Cambio a la base de Taylor

Vamos a justificar el cambio de base del polinomio de Hermite a la base de Taylor en x_0. Calculamos las diferencias divididas para expresar el polinomio de Hermite como

$$\begin{aligned} H(x) = f[x_0] + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_0](x-x_0)^2 + f[x_0,x_0,x_0,x_1](x-x_0)^3 + \\ + f[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^3(x-x_1) + f[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1,x_1](x-x_0)^3(x-x_1)^2 \end{aligned}$$

que por simplicidad escribimos

$$H(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^3(x-x_1) + a_5(x-x_0)^3(x-x_1)^2$$

y queremos expresarlo en términos de $(x-x_0)^i$. Los cuatro primeros términos ya están expresados en esos términos luego solo nos queda expresar los dos últimos:

$$\begin{aligned} [1] \quad a_4(x-x_0)^3(x-x_1) &= a_4(x-x_0)^3(x-x_0+x_0-x_1) = a_4(x-x_0)^3(x-x_0) + a_4(x-x_0)^3(x_0-x_1) \\ &= a_4(x_0-x_1)(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2] \quad a_5(x-x_0)^3(x-x_1)^2 &= a_5(x-x_0)^3(x-x_0+x_0-x_1)^2 = a_5(x-x_0)^3\left[(x-x_0)+(x_0-x_1)\right]^2 \\ &= a_5(x-x_0)^3\left[(x-x_0)^2 + 2(x-x_0)(x_0-x_1) + (x_0-x_1)^2\right] \\ &= a_5(x-x_0)^5 + 2a_5(x_0-x_1)(x-x_0)^4 + a_5(x_0-x_1)^2(x-x_0)^3 \end{aligned}$$

Si suponemos

$$H(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)^2 + d_3(x-x_0)^3 + d_4(x-x_4)^4 + d_5(x-x_0)^5$$

entonces si agrupamos terminos en $H(x)$, [1] y [2] los coeficientes resultan ser

$$\begin{aligned} d_0 &= a_0 & \qquad d_3 &= a_3 + a_4(x_0-x_1) + a_5(x_0-x_1)^2 \\ d_1 &= a_1 & \qquad d_4 &= a_4 + 2a_5(x_0-x_1) \\ d_2 &= a_2 & \qquad d_5 &= a_5 \end{aligned}$$

□