

1. Formulación del problema para elementos finitos lineales

Vamos a formular la aproximación mediante elementos finitos lineales del problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con $f(x) = (1 + \pi^2) \sin(\pi x)$.

Consideramos el espacio de Sobolev

$$H_0^1(0, 1) = \{v \in L^2(0, 1) : v' \in L^2(0, 1), v(0) = v(1) = 0\}.$$

Para cada $v \in H_0^1(0, 1)$, multiplicando la ecuación e integrando en $[0, 1]$ obtenemos

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Aplicando integración por partes en la primera integral de la ecuación anterior, entiendo v' como la derivada débil,

$$\int_0^1 u''(x)v(x)dx = u'(x)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \stackrel{v \in H_0^1}{=} - \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$$

por tanto obtenemos

$$\int_0^1 u(x)v(x)dx + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

y el problema débil se basa en encontrar u que verifique la ecuación anterior para toda $v \in H_0^1(0, 1)$.

Consideramos $V_h \subset H_0^1(0, 1)$ subespacio lineal de dimensión finita. La aproximación Galerkin se basa en resolver la ecuación anterior para elementos de este subespacio. Concretamente, si

$$V_h = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$$

Dado $u_h \in V_h$, se puede escribir

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x)$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ resolvemos

$$\sum_{j=1}^n c_j \int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx + \sum_{j=1}^n c_j \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$$

dado que si u_h verifica la ecuación anterior para cada elemento de la base entonces, por linealidad, la verifica para cualquier elemento de V_h .

Si definimos los vectores $\mathbf{C} := [c_1, \dots, c_n]^t$ y $\mathbf{b} := \left[\int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx, \dots, \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx \right]^t$; y las matrices

$$M := \left[\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \right]_{1 \leq i, j \leq n} \quad K := \left[\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

llamadas matriz de masa y matriz de rigidez respectivamente, el problema se reduce a resolver el sistema

$$(M + K)\mathbf{C} = \mathbf{b}$$

Sea $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{J+1} = 1$ una partición de $[0, 1]$ uniforme i.e. $x_j - x_{j-1} = h$ para cada $j = 1, \dots, J+1$. Consideramos las funciones definidas en $[0, 1]$ por

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{h} & \text{si } x \in (x_j, x_{j+1}] \end{cases} \quad j = 1, \dots, J$$

donde entendemos que $\varphi_j(x) = 0$ si $x \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$. Pongamos $V_h := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ que es efectivamente un subespacio de $H_0^1(0, 1)$ pues se verifican las condiciones frontera, φ_j es continua para cada j luego está en $L^2(0, 1)$ y φ_j' (en el sentido débil) es continua casi siempre luego también está en $L^2(0, 1)$.

Para este espacio en particular calculemos como son M y K : para cada i y j , si $i \neq j-1, j, j+1$ es claro que $\int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0$ pues tienen soporte disjunto. Tenemos que distinguir los casos $i = j-1, i = j, i = j+1$

$$\int_0^1 \varphi_{j-1}(x) \varphi_j(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(x_j - x)}{h} \frac{(x - x_{j-1})}{h} dx \stackrel{u=x-x_{j-1}}{=} \frac{1}{h^2} \int_0^h u(h-u) du = \frac{h^3}{6h^2} = \frac{h}{6}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_j^2(x) dx &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x - x_{j-1}}{h} \right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x_{j+1} - x}{h} \right)^2 dx = \left[\begin{matrix} u = x - x_{j-1} \\ u = x_{j+1} - x \end{matrix} \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ \int_0^h u^2 du - \int_h^0 u^2 du \right\} = \frac{2u^3}{3h^2} \Big|_0^h = \frac{2}{3}h \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_{j+1}(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x_{j+1} - x)}{h} \frac{(x - x_j)}{h} dx \stackrel{u=x-x_j}{=} \frac{1}{h^2} \int_0^h u(h-u) du = \frac{h}{6}$$

por tanto

$$M = h \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Para K , sabemos por teoría que la derivada débil de φ_j es

$$\varphi_j'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ -\frac{1}{h} & \text{si } x \in (x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

luego trivialmente

$$\int_0^1 \varphi_{j-1}'(x) \varphi_j'(x) dx = \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_{j+1}'(x) dx = -\frac{1}{h} \quad \int_0^1 \varphi_j'(x)^2 dx = \frac{2}{h}$$

y se tiene

$$K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para el cálculo del vector de carga \mathbf{b} vamos a usar la regla de los trapecios, la regla de Simpson y sustituir por el interpolante lineal de f , concretamente, para cada j , $\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx$ luego

(i) *Regla de los trapecios:*

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \approx \frac{h}{2} (f(x_{j-1})\varphi_j(x_{j-1}) + 2f(x_j)\varphi_j(x_j) + f(x_{j+1})\varphi_j(x_{j+1})) = hf(x_j)$$

por tanto el vector de carga lo aproximamos por

$$\mathbf{b} \approx h \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_J) \end{bmatrix}$$

(ii) *Sustitución por el interpolante lineal:*

El interpolante lineal de f viene dado por

$$I_h f(x) = \sum_{j=1}^J f(x_j)\varphi_j(x)$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx &\approx \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} I_h f(x)\varphi_j(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \sum_{i=1}^J f(x_i)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \\ &= f(x_{j-1}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_{j-1}\varphi_j dx + f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \varphi_j^2 dx + f(x_{j+1}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j\varphi_{j+1} dx \end{aligned}$$

y así

$$\mathbf{b} \approx M \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_J) \end{bmatrix}$$

2. Orden de convergencia para elementos finitos lineales

Sabemos por teoría que el orden de convergencia del método es h^2 . Para el análisis de la convergencia se ha usado los dos métodos descritos anteriormente y hemos calculado para valores desde $J = 10$ hasta $J = 510$. Para ambos métodos, se calcula el error en norma L^2 aproximando la integral de la norma mediante la regla de Simpson en una partición más fina a la usada en cada paso de manera que no evaluamos el error en nodos de interpolación. Para el primer método obtenemos la siguiente gráfica:

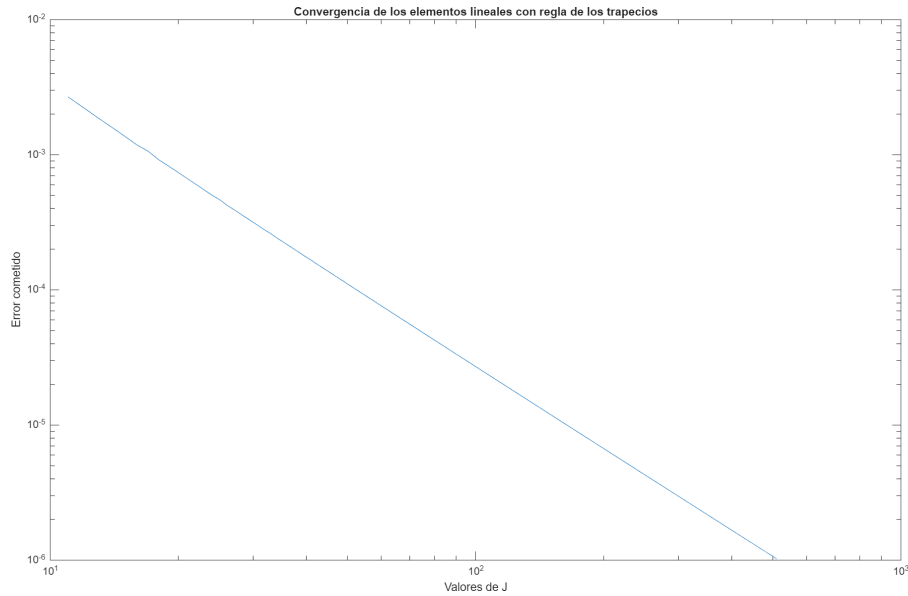


Figura 1: Error para elementos lineales con regla de los trapecios

Usando la función de Matlab `polyfit` obtenemos que la pendiente de la gráfica es -2 luego nuestra aproximación tiene orden 2 como se esperaba. Para la aproximación mediante el interpolante lineal obtenemos

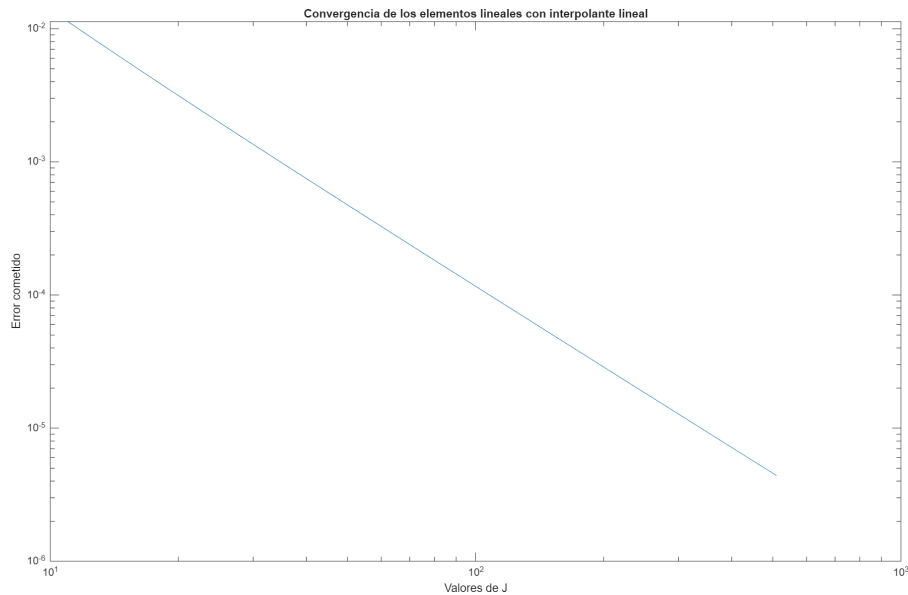


Figura 2: Error para elementos lineales con interpolante lineal

y se observa claramente que la pendiente es -2 y por tanto el orden de convergencia es 2.

3. Formulación del problema para elementos finitos cuadráticos

La formulación débil es igual a la anterior, solo tenemos que calcular los elementos cuadráticos. Para la partición $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_J = 1$, si definimos el punto medio $x_{j-\frac{1}{2}} := \frac{x_{j-1} + x_j}{2}$, consideramos las funciones

$$\begin{aligned}\varphi_1^j(x) &:= \frac{(x_j - x)(x_{j-\frac{1}{2}} - x)}{(x_j - x_{j-1})(x_{j-\frac{1}{2}} - x_{j-1})} \\ \varphi_2^j(x) &:= \frac{(x_j - x)(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1/2})(x_{j-1} - x_{j-\frac{1}{2}})} \\ \varphi_3^j(x) &:= \frac{(x - x_{j-1})(x - x_{j-\frac{1}{2}})}{(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j-\frac{1}{2}})}\end{aligned}$$

como para nuestro problema la partición es uniforme, pongamos de diámetro $2h$, y por la definición de $x_{j-\frac{1}{2}}$ se ve fácilmente que

$$\begin{aligned}\varphi_1^j(x) &= \frac{2(x_j - x)(x_{j-\frac{1}{2}} - x)}{h^2} \\ \varphi_2^j(x) &= \frac{4(x_j - x)(x - x_{j-1})}{h^2} \\ \varphi_3^j(x) &= \frac{2(x - x_{j-1})(x - x_{j-\frac{1}{2}})}{h^2}\end{aligned}$$

Dado que estamos considerando los puntos medios, vamos a construir una nueva partición

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{2J} = b$$

de la siguiente forma

$$\begin{aligned}y_{2j} &:= x_j \quad j = 0, 1, \dots, J \\ y_{2j-1} &:= x_{j-\frac{1}{2}} \quad j = 1, \dots, J\end{aligned}$$

y construimos las funciones

$$\varphi_{2j}(x) := \begin{cases} \varphi_3^j(x) & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \varphi_1^{j+1}(x) & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \varphi_{2j-1}(x) := \begin{cases} \varphi_2^j(x) & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y consideramos $V_h := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{2J-1} \rangle$ y en esta base

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{2J-1} v_j \varphi_j(x)$$

Procedemos ahora al cálculo de la matriz de masa y de la matriz de rigidez. Pongamos

$$M = [M_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 2J-1} \quad K = [K_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 2J-1}$$

Primero calculamos la matriz de masa. Sean los polinomios

$$\xi_1(x) := (2x - 1)(x - 1) \quad \xi_2(x) := 4x(1 - x) \quad \xi_3(x) := x(2x - 1)$$

para j fijo, los cambios de variable

$$u_1 = \frac{x_j - x}{h} \quad u_2 = \frac{x - x_{j-1}}{h} \quad u_3 = \frac{x - x_{j-1}}{h}$$

convierten φ_1^j, φ_2^j y φ_3^j en ξ_1, ξ_2 y ξ_3 respectivamente y transforma $[x_{j-1}, x_j]$ en $[0, 1]$ y $x_{j-\frac{1}{2}}$ en $\frac{1}{2}$. Esto facilita enormemente los calculos. A la hora de calcular todas las integrales ya suponemos realizado los cambios de variable en las respectivas regiones. Calculamos M_{ij} segun la paridad de ambos.

- Si $i = 2l, j = 2k$, el soporte de ambas se corta $[x_{j-1}, x_{j+1}] \cap [x_{i-1}, x_{i+1}] \neq \emptyset$ luego tenemos que ver los casos $k = l - 1, l, l + 1$

$$\begin{aligned} M_{2l,2l} &= \int_0^1 \varphi_{2l}(x) \varphi_{2l}(x) dx = \int_{x_{l-1}}^{x_l} \varphi_3^l(x)^2 dx + \int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi_1^{l+1}(x)^2 dx \\ &= h \left\{ \int_0^1 \xi_3(x)^2 dx + \int_0^1 \xi_1(x)^2 dx \right\} = \frac{4}{15} h \\ M_{2l,2(l-1)} &= \int_0^1 \varphi_{2l}(x) \varphi_{2(l-1)}(x) dx = \int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi_3^l(x) \varphi_1^l(x) dx \\ &= h \left\{ \int_0^1 \xi_3(x) \xi_1(x) dx \right\} = -\frac{h}{30} \\ M_{2l,2(l+1)} &= \int_0^1 \varphi_{2l}(x) \varphi_{2(l+1)}(x) dx = \int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi_1^{l+1}(x) \varphi_3^{l+1}(x) dx \\ &= h \left\{ \int_0^1 \xi_1(x) \xi_3(x) dx \right\} = -\frac{h}{30} \end{aligned}$$

- Si $i = 2l - 1, j = 2k - 1$, el único caso a analizar es cuando $i = j$ pues si no los soportes son disjuntos y por tanto las integrales nulas

$$\begin{aligned} M_{2l-1,2l-1} &= \int_0^1 \varphi_{2l-1}(x)^2 dx = \int_{x_{l-1}}^{x_l} \varphi_2^l(x)^2 dx \\ &= h \int_0^1 \xi_2(x)^2 dx = \frac{8}{15} h \end{aligned}$$

- Si $i = 2l, j = 2k - 1$, los soportes se cortan cuando $k = l$ y cuando $k = l + 1$ luego

$$\begin{aligned} M_{2l,2l-1} &= \int_0^1 \varphi_{2l}(x) \varphi_{2l-1}(x) dx = \int_{x_{l-1}}^{x_l} \varphi_3^l(x) \varphi_2^l(x) dx \\ &= h \int_0^1 \xi_3(x) \xi_2(x) dx = \frac{h}{15} \\ M_{2l,2l+1} &= \int_0^1 \varphi_{2l}(x) \varphi_{2l+1}(x) dx = \int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi_1^{l+1}(x) \varphi_2^{l+1}(x) dx \\ &= h \int_0^1 \xi_1(x) \xi_2(x) dx = \frac{h}{15} \end{aligned}$$

Ajustando los valores para cumplir las condiciones frontera, la matriz de masa resulta en

$$M = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 16 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 8 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 16 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & 8 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 16 \end{bmatrix}.$$

Procedemos ahora a calcular la matriz de rigidez. Las derivadas débiles de las funciones de la base vienen dadas por

$$\varphi'_{2j}(x) := \begin{cases} \frac{d}{dx}\varphi_3^j(x) & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{d}{dx}\varphi_1^{j+1}(x) & \text{si } x \in (x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \varphi'_{2j-1}(x) := \begin{cases} \frac{d}{dx}\varphi_2^j(x) & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Haciendo los mismos cambios de variable, teniendo en cuenta que $\varphi'_j(x) = \frac{(-1)^{j+1}}{h}\xi_j(u_j(x))$, y el mismo razonamiento:

$$K_{2l,2l} = \int_0^1 \varphi'_{2l}(x)^2 dx = \frac{h}{h^2} \left\{ \int_0^1 \xi_3'(x)^2 dx + \int_0^1 \xi_1'(x)^2 dx \right\} = \frac{14}{3h}$$

$$K_{2l,2(l-1)} = \int_0^1 \varphi'_{2l}(x)\varphi'_{2(l-1)}(x) dx = \frac{1}{h} \int_0^1 \xi_3'(x)\xi_1'(x) dx = \frac{h}{3}$$

y siguiendo el mismo razonamiento

$$\begin{aligned} K_{2l,2(l+1)} &= \frac{h}{3} & K_{2l-1,2l-1} &= \frac{16}{3h} \\ K_{2l,2l-1} &= -\frac{8}{3h} & K_{2l,2l+1} &= -\frac{8}{3h} \end{aligned}$$

la matriz de rigidez resulta en

$$K = \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -8 & 14 & -8 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -8 & 16 & -8 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -8 & 14 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -8 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Para el cálculo del vector de carga $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_{2J-1}]^t$ vamos a usar la regla de Simpson y susstituir por el interpolante cuadrático de f

(i) *Regla de Simpson:*

$$\begin{aligned} b_{2j} &= \int_0^1 f(x)\varphi_{2j}(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_3^j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_1^{j+1}(x)dx \\ &\approx \frac{h}{6} \left\{ f(x_{j-1})\varphi_3^j(x_{j-1}) + 4f\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right)\varphi_3^j\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) + f(x_j)\varphi_3^j(x_j) \right\} \\ &\quad + \frac{h}{6} \left\{ f(x)\varphi_1^{j+1}(x_j) + 4f\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right)\varphi_1^{j+1}\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{j+1})\varphi_1^{j+1}(x_{j+1}) \right\} \\ &= \frac{h}{6}f(x_j) + \frac{h}{6}f(x_j) = \frac{h}{3}f(x_j) \\ b_{2j-1} &= \int_0^1 f(x)\varphi_{2j-1}(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_2^j(x)dx \approx \frac{h}{6}4f\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2h}{3}f\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

(ii) *Sustitución por el interpolante:*

Por los cálculos anteriores y de manera idéntica al caso de elementos lineales, si $I_h f$ es el interpolante cuadrático, entonces el vector de carga se calcula por $\mathbf{b} = M\mathbf{F}$ donde el vector \mathbf{F} es el de evaluaciones de f en los nodos de la malla.

4. Orden de convergencia para elementos finitos cuadráticos

El tratamiento teórico garantiza que orden de convergencia es de h^3 . De nuevo, usando valores $J = 10, 11, \dots, 510$, los métodos anteriores para aproximar el vector de carga y la regla de Simpson para aproximar la norma L^2 del error obtenemos las siguientes gráficas

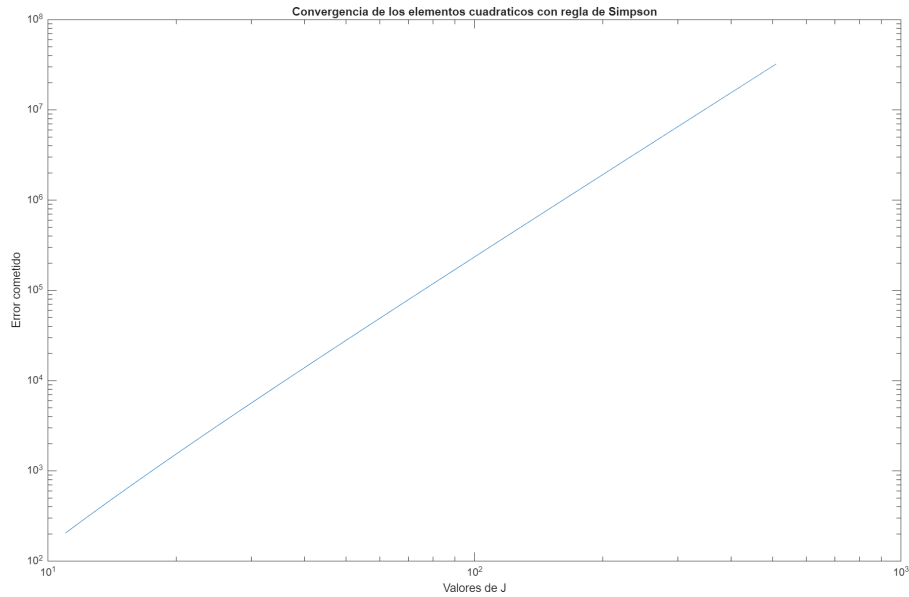


Figura 3: Error para elementos cuadráticos con Simpson

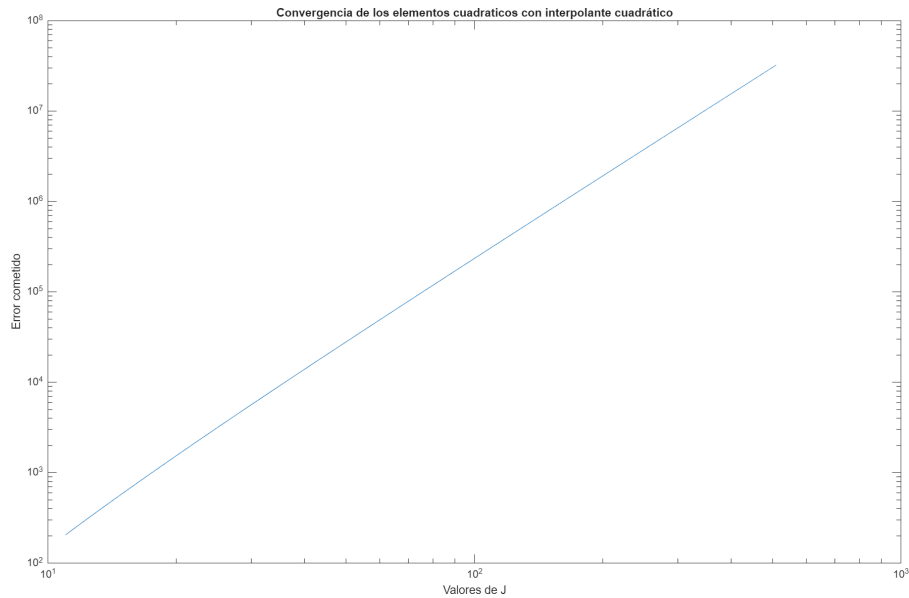


Figura 4: Error elementos cuadráticos con interpolante cuadrático

En ambos casos `polyfit` devuelve una pendiente de -3 y por tanto se observa el orden de convergencia correcto.