Digitalne modulacije

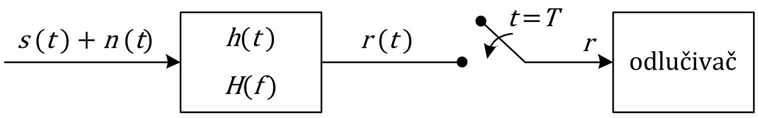
Optimalni prijemnik

Uvod

- Posmatramo digitalni signal $s(t)$ u toku signalizacionog intervala $0 \leq t < T$ (za sve ostale signalizacione intervale važi isto):

$$s(t) = x_i(t), \qquad i \in \{1, \dots, M\}$$

  - gde su $x_i(t)$, $i = 1, \dots, M$, potencijalni talasni oblici digitalnog signala
- Digitalnom signalu se tokom prenosa superponira šum $n(t)$
  - Pretpostavka je da je u pitanju aditivni beli Gausov šum (AWGN)
- Optimalni prijemnik je linearni sklop (filtar), čiji je zadatak da maksimizuje odnos signal-šum na kraju signalizacionog intervala, kako bi se maksimizovala verovatnoća donošenja ispravne odluke o tome koja se poruka prenosila u datom signalizacionom intervalu



Optimalni prijemnik

- Prijemnik poseduje impulsni odziv $h(t)$ i prenosnu karakteristiku $H(f)$
- Odziv prijemnika je:

$$r(t) = \big(s(t) + n(t)\big) * h(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t)$$
$$= s_r(t) + n_r(t)$$

gde je $s_r(t)$ korisni deo primljenog signala, a $n_r(t)$ obojeni šum

- U trenutku odlučivanja je:

$$r = r(T) = s_r(T) + n_r(T)$$

- Srednja snaga obojenog šuma je :

$$P_{n_r} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_r}(f)df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

gde je $S_{n_r}(f)$ SGSS obojenog šuma $n_r(T)$:

$$S_{n_r}(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2$$

- Korisni deo signala je:

$$s_r(t) = s(t) * h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)H(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi f t}df$$

- Na kraju signalizacionog intervala ($t = T$) važi:

$$s_r(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi f T}df$$

- Odnos signal-šum na kraju intervala je:

$$\left(\frac{S}{N}\right)\Big|_{t=T} = \frac{{s_r}^2(T)}{P_{n_r}} = \frac{|s_r(T)|^2}{P_{n_r}} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi f T}df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df}$$

  - Jednakost ${s_r}^2(T) = |s_r(T)|^2$ važi jer, po pretpostavci, $s_r(T)$ je realna vrednost

Maksimalni odnos signal-šum

- Po Koši-Švarcovoj nejednakosti sledi:

$$\left(\frac{S}{N}\right)\Big|_{t=T} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi fT}df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df} \le \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|S(f)e^{j2\pi fT}\right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df}$$

  pri čemu jednakost važi ukoliko je:

$$H(f) = k\left(S(f)e^{j2\pi fT}\right)^*, \qquad k = \text{const}$$

- Maksimalni odnos signal-šum je stoga:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{max}\Big|_{t=T} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|S(f)e^{j2\pi fT}\right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}|S(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2}}$$

  - S obzirom da izbor k ne utiče na odnos signal-šum, smatraćemo $k = 1$

Impulsni odziv optimalnog prijemnika

- Na osnovu prethodno izvedenog, prenosna karakteristika optimalnog prijemnika, kojom se maksimizuje odnos signal-šum, je:

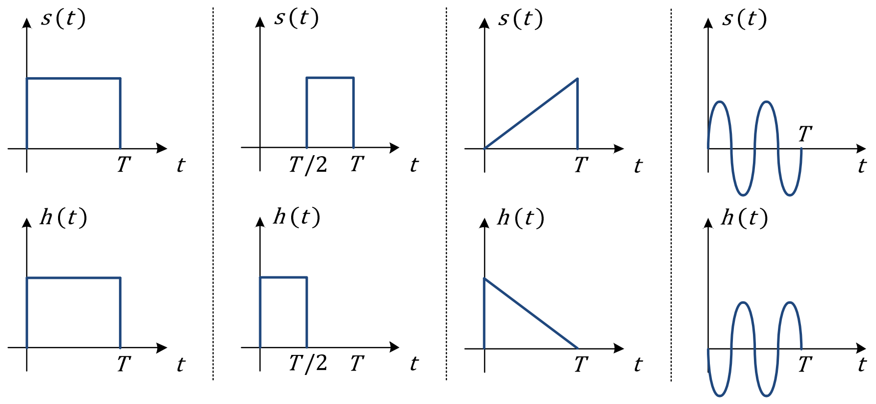
$$H(f) = \left(S(f)e^{j2\pi fT}\right)^* = S(f)^* e^{-j2\pi fT}$$

  - Očigledno da je prenosna karakteristika optimalnog prijemnika prilagođena Furijeovoj transformaciji signala koji se prima
    - Za očekivati je da će i impulsni odziv biti prilagođen signalu
  - Optimalni prijemnik se stoga naziva i prilagođenim filtrom (*matched filter*)
- Impulsni odziv prilagođenog filtra je:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)^* e^{-j2\pi fT}e^{j2\pi ft}df$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{j2\pi f(T-t)}df\right)^* = s^*(T-t) = s(T-t)$$

- Očigledno, impulsni odziv prilagođenog filtra je kopija signala koji se prima, koja je prvo rotirana oko tačke $t = 0$, a zatim zakašnjena za T
- Primeri:

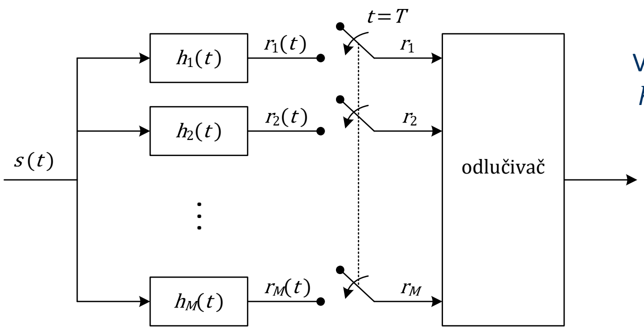


Blok šema optimalnog prijemnika

- Već je napomenuto da tokom signalizacionog intervala važi:

$$s(t) = x_j(t), \qquad i \in \{1, \dots, M\}$$

  - gde su $x_i(t)$, $i = 1, \dots, M$, potencijalni talasni oblici digitalnog signala
- Stoga se optimalni prijemnik sastoji od M grana, svaka grana je prilagođena jednom od potencijalnih talasnih oblika



Važi:
$h_i(t) = x_i(T - t), i = 1, \dots, M$

Odlučivač na osnovu odbiraka $r_1, \dots, r_M$ procenjuje koji je simbol, tj. talasni oblik, najverovatnije bio poslat.

Korelacioni prijemnik

- Odziv optimalnog prijemnika u trenutku odlučivanja je (za sada zanemarujemo uticaj šuma):

$$\mathrm{r}(T)=s(T)*h(T)=\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau$$

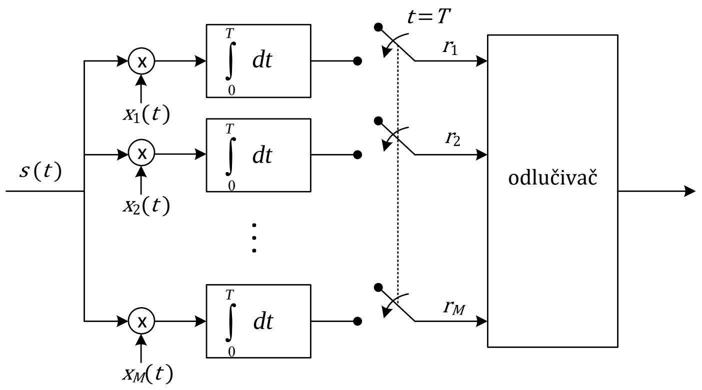
- Važi:
  - $h(t)=s(T-t) \quad \Longrightarrow \quad h(T-\tau)=s\big(T-(T-\tau)\big)=s(\tau)$
- Sledi da je:

$$\mathrm{r}(T)=\int_0^T s(\tau)s(\tau)d\tau=\int_0^T s^2(\tau)d\tau$$

  - Očigledno, odziv optimalnog prijemnika u trenutku odlučivanja je vrednost korelacije $\langle s(t), s(t)\rangle$
- Stoga se optimalni prijemnik može, umesto pomoću prilagođenog filtra, realizovati u obliku korelatora
  - Prilagođeni filtar i korelator imaju isti odziv samo na kraju signalizacionog intervala!

Blok šema korelacionog prijemnika

- U svakoj grani korelacionog prijemnika se vrši korelacija primljenog signala se jednim od potencijalnih talasnih oblika
- Na osnovu dobijenih odbiraka (korelacija), odlučivač donosi odluku o poslatom simbolu



Po završetku svakog signalizacionog intervala, integratori u korelacionom prijemniku se isprazne (*integrate and dump*), i zatim počinje prijem u narednom signalizacionom Intervalu.

Realizacija korelacionog prijemnika preko bazisa funkcija

- Talasni oblici digitalnog signala $x_i(t),\ i = 1, \dots, M$, mogu se predstaviti preko bazisa $\psi_j(t),\ j = 1, \dots, N$

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}\psi_j(t), \qquad i = 1, \dots, M$$

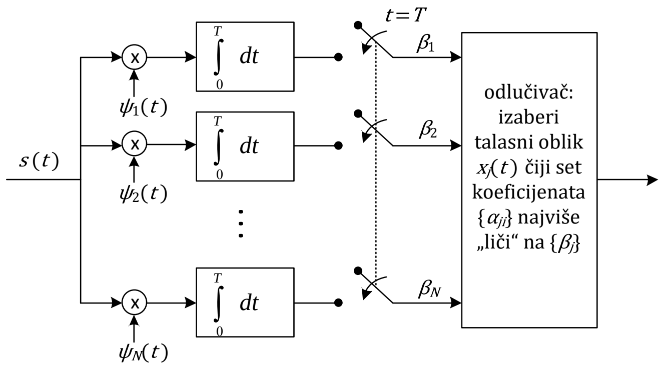
- Primljeni signal $s(t)$, umesto da se koreliše sa $\{x_i(t), i = 1, \dots, M\}$, može da se koreliše sa $\{\psi_j(t),\ j = 1, \dots, N\}$
  - Odluka o tome koji se talasni oblik prima može da se donese na osnovu koeficijenata $\beta_j = \langle s(t), \psi_j(t)\rangle = \int_0^T s(t)\psi_j(t)dt\,, j = 1, \dots, N$
- Pretpostavimo da je signal koji se prima $s(t) = x_k(t)$
  - Tada je:

$$\beta_j = \langle s(t), \psi_j(t)\rangle = \langle x_k(t), \psi_j(t)\rangle = \langle \textstyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ki}\psi_i(t)\,, \psi_j(t)\rangle = \alpha_{kj}$$

  - Drugim rečima, dobijeni skup koeficijenata $\{\beta_j, j = 1, \dots, N\}$ biće jednak skupu $\{\alpha_{kj}, j = 1, \dots, N\}$, što znači da je primljeni signal u stvari $x_k(t)$

Blok šema korelacionog prijemnika realizovanog preko bazisa funkcija

- U praksi se šum ne može zanemariti (na prijemu je signal $s(t) + n(t)$), stoga se skup izračunatih koeficijenat $\{\beta_j, j = 1, \dots, N\}$ u opštem slučaju neće poklapati ni sa jednim skupom $\{\alpha_{ji}, i = 1, \dots, N\},\ j = 1, \dots, M$
  - Za primljeni signal se bira onaj talasni oblik čiji koeficijenti $\{\alpha_{ji}, i = 1, \dots, N\}$ najviše „liče" na izračunati skup $\{\beta_j, j = 1, \dots, N\}$



- Prednost realizacije korelacionog prijemnika preko bazisa je u tome što poseduje N grana
  - Pošto je $N \leq M$, ova realizacija potencijalno poseduje manje grana u odnosu na korelacioni prijemnik prikazan na slajdu 10

- Korišćenjem mikroprocesora specijalizovaniih za obradu digitalnih signala (DSP – Digital Signal Processor), korelacioni prijemnik se može efikasno implementirati u praksi. Signal na prijemu se prvo odabira (frekvencijom f_S koja je obično za red veličine veća od minimalne frekvencije odabiranja). Dobijeni odbirci se zatim množe sa odgovarajućim odbircima funkcija iz bazisa $\psi_j(nT_S)$, a potom se umesto integrala izračunavaju sume $\beta_j = \sum_n s(nT_S)\psi_j(nT_S)\,, j = 1, \dots, M$, na osnovu kojih se donosi odluka.

Korelacioni prijemnik i šum

- S obzirom da je korelacioni prijemnik linearni sklop, uticaj šuma na prijemu može se posmatrati odvojeno
- Pretpostavimo da je na ulazu u korelacioni prijemnik beli Gausov šum n(t)
- Odzivi u pojedinim granama korelatora su:

$$\langle n(t), \psi_j(t)\rangle = \int_0^T n(t)\psi_j(t)dt = n_{rj}, \qquad j = 1, \dots, N$$

  - n_{rj} je obojeni Gausov šum
- Srednja vrednost n_{rj} je:

$$E[n_{rj}] = E\left[\int_0^T n(t)\psi_j(t)dt\right] = \int_0^T E[n(t)]\,\psi_j(t)dt = 0$$

- Snaga n_{rj} je:

$$P_{n_{rj}} = E\left[{n^2}_{rj}\right] = E\left[n_{rj}n_{rj}\right] = E\left[\int_0^T n(t)\psi_j(t)dt \int_0^T n(s)\psi_j(s)ds\right] =$$

$$= \iint_{0\,0}^{T\,T} E[n(t)n(s)]\psi_j(t)\psi_j(s)dtds = \iint_{0\,0}^{T\,T} \frac{N_0}{2}\delta(s-t)\psi_j(t)\psi_j(s)dtds$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T \left[\int_0^T \psi_j(s)\delta(s-t)ds\right]\psi_j(t)dt = \frac{N_0}{2}\int_0^T \left[\int_0^T \delta(s-t)ds\right]\psi_j(t)\psi_j(t)dt$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T \psi_j(t)\psi_j(t)dt = \frac{N_0}{2}\langle\psi_j(t)\psi_j(t)\rangle = \frac{N_0}{2}K_j$$

- Ako je bazis ortonormalan, tada je:

$$P_{n_{rj}} = \frac{N_0}{2}$$

- Drugim rečima, u svakoj grani korelacionog prijemnika deluje šum snage $P_{n_{rj}} = \frac{N_0}{2}K_j, \quad j = 1, \dots, N$
- Varijansa n_{rj} je:

$$\sigma^2_{n_{rj}} = \sigma^2[n_{rj}] = E\left[{n^2}_{rj}\right] - E^2[n_{rj}] = E\left[{n^2}_{rj}\right] = P_{n_{rj}} = \frac{N_0}{2}K_j$$

- Ukupan primljeni šum je:

$$n_r = \sum_{j=1}^{N} n_{rj}\psi_j(t) = \sum_{j=1}^{N}\langle n(t), \psi_j(t)\rangle\,\psi_j(t)$$

  - n_r je relevantni šum, sav ostali šum je isfiltriran u prijemniku (irelevantni šum)
- Komponente primljenog šuma $n_{rj}, \quad j = 1, \dots, N$ su međusobno ortogonalne
  - Pošto je u pitanju Gausov šum, to znači da su i nezavisne

- Lako se pokazuje da je:

$$E[n_r] = 0$$

- Takođe, lako se pokazuje da važi:

$$\sigma_{n_r}^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{n_{rj}}^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{N_0}{2} K_j$$

pa je ukupna snaga primljenog šuma:

$$P_{n_r} = \sigma_{n_r}^2 = \sum_{j=1}^{N} Pn_{rj} = \sum_{j=1}^{N} \frac{N_0}{2} K_j$$

- U slučaju ortonormalnog bazisa je:

$$P_{n_{rj}} = \frac{N_0}{2} \quad \text{i} \quad P_{n_r} = \frac{N}{2} N_0$$

- Ukupan odziv (odziv na signal i šum) u pojedinim granama korelacionog prijemnika biće:

$$\beta_j = \langle s(t) + n(t), \psi_j(t) \rangle = \langle s(t), \psi_j(t) \rangle + \langle n(t), \psi_j(t) \rangle$$
$$= \langle s(t), \psi_j(t) \rangle + n_{rj}, \qquad j = 1, \dots, N$$

- Ako pretpostavimo da je $s(t) = x_k(t)$, dobija se:

$$\beta_j = \alpha_{kj} + n_{rj}, \qquad j = 1, \dots, N$$

KRAJ