Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Profesor: Gonzalo Cortázar

ICS3413 — Finanzas

Pauta I2

6 de Noviembre 2020

Resuelto para g=0.

Solución Problema 1 [24 puntos]

a) (6 puntos)
Alternativa 1

I Como se reparte toda las utilidades en forma de dividendo esto implica que la empresa no va a crecer. Por ende se tiene que:

$$111 = 11 + \frac{11}{r_{ACA}}$$
$$100 = \frac{11}{r_{ACA}}$$
$$r_{ACA} = 0,11$$

[0, 5 puntos]

El precio esperado de las acciones el 29 de marzo del 2021 estará dado por la siguiente expresión:

$$\text{Precio} = 100 \cdot (1 + r_{MCM})^{11}$$

[0, 5 puntos]

Donde r_{MCM} es:

$$(1 + r_{MCM})^{12} = (1 + r_{ACA})$$
$$r_{MCM} = (1 + r_{ACA})^{\frac{1}{12}} - 1$$
$$r_{MCM} = 0,008735$$

[0, 5 puntos]

Luego, el precio será:

$$\text{Precio} = 100 \cdot (1 + 0,008735)^{11}$$

$$\text{Precio} = 110,03934$$

[0,5 puntos]

II El precio esperado el 1 de abril del 2021 será igual al precio que había el día anterior (31 de marzo del 2021 que es igual al del día 29 de marzo del 2021 por el supuesto en el enunciado) menos los dividendos que no podrán adquirir aquellos que compren acciones el 1 de abril: [1 punto]

$$\text{Precio} = 110,03934 - \frac{11}{1 + 0,008735}$$

$$\text{Precio} = 99,1346$$

[1 punto]

III El precio esperado el 1 de mayo del 2012 será:

$$\text{Precio} = \text{Precio inicio de abril} \cdot (1 + r_{MCM}) \quad [1 \text{ punto}]$$

$$\text{Precio} = 99,1346 \cdot (1 + 0,008735)$$

$$\text{Precio} = 100$$

[1 punto]

Alternativa 2

I El precio del activo el 29 de marzo corresponderá a la suma del pago de dividendos que se producirá en un mes más sumado al valor presente de los pagos esperados a perpetuidad (que valen 100), los cuales también deben descontarse por un mes, ya que los pagos son a finales de abril.
Así, el precio a 29 de marzo será:

$$\text{Precio} = \frac{100}{1 + r_{mcm}} + \frac{11}{1 + r_{mcm}} \quad [1 \text{ punto}]$$

$$\text{Precio} = \frac{100}{1,008735} + \frac{11}{1,008735} = 110,039 \quad [1 \text{ punto}]$$

II Para el 1 de abril, el precio se calcula de una forma similar al anterior (diferencia de 2 días no debe considerarse), pero a diferencia del caso anterior, el precio no debe considerar los 11 correspondientes al pago de dividendos a realizarse a finales de abril. [1 punto] Así, el precio es:

$$\text{Precio} = \frac{100}{1 + r_{mcm}}$$

$$\text{Precio} = \frac{100}{1,008735} = 99,134$$

[1 punto]

III Para el caso del día 1 de mayo, el precio considera solamente los pagos futuros, los cuales se realizarán anualmente (no debe realizarse descuento por tasa mensual, ya que los pagos comienzan a realizarse en 12 meses más).[1 punto] Así, el precio en este caso es:

$$\text{Precio} = \frac{11}{r_{aca}} = \frac{11}{0,11} = 100$$

[1 punto]

b) (6 puntos)

El inversionista compra en T=0 $100 del Bono A y vende $100 del Bono B. Por lo tanto, para saber el flujo que recibirá en T=1 se debe determinar cuánto recibirá por el Bono A y el Precio del Bono B en T=1. El flujo será el siguiente:

$$\text{Flujo} = \text{Valor cara Bono A} - \text{Precio Bono B en T=1} \quad [1\ \text{punto}]$$

A partir de la información del Bono A se puede determinar que en T=1 recibirá un flujo igual a:

$$\frac{100}{0.95} = 105.2632 \quad [0,5\ \text{puntos}]$$

Para saber cuánto debe pagar para recomprar el Bono B en T=1, se debe calcular el precio de este. Dado que vendió $100 del Bono B, en T=3 debería pagar un flujo de:

$$\frac{100}{0.90} = 111.1111 \quad [0,5\ \text{puntos}]$$

Para calcular el precio del Bono B en T=1 se debe descontar el flujo en T=3 para traerlo a T=1. El precio del Bono B en T=1 será:

$$\text{Precio Bono B (T=1)} = \frac{111.1111}{(1+f_2)(1+f_3)} \quad [1\ \text{punto}]$$

Para hacer determinar las tasas f_2 y f_3 es necesario utilizar la información del Bono C. De este se sabe que:

$$92 = \frac{100}{(1+f_2)(1+f_3)}$$
$$\implies \frac{92}{100} = \frac{1}{(1+f_2)(1+f_3)}$$

[1 punto]

Luego, el precio del Bono B en T=1 es:

$$\text{Precio Bono B (T=1)} = \frac{111.1111 \cdot 92}{100}$$

$$\text{Precio Bono B (T=1)} = 102.2222 \quad [1 \text{ punto}]$$

Finalmente, se tiene que el flujo del inversionista en T=1 es:

$$\text{Flujo} = 105.2632 - 102.2222 = 3.041 \quad [1 \text{ punto}]$$

c) (6 puntos)

I La caida del precio en función de la duración se puede escribir como:

$$\frac{dP}{P} = -\text{Duración} \cdot dy$$

donde la duración está dada por la siguiente fórmula:

$$\text{Duración} = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}$$

El precio (P) del bono en función de su TIR (y) se puede escribir como:

$$\text{P} = \text{VC} \cdot e^{-20y} \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

donde VC indica el Valor Cara del bono.
Entonces,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \text{VC} \cdot e^{-20y} \cdot (-20) \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

Con esto se obtiene que la duración es:

$$\text{Duración} = -\frac{1}{\text{VC} \cdot e^{-20y}} \text{VC} \cdot e^{-20y} \cdot (-20)$$

$$\text{Duración} = 20 \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

Luego, la caida es igual a:

$$\frac{dP}{P} = -20 \cdot 0.01$$

$$\frac{dP}{P} = -0.2 \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

II En este caso la caída del precio es:

$$\frac{dP}{P} = -\text{Duración} \cdot dy + \text{Convexidad} \cdot (dy)^2$$

donde la convexidad esta dada por:

$$\text{Convexidad} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\frac{1}{P}$$

donde,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \text{VC}e^{-20y} \cdot (-20) \cdot (-20) \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

Luego, la convexidad de este bono es:

$$\text{Convexidad} = \frac{1}{2} \cdot 400\text{VC} \cdot e^{-20y} \frac{1}{\text{VC} \cdot e^{-20y}}$$

$$\text{Convexidad} = 200 \quad [1 \text{ punto}]$$

Finalmente, la caída del precio es:

$$\frac{dP}{P} = -\text{Duración} \cdot dy + \text{Convexidad} \cdot (dy)^2$$

$$\frac{dP}{P} = -20 \cdot 0.01 + 200 \cdot (0.01)^2$$

$$\frac{dP}{P} = -0.18 \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

III Para calcular la caída efectiva se debe calcular con la TIR inicial y con la TIR del día siguiente:

$$\text{Precio inicial} = \text{VC}e^{-20 \cdot 0.1}$$

$$\text{Precio final} = \text{VC}e^{-20 \cdot 0.11}$$

$$[0,5 \text{ puntos}]$$

y la caída está dada por:

$$\frac{dP}{P} = \frac{\text{Precio final} - \text{Precio inicial}}{\text{Precio inicial}} \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{\text{VC}e^{-20 \cdot 0.11} - \text{VC}e^{-20 \cdot 0.1}}{\text{VC}e^{-20 \cdot 0.1}}$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{e^{-20 \cdot 0.11} - e^{-20 \cdot 0.1}}{e^{-20 \cdot 0.1}}$$

$$\frac{dP}{P} = -0.1813 \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

La estimación considerando la convexidad es más cercana a la caída efectiva.[0,5 puntos]

d) (6 puntos) La función de utilidad del individuo es:

$$U(W) = -e^{-2W}$$

Calculando la primera derivada se tiene:

$$\frac{dU(W)}{dW} = 2e^{-2W} > 0$$

Dado que la primera derivada de la función de utilidad es mayor a 0, el individuo es racional. Por lo tanto, maximizará el valor esperado de la función de utilidad [1 punto]. Para determinar si el individuo está dispuesto a pagar por la vacuna es necesario evaluar los dos escenarios.

Para saber si pagaría por la vacuna se debe calcular:

$$\mathbb{E}[U(W)] = \sum_i p_i \cdot U(W_i)$$

Donde p_i corresponde a la probabilidad de que ocurra el escenario i.
En este caso se tienen dos escenarios: con vacuna y sin vacuna.

Escenario 1: con vacuna.

La vacuna la debo pagar hoy, por lo que esto tendrá un impacto en el dinero que tendré en un año más. Para pagar la vacuna el individuo se puede endeudar hoy y pagar en un año más ese valor utilizando la tasa de colocación. Por lo tanto, el valor de la vacuna en un año más será:

$$0.22\text{MM} \cdot (1 + r) = 0.275 \quad [1 \text{ punto}]$$

En este escenario el valor esperado de la utilidad del individuo será:

$$\mathbb{E}[U(W1)] = 1 \cdot U(2\text{MM} - 0.275\text{MM})$$
$$\mathbb{E}[U(W1)] = 1 \cdot -e^{-2 \cdot (1.725\text{MM})}$$

$$\mathbb{E}[U(W1)] = -0.0317$$

$$[1,5 \text{ puntos}]$$

Escenario 2: sin vacuna.

$$\mathbb{E}[U(W2)] = 0.1 \cdot U(1\text{MM}) + 0.9 \cdot U(2\text{MM})$$
$$\mathbb{E}[U(W2)] = 0.1 \cdot -e^{-2 \cdot (1\text{MM})} + 0.9 \cdot -e^{-2 \cdot (2\text{MM})}$$
$$\mathbb{E}[U(W2)] = -0.03$$

$$[1,5 \text{ puntos}]$$

Dado que $\mathbb{E}[U(W2)] > \mathbb{E}[U(W1)]$ el individuo está mejor en el escenario sin vacuna, por lo tanto no está dispuesto a pagar por esta [1 punto].

Solución Problema 2 [12 puntos]

a) (6 puntos)

I Ya que se busca obtener una rentabilidad mayor a la del portafolio de mercado, se debe financiar una parte con deuda, quedando la siguiente expresión:

$$r_p = 0,25 = w_m \cdot r_m + (1 - w_m) \cdot r_{\text{colocación}} \quad [1,5 \text{ puntos}]$$

$$w_m(r_m - r_{\text{colocación}}) = 0,25 - r_{\text{colocación}}$$
$$w_m = \frac{0,25 - 0,07}{0,2 - 0,07} = \frac{0,18}{0,13} = 1,3846$$
$$[1,5 \text{ puntos}]$$

Así, se invierte 138,46 en el portafolio de mercado y se toma una posición corta (deuda con el banco) por 38,36.

II La desviación estándar del portafolio para este caso es:

$$\sigma_p = \sqrt{w_m^2 \cdot \sigma_m^2} \quad [1,5 \text{ puntos}]$$

$$\sigma_p = \sqrt{1,3846^2 \cdot 0,3^2} = 0,41538 \quad [1,5 \text{ puntos}]$$

b) (6 puntos) Al tener dos activos perfectamente correlacionados, significa $\rho = 1$ [0,5 puntos]. Por lo tanto, la volatilidad de un portafolio formado por ambos activos será:

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + (1 - w_A)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot (1 - w_a) \cdot \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

$$\sigma_p^2 = (w_A \cdot \sigma_A + (1 - w_A) \cdot \sigma_B)^2$$

Para determinar si podemos obtener el retorno libre de riesgo, debemos encontrar el portafolio de mínima varianza que se puede formar con estos activos y verificar si este corresponde a un portafolio con varianza 0. En ese caso, el retorno del portafolio corresponderá al retorno libre de riesgo. Para encontrar el portafolio de mínima varianza se deriva la ecuación anterior con respecto a w_A:

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_A} = 2(w_A \cdot \sigma_A + (1 - w_A) \cdot \sigma_B)(\sigma_A - \sigma_B) \quad [1 \text{ punto}]$$

$$0 = 2(w_A \cdot \sigma_A + (1 - w_A) \cdot \sigma_B)(\sigma_A - \sigma_B)$$

Simplificando los términos positivos:

$$0 = w_A \cdot \sigma_A + (1 - w_A) \cdot \sigma_B)$$

$$w_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_B - \sigma_A} \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

$$w_B = \frac{-\sigma_A}{\sigma_B - \sigma_A} \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

Luego, la varianza del portafolio será:

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{\sigma_B}{\sigma_B - \sigma_A} \cdot \sigma_A + \frac{-\sigma_A}{\sigma_B - \sigma_A} \cdot \sigma_B \right)^2$$

$$\sigma_p^2 = 0 \quad [1 \text{ punto}]$$

Dado que la varianza del portafolio es 0, el retorno del portafolio corresponderá al retorno libre de riesgo:[1 punto]

$$r_p = \frac{\sigma_B}{\sigma_B - \sigma_A} \cdot r_A + \frac{-\sigma_A}{\sigma_B - \sigma_A} \cdot r_B$$

$$r_p = 0,04 \quad [1 \text{ punto}]$$

Por lo tanto, el retorno libre de riesgo corresponderá a 4 %.

Solución Problema 3 [16 puntos]

a) (4 puntos) Como el inversionista es infinitamente averso al riesgo, su portafolio óptimo será el de mínima varianza. Así su problema es:

$$\text{Mín } \sigma_p^2 = w_a^2 \cdot \sigma_a^2 + (1-w_a)^2 \cdot \sigma_b^2 + 2(-1)\sigma_a\sigma_b w_a(1-w_a) \quad [1 \text{ punto}]$$

$$\text{Mín } (w_a \cdot \sigma_a - (1-w_a)\cdot \sigma_b)^2$$

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_a} = 2(w_a \cdot \sigma_a - (1-w_a)\cdot\sigma_b)(\sigma_a - \sigma_b) = 0$$

$$w_a = \frac{\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}$$

[1 punto]

$$w_a = \frac{0,17}{0,13+0,17}$$

$$w_a = 0,5\overline{6} \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

$$w_b = 1 - w_a = 0,4\overline{3} \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

Así, la inversión en A es $56,\overline{6}$ [0,5 puntos], mientras que lo invertido en B es $43,\overline{3}$ [0,5 puntos].

b) (4 puntos) El cambio en el retorno esperado no afecta la decisión 2 puntos]. Por esta razón, el resultado es el mismo de a):

$$w_a = 0,5\overline{6} \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

$$w_b = 1 - w_a = 0,4\overline{3} \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

Así, la inversión en A es $56,\overline{6}$ [0,5 puntos], mientras que lo invertido en B es $43,\overline{3}$ [0,5 puntos].

c) (4 puntos) Alternativa 1 El retorno libre de riesgo corresponderá al retorno del portafolio de mínima varianza [1 punto] (la mínima varianza que se puede alcanzar es 0). Así, r_f es:

$$r_f = w_a \cdot r_a + w_b \cdot r_b = 0,5\overline{6}\cdot 0,07 + 0,4\overline{3}\cdot 0,16 = 0,1089 \quad [1,5 \text{ puntos}]$$

Así, el precio de C debe ser:

$$Precio_c = \frac{100}{1,1089} = 90,179 \quad [1,5 \text{ puntos}]$$

Alternativa 2: Camino largo Para resolver este problema, debemos determinar la rentabilidad de un portafolio con A y B que tenga $\sigma_p = 0$:

$$\sigma_p^2 = w_a^2 \cdot \sigma_a^2 + (1 - w_a)^2 \cdot \sigma_b^2 + 2(-1)\sigma_a\sigma_b w_a(1 - w_a) = 0$$

$$w_a^2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2\sigma_a\sigma_b + w_a(-2\sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b) + \sigma_b^2 = 0$$

$$0,09w_a^2 - 0,102w_a + 0,0289 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se llega a una solución única para w_a: $w_a = 0,5\overline{6}$ [0,5 puntos] $w_b = 0,4\overline{3}$ [0,5 puntos] La cual es la misma solución de b). Ahora, hay que encontrar el retorno esperado de esta solución:

$$r_p = w_a \cdot r_a + w_b \cdot r_b = 0,1089 \quad [1,5 \text{ puntos}]$$

Así, el precio de C debe ser:

$$Precio_c = \frac{100}{1,1089} = 90,179 \quad [1,5 \text{ puntos}]$$

d) (4 puntos) La compañía de seguros podría cobrear el premio por riesgo [2 puntos]:

$$50\text{MM} \cdot \left(\frac{1,16}{1,1089} - 1\right) = 2,3\text{MM} \quad [2 \text{ puntos}]$$

Solución Problema 4 [18 puntos]

a) (6 puntos) Al ser infinitamente averso al riesgo, el inversionista aumenta su utilidad al disminuir la varianza de su portafolio. Así, su problema de optimización es:

$$\text{Mín } \sigma_p$$

[1 punto]

Sea w_a el peso del activo A en el portafolio y w_b el peso del activo B (w_b=1-w_a). Así, el problema es:

$$\text{Min } \left(\sigma_a^2 w_a^2 + \sigma_b^2 (1-w_a)^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_a}\left(\left(\sigma_a^2 w_a^2 + \sigma_b^2 (1-w_a)^2\right)\right) = 0$$

[1 punto]

$$w_a \sigma_a^2 - \sigma_b^2 (1-w_a) = 0$$

$$w_a = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

$$w_a = \frac{0.3^2}{0.3^2 + 0.2^2}$$

$$w_a = 0.692$$

$$w_b = 1 - w_a = 0.308$$

[1 punto]

De esta forma, la decisión de inversión es comprar 69.2 del activo A y 30.8 del activo B. [1 punto]
El retorno esperado de este portafolio es:

$$r_p = w_a \cdot r_a + w_b \cdot r_b \quad \text{[1 punto]}$$

$$r_p = 0.692 \cdot 0.1 + 0.308 \cdot 0.2$$

$$r_p = 0.131 \quad \text{[1 punto]}$$

b) (6 puntos) Como ahora el inversionista es indiferente al riesgo, su problema de optimización consiste únicamente en maximizar su retorno esperado [1,5 puntos]. Esto en términos prácticos quiere decir que buscará tener la mayor cantidad del activo con mayor retorno esperado (activo B en este caso). Si a esto le sumamos que se puede tomar una posición corta de hasta 100, para maximizar el retorno esperado, el inversor venderá 100 del activo A con los cuales comprará más activo B[1,5 puntos]. Así:

$$w_a = -1 \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

$$w_b = 2 \quad [0,5 \text{ puntos}]$$

El inversionista compra 200 de B y toma una posición corta en A por 100 [1 punto]. El retorno esperado de esta decisión de inversión es:

$$r_p = -1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 = 0.3 \quad [1 \text{ punto}]$$

c) (6 puntos) Sea w_a lo que se invierte en el activo A y (1- w_a) lo que se invierte en el activo B. Si reemplazamos en la función objetivo del inversionista, se tiene que:

$$\text{Max}\left(r_a w_a + r_b(1-w_a) - \frac{1}{2}RRA(\sigma_a^2 w_a^2 + \sigma_b^2(1-w_a)^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_a}\left(r_a w_a + r_b(1-w_a) - \frac{1}{2}RRA(\sigma_a^2 w_a^2 + \sigma_b^2(1-w_a)^2\right) = 0$$

[1 punto]

$$r_a - r_b - \frac{1}{2}RRA(2\sigma_a^2 w_a - 2\sigma_b^2 + 2\sigma_b^2 w_a) = 0$$

Despejando w_a:

$$w_a = \left(\frac{(r_a - r_b)\cdot 2}{RRA} + 2\sigma_b^2\right)\cdot\frac{1}{2\sigma_a^2 + 2\sigma_b^2}$$

[1 punto]

Además, se tiene que:

$$RRA = -W \cdot \frac{U'}{U''}$$

$$U = W^{0.5}$$

$$U' = 0.5W^{-0.5}$$

$$U'' = -(0.5)^2 W^{-1.5}$$

$$RRA = -W \cdot \frac{0.5^2 \cdot W^{-1.5}}{0.5 \cdot W^{-0.5}} = 0.5 \quad [2 \text{ puntos}]$$

Reemplazando en w_a:

$$w_a = \left(\frac{(0.1 - 0.2)\cdot 2}{0.5} + 2\cdot 0.3^2\right)\cdot\frac{1}{2\cdot 0.2^2 + 2\cdot 0.3^2}$$

$$w_a = -0.846154$$

$$w_b = 1 - w_a = 1.846154$$

[0,5 puntos]

El inversionista compra 184.6154 de B y toma una posición corta en A por 84.6154 [0,5 puntos].
El retorno esperado de esta decisión de inversión es:

$$r_p = -0.846154 \cdot 0.1 + 1.846154 \cdot 0.2 = 0.2846 \quad \text{[1 punto]}$$