Cuestión 1

Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(2\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & 0 \leq t \leq T = 0{,}5 \end{cases}$$

cuya solución viene dada por

$$u(x,t) = e^{-4\pi^2 t} \operatorname{sen}(2\pi x)$$

Nuestro objetivo es estimar los valores de la solución en una partición de la región $R = [0,1] \times [0, 0{,}5]$ usando el método de euler explícito, el método de euler implícito y el método de Crank-Nikolson. De ahora en adelante, consideramos $J, N \in \mathbb{N}$, $h = 1/J$ y $K = T/N$. Definimos también

$$\begin{aligned} x_j &:= jh \quad j = 0, 1, \ldots, J \\ t_n &:= nK \quad n = 0, 1, \ldots, N \end{aligned}$$

y vamos a estimar los valores $U_j^n := u(x_j, t_n)$.

Método de Euler explícito

El método de Euler explícito viene dado por

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{K}{h^2} \left\{ U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n \right\}$$

Si definimos $\mu := \frac{K}{h^2}$ entonces el método es estable si $\mu \leq \frac{1}{2}$. Está condición nos hace considerar la siguiente gama de valores para ejecutar el método.

Método de Euler implícito

El método de Euler implícito viene dado por

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{K}{h^2} \left\{ U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} \right\}$$

Para este método no hay restricción de estabilidad luego podemos proceder con las malla