

Digitalne modulacije

Digitalna fazna modulacija

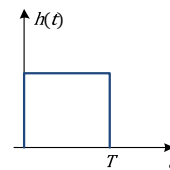
PSK (Phase Shift Keying)

- Modulisani signal je oblika:

$$s_m(t) = \sum_k Ah(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_k)$$

- gde je $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{drugde} \end{cases}$

- $h(t - kT)$ „prozorira“ k -ti signalizacioni interval



- Faze PSK signala φ_k (informacioni simboli) su iz M-arnog alfabeta:

$$\varphi_k = \Omega_i = \frac{2\pi}{M} i + \phi_0, \quad i = 1, \dots, M$$

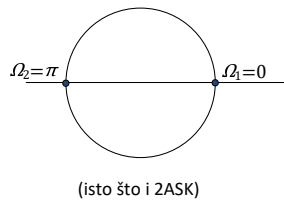
- ϕ_0 je početni fazni stav
- Susedne vrednosti faze su ekvidistantne

- Noseća frekvencija je obično obrnuto srazmerna trajanju signalizacionog intervala

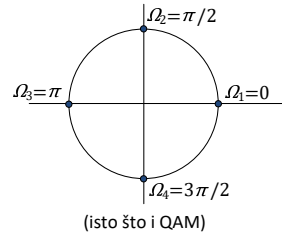
- $f_0 = \frac{n}{T}, \quad n \gg 1$

Primeri PSK konstelacija

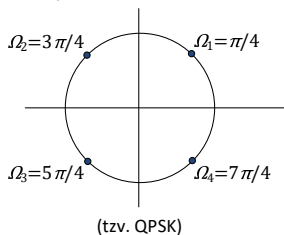
BPSK
 $M=2, \phi_0=0$



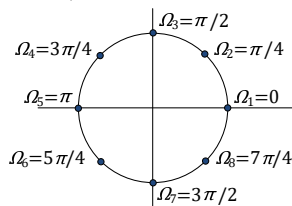
4PSK
 $M=4, \phi_0=0$



4PSK
 $M=4, \phi_0=\pi/4$



8PSK
 $M=8, \phi_0=0$



PSK modulator

- U toku trajanja signalizacionog intervala ($0 \leq t < T$), modulirani signal je:

$$s_m(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0), \quad \varphi_0 \in \left\{ \Omega_i = \frac{2\pi}{M} i + \phi_0; i = 1, \dots, M \right\}$$

- Modulirani signal se može rastaviti na komponente u fazi i kvadraturi:

$$s_m(t) = A \cos(\varphi_0) \cos(2\pi f_0 t) - A \sin(\varphi_0) \sin(2\pi f_0 t)$$

- Očigledno da se modulirani signal može dobiti kao linearna kombinacija kosinusa i sinusa učestanosti f_0 , što su i funkcije bazisa

- Ukoliko se želi da baziis bude ortonormalan, tada se on sastoji od:

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{ i } \quad \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t)$$

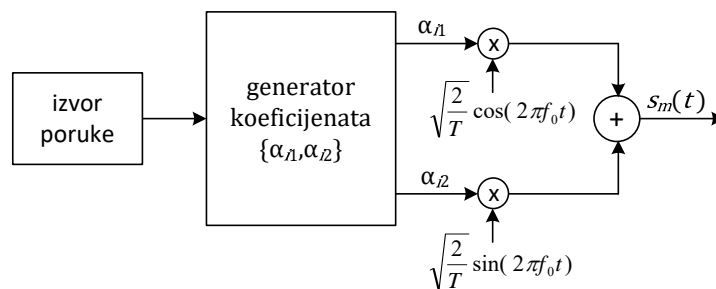
- Koeficijenti pomoću kojih se dobija modulirani signal su:

$$\alpha_{i1} = \sqrt{\frac{T}{2}} A \cos \Omega_i \quad \text{ i } \quad \alpha_{i2} = -\sqrt{\frac{T}{2}} A \sin \Omega_i, \quad i \in \{1, \dots, M\}$$

- Modulisani signal je:

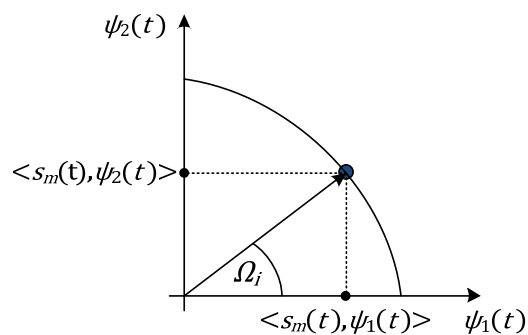
$$s_m(t) = \alpha_{i1} \cos(2\pi f_0 t) + \alpha_{i2} \sin(2\pi f_0 t), \quad i \in \{1, \dots, M\}$$

- Blok šema modulatora:



Korelacioni prijemnik PSK signala

- Zadatak prijemnika je da odredi fazu modulisanog signala
 - Projekcijom primljenog signala na bazu dobijaju se komponente u fazi i kvadraturi
 - Ugao (faza) koji primljeni signal zaklapa sa faznom osom može se odrediti iz ovih projekcija



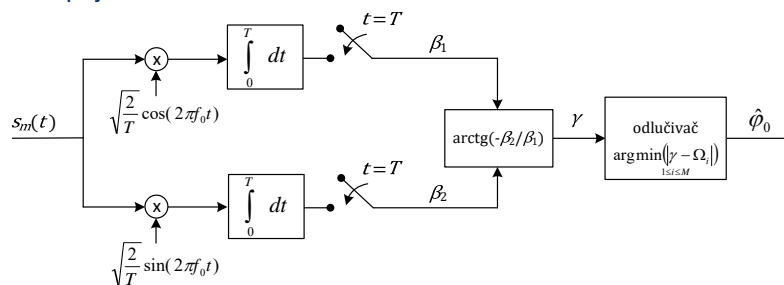
- Projekcije na bazu su:

$$\beta_1 = \langle s_m(t), \psi_1(t) \rangle = \sqrt{\frac{T}{2}} A \cos(\varphi_0), \quad \beta_2 = \langle s_m(t), \psi_2(t) \rangle = -\sqrt{\frac{T}{2}} A \sin(\varphi_0)$$

- Statistika na osnovu koje se određuje faza u datom signalizacionom intervalu se određuje na sledeći način:

$$\gamma = \arctg\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = \varphi_0$$

- Blok šema prijemnika:



Verovatnoća (simbolske) greške

- BPSK:
 - S obzirom da je BPSK ekvivalentna 2ASK modulaciji, verovatnoća greške BPSK se može izračunati preko izraza koji važe za ASK modulaciju
- Verovatnoća greške za MPSK ($M \geq 4$)
 - Tačan izraz za verovatnoću greške je teško izračunati, međutim, postoje dobre aproksimacije koje se lako izračunavaju
 - Pretpostavimo da su sve vrednosti faze apriori podjednako verovatne $P[\varphi_0 = \Omega_i] = \frac{1}{M}$, $i = 1, \dots, M$
 - Pragovi odlučivanja su u ovom slučaju na polovini ugaonog rastojanja između susednih Ω_i
 - Rastojanje između Ω_i i pripadajućih pragova odlučivanja je $\frac{\pi}{M}$
 - Usled delovanja šuma, pozicija primljenog simbola u prostoru kojeg definišu funkcije iz bazisa će u opštem slučaju odstupati od svoje vrednosti (idealne pozicije)
 - U slučaju PSK modulacije, prostor u kome se nalaze primljeni simboli predstavlja ravan

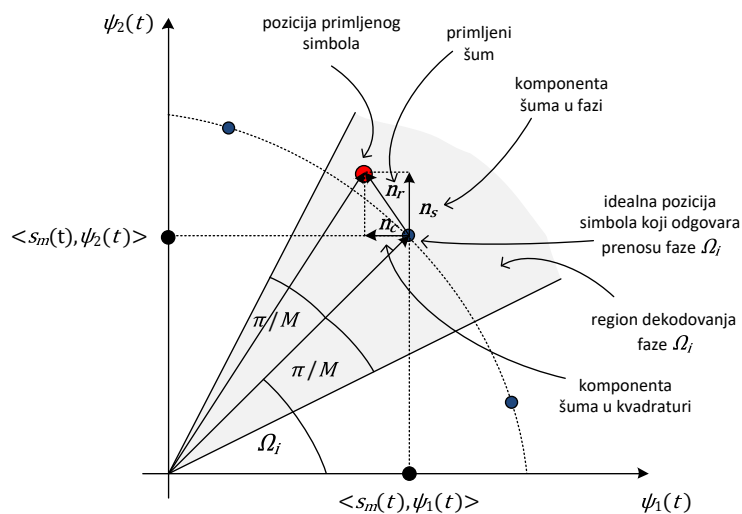
- Regioni odlučivanja predstavljaju isečke u ravni koji pokrivaju sve uglove između $\Omega_i - \frac{\pi}{M}$ i $\Omega_i + \frac{\pi}{M}$
- Svi regioni odlučivanja su istog oblika
- Verovatnoća greške je:

$$P_E = P[\hat{\varphi}_0 \neq \varphi_0] = \sum_{i=1}^M P[\hat{\varphi}_0 \neq \Omega_i, \varphi_0 = \Omega_i] =$$

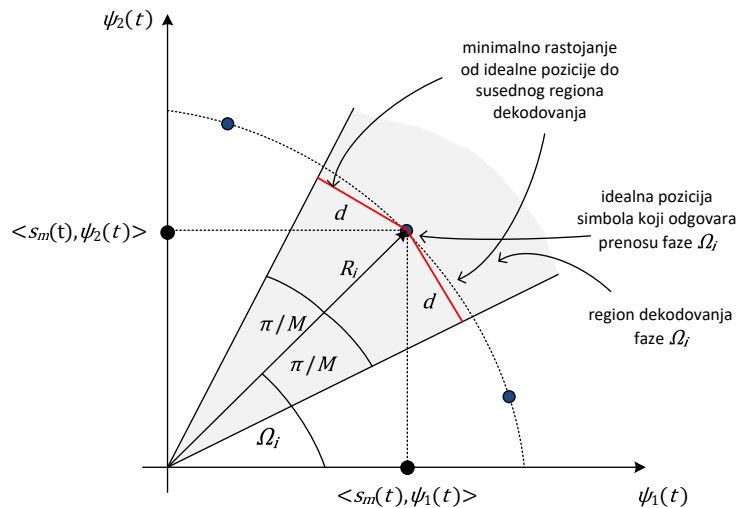
$$= \sum_{i=1}^M P[\hat{\varphi}_0 \neq \Omega_i | \varphi_0 = \Omega_i] P[\varphi_0 = \Omega_i] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P[\hat{\varphi}_0 \neq \Omega_i | \varphi_0 = \Omega_i]$$

- Pošto su svi regioni odlučivanja istog oblika, $P[\hat{\varphi}_0 \neq \Omega_i | \varphi_0 = \Omega_i]$ ne zavisi od i

- Do greške dolazi ukoliko je primljeni šum (reprezentovan vektorom n_r) takav da primljeni simbol završi u pogrešnom regionu dekodovanja



- Verovatnoća greške zavisi od intenziteta i pravca vektora n_r
- Minimalna vrednost n_r za koju dolazi do greške je prikazana na slici:



- Važi:

$$P[\hat{\phi}_o \neq \Omega_i \mid \phi_o = \Omega_i] \leq P[|n_r| > d]$$

- Drugim rečima, do greške sigurno dolazi samo ako je $|n_r| > d$ i ako se pravac n_r poklapa sa normalom povučenom iz idealne pozicije primljenog simbola (kada se šum može zanemariti) na granicu regiona dekodovanja
 - Za druge pravce n_r ne znači da će doći do greške ako je $|n_r| > d$
 - Otuda i znak nejednakosti u gornjem izrazu

- Sledi:

$$P_E \leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P[|n_r| > d] = P[|n_r| > d] = P[n_r < -d] + P[n_r > d] \\ = 2Q\left(\frac{d}{\sigma_{n_r}}\right)$$

- Sa druge strane, važi:

$$d = R_i \sin \frac{\pi}{M}$$

gde je:

$$\begin{aligned} R_i &= \sqrt{\langle s_m(t), \psi_1(t) \rangle^2 + \langle s_m(t), \psi_2(t) \rangle^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{T}{2}} A \cos \Omega_i \right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{T}{2}} A \sin \Omega_i \right)^2} = A \sqrt{\frac{T}{2}} \end{aligned}$$

pa je:

$$d = A \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \frac{\pi}{M}$$

- Snaga modulisanog signala je:

$$P_{sm} = \frac{A^2}{2}$$

- Sledi:

$$d = \sqrt{P_{sm} T} \sin \frac{\pi}{M}$$

- Takođe, važi:

$$\begin{aligned} n_r^2 &= n_c^2 + n_s^2 \\ P_{n_r} &= E[n_r^2] = E[n_c^2] + E[n_s^2] = \frac{N_0}{2} + \frac{N_0}{2} = N_0 \end{aligned}$$

pa je:

$$\sigma_{n_r} = \sqrt{P_{n_r}} = \sqrt{N_0}$$

- Sledi da je:

$$P_E \leq 2Q \left(\frac{\sqrt{P_{sm} T}}{\sqrt{N_0}} \sin \frac{\pi}{M} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{P_{sm} T}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{E_{sm}}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M} \right)$$

gde je E_{sm} energija modulisanog signala u toku signalizacionog intervala

- Količnik $\frac{E_{sm}}{N_0}$ predstavlja odnos signal šum

- Tačniji izraz za simbolsku verovatnoću greške dobija se transformacijom 2D Gausove raspodele iz Dekartovog koordinatnog sistema u polarni, određivanjem marginalne gustine po fazi i integracijom u regionu koji dovodi do greške:

$$P_E \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{2P_{sm}T}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_{sm}}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M} \right)$$

- Primećujemo da je u ovom slučaju argument Q funkcije veći $\sqrt{2}$ puta, što znači da će procenjena verovatnoća greške biti manja nego u prethodnom slučaju (u kojem je procenjena gornja granica).

Bitska verovatnoća greške

- Pretpostavimo da se koristi Grejov kod
- Bitska verovatnoća greške je:

$$P_b \approx \frac{P_E}{\lg M} = \frac{2}{\lg M} Q \left(\sqrt{\frac{2E_{sm}}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M} \right) = \frac{2}{\lg M} Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \lg M \sin \frac{\pi}{M} \right)$$

gde je $E_b = \frac{E_{sm}}{\lg M}$ energija koju emituje predajnik po informacionom bitu

Spektralna efikasnost

- Širina spektra koju zauzima PSK signal je ista kao kod ASK signala
 - Za razliku od ASK modulacije, postoje dva nosioca, ali su oba u istom opsegu (jedan je u fazi, drugi u kvadraturi)
 - Stoga je $B \sim v_s$, pa je spektralna efikasnost η

$$\eta = \frac{v_d}{B} = \frac{\log M v_s}{B} \sim \log M$$

- Porastom veličine alfabeta, spektralna efikasnost PSK modulacije raste
 - Pošto je srazmera između M i η logaritamska, ovaj porast je najviše izražen za male vrednosti M

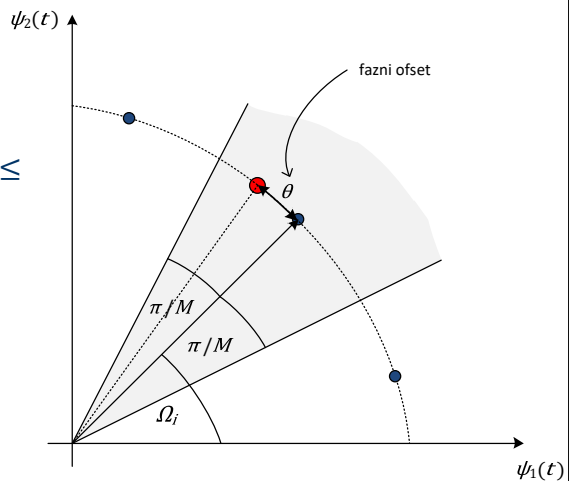
UTICAJ FAZNE GREŠKE NA PRIJEM PSK SIGNALA

- Pretpostavimo da postoji fazni ofset θ između nosilaca na predajnoj i prijemnoj strani (uticaj šuma se zanemaruje)
- Modelovaćemo fazni ofset u okviru modulisanog signala
 - Modulirani signal je, u toku signalizacionog intervala ($0 \leq t < T$):

$$s_m(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0 + \theta)$$

- Lako se pokazuje da je sada

$$\gamma = \arctg\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = \varphi_0 + \theta$$



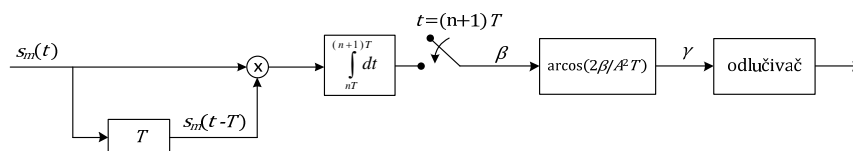
- Očigledno da je maksimalna vrednost faznog ofseta, posle kojeg dolazi do greške u odlučivanju:

$$|\theta_{max}| = \frac{\pi}{M}$$

- θ_{max} rapidno opada sa porastom M
 - PSK modulacija je znatno osetljivija na postojanje faznog ofseta nego ASK modulacija

DIFERENCIJALNA PSK (DPSK)

- Zbog osetljivosti na postojanje faznog ofseta, ideja je da se u potpunosti izbegne korišćenje lokalno generisanog nosioca na prijemnoj strani
- Za demodulaciju PSK signala u tekućem signalizacionom intervalu koristi se primljeni PSK signal iz prethodnog signalizacionog intervala
- Blok šema:



- Signal u tekućem intervalu ($nT \leq t < (n+1)T$) je:

$$s_m(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_n)$$

- Signal iz prethodnog intervala je:

$$s_m(t) = A \cos(2\pi f_0 (t - T) + \varphi_{n-1})$$

- Dalje je:

$$\begin{aligned}\beta &= \int_{nT}^{(n+1)T} s_m(t)s_m(t-T)dt = A^2 \int_{nT}^{(n+1)T} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_n) \cos(2\pi f_0(t-T) + \varphi_{n-1})dt \\ &= \frac{A^2}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \cos(2\pi f_0 T + \varphi_n - \varphi_{n-1})dt + \frac{A^2}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 T + \varphi_n + \varphi_{n-1})dt \\ &= \frac{A^2 T}{2} \cos(2\pi f_0 T + \varphi_n - \varphi_{n-1}) + 0 = \frac{A^2 T}{2} \cos(\Delta\varphi_n)\end{aligned}$$

pošto je po pretpostavci $f_0 = \frac{m}{T}$

- Vrednost statistike na osnovu koje se vrši dalje odlučivanje zavisi od fazne razlike u susednim intervalima $\Delta\varphi_n$
- Da bi se izbeglo prostiranje greške na prijemu, informacija se ne koduje u vrednosti faze modulisanog signala, već upravo u vrednosti fazne razlike $\Delta\varphi_n$
 - Drugim rečima, diferencijalna demodulacija PSK signala se vrši u kombinaciji sa diferencijalnim kodovanjem

- Zbog toga što se „zašumljeni“ signal demoduliše takođe „zašumljenim“ signalom, verovatnoća greške DPSK modulacije je veća nego kod standardne PSK modulacije

KRAJ