Digitalne modulacije

Uvod u digitalne modulacije

Literatura

- B. Sklar, *Digital Communications: Fundamentals and Applications*, Prentice Hall, 2001
- J. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1995
- V. Milošević, V. Delić, M. Narandžić, Č. Stefanović, *Zbirka zadataka iz digitalnih telekomunikacija*, 2005

Digitalne modulacije

- Spektar digitalnog signala, kojim se vrši prenos podataka, nalazi se u transponovanom opsegu
  - Spektar signala se, postupkom modulacije, transponuje iz osnovnog opsega u opseg koji je najpovoljniji za prenos

Prenos u transponovanom opsegu – *bandpass modulation.*
Prenos u osnovnom opsegu – *baseband modulation.*

Razlozi za prenos u transponovanom opsegu

- Kanali koji se u praksi koriste za prenos signala najčešće se ponašaju kao propusnici opsega, sa izraženim slabljenjem na niskim učestanostima (tj. u osnovnom opsegu)
  - Posebno važno za radio kanale
- Veličina antene kod radio prenosa je srazmerna talasnoj dužini emitovanog signala (obrnuto srazmerna učestanosti)
  - Veća noseća učestanost -> manja antena
- Pojedini postupci multipleksnog prenosa zasnivaju se na modulacijama
  - FDM (*Frequency Division Multiplex*)
- Tehnike prenosa sa zaštitom od interferencije zasnivaju se na modulacijama
  - Prenos u proširenom spektru

Opšti oblik modulisanog signala

$$s_m(t) = A(t)\cos\left(2\pi f(t)t + \theta(t)\right)$$

- Digitalna amplitudska modulacija
  - Amplituda je funkcija vremena, dok su noseća frekvencija i faza konstantne ($f(t) = f_0, \theta(t) = \theta_0$)
- Digitalna fazna modulacija:
  - Faza je funkcija vremena, dok su amplituda i noseća frekvencija konstantne ($A(t) = A, f(t) = f_0$)
- Digitalna frekvencijska modulacija:
  - Frekvencija je funkcija vremena, dok su amplituda i faza konstantne ($A(t) = A, \theta(t) = \theta_0$)
- Kombinovane modulacije
  - Amplitudsko-fazna modulacija – i amplituda i faza su funkcije vremena, noseća učestanost je konstantna ($f(t) = f_0$)

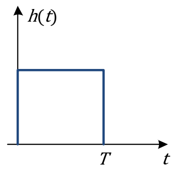
Primeri digitalnih modulacija

ASK (*Amplitude Shift Keying*)

- Modulisani signal je oblika:

$$s_m(t) = \sum_k a_k h(t - kT)\cos(2\pi f_0 t)$$

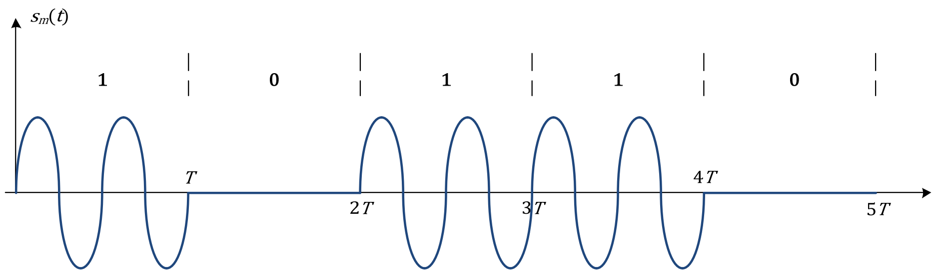
  - gde je $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{drugde} \end{cases}$
    - $h(t - kT)$ „prozorira“ *k*-ti signalizacioni interval



- Amplitude ASK signala a_k (informacioni simboli) su iz M-arnog alfabeta (unipolarnog ili polarnog), $a_k \in \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$
- Noseća frekvencija je obično obrnuto srazmerna trajanju signalizacionog intervala
  - $f_0 = \frac{n}{T}, \quad n \gg 1$

ASK - primer

- Prenosi se informaciona sekvenca $\{1,0,1,1,0\}$
- Amplitude su iz binarnog unipolarnog alfabeta
  - $a_k \in \{0,2d\}$
- $f_0 = \frac{2}{T}$



PSK (*Phase Shift Keying*)

- Modulisani signal je oblika:

$$\boldsymbol{s_m(t) = \sum_k Ah(t-kT)\cos(2\pi f_0 t + \phi_k)}$$

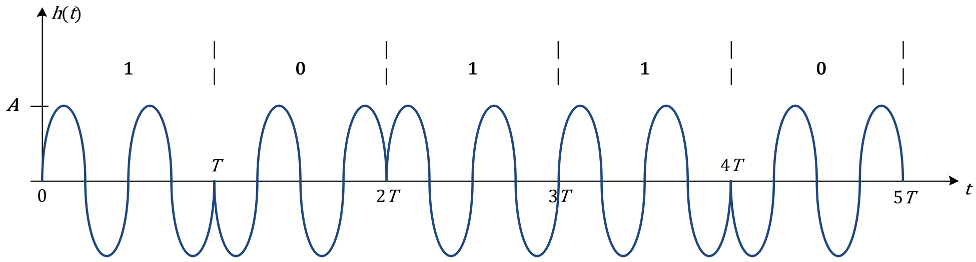
  - gde je $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le \mathrm{t} < T \\ 0 & \text{drugde} \end{cases}$
    - $h(t-kT)$ „prozorira“ k-ti signalizacioni interval
- Faze PSK signala $\boldsymbol{\phi_k}$ su iz *M*-arnog alfabeta:

$$\boldsymbol{\phi_k = \frac{2\pi}{M} i + \phi_0, \qquad i = 0, \dots, M-1}$$

    - $\boldsymbol{\phi_0}$ je početni fazni stav
- Noseća frekvencija je obično obrnuto srazmerna trajanju signalizacionog intervala
  - $f_0 = \frac{n}{T}, \quad n \gg 1$

PSK - primer

- Prenosi se informaciona sekvenca $\{1{,}0{,}1{,}1{,}0\}$
- Faze su iz binarnog alfabeta, početni fazni stav je 0
  - $\phi_k \in \{0, \pi\}$
- $f_0 = \frac{2}{T}$



FSK (Frequency Shift Keying)

- Modulisani signal je oblika:

$$\boldsymbol{s_m(t) = \sum_k Ah(t-kT)\cos(2\pi f_k t)}$$

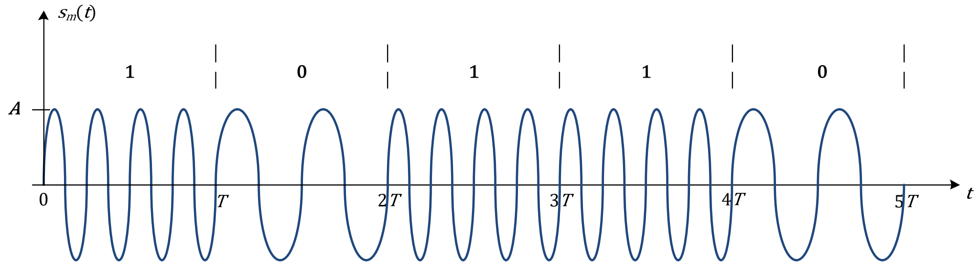
  - gde je $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \mathrm{t} < T \\ 0 & \text{drugde} \end{cases}$
    - $h(t-kT)$ „prozorira“ *k*-ti signalizacioni interval
- Frekvencije FSK signala $\boldsymbol{f_k}$ su iz *M*-arnog alfabeta:

$$\boldsymbol{f_k = \nu_i, \qquad i = 0, \ldots, M-1}$$

- Noseće frekvencije su obično obrnuto srazmerne trajanju signalizacionog intervala
  - $\nu_i = \frac{n_i}{T}, \quad n_i \gg 1$

FSK - primer

- Prenosi se informaciona sekvenca $\{1{,}0{,}1{,}1{,}0\}$
- Frekvencije su iz binarnog alfabeta
  - $\nu_k \in \left\{\frac{2}{T}, \frac{4}{T}\right\}$



PREDSTAVA DIGITALNIH SIGNALA POMOĆU BAZISA FUNKCIJA

Uvod

- Svaki digitalni signal je podeljen na periode – signalizacione intervale, trajanja T
- U svakom signalizacionom intervalu, M-arni digitalni signal ima vrednost jednog od M potencijalnih talasnih oblika, u zavisnosti od poruke koja se prenosi
- U k-tom signalizacionom intervalu, $kT \leq t < (k+1)T$, važi:

$$s(t) = x_i(t - kT), \qquad i = 1, \dots, M$$

  - gde su $x_i(t)$, $i = 1, \dots, M$, potencijalni talasni oblici digitalnog signala

- Od sada pa nadalje, posmatraćemo samo prvi signalizacioni interval - $k = 0$
  - Za sve ostale intervale važiće isti zaključci

- Potencijalni talasni oblici digitalnog signala $x_i(t)$, $i = 1, \dots, M$, predstavljaju vremenske funkcije, trajanja T
- Definišimo korelaciju u prostoru signala (vremenskih funkcija) na sledeći način:

$$\langle x_i(t), x_j(t) \rangle = \int_0^T x_i(t) x_j(t) dt$$

(u slučaju da su signali kompleksni, uzima se $x_j^*(t)$)

- Autokorelacija je:

$$\langle x_i(t), x_i(t) \rangle = \int_0^T x_i(t) x_i(t) dt = \int_0^T x_i^2(t) dt = \|x_i(t)\|^2$$

  - Očigledno je autokorelacija definisana na ovaj način mera energije signala u toku signalizacionog intervala

- Ukoliko važi:

$$\langle x_i(t), x_j(t)\rangle = 0, \qquad i \neq j$$

kaže se da su funkcije $x_i(t)$ i $x_j(t)$ međusobno ortogonalne

- Ako je $\langle x_i(t), x_j(t)\rangle = 0$ za svako $i \neq j$, kaže se da je skup funkcija $\{x_i(t)\}$ ortogonalan
- Potencijalni talasni oblici digitalnog signala $x_i(t),\ i = 1, \dots, M$, u opštem slučaju NE predstavljaju ortogonalni skup funkcija
- Funkcije $x_i(t)$ mogu se predstaviti kao linearne kombinacije funkcija iz bazisa $\{\psi_j(t),\ j = 1, \dots, N\}$
  - Bazis – minimalni skup funkcija pomoću kojeg je moguće predstaviti skup funkcija $\{x_i(t),\ i = 1, \dots, M\}$
  - U opštem slučaju važi $N \leq \mathrm{M}$
    - $N = \mathrm{M}$ ako i samo ako je skup $\{x_i(t),\ i = 1, \dots, M\}$ linearno nezavisan

- Za funkcije iz bazisa važi:

$$\langle \psi_i(t), \psi_j(t)\rangle = K_i \delta_{ij} = \begin{cases} K_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

  - Ukoliko je $K_i = 1, \forall i$, bazis je ortonormalan (funkcije iz bazisa su jedinične energije)
- Važi:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \psi_j(t), \qquad i = 1, \dots, M$$

gde se koeficijenti α_{ij} mogu dobiti kao:

$$\alpha_{ij} = \langle x_i(t), \psi_j(t)\rangle = \int_0^T x_i(t)\psi_j(t)dt\,, \qquad j = 1, \dots, N$$

- Kako se može konstruisati ortonormalni bazis $\{\psi_j(t),\ j = 1, \dots, N\}$ za predstavu skupa $\{x_i(t),\ i = 1, \dots, M\}$?
  - Pomoću Gram-Šmitovog postupka.

Gram-Šmitov (*Gram-Schmidt*) postupak

- Neka je $\{x_i(t),\ i = 1, \ldots, M\}$ skup signala (talasnih oblika) trajanja T

Konstrukcija ortonormalnog bazisa:

1. Prva funkcija iz bazisa, $\psi_1(t)$, odredi se na sledeći način:

$$\psi_1(t) = \frac{x_1(t)}{\|x_1(t)\|}, \quad \text{gde je } \|x_1(t)\|^2 = E_1 = \langle x_1(t), x_1(t)\rangle = \int_0^T x_1{}^2(t)dt$$

   - E_1 je energija $x_1(t)$
   - Može se lako pokazati da važi:

$$\langle \psi_1(t), \psi_1(t)\rangle = 1$$
$$x_1(t) = \sqrt{E_1}\psi_1(t) = \alpha_{11}\psi_1(t)$$

2. Sledeća funkcija iz bazisa, $\psi_2(t)$, odredi se na sledeći način. Prvo se izračuna:

$$\theta_2(t) = x_2(t) - \alpha_{21}\psi_1(t), \quad \text{gde je } \alpha_{21} = \langle x_2(t), \psi_1(t)\rangle$$

   - Ako je $\theta_2(t) \neq 0$, tada je $\psi_2(t)$:

$$\psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\|\theta_2(t)\|}, \quad \text{gde je } \|\theta_2(t)\|^2 = E_{\theta_2} = \langle \theta_2(t), \theta_2(t)\rangle$$

     - Može se lako pokazati da važi:

$$\langle \psi_2(t), \psi_2(t)\rangle = 1, \quad x_2(t) = \alpha_{21}\psi_1(t) + \alpha_{22}\psi_2(t), \quad \text{gde je } \alpha_{22} = \langle x_2(t), \psi_2(t)\rangle = \|\theta_2(t)\|$$

   - Ako je $\theta_2(t) = 0$, prelazi se na sledeći korak.

Gram-Šmitov postupak (nastavak)

3. Opšti korak – određivanje $\psi_n(t)$
   - Pretpostavka je da su funkcije $\psi_1(t)$,$\psi_2(t)$,..., $\psi_{n-1}(t)$ već izračunate
   - Izračuna se:

$$\theta_n(t) = x_n(t) - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}\psi_j(t), \quad \text{gde je } \alpha_{nj} = \langle x_n(t), \psi_j(t)\rangle$$

   - Ako je $\theta_n(t) \neq 0$, tada je $\psi_n(t)$:

$$\psi_n(t) = \frac{\theta_n(t)}{\|\theta_n(t)\|}, \quad \text{gde je } \|\theta_n(t)\|^2 = E_{\theta_n} = \langle \theta_n(t), \theta_n(t)\rangle$$

     - Važi:

$$\langle \psi_n(t), \psi_n(t)\rangle = 1$$
$$x_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{nj}\psi_j(t), \quad \text{gde je } \alpha_{nn} = \langle x_n(t), \psi_n(t)\rangle = \|\theta_n(t)\|$$

- Ako je $n = M$, postupak se završava.

- Zašto koristiti predstavu digitalnog signala preko bazisa funkcija?
  - Pruža uvid u postupak konstrukcije modulisanog signala (konstrukcija predajnika digitalnog signala)
  - Omogućava efikasnu konstrukciju prijemnika digitalnog signala

- Predstava signala pomoću bazisa funkcija omogućava jednostavnu geometrijsku interpretaciju
  - Funkcije iz bazisa su u stvari vektori koji definišu odgovarajući vektorski prostor.
    - Korelacija je u stvari skalarni proizvod. Koeficijent $\alpha_{ij} = \langle x_i(t), \psi_j(t) \rangle$ je projekcija $x_i(t)$ na $\psi_j(t)$.
  - Talasni oblici digitalnog signala predstavljaju vektore u prostoru koji je definisan bazisom

Primeri bazisa

ASK

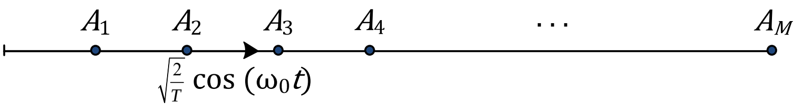
- Tokom (prvog) signalizacionog intervala, digitalni signal ima oblik:

$$\boldsymbol{s_m(t) = a_k \cos(2\pi f_0 t)}$$

gde je $\boldsymbol{a_k}$ iz M-arnog alfabeta, $\boldsymbol{a_k} \in \{\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_M}\}$

- Očigledno, dovoljna je samo jedna funkcija u bazisu

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t)$$



PSK

- Tokom signalizacionog intervala, digitalni signal ima oblik:

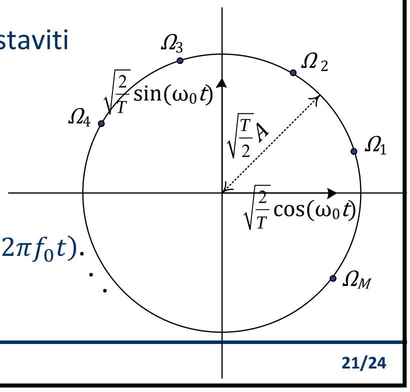
$$s_m(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi_k),\ \phi_k = \frac{2\pi}{M} i + \phi_0,\ \ i = 0, \ldots, M-1$$

- Važi:

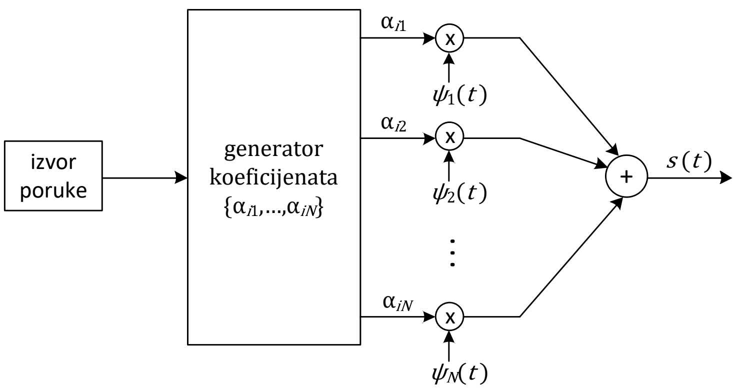
$$s_m(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi_k)$$
$$= A\cos\phi_k \cos(2\pi f_0 t) - A\sin\phi_k \sin(2\pi f_0 t)$$

- Očigledno, svi talasni oblici se mogu predstaviti kao linearne kombinacije $\cos(2\pi f_0 t)$ i $\sin(2\pi f_0 t)$
  - tj. postoje dve funkcije u bazisu:

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_0 t);\ \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(2\pi f_0 t).$$



Konstrukcija predajnika pomoću bazisa



- U svakom signalizacionom intervalu, izvor generiše jednu od M mogućih poruka
- Na osnovu te poruke, generator koeficijenata generiše koeficijente $\{\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{iN}\}$ koji odgovaraju talasnom obliku predviđenom za prenošenje date poruke

Bazis i šum

- Bazis je minimalni skup funkcija potreban za konstrukciju talasnih oblika digitalnog signala
  - Bazis je „prilagođen“ signalu
- Pri prenosu, digitalnom signalu se superponira i šum.
  - Bazis nije prilagođen predstavi šuma – međutim, to nije ni potrebno
- Šum se može razložiti na dve komponente:

$$n(t) = \hat{n}(t) + \tilde{n}(t)$$

gde je:

$\hat{n}(t) = \sum_{j=1}^{N} \langle n(t), \psi_j(t) \rangle \, \psi_j(t)$ - komponenta šuma koja se može predstaviti preko bazisa i

$\tilde{n}(t)$ - komponenta šuma koje se ne može predstaviti preko bazisa – irelevantni šum

- Kasnije će biti pokazano da irelevantni šum nema uticaja na prijem signala
  - Prijemnik „filtrira“ irelevantni šum

KRAJ