặt $i := k + 1$ và quay lại bước 1, nếu không, chuyển sang bước 4.

Bước 4. Kiểm tra