Splines cúbicos periódicos

Sea $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ una partición del intervalo $[x_0, x_n]$ ($n \geq 3$), y valores de una función en todos los nodos de dicha partición salvo en el último $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$. Queremos construir un spline cúbico que interpole dichos datos con la condición de periodicidad, *i.e.*, si $S(x)$ es el spline que buscamos,

$$S(x_0) = S(x_n) = f_0 \quad S'(x_0) = S'(x_n) \quad S''(x_0) = S''(x_n)$$

Supongamos

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1) \\ s_2(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \vdots \\ s_n(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$ calculamos los coeficientes del polinomio cúbico s_i mediante la correspondiente tabla de diferencias divididas en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

x	$f[x^*_{i-1}]$	$f[x^*_{i-1}, x^*_i]$	$f[x^*_{i-1}, x^*_i, x^*_{i+1}]$	$f[x^*_{i-1}, x^*_i, x^*_{i+1}, x^*_{i+2}]$
x_{i-1}	f_{i-1}	0	0	0
x_{i-1}	f_{i-1}	H'_{i-1}	0	0
x_i	f_i	$\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$	$\frac{H[x_{i-1}, x_i] - H'_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})}$	0
x_i	f_i	H'_i	$\frac{H'_i - H[x_{i-1}, x_i]}{(x_i - x_{i-1})}$	$\frac{H'_i - 2H[x_{i-1}, x_i] + H'_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2}$

con $H[x_{i-1}, x_i] = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$. Así, la expresión de s_i resulta en

$$s_i(x) = f_{i-1} + H'_{i-1}(x - x_{i-1}) + \frac{H[x_{i-1}, x_i] - H'_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^2 + \frac{H'_i - 2H[x_{i-1}, x_i] + H'_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2}(x - x_{i-1})^2(x - x_i)$$

Con esta construcción ya tenemos asegurada la continuidad y la continuidad $\mathscr{C}^1$ en los nodos de la partición. Falta imponer la condición de continuidad $\mathscr{C}^2$ y las condiciones de periodicidad. Para ello vamos a expresar cada $s_i(x)$ con $i = 1, \ldots, n$ en la base de Taylor con respecto al nodo x_{i-1}. Notamos que

$$\begin{aligned} &\frac{H'_i - 2H[x_{i-1}, x_i] + H'_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2}(x - x_{i-1})^2(x - x_i) \\ &\qquad = \frac{H'_i - 2H[x_{i-1}, x_i] + H'_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2}(x - x_{i-1})^2(x - x_{i-1} + x_{i-1} - x_i) \\ &\qquad = \frac{H'_i - 2H[x_{i-1}, x_i] + H'_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2}(x - x_{i-1})^3 - \frac{H'_i - 2H[x_{i-1}, x_i] + H'_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^2 \end{aligned}$$

y agrupando términos

$$\begin{aligned}
s_i(x) = f_{i-1} + H'_{i-1}(x-x_i) &+ \frac{3H[x_{i-1},x_i]-2H'_{i-1}-H'_i}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})^2 \\
&+ \frac{H'_{i-1}-2H[x_{i-1},x_i]+H'_i}{(x_i-x_{i-1})^2}(x-x_{i-1})^3
\end{aligned}$$

Derivando dos veces obtenemos para cada $i = 1,\dots,n$

$$s''_i(x) = 2\frac{3H[x_{i-1},x_i]-2H'_{i-1}-H'_i}{x_i-x_{i-1}} + 6\frac{H'_{i-1}-2H[x_{i-1},x_i]+H'_i}{(x_i-x_{i-1})^2}(x-x_{i-1})$$

Ahora imponemos la condición de continuidad $\mathscr{C}^2$ en los nodos x_i con $i = 1,\dots,n-1$:

$$\begin{aligned}
s''_i(x_i) &= \frac{4H'_i+2H'_{i-1}-6H[x_{i-1},x_i]}{x_i-x_{i-1}} \\
s''_{i+1}(x_i) &= \frac{6H[x_i,x_{i+1}]-4H'_i-2H'_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}
\end{aligned}$$

e igualando se obtiene que

$$\frac{H'_{i-1}}{h_i} + \left(\frac{2}{h_i}+\frac{2}{h_{i+1}}\right)H'_i + \frac{H'_{i+1}}{h_{i+1}} = 3\left[\frac{H[x_{i-1}+x_i]}{h_i} + \frac{H[x_i,x_{i+1}]}{h_{i+1}}\right] \qquad i = 1,2,\dots,n-1$$

En cuanto a las condiciones de frontera, por construcción se cumple que $s_1(x_0) = s_n(x_n)$ y $s''_1(x_0) = s'_n(x_n)$, falta ver la continuidad $\mathscr{C}^2$. Haciendo $s''_1(x_0) = s''_n(x_n)$ se tiene que

$$\frac{H'_0}{h_1} + \left(\frac{2}{h_0}+\frac{2}{h_1}\right)H'_1 + \frac{H'_{n-1}}{h_n} = 3\left[\frac{H[x_0,x_1]}{h_1} + \frac{H[x_{n-1},x_n]}{h_n}\right]$$

en forma matricial el sistema es, poniendo $d_i = H[x_{i-1},x_i]$,

$$\begin{bmatrix}
\frac{2}{h_1}+\frac{2}{h_n} & \frac{1}{h_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{h_n} \\
\frac{1}{h_1} & \frac{2}{h_1}+\frac{2}{h_2} & \frac{1}{h_2} & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \frac{1}{h_i} & \frac{2}{h_i}+\frac{2}{h_{i+1}} & \frac{1}{h_{i+1}} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{h_{n-2}} & \frac{2}{h_{n-1}}+\frac{2}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_{n-1}} \\
\frac{1}{h_n} & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & \frac{2}{h_{n-1}}+\frac{2}{h_n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} H'_0 \\ H'_1 \\ \vdots \\ H'_i \\ \vdots \\ \vdots \\ H_{n-1'} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
3\left(\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_n}{h_n}\right) \\
3\left(\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}\right) \\
\vdots \\
3\left(\frac{d_i}{h_i}+\frac{d_{i+1}}{h_{i+1}}\right) \\
\vdots \\
3\left(\frac{d_{n-2}}{h_{n-2}}+\frac{d_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \\
3\left(\frac{d_{n-1}}{h_{n-1}}+\frac{d_n}{h_n}\right)
\end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes del sistema anterior es *estrictamente diagonalmente dominante* pues $\frac{2}{h_i}+\frac{2}{h_{i+1}} \geq \frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}$ e igual para el primer y último elemento de la diagonal principal. Veamos que esta matriz es regular, para ello probamos el siguiente lema.

Lema 1. *Toda matriz estrictamente diagonalmente dominante es regular*

Demostración:
Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz estrictamente diagonalmente dominante, supongamos por reducción a lo absurdo que la matriz no es regular, luego existe $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Si ponemos $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, sea v_i la componente de mayor valor absoluto, se tiene que para cada $i = 1, \ldots, n$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j \iff -a_{ii}v_i = a_{i1}v_1 + \cdots + a_{i,i-1}v_{i-1} + a_{i,i+1}v_{i+1} + \cdots + a_{in}v_n$$

y por tanto

$$|a_{ii}v_i| \leq |a_{i1}v_1| + \cdots + |a_{i,i-1}v_{i-1}| + |a_{i,i+1}v_{i+1}| + \cdots + |a_{in}v_n|$$

que dividiendo por $|v_i|$ resulta en

$$|a_{ii}| \leq \frac{|a_{i1}||v_1|}{|v_i|} + \cdots + \frac{|a_{i,i-1}||v_{i-1}|}{|v_i|} + \frac{|a_{i,i+1}||v_{i+1}|}{|v_i|} + \cdots + \frac{|a_{in}||v_n|}{|v_i|}$$

como $\frac{|v_j|}{|v_i|} \leq 1$ para cada $j = 1, \ldots, n$ por la elección de v_i se tiene que el elemento diagonal a_{ii} no excede la suma de los módulos de los elementos restantes de su columna lo cual es absurdo. Así, A es regular.

□

Tenemos que la matriz del sistema es regular y de dimensión $n \times n$ luego en virtud del teorema de Rouche-Frobenius el sistema tiene una única solución.