Digitalne modulacije

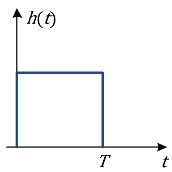
Digitalna frekvencijska modulacija

FSK (*Frequency Shift Keying*)

- Modulisani signal je oblika:

$$s_m(t) = \sum_k Ah(t-kT)\cos(2\pi f_k t)$$

  - gde je $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T \\ 0 & drugde \end{cases}$
    - $h(t-kT)$ „prozorira“ k-ti signalizacioni interval



- Frekvencije FSK signala f_k (informacioni simboli) su iz M-arnog alfabeta: $f_k \in \{\nu_i \,;\, i = 1, \dots, M\}$
  - Susedne vrednosti nosećih frekvencija ν_i su ekvidistantne – razmaknute za $\Delta\nu$ [Hz]
- Rastojanje između nosećih frekvencija $\Delta\nu$ (tzv. *tone spacing*) zavisi od načina demodulacije

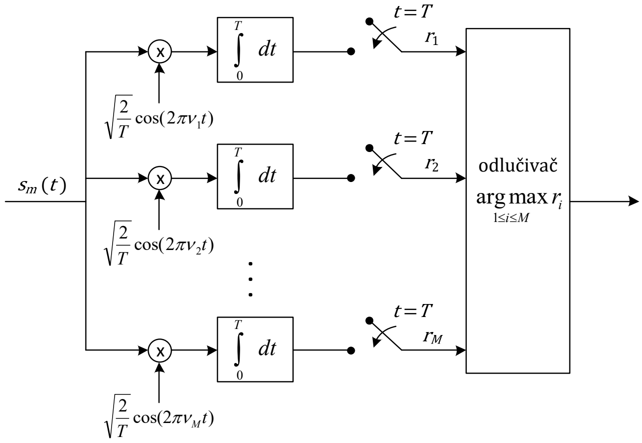
FSK

- Demodulacija može biti koherentna ili nekoherentna
- Bez obzira na tip demodulacije, prijemnik se sastoji segmenata (grana), gde je svaki segment prilagođen za prijem signala tačno jedne od nosećih frekvencija ν_i
- $\Delta\nu$ se bira tako da odzivi u granama koje nisu prilagođene za prijem signala date frekvencije, u odsustvu šuma, budu jednaki nuli
  - Drugim rečima, ako se tekućem signalizacionom intervalu prima signal frekvencije ν_i, u svim granama koje nisu prilagođene za prijem signala upravo ove frekvencije odziv, u odsustvu šuma, treba da bude jednak nuli
- Zbog gore navedenog, FSK spada u ortogonalne modulacije
  - Geometrijska predstava (konstelacija) M-FSK signala se sastoji od M tačaka raspoređenih u M dimenzija
  - Sve tačke su međusobno ekvidistantne
  - Svaka tačka je „susedna“ svim ostalim tačkama

    (Ne treba brkati „susedstvo“ i rastojanje na konstelacionom prikazu sa „susedstvom“ i rastojanjem nosećih frekvencija)

KOHERENTNO DEMODULISANA FSK (KOHERENTNA FSK)

- Pretpostavka je da se početne faze modulisanog signala znaju na prijemnoj strani
  - tj. da su lokalno generisani nosioci na predajnoj i prijemnoj strani u fazi
- U toku trajanja signalizacionog intervala ($0 \le t < T$), modulisani signal je:
  $s_m(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$,
  $f_0 \in \{\nu_i\ ;\ i = 1, \ldots, M\}$
- Blok šema prijemnika:
  - Za svaku noseću frekvenciju postoji grana u prijemniku prilagođena prijemu date frekvencije



Određivanje $\Delta\nu$

- Pretpostavimo da se u tekućem intervalu šalje signal

$$s_m(t) = A\cos(2\pi\nu_1 t)$$

- Uslov ortogonalnosti je:

$$r_i = 0, i \neq 1$$

- Posmatrajmo odziv u drugoj grani prijemnika:

$$r_2 = \int_0^T s_m(t)\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi\nu_2 t)dt = A\sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T \cos(2\pi\nu_1 t)\cos(2\pi\nu_2 t)dt$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2T}}\int_0^T \cos(2\pi(\nu_1+\nu_2)t)dt + \frac{A}{\sqrt{2T}}\int_0^T \cos(2\pi(\nu_2-\nu_1)t)dt$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\sin(2\pi(\nu_1+\nu_2)T)}{2\pi(\nu_1+\nu_2)} + \frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\sin(2\pi(\nu_2-\nu_1)T)}{2\pi(\nu_2-\nu_1)}$$

- Prvi sabirak sa desne strane ima vrednost 0 ako su noseće frekvencije celobrojni umnošci $1/2T$ (a čak i ako to nije slučaj on se može zanemariti jer je vrednost brojioca ograničena na interval $[-1,1]$, dok je vrednost imenioca veoma velika)

- Dobija se:

$$r_2 = \frac{A}{\sqrt{2T}} \frac{\sin(2\pi(\nu_2 - \nu_1)T)}{2\pi(\nu_2 - \nu_1)}$$

- r_2 će biti jednako 0 ako je:

$$\sin(2\pi(\nu_2 - \nu_1)T) = 0$$

  - odakle sledi:

$$\nu_2 - \nu_1 = \frac{m}{2T}, \qquad m = 1,2,\ldots$$

- Minimalno rastojanje između nosećih frekvencija je:

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{1}{2T}$$

- Lako se može pokazati da sa ovakvim izborom $\Delta\nu$ postiže da važi:

$$r_i = 0, i \neq 1$$

- Odziv u grani prilagođenoj za prijem ν_1 je:

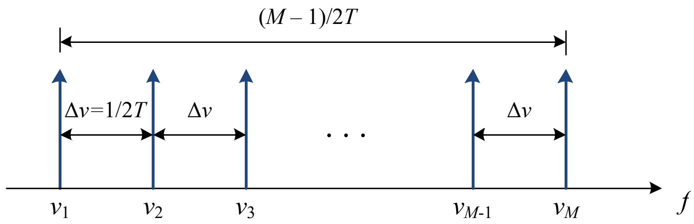
$$r_1 = \int_0^T s_m(t)\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi\nu_1 t)dt = A\sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T \cos^2(2\pi\nu_1 t)dt = \frac{A}{\sqrt{2T}}\int_0^T \cos(4\pi\nu_1 t)dt + \frac{A}{\sqrt{2T}}\int_0^T dt = A\sqrt{\frac{T}{2}}$$

- Takođe, u slučaju da je poslat signal noseće frekvencije ν_i $(i = 1, \ldots, M)$, za ovako izabrano $\Delta\nu$ odziv prijemnika će biti:

$$r_j = \begin{cases} A\sqrt{\frac{T}{2}} & j = i \\ 0 & j \neq \mathrm{i} \end{cases}$$

Širina spektra

- Tačan oblik i širinu spektra FSK modulisanog signala je teško analitički pokazati (radi se o nelinearnoj modulaciji)
  - Procenu širine spektra je jednostavno izvesti
- Da bi sistem sa koherentnom FSK neometano radio, potrebno je (otprilike) zauzeti čitav opseg između krajnjih nosećih frekvencija ν_1 i ν_M
  - Rastojanje između ν_1 i ν_M je $\frac{M-1}{2T}$ (vidi sliku)
  - Procena širine spektra je upravo $B \approx \frac{M-1}{2T} \approx \frac{M}{2T}$



Verovatnoća greške

- Tačan izraz za verovatnoću greške se može analitički izraziti, ali se mora numerički izračunati
- Postoji jednostavna procena verovatnoće greške koju je moguće lako izvesti i izračunati
- Može se pokazati da ako na ulazu prijemnika, pored modulisanog signala čija je frekvencija u tekućem signalizacionom intervalu jednaka ν_i, postoji i AWGN šum $n(t)$, da su odzivi u pojednim granama:

$$r_j = \begin{cases} A\sqrt{\frac{T}{2}} + n_{r,j} & j = i \\ n_{r,j} & j \neq \mathrm{i} \end{cases}$$

  - gde je:

$$n_{r,j} = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T n(t)\cos(2\pi\nu_j t)dt$$

- $n_{r,j}$ je obojeni Gausov šum, za koga važi:

$$E[n_{r,j}] = 0 \quad \mathrm{i} \quad \sigma^2[n_{r,j}] = P_{n_{r,j}} = \frac{N_0}{2}$$

- Osim toga, $n_{r,j}$ i $n_{r,j}$ su međusobno ortogonalne slučajne promenljive
  - Pošto im je raspodela Gausova, onda su i nezavisne
- Pretpostavimo da je signal u tekućem signalizacionom intervalu frekvencije ν_1
- Do greške prilikom odlučivanja će doći ukoliko je $r_1 < r_2$ ili $r_1 < r_3$ ili ... ili $r_1 < r_M$
  - Drugim rečima:

$$P_E = P[r_1 < r_2 \ \lor \ r_1 < r_3 \lor \ldots \lor r_1 < r_M]$$
$$\leq P[r_1 < r_2\,] + P[r_1 < r_3\,] + \cdots + P[r_1 < r_M\,]$$

(znak jednakosti važi ukoliko su događaji disjunktni, što nije slučaj)

  - Pošto su $r_2, \ldots, r_M$ nezavisne i identično raspodeljene slučajne promenljive (svaka od njih je u ostvari obojeni Gausov šum, primljen u odgovarajućoj grani), važi:

$$P_E \leq (M-1)P[r_1 < r_2\,] = P\left[A\sqrt{\frac{T}{2}} + n_{r,1} < n_{r,2}\right] = P\left[A\sqrt{\frac{T}{2}} < n_{r,2} - n_{r,1}\right]$$

- $n_{r,21} = n_{r,2} - n_{r,1}$ je takođe obojeni Gausov šum, za koji se lako pokazuje da važi:

$$E[n_{r,21}] = E[n_{r,2}] - E[n_{r,1}] = 0 \quad \text{i} \quad \sigma^2[n_{r,21}] = \sigma^2[n_{r,2}] + \sigma^2[n_{r,2}] = N_0$$

- Stoga je:

$$P_E \leq (M-1)Q\left(\frac{A\sqrt{\frac{T}{2}}}{\sigma\,[n_{r,21}]}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right)$$

- Snaga modulisanog signala je:

$$P_{s_m} = \frac{A^2}{2}$$

- A energija u toku signalizacionog intervala je:

$$E_{s_m} = \frac{A^2T}{2}$$

- Dobija se:

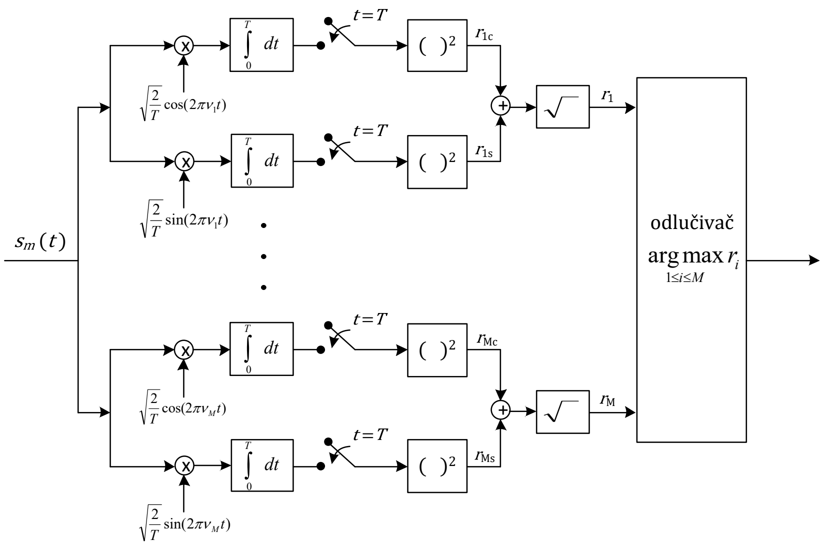
$$P_E \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_{s_m}}{N_0}}\right)$$

NEKOHERENTNO DEMODULISANA FSK (NEKOHERENTNA FSK)

- U slučaju nekoherentne demodulacije, prijemnik ne poznaje fazu modulisanog signala
  - Zbog toga u prijemniku za svaku noseću frekvenciju postoje dve grane – jedna prima komponentu signala u fazi (u odnosu na fazu lokalno generisanog nosioca na prijemnoj strani), a druga u kvadraturi (takođe u odnosu na fazu lokalno generisanog nosioca na prijemnoj strani)
- Smatraćemo da su početne faze lokalno generisanih nosilaca jednake 0
- Fazu poslatog signala, koja je nepoznata na prijemu, modelovaćemo kroz nepoznati početni fazni stav θ
- U toku trajanja signalizacionog intervala $(0 \leq t < T)$, modulisani signal je:

$$s_m(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta), \qquad f_0 \in \{\nu_i\ ;\ i = 1, \ldots, M\}$$

- Blok šema nekoherentnog FSK prijemnika:



Određivanje $\Delta\nu$

- Pretpostavimo da se u tekućem intervalu šalje signal

$$s_m(t) = A\cos(2\pi\nu_1 t + \theta)$$

- Uslov ortogonalnosti je:

$$r_i = 0, i \neq 1$$

- Posmatrajmo odziv u drugom segmentu prijemnika r_2
  - $r_2 = 0$ ukoliko su $r_{2c} = 0$ i $r_{2s} = 0$
  - Dobija se:

$$r_{2c} = \int_0^T s_m(t)\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi\nu_2 t)dt = A\sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T \cos(2\pi\nu_1 t + \theta)\cos(2\pi\nu_2 t)dt$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\sin(2\pi(\nu_1+\nu_2)T + \theta) - \sin(\theta)}{2\pi(\nu_1+\nu_2)} + \frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\sin(2\pi(\nu_2-\nu_1)T - \theta) - \sin(-\theta)}{2\pi(\nu_2-\nu_1)}$$

  - Prvi sabirak sa desne strane ima vrednost 0 ako su noseće frekvencije celobrojni umnošci $1/T$ (a čak i ako to nije slučaj on se može zanemariti jer je vrednost brojioca ograničena na interval $[-1,1]$, dok je vrednost imenioca veoma velika)

- Dalje je:

$$r_{2c} = \frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\sin(2\pi(\nu_2-\nu_1)T-\theta)+\sin(\theta)}{2\pi(\nu_2-\nu_1)}$$
$$= \frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\sin(2\pi(\nu_2-\nu_1)T)\cos\theta-(\cos(2\pi(\nu_2-\nu_1)T)-1)\sin\theta}{2\pi(\nu_2-\nu_1)}$$

- Gornji izraz će biti jednak nuli za svako θ ukoliko je $\sin(2\pi(\nu_2-\nu_1)T)=0$ i $\cos(2\pi(\nu_2-\nu_1)T)=1$, odnosno ukoliko je $\nu_2-\nu_1=\frac{m}{T},\ m=1,2,\ldots$
- Za granu u kvadraturi, na sličan način se može pokazati da važi:

$$r_{2s}=\int_0^T s_m(t)\sin(2\pi\nu_2 t)\,dt = A\sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T \cos(2\pi\nu_1 t+\theta)\sin(2\pi\nu_2 t)\,dt$$
$$=-\frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\cos(2\pi(\nu_1+\nu_2)T+\theta)-\cos(\theta)}{2\pi(\nu_1+\nu_2)}-\frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\cos(2\pi(\nu_2-\nu_1)T-\theta)-\cos(-\theta)}{2\pi(\nu_2-\nu_1)}$$
$$\approx -\frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\cos(2\pi(\nu_2-\nu_1)T-\theta)-\cos(\theta)}{2\pi(\nu_2-\nu_1)}$$
$$=-\frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{(\cos(2\pi(\nu_2-\nu_1)T)-1)\cos\theta+\sin(2\pi(\nu_2-\nu_1)T)\sin\theta}{2\pi(\nu_2-\nu_1)}$$

  - Gornji izraz će biti jednak nuli za svako θ ako važi $\nu_2-\nu_1=\frac{m}{T},\ m=1,2,\ldots$

- Minimalno rastojanje između nosećih frekvencija je stoga $\Delta\nu=\nu_2-\nu_1=\frac{1}{T}$
- Lako se može pokazati da se sa ovakvim izborom $\Delta\nu$ postiže da važi:

$$r_i=0, i\neq 1$$

- Odziv u grani prilagođenoj za prijem ν_1 je:

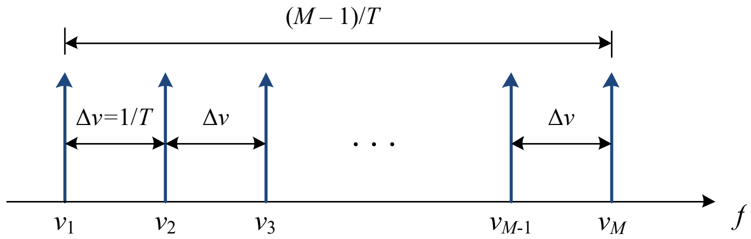
$$r_{1c}=\int_0^T s_m(t)\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi\nu_1 t)dt=\frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\sin(4\pi\nu_1 T+\theta)-\sin(\theta)}{4\pi\nu_1}+A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos\theta\approx A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos\theta$$
$$r_{1s}=\int_0^T s_m(t)\sqrt{\frac{2}{T}}\sin(2\pi\nu_1 t)dt=\frac{A}{\sqrt{2T}}\frac{\cos(4\pi\nu_1 T+\theta)-\cos(\theta)}{4\pi\nu_1}-A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\theta\approx -A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\theta$$
$$r_{1c}=\sqrt{r_{1c}^2+r_{1s}^2}=A\sqrt{\frac{T}{2}}$$

- Takođe, u slučaju da je poslat signal noseće frekvencije ν_i $(i=1,\ldots,M)$, za ovako izabrano $\Delta\nu$ odziv prijemnika će biti:

$$r_j=\begin{cases}A\sqrt{\frac{T}{2}} & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$$

Širina spektra

- Procenu širine spektra nekoherentne FSK je jednostavno izvesti, na isti način kao kod koherentne FSK
- Da bi sistem sa nekoherentnom FSK neometano radio, potrebno je (otprilike) zauzeti čitav opseg između krajnjih nosećih frekvencija ν_1 i ν_M
  - Rastojanje između ν_1 i ν_M je $\frac{M-1}{T}$ (vidi sliku)
  - Procena širine spektra je upravo $B \approx \frac{M-1}{T} \approx \frac{M}{T}$



Verovatnoća greške

- Smatramo da na ulazu u korelacioni prijemnik, pored modulisanog signala deluje i beli Gausov šum $n(t)$
- Pretpostavimo da je signal u tekućem signalizacionom intervalu frekvencije ν_1
- Važi:

$$r_{1c} = \int_0^T (s_m(t) + n(t)) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi\nu_1 t) dt = A\sqrt{\frac{T}{2}} \cos\theta + n_{1c}$$

$$r_{1s} = \int_0^T (s_m(t) + n(t)) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi\nu_1 t) dt = -A\sqrt{\frac{T}{2}} \sin\theta + n_{1s}$$

i, za $2 \leq j \leq M$:

$$r_{jc} = \int_0^T n(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi\nu_j t) dt = n_{jc}$$

$$r_{jc} = \int_0^T n(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi\nu_j t) dt = n_{js}$$

- gde je, za $1 \leq j \leq M$:

$$n_{jc} = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T n(t) \cos(2\pi \nu_j t) dt$$

$$n_{js} = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T n(t) \sin(2\pi \nu_j t) dt$$

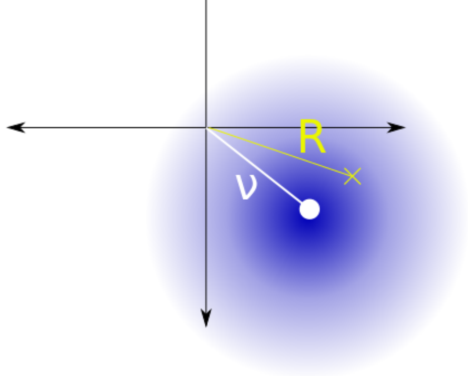
- n_{jc} i n_{js} su komponente obojenog Gausovog šuma u fazi i kvadraturi, za koje važi:

$$E[n_{jz}] = 0 \quad \text{i} \quad \sigma^2[n_{jz}] = \frac{N_0}{2}, \qquad 1 \leq j \leq M, \quad \text{z} \in \{\text{c}, \text{s}\}$$

- Odziv $r_1 = \sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2} = \sqrt{\left(A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos\theta + n_{1c}\right)^2 + \left(-A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\theta + n_{1s}\right)^2}$ u segmentu prijemnika koji je prilagođen prijemu učestanosti ν_1 je, zbog postojanja komponenti šuma n_{1c} i n_{1s}, slučajna promenljiva raspodeljena po Rajsovoj raspodeli:

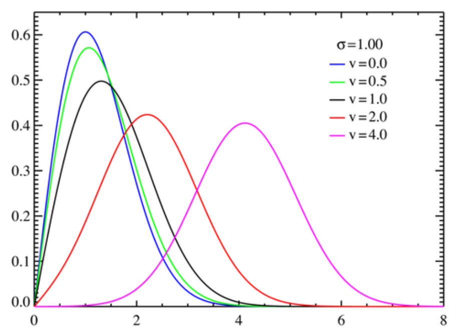
$$p_{r_1}(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+s^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{x \cdot s}{\sigma^2}\right), \qquad x > 0$$

Rice (Rayleigh) raspodele



- Gustina raspodele verovatnoća

$$f(x \mid \nu, \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2+\nu^2)}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right),$$



- Rajsova raspodela odgovara amplitudi (kružne) 2D normalne (Gausove) slučajne promenljive sa srednjim vrednostima koje mogu biti različite od nule.

gde su:

- $I_0(\;)$ modifikovana Beselova funkcija prve vrste nultog reda
- $s = \sqrt{E^2[r_{1c}^2] + E^2[r_{1s}^2]} = \sqrt{A^2 \frac{T}{2} \cos^2\theta + A^2 \frac{T}{2} \sin^2\theta} = A\sqrt{\frac{T}{2}}$
- $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$

- Važi:

$$\int_0^\infty p_{r_1}(x)dx = \int_0^\infty \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+s^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{x \cdot s}{\sigma^2}\right) dx = 1 \qquad (*)$$

- Vrednosti preostalih odziva $r_j = \sqrt{r_{jc}^2 + r_{js}^2} = \sqrt{n_{jc}^2 + n_{js}^2}$, $2 \le j \le M$, su slučajne promenljive raspodeljene po Rejlijevoj raspodeli:

$$p_{r_j}(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad x > 0$$

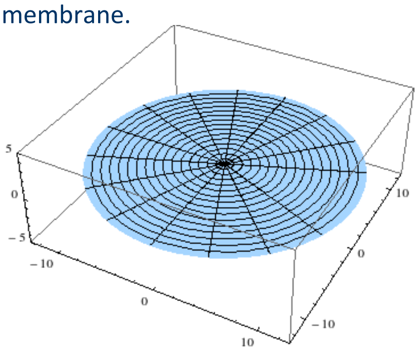
gde je $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$

Modifikovana Beselova funkcija prve vrste

- Bessel-ove funkcije predstavljaju generalno rešenje y(x) za diferencijalnu jednačinu:

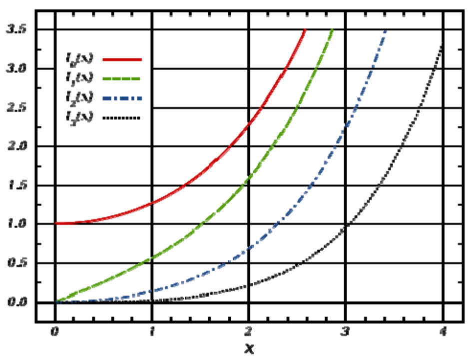
$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

- Bessel-ove funkcije čine radijalni deo za modove vibracije kružne membrane.



- Modifikovana Beselova funkcija prve vrste

$$I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$



- Verovatnoća ispravnog odlučivanja je:

$$P_C = P[r_2 < r_1, r_3 < r_1, \dots, r_M < r_1] = \int_0^\infty P[r_2 < r_1, r_3 < r_1, \dots, r_M < r_1 \mid r_1 = x] p_{r_1}(x) dx$$

$$= \int_0^\infty \prod_{j=2}^{M} P\left[r_j < r_1 \mid r_1 = x\right] p_{r_1}(x) dx$$

- S obzirom da su r_j, $2 \le j \le M$, nezavisne i identičino raspodeljene slučajne promenljive, verovatnoće $P\left[r_j < r_1 \mid r_1 = x\right]$ su jednake, pa je:

$$P_C = \int_0^\infty (P[r_2 < r_1 \mid r_1 = x])^{M-1} p_{r_1}(x) dx = \int_0^\infty (P[r_2 < r_1 \mid r_1 = x])^{M-1} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+s^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{x \cdot s}{\sigma^2}\right) dx$$

- Važi:

$$P[r_2 < r_1 \mid r_1 = x] = \int_0^x p_{r_2}(t) dt = \int_0^x \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- Dalje je:

$$(P[r_2 < r_1 \mid r_1 = x])^{M-1} = \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)^{M-1} = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \binom{M-1}{m} e^{-\frac{mx^2}{2\sigma^2}}$$

- Pa je:

$$P_C = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \binom{M-1}{m} \int_0^\infty e^{-\frac{mx^2}{2\sigma^2}} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+s^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{x \cdot s}{\sigma^2}\right) dx$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \binom{M-1}{m} \int_0^\infty \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{(m+1)x^2+s^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{x \cdot s}{\sigma^2}\right) dx$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \binom{M-1}{m} \frac{1}{m+1} \int_0^\infty \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2+s^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{t \cdot s}{\sqrt{m+1}\sigma^2}\right) dt$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \binom{M-1}{m} \frac{1}{m+1} e^{-\frac{mu^2}{2\sigma^2}} \int_0^\infty \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2+u^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{t \cdot u}{\sigma^2}\right) dt$$

gde je:

$$u^2 = \frac{s^2}{m+1}$$

- Pošto je:

$$\int_0^\infty \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2+u^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{t\cdot u}{\sigma^2}\right) dt = 1 \qquad \text{– vidi jednačinu označenu sa (*)}$$

dobija se:

$$P_C = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \binom{M-1}{m} \frac{1}{m+1} e^{-\frac{mu^2}{2\sigma^2}} = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \binom{M-1}{m} \frac{1}{m+1} e^{-\frac{m}{m+1}\cdot\frac{s^2}{2\sigma^2}}$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \binom{M-1}{m} \frac{1}{m+1} e^{-\frac{m}{m+1}\cdot\frac{E_{sm}}{N_0}}$$

- Verovatnoća greške je:

$$P_E = 1 - P_C = 1 - \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \binom{M-1}{m} \frac{1}{m+1} e^{-\frac{m}{m+1}\cdot\frac{E_{sm}}{N_0}}$$
$$= -\sum_{m=1}^{M-1} (-1)^m \binom{M-1}{m} \frac{1}{m+1} e^{-\frac{m}{m+1}\cdot\frac{E_{sm}}{N_0}} = \sum_{m=1}^{M-1} (-1)^{m+1} \binom{M-1}{m} \frac{1}{m+1} e^{-\frac{m}{m+1}\cdot\frac{E_{sm}}{N_0}}$$

- Jednostavna procena verovatnoće greške se dobija ukoliko se iz rezultujuće sume izdvoji samo prvi član:

$$P_E \approx \frac{M-1}{2} e^{-\frac{E_{sm}}{2N_0}}$$

- Za binarnu nekoherentnu FSK je (tačan izraz):

$$P_E = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_{sm}}{2N_0}}$$

- Može se pokazati da je, za dati odnos signal-šum $\frac{E_{sm}}{N_0}$, verovatnoća greške kod nekoherentne FSK veća nego kod koherentne FSK
  - Širina spektra (za dato M) je takođe veća kod nekoherentne nego kod koherentne FSK , i to dvostruko
- Prednost korišćenja nekoherentne FSK je jednostavna realizacija prijemnika pomoću detektora anvelopa (za svaku noseću učestanost po jedan)
  - Može se pokazati da se, analitički posmatrano, ovakav prijemnik ponaša isto kao prijemnik prikazan na slajdu 15

VEROVATNOĆA BITSKE GREŠKE

- Pošto su talasni oblici FSK modulisanog signala ortogonalni, ne postoji koncept susedstva informacionih simbola kao kod neortogonalnih modulacija (ASK, PSK)
  - Kod FSK, svi simboli su jedni drugima susedni
    - Ne postoji potreba za Grejovim kodovanjem
  - Ukoliko dođe do greške, pogrešno odlučeni simbol može biti bilo koji iz skupa informacionih simbola
    - Pošto u opštem slučaju ima M simbola, prijemnik može pogrešiti na $M-1$ načina (postoji $M-1$ „pogrešnih“ simbola)
      - Svaki simbol sadrži $\mathrm{ld}M$ bita
      - Za svaki dati bit „ispravnog“ simbola, $M/2$ pogrešnih simbola ima „pogrešan“ bit na istom mestu, a $M/2-1$ pogrešnih simbola ima ispravan bit na istom mestu
      - Posmatrano na nivou bita, prijemnik može da pogreši na $\frac{M/2}{M-1}$ načina
- Verovatnoća bitske greške je stoga:

$$P_b = \frac{M/2}{M-1} P_E = \frac{M}{2(M-1)} P_E \approx \frac{1}{2} P_E$$

Primer – 8FSK

prenošeni simbol

„pogrešni“ simboli

Simbol	Bitska sekvenca		
v_1	0	0	0
v_2	0	0	1
v_3	0	1	0
v_4	0	1	1
v_5	1	0	0
v_6	1	0	1
v_7	1	1	0
v_8	1	1	1

„ispravni“ biti

„pogrešni“ biti

- Za svaki bit prenošenog simbola, postoji 3 (tj. $M/2-1$) simbola koji se ne razlikuju na datom bitskom mestu (bitsko 0 u datom primeru) i 4 (tj. $M/2$) koji se razlikuju (bitsko 1 u datom primeru)
- Isto važi za sve bite i za sve simbole

- Za koherentnu FSK dobija se:

$$P_b = \frac{M}{2(M-1)} P_E = \frac{M(M-1)}{2(M-1)} Q\left(\sqrt{\frac{E_{s_m}}{N_0}}\right) = \frac{M}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_{s_m}}{N_0}}\right)$$

$$= \frac{M}{2} Q\left(\sqrt{\mathrm{ld} M \frac{E_{s_b}}{N_0}}\right)$$

gde je E_{s_b} energija emitovana po informacionom bitu

- Za nekoherentnu FSK dobija se:

$$P_b = \frac{M}{2(M-1)} P_E = \frac{M}{4} e^{-\frac{E_{s_m}}{2N_0}} = \frac{M}{4} e^{-\frac{E_{s_b}\mathrm{ld} M}{2N_0}}$$

SPEKTRALNA EFIKASNOST FSK MODULACIJE

- Spektralna efikasnost η je:

$$\eta = \frac{v_d}{B} = \frac{\operatorname{ld} M \, v_s}{B} = \frac{\operatorname{ld} M \, \frac{1}{T}}{B}$$

- Kod koherentne FSK je $B = \frac{M}{2T}$, pa je:

$$\eta = 2\frac{\operatorname{ld} M}{M}$$

- Kod koherentne FSK je $B = \frac{M}{T}$, pa je:

$$\eta = \frac{\operatorname{ld} M}{M}$$

- Očigledno da porastom veličine alfabeta M spektralna efikasnost FSK modulacije opada
  - Ovo je suštinski različito ponašanje u odnosu na ponašanje spektralne efikasnosti ASK i PSK modulacije u zavisnosti od M!

KRAJ