Cuestiones práctica 1

Ampliación de análisis numérico

Cuestión 3:

Del programa `practica1.m` obtenemos la siguiente tabla

$\|\cdot\|_1$	$\|\cdot\|_2$	$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|_F$
2.5000e-01	2.4884e-01	2.5000e-01	1.7370e-01
2.5000e-01	2.4971e-01	2.5000e-01	1.7527e-01
2.5000e-01	2.4993e-01	2.5000e-01	1.7603e-01
2.5000e-01	2.4998e-01	2.5000e-01	1.7641e-01
2.5000e-01	2.5000e-01	2.5000e-01	1.7659e-01
2.5000e-01	2.5000e-01	2.5000e-01	1.7668e-01

Observamos entonces que las tres primeras normas se multiplican por 0,25 y la de Frobenius por 0,176.

Cuestión 4: En primer lugar, fijado un $N \in \mathbb{N}$ y un intervalo $[a, b]$, la matriz DD_{N-1} es de la forma

$$DD_{N-1} = \frac{N^2}{(b-a)^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Si consideramos las normas matriciales $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_F$ con

$$\|A\|_\infty = \max_{j=1,\dots,N-1} \sum_{k=1}^{N-1} |a_{jk}| \qquad \text{y} \qquad \|A\|_F = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} |a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Para calcular las dos normas de la matriz se tiene en cuenta de que la primera y la segunda columna solo tienen los dos elementos y las $N-3$ restantes 3 elementos. Así

$$\|DD_{N-1}\| = \frac{4N^2}{(b-a)^2} \qquad \text{y} \qquad \|DD_{N-1}\|_F = \frac{N^2}{(b-a)^2}\sqrt{10+6(N-3)}$$

luego

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{\|DD_{2N-1}\|_\infty}{\|DD_{N-1}\|_\infty} &= \frac{\frac{4(2N)^2}{(b-a)^2}}{\frac{4N^2}{(b-a)^2}} = 4 \\
\lim_{N\to\infty} \frac{\|DD_{2N-1}\|_F}{\|DD_{N-1}\|_F} &= \frac{16N^2}{4N^2}\frac{\sqrt{10+6(2N-3)}}{\sqrt{10+6(N-3)}} = \begin{bmatrix} 10+6(N-3) \sim_\infty 6N \\ 10+6(2N-3) \sim_\infty 12N \end{bmatrix} \\
&= \lim_{N\to\infty} 4\sqrt{\frac{12N}{6N}} = 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$