Digitalne modulacije

Digitalna amplitudska modulacija

Uvod

- Digitalna amplitudska modulacija može imati sve varijante kao i analogna amplitudska modulacija:
  - KAM
  - AM-2BO
  - AM-1BO
  - AM-NBO
  - QAM
- U ovom kursu fokus će biti samo na AM-2BO i QAM modulacijama

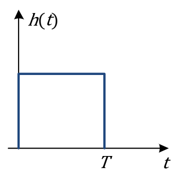
ASK

ASK (*Amplitude Shift Keying*)

- ASK je najjednostavnija varijanta AM-2BO modulacije
- Modulisani signal je oblika:

$$s_m(t) = \sum_k a_k h(t - kT)\cos(2\pi f_0 t)$$

  - gde je $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & drugde \end{cases}$
    - $h(t - kT)$ „prozorira“ *k*-ti signalizacioni interval



- Amplitude ASK signala a_k (informacioni simboli) su iz M-arnog alfabeta (unipolarnog ili polarnog), $a_k \in \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$
- Noseća frekvencija je obično obrnuto srazmerna trajanju signalizacionog intervala
  - $f_0 = \frac{n}{T},\ \ n \gg 1$

ASK

- U toku trajanja signalizacionog intervala $(0 \leq \mathrm{t} < T)$, modulisani signal je:

$$s_m(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t), \qquad a_0 \in \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$$

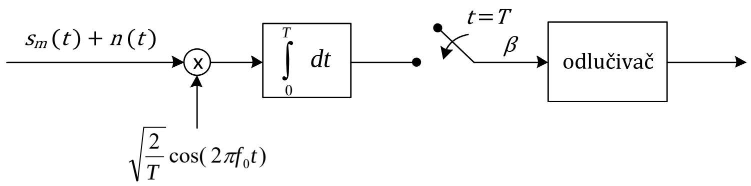
  - tj. modulisani signal je kosinus čija je amplituda u svakom signalizacionom intervalu slučajna promenljiva
- Očigledno da postoji samo jedna funkcija $\psi(t)$ u bazisu – kosinus učestanosti f_0
  - Ukoliko se želi da bazis bude ortonormalan, tada je $\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_0 t)$
    - Dokaz:

$$\langle \psi(t), \psi(t) \rangle = \frac{2}{T} \langle \cos(2\pi f_0 t), \cos(2\pi f_0 t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_0^T \frac{1}{2} dt + \int_0^T \cos(4\pi f_0 t)\, dt \right] = \frac{2}{T} \left[\frac{T}{2} + 0 \right] = 1$$

Korelacioni prijemnik ASK signala

- Blok šema:



- Ovo je tzv. koherentni prijemnik – pretpostavka je da su lokalno generisani nosioci na predajnoj i prijemnoj strani iste početne faze (uzima se da je početna faza 0)
- Statistika na osnovu koje se vrši odlučivanje (*decision statistics*) je:

$$\beta = \int_0^T (s_m(t) + n(t)) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{T}} a_0 \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t) dt +$$

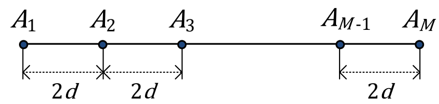
$$\sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T n(t) \cos(2\pi f_0 t) dt = \sqrt{\frac{2}{T}} a_0 \left(\int_0^T \frac{1}{2} dt + \int_0^T \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t) dt \right) + n_r$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{T}} a_0 \left(\frac{T}{2} + 0\right) + n_r = \sqrt{\frac{T}{2}} a_0 + n_r$$

- Snaga obojenog šuma n_r je:

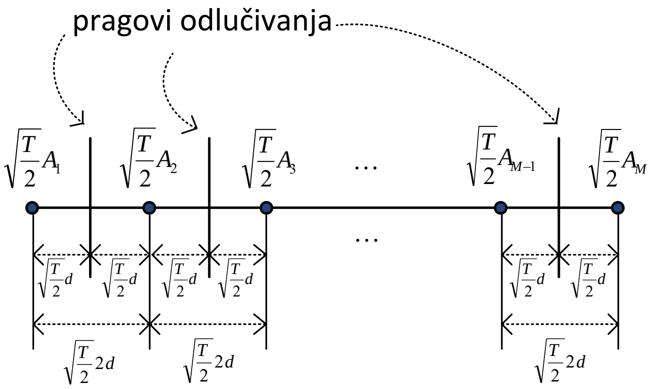
$$P_{n_r} = \frac{N_0}{2} \langle \psi(t), \psi(t) \rangle = \frac{N_0}{2}$$

- Kao što je već rečeno, a_0 je iz M-arnog alfabeta, $a_o \in \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$
  - Susedne vrednosti iz alfabeta su ekvidistantne i međusobno udaljene $2d$



  - Na prijemu je korisni deo signala $\sqrt{T/2}\, a_0$, pa je stoga novo rastojanje između vrednosti alfabeta na prijemu $\sqrt{T/2} \cdot 2d$

- Konstelacija na prijemu je:



- Pretpostavka je da su vrednosti simbola iz alfabeta apriori jednakoverovatne – $P[a_0 = A_i] = \frac{1}{M}, i = 1, \dots, M$, pa se pragovi odlučivanja nalaze na sredini intervala

Verovatnoća (simbolske) greške kod ASK

- Poređenjem izračunate vrednosti β sa pragovima odlučivanja, prijemnik donosi odluku koja je vrednost iz informacionog alfabeta bila poslata
  - Obeležimo donešenu odluku sa $\hat{a}_o$
- Verovatnoća donošenja pogrešne odluke (verovatnoća greške) je:

$$P_E = P[\hat{a}_o \neq a_0] = \sum_{i=1}^{M} P[\hat{a}_o \neq A_i, a_0 = A_i] = \sum_{i=1}^{M} P[\hat{a}_o \neq A_i, a_0 = A_i]$$
$$= \sum_{i=1}^{M} P[\hat{a}_o \neq A_i \mid a_0 = A_i]\, P[a_0 = A_i] = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P[\hat{a}_o \neq A_i \mid a_0 = A_i]$$

- Za vrednosti $A_i = A_2, \ldots, A_{M-1}$ važi:

$$P[\hat{a}_o \neq A_i \mid a_0 = A_i] = P\left[|n_r| > \sqrt{\frac{T}{2}}d\right]$$

jer do greške dolazi ukoliko je vrednost šuma na prijemu veća od polovine rastojanja između simbola u konstelaciji na prijemu (tada će šum „odvući“ poslati simbol u pogrešan region odlučivanja)

- Važi:

$$P\left[|n_r| > \sqrt{\frac{T}{2}}d\right] = P\left[-\sqrt{\frac{T}{2}}d > n_r\right] + P\left[\sqrt{\frac{T}{2}}d < n_r\right] = 2P\left[\sqrt{\frac{T}{2}}d < n_r\right]$$

gde poslednja jednakost važi zbog toga što je n_r Gausova slučajna promenljiva srednje vrednosti 0 (tj. raspodela n_r je parna funkcija)

- Takođe, važi:

$$P\left[\sqrt{\frac{T}{2}}d < n_r\right] = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{T}{2}}d}{\sigma_{n_r}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{T}{2}}d}{\sqrt{P_{n_r}}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{T}{2}}d}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{T}{N_0}}d\right)$$

- Dobija se da je za $A_i = A_2, \ldots, A_{M-1}$:

$$P[\hat{a}_o \neq A_i \mid a_0 = A_i] = 2Q\left(\sqrt{\frac{T}{N_0}}d\right)$$

- Za $A_i = A_1$ je:

$$P[\hat{a}_o \neq A_1 \mid a_0 = A_1] = P\left[\sqrt{\frac{T}{2}}d < n_r\right] = Q\left(\sqrt{\frac{T}{N_0}}d\right)$$

- Za $A_i = A_M$ je:

$$P[\hat{a}_o \neq A_M \mid a_0 = A_M] = P\left[-\sqrt{\frac{T}{2}}d > n_r\right] = P\left[\sqrt{\frac{T}{2}}d < n_r\right] = Q\left(\sqrt{\frac{T}{N_0}}d\right)$$

- Konačno, dobija se:

$$P_E = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P[\hat{a}_o \neq A_i \mid a_0 = A_i] = \frac{1}{M}\left[Q\left(\sqrt{\frac{T}{N_0}}d\right) + (M-2)2Q\left(\sqrt{\frac{T}{N_0}}d\right) + Q\left(\sqrt{\frac{T}{N_0}}d\right)\right]$$

$$= 2\frac{M-1}{M}Q\left(\sqrt{\frac{T}{N_0}}d\right)$$

- Polovina rastojanja između vrednosti u alfabetu d zavisi od snage emitovanog signala
- Ako pretpostavimo da je u pitanju polarni alfabet, može se pokazati da je:

$$d = \sqrt{\frac{6}{M^2-1}P_{s_m}}$$

gde je P_{s_m} srednja snaga modulisanog signala

- Dobija se:

$$P_E = 2\frac{M-1}{M}Q\left(\sqrt{\frac{T}{N_0}}d\right) = 2\frac{M-1}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6TP_{s_m}}{(M^2-1)N_0}}\right)$$

$$= 2\frac{M-1}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}\frac{E_{s_m}}{N_0}}\right)$$

gde je E_{s_m} srednja energija modulisanog signala emitovana tokom signalizacionog intervala (srednja energija emitovana po informacionom simbolu)

Bitska verovatnoća greške

- Kod M-arne modulacije, vrednosti informacionih simbola se koduju sa $\mathrm{ld}\, M$ bita
- Pretpostavimo da se za kodovanje koristi Grejov kod
  - Susedne vrednosti u alfabetu se razlikuju za jedan bit
- U slučaju ASK modulacije, ako se desi simbolska greška, daleko je najverovatniji slučaj da će umesto ispravnog simbola odlučivač odlučiti da je primljen jedan od susednih simbola
  - Ako se koristi Grejov kod, to znači da će, ukoliko se desi simbolska greška, samo jedan od $\mathrm{ld}\, M$ bita biti pogrešan
- Bitska verovatnoća greške je stoga:

$$P_b \approx \frac{P_E}{\mathrm{ld}\, M} = 2\frac{M-1}{\mathrm{ld}\, M \cdot M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}\frac{E_{s_m}}{N_0}}\right)$$

- Energija koju emituje predajnik po informaciom bitu je $E_b = \frac{E_{s_m}}{\mathrm{ld}\ M}$, stoga je:

$$P_b \approx 2\frac{M-1}{\mathrm{ld}\, M \cdot M} Q\left(\sqrt{\frac{6\,\mathrm{ld}\, M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Bitska verovatnoća greške je jedan od osnovnih parametara koji služi za poređenje različitih modulacionih postupaka
- Lako se može pokazati da za fiksirani odnos signal-šum (tj. $\frac{E_{s_m}}{N_0}$), sa porastom broja veličine alfabeta ($M \nearrow$) i P_E i P_b rastu
  - Drugim rečima, sa stanovišta P_E i P_b, binarna modulacija je najbolji izbor

- Komentar 1:
  - Izraz za verovatnoću greške ASK ima isti oblik kao izraz za verovatnoću greške kod prenosa u osnovnom opsegu kada ne postoji inter-simbolska interferencija
    - To se moglo i očekivati, s obzirom da izraz za odziv ASK prijemnika, $\beta = \sqrt{\frac{T}{2}}a_0 + n_r$, ima isti oblik kao i odziv prijemnika prilagođenog prenosu u osnovnom opsegu $\beta = a_0 h(0) + n_r$
- Komentar 2:
  - Isti izraz za ASK verovatnoću greške bi se dobio i u slučaju da bazis nije ortonormalan
    - Npr, da je umesto $\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_0 t)$ korišćeno $\psi(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

Spektralna efikasnost

- Drugi parametar za ocenu modulacionog postupka je spektralna efikasnost η

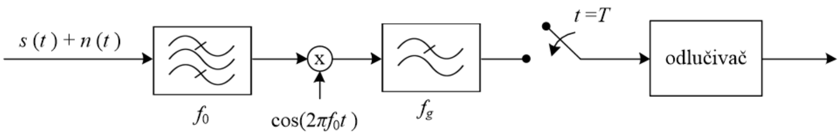
$$\eta = \frac{v_d}{B} = \frac{\mathrm{ld}\, M\, v_s}{B}$$

  gde je v_d digitalni protok, v_s brzina signalizacije, a B zauzeta širina spektra

- S obzirom da kod digitalne amplitudske modulacije važi $B \sim v_s$, sledi da je $\eta \sim \mathrm{ld} M$
  - Porastom veličine alfabeta, spektralna efikasnost digitalne amplitudske modulacije raste
    - Pošto je srazmera između M i η logaritamska, ovaj porast je najviše izražen za male vrednosti M

Prijemnik realizovan pomoću NF filtra

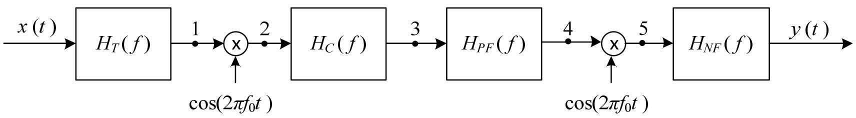
- Umesto korelacionog prijemnika, za prijem modulisanih signala se može koristiti prijemnik realizovan pomoću NF filtra



- Uloga PF filtra je da ograniči snagu šuma na ulazu u prijemnik
  - Propusni opseg PF filtra je prilagođen širini spektra modulisanog signala
- Uloga NF filtra je da izdvoji komponentu u osnovnom opsegu (modulišući signal)
  - Propusni opseg NF filtra je prilagođen širini spektra modulišućeg signala
- Ova varijanta prijemnika u najboljem slučaju obezbeđuje isti odnos signal/šum na svom izlazu, u odnosu na optimalni prijemnik
  - Važi samo ako su PF i NF filtar idealni, a širina spektra modulisanog signala ograničena
  - U praksi gornje pretpostavke ne važe, tako da je odnos signal-šum u principu manji nego kod optimalnog prijemnika

EKVIVALENTNA PRENOSNA KARAKTERISTIKA

- Prilikom izvođenja izraza za verovatnoću greške kod ASK modulacije, pokazano je da ovaj izraz ima isti oblik kao i kod prenosa u osnovnom opsegu
- Ovo se može pokazati i u opštem slučaju, tj. može se pokazati da se sistem za prenos pomoću digitalne amplitudske modulacije može svesti na ekvivalentni sistem u osnovnom opsegu
- Poći ćemo od pojednostavljene blok šeme:



  - $H_T(f)$ je predajni NF filtar koji uobličava spektar modulišućeg signala
  - $H_C(f)$ je blok koji predstavlja prenosnu karakteristiku kanala
    - Kanal je pojasni filtar

- Ekvivalentna prenosna karakteristika je:

$$H_{EQ}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Važi:

$$X_1(f) = H_T(f)X(f)$$

$$X_2(f) = \frac{1}{2}X_1(f - f_0) + \frac{1}{2}X_1(f + f_0) = \frac{1}{2}H_T(f - f_0)X(f - f_0) + \frac{1}{2}H_T(f + f_0)X(f + f_0)$$

$$X_3(f) = H_C(f)X_2(f) = \frac{1}{2}H_C(f)[H_T(f - f_0)X(f - f_0) + H_T(f + f_0)X(f + f_0)]$$

$$X_4(f) = H_{PF}(f)X_3(f) = \frac{1}{2}H_{PF}(f)H_C(f)[H_T(f - f_0)X(f - f_0) + H_T(f + f_0)X(f + f_0)]$$

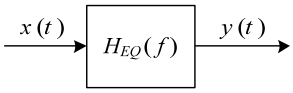
$$\begin{aligned} X_5(f) &= \frac{1}{2}X_4(f - f_0) + \frac{1}{2}X_4(f + f_0) \\ &= \frac{1}{4}H_T(f)X(f)[H_{PF}(f - f_0)H_C(f - f_0) + H_{PF}(f + f_0)H_C(f + f_0)] \\ &+ \frac{1}{4}H_T(f - 2f_0)X(f - 2f_0)H_{PF}(f - f_0)H_C(f - f_0) \\ &+ \frac{1}{4}H_T(f + 2f_0)X(f + 2f_0)H_{PF}(f + f_0)H_C(f + f_0) \end{aligned}$$

- Prijemni filtar izdvaja samo komponentu u osnovnom opsegu, pa je:

$$Y(f) = H_{NF}(f)X_5(f)$$
$$= \frac{1}{4}H_T(f)H_{NF}X(f)[H_{PF}(f-f_0)H_C(f-f_0) + H_{PF}(f+f_0)H_C(f+f_0)]$$

- Ekvivalentna prenosna karakteristika je:

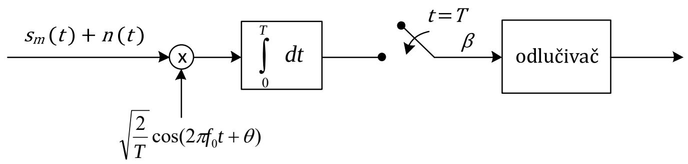
$$H_{EQ}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{4}H_T(f)H_{NF}[H_{PF}(f-f_0)H_C(f-f_0) + H_{PF}(f+f_0)H_C(f+f_0)]$$



- S obzirom da se digitalna amplitudska modulacija može svesti na ekvivalentni prenos u osnovnom opsegu, sve što važi za prenos u osnovnom opsegu može se primeniti na digitalnu amplitudsku modulaciju
  - Npr., Nikvistovi kriterijumi

UTICAJ FAZNE GREŠKE NA PRIJEM SIGNALA

- Prilikom izvođenja verovatnoće greške kod koherentnog prijemnika, pretpostavljeno je da je lokalni nosilac na prijemnoj strani u faznom i frekvencijskom sinhronizmu sa nosiocem na predajnoj strani
- U praksi se može javiti fazni nesinhronizam, tj. fazni ofset θ (fazna greška) između nosilaca na predajnoj i prijemnoj strani
  - Fazni ofset ima uticaj na verovatnoću greške



- Odziv prijemnika je:

$$\beta = \int_0^T (s_m(t) + n(t)) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \theta)\, dt = \sqrt{\frac{2}{T}} a_0 \int_0^T \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) dt + \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T n(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)\, dt = \sqrt{\frac{T}{2}} a_0 \cos\theta + n_r$$

- Očigledno da fazni ofset utiče na korisni deo primljenog signala kroz faktor $\cos\theta$
  - Za $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$, fazni ofset će smanjiti amplitudu korisnog dela primljenog signala
  - Za $\frac{\pi}{2} < |\theta| < \pi$, pored smanjenja amplitude, fazni ofset će uzrokovati i promenu polariteta
- Sa druge strane, može se pokazati da snaga obojenog šuma ne zavisi od faznog ofseta, tj. $P_{n_r} = \frac{N_0}{2}$
- U slučaju $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$, lako se može pokazati da je (koristeći isto rezonovanje kao kod izvođenja verovatnoće greške za $\theta = 0$):

$$P_E = 2\frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{T}{N_0}} d \cos\theta\right)$$

  - Očigledno, kroz smanjenje amplitude korisnog dela signala, fazni ofset utiče na povećanje verovatnoće greške

FAZNA (I FREKVENCIJSKA) SINHRONIZACIJA

Uvod

- Da bi se eliminisao nepovoljni uticaj faznog ofseta na verovatnoću greške kod koherentnog prijema amplitudski modulisanog signala, potrebno je obezbediti faznu sinhronizaciju

- Postoje principski dva načina obezbeđenja fazne (i frekvencijske) sinhronizacije:
  1. Slanje pilotskog tona zajedno sa modulisanim signalom
  2. Obnavljanje faze (i frekvencije) nosioca iz modulisanog signala

Slanje pilotskog tona

- Pilotski ton je signal čije su frekvencija i faza srazmerne frekvenciji i fazi nosioca:

$$p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$$

gde je $f_p = \frac{m}{n} f_0$ (pretpostavka je da je početna faza nosioca jednaka 0)

- Signal koji šalje predajnik je:

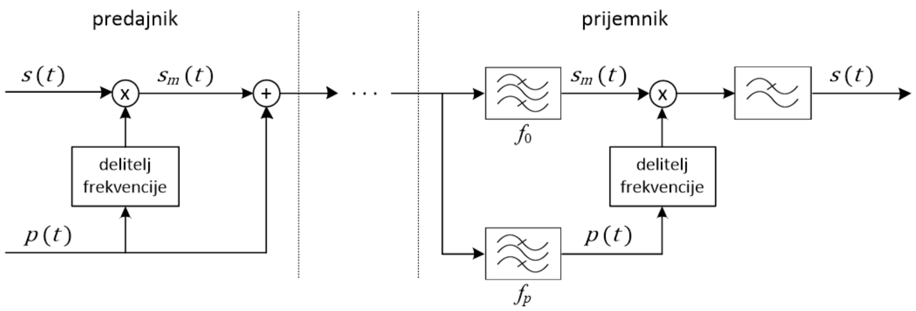
$$y(t) = s_m(t) + p(t)$$

- Filtriranjem pilotskog tona iz primljenog signala, prijemnik dobija informaciju o fazi i frekvenciji, i može da koherentno demoduliše $s_m(t)$

- Postoje dva slučaja:
  1. Pilotski ton je subharmonik nosioca: $m = 1, n \geq 2, \quad f_p = \frac{1}{n} f_0$
  2. Pilotski ton je harmonik nosioca: $n = 1, m \geq 2, \quad f_p = m f_0$

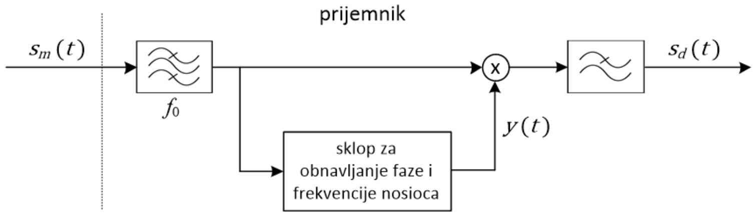
- Slučaj $m = n = 1$, tj. $f_p = f_0$, nije od interesa, jer je tada razdvajanje $s_m(t)$ i $p(t)$ na prijemu otežano (spektri modulisanog signala i pilotskog tona se preklapaju)

- Primer:
  - Pilotski ton je drugi harmonik nosioca, $f_p = 2f_0$
  - Blok šema sistema za prenos je:

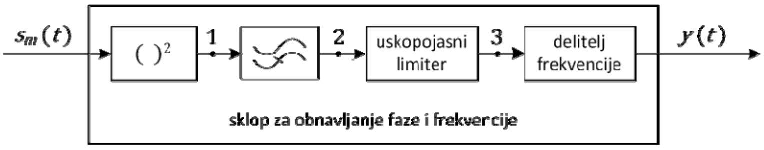


Obnavljanje faze (i frekvencije) nosioca iz modulisanog signala

- Principska blok šema:



- Postoji više načina za realizaciju sklopa za obnavljanje faze i frekvencije
  - Jedan jednostavan način realizacije ovog sklopa je korišćenjem uskopojasnog limitera



- Pretpostavimo da je u pitanju AM-2BO modulacija. Tada je:

$$s_m(t) = s(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$x_1(t) = {s_m}^2(t) = \frac{1}{2}s^2(t) + \frac{1}{2}s^2(t)\cos(4\pi f_0 t + 2\theta)$$

- VF filtar će ukloniti komponentu u osnovnom opsegu:

$$x_2(t) = \frac{1}{2}s^2(t)\cos(4\pi f_0 t + 2\theta)$$

- Uskopojasni limiter će propustiti signal konstantne amplitude na izlazu:

$$x_3(t) = A\cos(4\pi f_0 t + 2\theta) = A\cos(4\pi f_0 t + 2\theta + 2k\pi)$$

- Nakon delitelja frekvencije, na izlazu se dobija signal:

$$y(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta + k\pi) = A(-1)^k\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

- Lako se može pokazati da je demodulisani signal:

$$s_d(t) = \frac{A}{2}(-1)^k s(t)$$

- Očigledno da postoji neodređenost polariteta demodulisanog signala
  - Ovaj problem se rešava prekodovanjem modulišućeg signala
    - U ovom slučaju znak demodulisanog signala nije bitan, već samo razlike amplituda modulišućeg signala u susednim signalizacionim intervalima
- U slučaju da modulisani signal ima i kvadraturnu komponentu, ovaj varijanta realizacije sklopa za obnavljanje faze ne može se koristiti
  - Dokaz:

$$\begin{aligned} s_m(t) &= s_1(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta) + s_2(t)\sin(2\pi f_0 t + \theta) \\ &= A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta + \phi(t)) \end{aligned}$$

gde je:

$$A(t) = \sqrt{s_1{}^2(t) + s_2{}^2(t)}$$
$$\phi(t) = -\mathrm{arctg}\frac{s_2(t)}{s_1(t)}$$

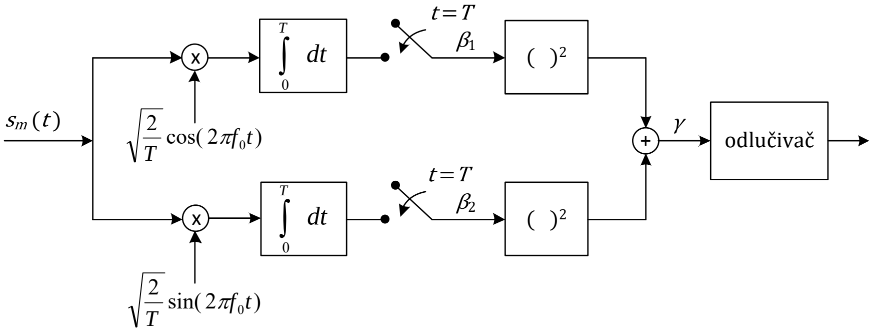
    - Dalje je lako pokazati da je:

$$y(t) = A(-1)^k \cos(2\pi f_0 t + \theta + \phi(t))$$

    - Očigledno je faza regenerisanog nosioca vremenski promenljiva, pa se ne može koristiti za demodulaciju

NEKOHERENTNI PRIJEMNIK ASK SIGNALA

- Kod nekoherentnog prijemnika se ne zahteva poznavanje faze nosioca
- Blok šema nekoherentnog prijemnika:



  - „Projektovanjem“ primljenog signala i na kosinusni i na sinusni nosilac eliminiše se potreba za poznavanjem faze nosioca

- U toku trajanja signalizacionog intervala $(0 \leq t < T)$, modulisani signal je $s_m(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta)$
  - θ modeluje fazu koja je nepoznata na prijemnoj strani
- Komponenta u fazi je:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T s_m(t) \cos(2\pi f_0 t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{T}} a_0 \int_0^T \cos(2\pi f_0 t + \theta) \cos(2\pi f_0 t)\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{T}{2}} a_0 \cos\theta$$

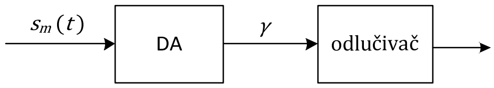
- Komponenta u kvadraturi je:

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T s_m(t) \sin(2\pi f_0 t)\, dt = \cdots = -\sqrt{\frac{T}{2}} a_0 \sin\theta$$

- Statistika na osnovu koje se vrši odlučivanje je:

$$\gamma = \beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{T}{2} a_0^2$$

- Očigledno da γ ne zavisi od θ!
- Mana nekoherentnog prijemnika je veća verovatnoća greške nego kod koherentnog, za dati odnos signal-šum
  - Zbog postojanja dve grane, nekoherentni prijemnik prima šum i u fazi u kvadraturi, dok koherentni ima samo jednu granu i stoga prima duplo manju snagu šuma
- Efikasna implementacija nekoherentnog prijemnika ASK signala je pomoću detektora anvelope



KRAJ