Cuestiones práctica 1

Ampliación de análisis numérico

Cuestión 1: Consideramos la función $f(x) = (x^2-4)(x^2+1)$, queremos aproximar f'' en el intervalo $[-2, 2]$ con la fórmula

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \qquad h > 0, x \in [a, b]$$

Veamos como es el error en la aproximación. Pongamos

$$\mathcal{E}(f) := f''(x^*) - \frac{f(x^*-h) - 2f(x^*) + f(x^*+h)}{h^2} \tag{$*$}$$

y para cada $x^* \in [-2, 2]$ desarrollamos f en serie de Taylor en x^*:

$$f(x^* \pm h) = f(x^*) \pm hf'(x^*) + \frac{h^2}{2}f''(x^*) \pm \frac{h^3}{6}f^{(iii)}(x^*) + \frac{h^4}{24}f^{(iv)}(\vartheta_\pm)$$

con $\vartheta_- \in (x^*-h, x^*)$ y $\vartheta_+ \in (x^*, x^*+h)$. Substituyendo en $(*)$

$$\mathcal{E}(f) = f''(x^*) - \frac{h^2 f''(x^*) + \frac{h^4}{24}f^{(iv)}(\vartheta_-) + \frac{h^4}{24}f^{(iv)}(\vartheta_+)}{h^2} = -\frac{h^4}{24}f^{(iv)}(\vartheta_-) - \frac{h^4}{24}f^{(iv)}(\vartheta_+)$$

y como $f^{(iv)}(x) = 24$ entonces $\mathcal{E}(f) = -\frac{h^2}{12}24 = -2h^2$. Ahora bien, para cada $N \in \mathbb{N}$ $h^2 = 16/N^2$ de donde deducimos que

$$\boxed{\mathcal{E}(f) = -\frac{32}{N^2}}$$

Ahora bien, en el programa optenemos los siguientes datos

N	$\|\cdot\|_1$	$\|\cdot\|_2$	$\|\cdot\|_\infty$
128	1.9984e+00	2.8273e+00	3.9998e+00

Llamemos $\boldsymbol{\varepsilon}_N$ al vector que guarda el error del método en la iteración N entonces conjeturamos que

$$\frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}_N\|_1}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{2N}\|_1} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 2, \quad \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}_N\|_2}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{2N}\|_2} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 2\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}_N\|_\infty}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{2N}\|_\infty} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 4$$

En efecto, si $\boldsymbol{\varepsilon}_N = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{N-1}) = (-32/N^2, \ldots, -32/N^2)$ y por tanto

- $\|\boldsymbol{\varepsilon}_N\|_1 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{32}{N^2} = 32\frac{N-1}{N^2}$

- $\|\varepsilon_N\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{32}{N^2}\right)^2} = \frac{32}{N^2}\sqrt{N-1}$

- $\|\varepsilon_N\|_\infty = \frac{32}{N^2}$

Luego haciendo los cocientes al duplicar N:

- $\frac{\|\varepsilon_N\|_1}{\|\varepsilon_{2N}\|_1} = \frac{4N^2}{N^2}\frac{N-1}{2N-1} = 2\frac{N-1}{N-1/2} \longrightarrow 2$

- $\frac{\|\varepsilon_N\|_2}{\|\varepsilon_{2N}\|_2} = 4\sqrt{\frac{N-1}{2N-1}} = 2\sqrt{2\frac{N-1}{N-1/2}} \longrightarrow 2\sqrt{2}$

- $\frac{\|\varepsilon_N\|_\infty}{\|\varepsilon_{2N}\|_\infty} = \frac{32/N^2}{32/4N^2} = 4$

Cuestión 3: Del programa `practica1.m` obtenemos la siguiente tabla

$\|\cdot\|_1$	$\|\cdot\|_2$	$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|_F$
2.5000e-01	2.4884e-01	2.5000e-01	1.7370e-01
2.5000e-01	2.4971e-01	2.5000e-01	1.7527e-01
2.5000e-01	2.4993e-01	2.5000e-01	1.7603e-01
2.5000e-01	2.4998e-01	2.5000e-01	1.7641e-01
2.5000e-01	2.5000e-01	2.5000e-01	1.7659e-01
2.5000e-01	2.5000e-01	2.5000e-01	1.7668e-01

Observamos entonces que las tres primeras normas se multiplican por 0,25 y la de Frobenius por 0,176.

Cuestión 4: En primer lugar, fijado un $N \in \mathbb{N}$ y un intervalo $[a, b]$, la matriz DD_{N-1} es de la forma

$$DD_{N-1} = \frac{N^2}{(b-a)^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Si consideramos las normas matriciales $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_F$ con

$$\|A\|_\infty = \max_{j=1,\dots,N-1} \sum_{k=1}^{N-1} |a_{jk}| \qquad \text{y} \qquad \|A\|_F = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} |a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Para calcular las dos normas de la matriz se tiene en cuenta de que la primera y la segunda columna solo tienen los dos elementos y las $N-3$ restantes 3 elementos. Así

$$\|DD_{N-1}\|_\infty = \frac{4N^2}{(b-a)^2} \qquad \text{y} \qquad \|DD_{N-1}\|_F = \frac{N^2}{(b-a)^2}\sqrt{10 + 6(N-3)}$$

luego

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{\|DD_{2N-1}\|_\infty}{\|DD_{N-1}\|_\infty} &= \frac{\frac{4(2N)^2}{(b-a)^2}}{\frac{4N^2}{(b-a)^2}} = 4 \\
\lim_{N\to\infty} \frac{\|DD_{2N-1}\|_F}{\|DD_{N-1}\|_F} &= \frac{16N^2}{4N^2} \frac{\sqrt{10+6(2N-3)}}{\sqrt{10+6(N-3)}} = \begin{bmatrix} 10+6(N-3) \sim_\infty 6N \\ 10+6(2N-3) \sim_\infty 12N \end{bmatrix} \\
&= \lim_{N\to\infty} 4\sqrt{\frac{12N}{6N}} = 4\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$