Universität Stuttgart

Universität Stuttgart • Pfaffenwaldring 21 • 70569 Stuttgart
Institut für Aerodynamik und Gasdynamik

Institut für Aerodynamik
und Gasdynamik
Prof. Dr. Andrea Beck

Analytische und numerische Methoden: Semesteraufgabe SS2025 - Programmierteil

Numerischer Aufgabenteil

Die allgemeine Form der Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimensionen lautet

$$\boldsymbol{U}_t + \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{U}\right)_x = \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{U}\right), \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{U}_t$ die zeitliche Änderung des Zustandsvektors, $\boldsymbol{F}_x$ den Flussvektor in x-Richtung und $\boldsymbol{S}$ den Quellvektor darstellen. Betrachtet man speziell die eindimensionalen Flachwassergleichungen mit Topographie (veränderliche Bodenhöhe), so lauten die einzelnen Vektoren

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} H \\ hu \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghH_x \end{pmatrix}, \tag{2}$$

mit der absolute Wasserhöhe $H = H(x,t)$, der relativen Wasserhöhe $h = h(x,t)$, der horizontalen Geschwindigkeit $u = u(x,t)$ und der Gravitationskonstante $g = 9.81$. Der Zusammenhang zwischen der Topographie $b = b(x)$ und der Wasserhöhe lautet $H = h + b$. Der entsprechende primitive Variablenvektor lautet $\boldsymbol{W} = (h, u, b)^T$.

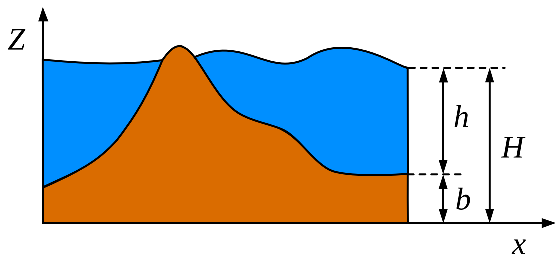

Abbildung 1: Zusammenhang zwischen absoluter-, relativer Wasserhöhe und Topographie

Das Gleichungssystem (1) mit den Vektoren (2) soll mit Hilfe eines expliziten Finite-Volumen Verfahrens (FV) zweiter Ordnung in Raum und Zeit auf einem äquidistanten Gitter implementiert werden. Im Folgenden wird der skalare Fall des FV Verfahrens kurz eingeleitet.

Das FV-Verfahren ist eine Approximation des integralen Erhaltungssatzes. Ausgehend von der eindimensionalen, skalaren Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{3}$$

den Definitionen der Schrittweiten Δx und Δt, sowie den Beziehungen

$$t_n = n\Delta t, \quad x_i = i\Delta x, \quad x_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(x_i + x_{i+1}\right), \tag{4}$$

kann man nach Integration über $[x_{i-1/2},\ x_{i+1/2}] \times [t_n,\ t_{n+1}]$ und den Abkürzungen

$$u_i^n := \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n)\ dx, \qquad f_{i+1/2}^n := \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t))\ dt, \tag{5}$$

die Differentialgleichung in diskreter Form angeben

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\right). \tag{6}$$

Aufgrund der Doppeldeutigkeit des physikalischen Flusses an den Zellrändern wird der physikalische Fluss f durch einen numerischen Fluss g mit Hilfe der Lösung eines Riemannproblems ersetzt

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right). \tag{7}$$

In der Semesteraufgabe soll als Riemann-Löser der **lokale Lax-Friedrichs** (Rusanov) Fluss verwendet werden:

$$g(u_L, u_R) = \frac{1}{2}\left(f_L + f_R\right) - \frac{1}{2}a\left(u_R - u_L\right), \tag{8}$$

mit

$$a = max(|u_L| + \sqrt{gh_L}, |u_R| + \sqrt{gh_R}). \tag{9}$$

Hinweis für die zweite Ordnung: Verwenden Sie eine lineare Rekonstruktion der Gradienten und eine entsprechende Limitierung (MINMOD), um die TVD Eigenschaft zu erhalten. Für die zeitliche Approximation bietet sich das verbesserte Euler Cauchy Verfahren an.

1 Implementierung

1. Implementieren Sie das FV Verfahren für das homogene **Gleichungssystem I** (`system 1`)für beliebige Auflösungen N und Ausdehnungen Ω. Gehen Sie hierbei von einem System mit $b(x) = 0$ aus.

   Die Randbedingungen sollen mittels "Ghost-Zellen" umgesetzt werden. Hierbei wird ein Gebiet mit N Gitterzellen auf $N_{ghost} = N + 2$ erweitert. Die Randbedingungen werden dann in der ersten und letzten Zellschicht gesetzt. Es soll für $x = x_0$ und $x = x_{end}$ eine Ausströmrandbedingung implementiert werden:

   $H_{ghost} = H_p, \quad u_{ghost} = u_p$

Hierbei bezeichnet der Index p die randnächste innere Zelle bzw. i ein von außen vorgeschriebenen Wert. Beachten Sie, dass für die explizite Berechnung eine korrekte Zeitschrittabschätzung (CFL-Bedingung) notwendig ist. Setzen Sie für alle Rechnungen in der Semesteraufgabe die CFL-Zahl auf 0.5. Die CFL-Bedingung lautet

$$dt \leq \mathrm{CFL} \cdot dx/a, \tag{10}$$

mit $a = |u| + \sqrt{gh}$ und der Gitterschrittweite dx. Simulieren Sie zunächst den Fall mit konstanter Wasserhöhe (`testcase 1`) mit $H(x,0) = 0.5$ und $u(x,0) = 0$ auf dem Gebiet $\Omega = [-1, 1]$ mit $N = 100$ bis $t_{end} = 0.1s$. Wie verändert sich $h(x,t)$ mit der Zeit?

2. Für die Validierung des homogenen Gleichungssystems soll ein Dammbruch simuliert werden (`testcase 2`). Hierbei soll ein äquidistantes Gitter verwendet werden, welches eine Ausdehnung von $\Omega = [-1, 1]$ besitzt. Verwenden Sie eine Auflösung von $N = 100$. Nutzen sie an beiden Rändern Ausströmrandbedingungen. Initialisieren Sie Ihre Simulation mit folgenden Zuständen ($x_i = 0$):

$$H(x,0) = \begin{cases} 1.2, & x \leq x_i \\ 4.0, & x > x_i \end{cases}, \qquad u(x,0) = 0.0$$

Rechnen Sie bis $t_{end} = 0.1s$. Wie hoch ist die absolute Wasserhöhe H zu diesem Zeitpunkt bei $x = 0.59$? Welchen Wert nimmt dort die Geschwindigkeit u an?

3. Implementieren Sie nun das **inhomogene System** (`system 2`) mit $b(x) \neq const$ und $\boldsymbol{S} \neq 0$. Hierbei müssen im Vergleich zum vorherigen homogenen Fall die Riemannlöser angepasst und der Quellterm implementiert werden. Verwenden Sie für die auftretende Ableitung im Quellvektor eine zentrale Finite Differenz. Verwenden Sie die gleichen Randbedingungen wie im homogenen Fall. Die Topographie b soll dabei über den Parameter `ground` gesteuert werden.

4. Für die Validierung des **inhomogenen** Gleichungssystems initialisieren Sie die **Simulation des ruhenden Gewässers** mit folgenden Zuständen:

$$\begin{aligned} H(x,0) &= 0.5, \\ u(x,0) &= 0, \\ b(x) &= 0.1 \exp(-5.5x^2) \end{aligned}$$

Für die folgende Simulation soll das Gitter die gleichen Abmaße haben wie im homogenen Fall, verwenden Sie jedoch $N = 10$. Rechnen Sie bis $t_{end} = 0.1s$. Wie hoch ist die Wasserhöhe h zu diesem Zeitpunkt bei $x = 0.59$? Welchen Wert nimmt dort die Geschwindigkeit u an?

Hinweise zur Implementierung:

Zur Unterstützung wird Ihnen dieses Semester ein Codegrundgerüst in Python zur Verfügung gestellt, welches Sie für eine korrekte Programmausführung vervollständigen müssen.
Im Folgenden sind einige Hinweise, die es unbedingt zu beachten gilt:

- Der Python Code liest Simulationsparameter aus der Datei `params.py` ein. Der Parameter-Readin darf nicht verändert werden, da er zur automatischen Kontrolle benötigt wird.
- Print Statements sollen beibehalten werden, da sie zur automatischen Kontrolle benötigt werden.
- Die zu implementierenden Abschnitte sind im Code gekennzeichnet. Bereiche, die nicht modifiziert werden dürfen, sind ebenfalls gekennzeichnet
- Der Code **muss** mit Python Version **3.11.9** und NumPy Version **2.1.2** ausführbar sein. Die Verwendung anderer Packages, mit Ausnahme von Matplotlib zum Visualisieren, ist untersagt. Der Code soll bei seiner Ausführung keine Plots speichern oder geöffnet lassen.
- Nicht Beachten der Hinweise kann dazu führen, dass die Abgabe mit **0 Punkten** bewertet wird.

Abgabe über das ILIAS:

Die Abgabe des numerischen Aufgabenteils findet dieses Semester ausschließlich in ILIAS statt. Laden Sie dazu ***eine*** **Python-Datei** mit dem Namen

`SS25_Nachname_Vorname_Matrikelnummer.py`

hoch. Die Ausführbarkeit des Codes ist Voraussetzung für die Bewertung. Es muss **keine** Parameterdatei `params.py` abgegeben werden.

<u>Hinweis</u>: Die Semesteraufgabe ist eine **freiwillige** Zusatzleistung zur Vorlesung und soll den dort behandelten Stoff vertiefen und geht teilweise über den prüfungsrelevanten Stoff hinaus. Das Rechenprogram ist in Python zu erstellen. Wird die Semesteraufgabe erneut bearbeitet, bitte Mail mit Angabe des Semesters an **travnicek@iag.uni-stuttgart.de**.