7 Numeri Reali

7.1 Costruzione dell'insieme dei numeri Reali

Dopo aver dimostrato che è necessario completare la linea dei numeri razionali (dimostrazione 5.2.6), andiamo a costruire l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali.

7.1.1 Definizione

Definition 7.1. *Sia:* $X := \{\textit{insieme delle successioni di Cauchy dei numeri razionali}\}$
$\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathbf{Q}$ *sono relazioni se* $\lim_{n \to +\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$
L'insieme dei numeri Reali è l'insieme quoziente fra l'insieme X delle relazioni di Cauchy e R che è una relazione di equivalenza, quindi devono valere la riflessività, la simmetricità e la transitività:

$$\mathbf{R} = X/R \tag{49}$$

7.1.2 Operazioni algeriche in R

Considero $\mathbf{R} = [\{a_n\}]_{\mathbf{R}}\,, [\{b_n\}]_{\mathbf{R}} \in X/R$:

- Somma: $[\{a_n\}]_{\mathbf{R}} + [\{b_n\}]_{\mathbf{R}} := [\{a_n + b_n\}]_{\mathbf{R}}$
- Prodotto: $[\{a_n\}]_{\mathbf{R}} \cdot [\{b_n\}]_{\mathbf{R}} := [\{a_n \cdot b_n\}]_{\mathbf{R}}$

Queste operazioni in $\mathbf{R}$ hanno le stesse proprietà di quando si opera in $\mathbf{Q}$, come associativa, distributiva, elemento neutro; oltre a queste, i numeri razionali sono ordinati (non ci sono discontinuità nella linea dei numeri, ad esempio $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}, \sqrt{2} \in \mathbf{R}$).

Ora andremo a spiegare cosa significa che l'insieme dei numeri reali è ordinato:
Avremo che $[\{a_n\}]_{\mathbf{R}}$ è positivo se:

- è vero che:
$$\exists\, q > 0\,,\; \mathbf{N} \geq 0 \,|\, n \geq N \implies a_n \geq q \tag{50}$$
- ad esempio, la successione $\frac{1}{n}$ è rappresentante della classe di equivalenza dello zero.
- inoltre sappiamo che:
$$[\{a_n\}]_{\mathbf{R}} < [\{b_n\}]_{\mathbf{R}} \; se \; [\{b_n\}]_{\mathbf{R}} - [\{a_n\}]_{\mathbf{R}} > 0 \tag{51}$$
- siccome stiamo considerando delle successioni di Cauchy, siamo sicuri che il limite sia o positivo, o negativo, o zero.
- di conseguenza o $a > b$ o $b > a \implies$ si ha un ordinamento forte.

7.2 Immersione di Q in R

Consideriamo la funzione $j:\ \mathbf{Q} \implies \mathbf{R}$ tale che:

$$j(q) = \Big[\{\alpha\}_n\Big]_{\mathbf{R}} \in \mathbf{R} \tag{52}$$

È una successione costante, quindi convergente, di Cauchy e posso trovare l'insieme della classe di equivalenza.
Due classi A e B sono equivalenti se un rappresentante della classe A è anche rappresentante della classe B.
Si può facilmente dimostrare che j è iniettiva e nel codominio è biunivoca, ciò significa che ad ogni $x \in \mathbf{Q}$ corrisponde un $x_1 \in \mathbf{R}$.
Controllo se valgono le proprietà anche in $\mathbf{R}$:

- Somma: $j(q_1) + j(q_2) = j(q_1 + q_2)$
- Prodotto: $j(q_1) \cdot j(q_2) = j(q_1 \cdot q_2$

Ciò per dimostrare che non si è perso nulla nell'immersione di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$, infatti valgono ancora le proprietà.

Bisogna definire cosa è un intervallo in $\mathbf{R}$:

Definition 7.2 (Limite in **R**)**.** *Considerati due numeri reali* $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$*:*

$$(r_1, r_2) := \{x \in \mathbf{R} \mid r_1 < x < r_2\} \subset \mathbf{R} \tag{53}$$

Ora possiamo definire il limite in **R**:

Definition 7.3 (Limite in **R**)**.** *Considero* $r_n \in \mathbf{R}$, $l \in \mathbf{R}$ *, si dirà che* r_n *converge a* l *se:*

$$\forall\, \varepsilon > o\,,\, \exists\, N(\varepsilon) \mid n \geq N(\varepsilon) \implies r_n \in \big(l-\varepsilon, l+\varepsilon\big) \tag{54}$$

Possiamo afferna che le proprietà dei limiti di successioni razionali restano vere anche per limiti di successioni di numeri reali; ad esempio anche in **R** è vero che la somma di limiti è pari al limite della somma.
Ora spieghiamo e dimostriamo un teorema fondametale conseguente a quello di Cauchy in **R**:S

Theorem 7.1 (Teorema fondamentale di completezza dei numeri reali)**.** *la condizione di Cauchy per successioni di numeri reali è necessaria e suffciente per la convergenza.*

Theorem 7.2 (Convergenza di successioni monotone limitate)**.** *Sia* $x_n \in \mathbf{R}$ *una successione di numeri reali monotona crescente (ma vale anche per i decrescenti)...:*

$$x_n \leq x_n + 1 \,\forall\, n \geq 0 \tag{55}$$

...e superiormente limitata (M è una barriera):

$$\exists\, M \in \mathbf{R} \mid x_n \leq M \,\forall\, n \geq 0 \tag{56}$$

$\implies$ *allora la successione* $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ *è di Cauchy e quindi è convergente, cioè* $\exists \lim_{n\to+\infty}(x_n) \in \mathbf{R}$ *(senza necessariamente sapere il valore verso il quale converge il limite).*

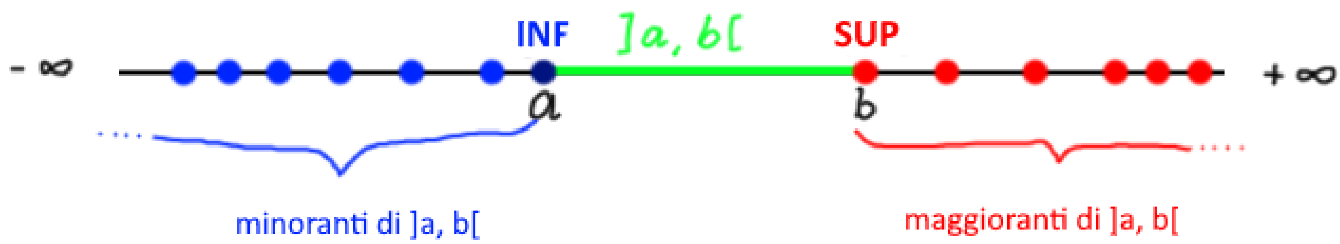

Figura 17: Inferiore - Superiore - Maggiorante - Minorante

7.3 Completezza dei numeri Reali

7.3.1 Convergenza di successioni monotone e limitate

7.3.2 Esistenza del Sup() per insiemi superiormente limitati

7.3.3 Teorema di Bolzano-Weistrass

COMPLETEZZA DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI $\mathbb{R}$.

FABIO CIPRIANI

1. Completezza dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ la condizione di Cauchy e' necessaria e sufficiente per la convergenza di successioni. Da questa proprieta' di completezza ne seguono altre tre che dimostriamo qui di seguito. La prima riguarda la convergenza di successioni monotone, la seconda l'esistenza dell'estremo superiore di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ mentre la terza concerne l'esistenza di punti di accumulazione di sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$.

Theorem 1.1. *(Convergenza di successione monotone e limitate in $\mathbb{R}$) Sia $\{x_n \in \mathbb{R} : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ una successione monotona crescente (risp. decrescente) e superiormente (risp. inferiormente) limitata. Allora la successione e' convergente in $\mathbb{R}$.*

Proof. Limiteremo la dimostrazione alle successioni crescenti superiormente limitate. Per la completezza di $\mathbb{R}$ e' sufficiente mostrare che la successione possiede la proprieta' di Cauchy seguente:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \text{esiste} \qquad N \geq 1 \qquad \text{tale che se} \qquad n, m \geq N \qquad \text{allora} \qquad |x_n - x_m| < \varepsilon\,.$$

Supponiamo, per assurdo, che la successione non sia di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$ si avrebbe che

$$\forall\ N \geq 1 \qquad \text{esistono} \qquad n_N\,, m_N \geq N \qquad \text{tale che} \qquad |x_{n_N} - x_{m_N}| \geq \varepsilon\,.$$

Possiamo supporre che $m_N \leq n_N$ per ogni $N \geq 1$ di modo che, essendo la successione crescente si abbia

$$x_{n_N} - x_{m_N} = |x_{n_N} - x_{m_N}| \geq \varepsilon\,.$$

Per $N_1 := 1$ siano quindi $n_1 \geq m_1 \geq 1$ tali che $x_{n_1} \geq \varepsilon + x_{m_1}$,
per $N_2 := n_1$ siano quindi $n_2 \geq m_2 \geq N_2 = n_1$ tali che $x_{n_2} \geq \varepsilon + x_{m_2}$,
...
per $N_{k+1} := n_k$ siano quindi $n_{k+1} \geq m_{k+1} \geq N_{k+1} = n_k$ tali che $x_{n_{k+1}} \geq \varepsilon + x_{m_{k+1}}$,
....
Poiche' la successione e' crescente abbiamo che $m_{k+1} \geq n_k$ implica che $x_{m_{k+1}} \geq x_{n_k}$ e di conseguenza che

$$x_{n_{k+1}} \geq \varepsilon + x_{m_{k+1}} \geq \varepsilon + x_{n_k} \geq \cdots \geq k\varepsilon + x_{n_1} \geq k\varepsilon + x_1 \qquad \forall \quad k \geq 1.$$

Quindi

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_{k+1}} = +\infty\,.$$

Poiche' cio' contraddice l'ipotesi di limitatezza superiore, la successione e' necessariamente di Cauchy. $\square$

Esercizio. Mostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ cioe' che l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni razionali.

Esercizio. Mostrare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ cioe' che l'equazione $x^2 = 3$ non ha soluzioni razionali.

Esercizio. Sia $p \in \mathbb{P}$ un numero primo. Mostrare che $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ cioe' che l'equazione $x^2 = p$ non ha soluzioni razionali. **Suggerimento**: ogni numero naturale $m \in \mathbb{N}$ puo' essere decomposto in maniera unica come prodotto di numeri primi

$$m = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \qquad p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}\,, \qquad n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\,.$$

Example 1.2. La successione definita per ricorrenza da

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad n \geq 1\,,$$

converge al numero $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Poiche' $x_1 = 2 > 0$ per definizione e, se supponiamo $x_n > 0$, dalla relazione di ricorrenza, segue che $x_{n+1} > 0$, per il Principio di Induzione si deduce che $x_n > 0$ per $n \geq 1$ per cui la successione e' ben definita (in particolare cioe' $x_n \neq 0$ per $n \geq 1$) e inferiormente limitata.

Poiche' $x_1 = 2 \in \mathbb{Q}$ per definizione e, se supponiamo $x_n \in \mathbb{Q}$, dalla relazione di ricorrenza, segue che $x_{n+1} \in \mathbb{Q}$, per il Principio di Induzione si deduce che $x_n \in \mathbb{Q}$ per $n \geq 1$ per cui la successione e' formata da numeri razionali.

Poiche' per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $(a-b)^2 \geq 0$, ne segue la disuguaglianza $2ab \leq a^2+b^2$. La relazione di ricorrenza implica allora che per $n \geq 1$ si abbia

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad \Rightarrow \qquad 2 + x_n^2 = 2x_n x_{n+1} \leq x_n^2 + x_{n+1}^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2 \leq x_{n+1}^2\,.$$

Poiche' $x_1^2 = 4 > 2$ si ha

$$x_n^2 \geq 2 \qquad \forall \quad n \geq 1\,.$$

Poiche' per $n \geq 1$ si ha

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \Big(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\Big) = \frac{x_n}{2} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \geq 0,$$

la successione e' monotona decrescente e inferiormente limitata e quindi, per il Teorema 1.1 convergente in $\mathbb{R}$. Sia $l := \lim_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R}$ il suo limite. Infine, poiche' la relazione di ricorrenza implica che

$$l = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\Big) = \frac{l}{2} + \frac{1}{l}\,,$$

deduciamo che il numero l e' la soluzione positiva dell'equazione $l^2 = 2$, cioe' che $l = \sqrt{2}$.

Esercizio. Siano $k \geq 1$ intero e $p > 0$ fissati. Si scelga $x_1 \in \mathbb{N}$ tale che $x_1^k \geq p$ e si mostri che la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} := \frac{k-1}{k} x_n + \frac{p}{k x_n^{k-1}} \qquad n \geq 1\,,$$

converge al numero $p^{1/k} \in \mathbb{R}$.
Suggerimento: si usi la disuguaglianza di Bernoulli: $a^k \geq (1-k) + ka$ valida per $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$.

Definition 1.3. (Estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo)
Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, un numero $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e' detto **extremo superiore di** A se

- $\overline{x}$ un **maggiorante di** A
$$x \in A \Rightarrow x \leq \overline{x}$$
- e se $\overline{x}$ e' il **minimo dei maggioranti di** A nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$, $\overline{x} - \varepsilon$ non e' un maggiorante di A, esiste cioe' $x \in A$ tale che $\overline{x} - \varepsilon < x$.

Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, un numero $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e' detto **extremo inferiore di** A se

- $\overline{x}$ un **minorante di** A
$$x \in A \Rightarrow x \geq \overline{x}$$
- e se $\overline{x}$ e' il **massimo dei minoranti di** A nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$, $\overline{x} - \varepsilon$ non e' un minorante di A, esiste cioe' $x \in A$ tale che $\overline{x} - \varepsilon > x$.

Se esiste, l'estremo superiore (risp. inferiore) di A si indica con $\sup A$ (risp. $\inf A$). Se l'estremo superiore (risp. inferiore) appartiene all'insieme, $\sup A \in A$ (risp.$\inf A \in A$), allora e' detto **massimo** (risp. **minimo**) e indicato con $\max A$ (risp. $\min A$).

Example 1.4. Se $A = (a, b)$ allora $\sup A = b$, $\inf A = a$ e non esistono $\max A$ e $\min A$. Se $B = [a, b]$ allora $\sup A = \max A = b$, $\inf A = \min A = a$.

Esercizio. Determinare, se esistono, $\sup A\,, \inf A\,, \max A\,, \min A$ di
$$A := \{(-1)^{n+1} - \frac{1}{n} : n \geq 1\}\,.$$

Esercizio. Sia $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la successione dell'Esempio 1.2. Determinare $\inf A$.

Se un insieme A **non e' superiormente (risp. inferiormente) limitato** allora non esistono maggioranti (risp. minoranti) ne tantomeno esiste $\sup A$ (risp. $\inf A$). Viceversa

Theorem 1.5. *(Esistenza dell'estremo superiore per insiemi superiormente limitati)*
Se $A \subset \mathbb{R}$ e' superiormente limitato, allora esiste $\sup A \in \mathbb{R}$.

Proof. Poiche' A e' superiormente limitato, esiste $b_0 \in \mathbb{R}$ maggiorante di A:

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq b_0 \, .$$

Sia $a_0 \in A$ un elemento fissato di A di modo che

$$[a_0 \, , b_0] \cap A \neq \emptyset \, .$$

Sia $c := \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio di $[a_0 \, , b_0]$ e consideriamo i due sub-intervalli

$$[a_0 \, , c] \qquad \text{e} \qquad [c \, , b_0] \, .$$

Evidentemente in almeno uno dei due sub-intervalli vi sono elementi di A. Ne scegliamo uno dei due, denotandolo con $[a_1 \, , b_1]$, optando per quello di destra se entrambe le meta' contengono elementi di A. Evidentemente abbiamo che

$$[a_1 \, , b_1] \cap A \neq \emptyset$$

e che b_1 e' un maggiorante di A:

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq b_1 \, .$$

Iterando questo procedimento (detto di dicotomia) otteniamo una successione decrescente di intervalli

$$\cdots \subset [a_{n+1} \, , b_{n+1}] \subset [a_n \, , b_n] \cdots \subset [a_1 \, , b_1] \subset [a_0 \, , b_0]$$

tali che per ogni $n \geq 1$ si ha che b_n e' maggiorante di A

$$n \geq 1 \, , \qquad x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq b_n \tag{1.1}$$

e che per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$[a_n \, , b_n] \cap A \neq \emptyset \, .$$

Poiche ' la successione $\{a_n\}$ e' crescente e superiormente limitata da b_0

$$\ldots a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_0 \, ,$$

la successione $\{b_n\}$ e' decrescente e inferiormente limitata da a_0

$$a_0 \leq \ldots \ldots b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} b_n - a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0 \, ,$$

per il Teorema 1.1, esiste $\overline{x} \in \mathbb{R}$ limite comune delle due successioni

$$\overline{x} = \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n \, .$$

Mostriamo ora che proprio $\overline{x}$ e' $\sup A$. Infatti, per il teorema del confronto, passando al limite nella (1.1) abbiamo che

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq \overline{x}$$

e che quindi $\overline{x}$ e' un maggiorante di A. Se, per assurdo, non fosse $\overline{x} = \sup A$, esisterebbe $\varepsilon > 0$ per il quale $\overline{x} - \varepsilon$ sarebbe un maggiorante di A, strettamente minore di $\overline{x}$:

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq \overline{x} - \varepsilon < \overline{x} \, .$$

Ma poiche' $\overline{x} = \lim_{n \to +\infty} a_n$, esisterebbe $n \geq 1$ per cui $\overline{x} - \varepsilon < a_n < \overline{x}$. Cio' contradirebbe il fatto che, per costruzione, $[a_n \, , b_n] \cap A \neq \emptyset$. $\square$

Definition 1.6. (Punti di accumulazione)
Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e' detto di **accumulazione per** E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (E \setminus \{\overline{x}\}) \cap (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) \neq \emptyset$$

cioe' se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in E \setminus \{\overline{x}\} \quad \textit{such that } |x - \overline{x}| < \varepsilon$$

cioe' se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ l'insieme \ \ E \cap (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) \ \ e' \ infinito \ (ha \ cioe' \ infiniti \ elementi) .$$

L'insieme dei punti di accumulazione di $E \subseteq \mathbb{R}$ e' detto **insieme derivato di** E e si denota con $\mathbf{E}'$.

Dato un insieme A, indicheremo con il simbolo $\sharp(\mathbf{A}) = \infty$ il fatto che abbia infiniti elementi (cioe' che non sia un insieme finito).

Theorem 1.7. *(Proprieta' di Bolzano-Weierstrass.)*
Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato e infinito. L'insieme dei punti di accumulazione E' di E e' allora non vuoto:

$$E' \neq \emptyset .$$

Proof. Poiche' E e' limitato, esiste un intervallo limitato $[a_0\,, b_0] \subset \mathbb{R}$ che lo contine: $E \subseteq [a_0\,, b_0]$. Sia $c := \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio di $[a_0\,, b_0]$. Evidentemente almeno uno dei due sub-intervalli

$$[a_0\,, c] \qquad \text{e} \qquad [c\,, b_0]$$

contiene infiniti punti di E. Ne scegliamo uno e lo denotiamo con $[a_1\,, b_1]$. Avremo che $[a_1\,, b_1] \cap E$ e' infinito:

$$\sharp([a_1\,, b_1] \cap E) = \infty .$$

Iterando questo procedimento (detto di dicotomia) otteniamo una successione decrescente di intervalli

$$\cdots \subset [a_{n+1}\,, b_{n+1}] \subset [a_n\,, b_n] \cdots \subset [a_1\,, b_1] \subset [a_0\,, b_0]$$

tali che per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$\sharp([a_n\,, b_n] \cap E) = \infty .$$

Poiche' la successione $\{a_n\}$ e' crescente e superiormente limitata da b_0

$$\ldots a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_0 ,$$

la successione $\{b_n\}$ e' decrescente e inferiormente limitata da a_0

$$a_0 \leq \ldots \ldots b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0 ,$$

per il Teorema 1, esiste $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tale che

$$\overline{x} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

Scegliendo $x_n \in [a_n\,, b_n] \cap E$ con $x_n \neq \overline{x}$ (cio' si puo' fare poiche' in $[a_n\,, b_n] \cap E$ vi sono infiniti punti ed al piu' uno solo di essi puo' coincidere con $\overline{x}$), otteniamo una successione $\{x_n\} \subseteq E \setminus \{\overline{x}\}$ tale che

$$a_n \leq x_n \leq b_n \qquad n \geq 1 .$$

Per il teorema del confronto (per limiti di successioni) abbiamo che $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ e che quindi $\overline{x} \in E'$. $\square$

8 Numeri Complessi

8.1 Definizione e costeuzione del campo complesso

Definition 8.1. *I numeri complessi costituiscono un insieme che estende l'insieme dei numeri reali ed in cui, a partire dalla definizione di unità immaginaria, è possibile estrarre le radici ad indice pari di numeri negativi e risolvere le equazioni di secondo grado con discriminante negativo.*

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \tag{57}$$

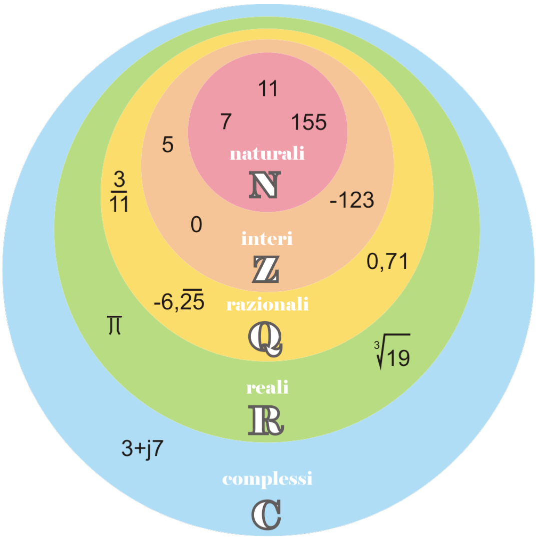

Figura 18: Insiemi numerici

Nell'insieme dei numeri complessi esiste la soluzione dell'equazione $z^2 + 1 = 0 \implies z^2 = -1$:

$$\exists\, z \in \mathbf{C}, z \notin \mathbf{R} \mid z^2 = -1 \tag{58}$$

Theorem 8.1. *Tutte le equazioni hanno soluzione nell'insieme dei numeri complessi (*$\mathbf{C}$*).*

Il campo complesso $\mathbf{C}$ si ottiene dal prodotto scalare fra $\mathbf{R}$ e se stesso, di conseguenza un numero complesso è rappresentato da una coppia di numeri reali:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad , \quad z = (a, b) \in \mathbf{R} \tag{59}$$

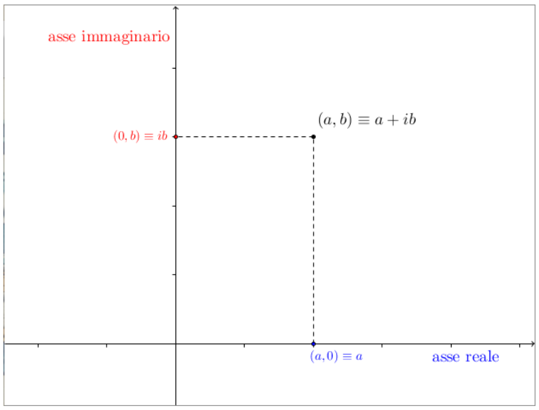

Figura 19: Piano di Gauss dei numeri Complessi

8.2 Operazioni e proprietà in C

Definizione delle operqzioni nel campo complesso:

- Somma: si segue la rgola del parallelogramma

$$\begin{cases} z = (a, b) \in \mathbf{C} \\ w = (c, d) \in \mathbf{C} \end{cases} \implies z + w := (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

- Prodotto:
  $z \cdot w := (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

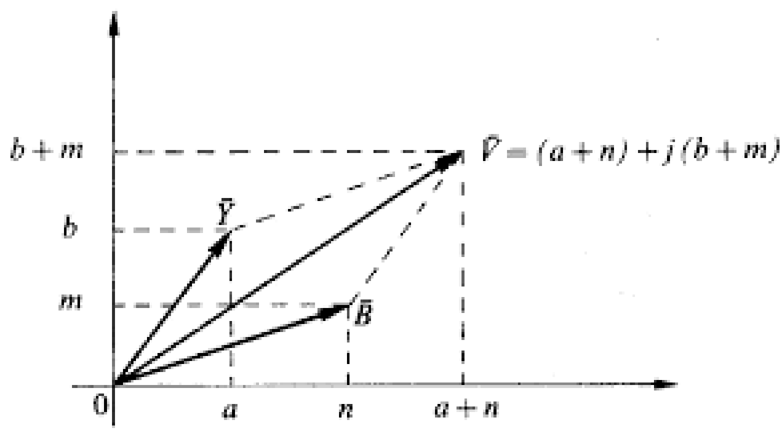

Figura 20: Somma di numeri complessi (parallelogramma)

Proprietà delle operazioni ereditate dai numeri reali nel campo complesso:

1. Communtatività:
   - $z + w = w + z$
   - $z \cdot w = w \cdot z$
2. Associatività:
   - $z + (w + v) = (z + w) + z$
   - $z \cdot (w \cdot v) = (z \cdot w) \cdot z$
3. Distributività:
   - $z \cdot (w + v) = z \cdot w + z \cdot v$
4. Elemento neutro:
   - Somma: $(0, 0)$ infatti $(a, b) + (0, 0) = (0 + a, 0 + b) = (a, b)$
   - Prodotto: $(1, 0)$ infatti $(a, b) \cdot (1, 0) = (1a - 0b, 0a + 1b) = (a, b)$

8.3 Immersione di R in C

Funzione di immersione dell'insieme dei numeri Reali nell'insieme dei numeri Complessi:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \quad , \quad f(x) = (x, 0) \,\forall\, x \in \mathbf{R} \tag{60}$$

Questa funzione è iniettiva infatti se $f(x) = f(y) \implies (x, 0) = (y, 0) \implies x = y$

Noi sappiamo che l'insieme **R** è un sottoinsieme di **C**, i numeri Reali sono rappresentati dall'asse x nel piano

di Gauss e sono quelli con la coordinata b uguale a zero, ad esempio $(4,0)$ fa parte della stessa classe di equivalenza del numero $4 \in \mathbf{R}$.
Per comodità utilizzeremo una notazione ridotta per rappresentare i numeri Complessi che fanno parte del sottoinsieme dei numeri Reali: $f(x) = (x,0) \to x$ e in questo caso stiamo rapppresentando il numero razionale x sempre nel campo complsso Ad esempio:

- Somma: $f(x) + f(y) = (x,0) + (y,0) = (x+y, 0+0) = (x+y,0) = f(x+y)$
- Prodotto: $f(x) \cdot f(y) = (x,0) \cdot (y,0) = (xy - 0, 0x + 0y) = f(x \cdot y, 0) = f(x \cdot y)$

8.4 Forma algebrica

considero un numero $z = (a,b) \in \mathbf{C} \to (a,b) = (a,0) + (b,0) = f(a) + (0,b) = a + (0,b) = a + (0,1) \cdot (b,0) = (a \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = a + (0,1) \cdot f(b) = a + (0,1)b = \underbrace{a + i \cdot b}_{\text{forma algebrica}}$

Utilizzeremo più spesso la notazione dei numeri complessi in forma algebrica perchè è più comoda nelle operazioni (soprattutto la moltiplicazione in $\mathbf{C}$):

$$(a,b) = a + i \cdot b \tag{61}$$

Abbiamo posto $i = (0,1) \in \mathbf{C}$ e viene detta unità immaginaria:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i = (0,1)$
- $i^2 = -1 = (-1,0)$ infatti $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (0,1) = f(-1)$ // i è il numero complesso soluzione dell'equazione $x^2 = -1$, ovvero $sol(x^2 = -1) = i$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1 = i^0$
- I valori di i si ripetono ciclicamente con un periodo di 2π.

Nella forma algerbra possiamo distinguere due parti che compongono il numero complesso, consideriamo il numero complesso $z = (a,b) = a + i \cdot b$:

- Parte reale: $Re(z) := a \quad , \quad a \in \mathbf{R}$
- Parte immaginaria: $Im(z) := b \quad , \quad b \in \mathbf{R}$

Di conseguenza possiamo scrivere: $z = Re(z) + i \cdot Im(z) = a + i \cdot b$
I coefficienti $a, b \in \mathbf{R}$ non comprendono l'unità imaginaria.
Ad esempio $z = 2 - 3i \implies \begin{cases} Re(z) = 2 \\ Im(z) = 3 \end{cases}$

8.4.1 Operazioni in forma algebrica

- Somma:
  $z + w = (a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = p.assoc = (a+c) + (i \cdot b + i \cdot d) = p.distr = (\underbrace{a+c}_{\text{a'}}) + i \cdot (\underbrace{b+d}_{\text{b'}})$ con $a', b' \in \mathbf{R}$
- Prodotto:
  $z \cdot w = (a + i \cdot b)(c + i \cdot d) = (a \cdot c + i \cdot a \cdot d + i \cdot b \cdot c + i \cdot b \cdot i \cdot d) = \big(a \cdot c + i \cdot (a \cdot d + b \cdot c) + \underbrace{i^2}_{=-1} \cdot b \cdot d\big) =$

  $(ac - bd) + i \cdot (ad + bc) = (a,b)(c,d)$

8.4.2 Opposto, Inverso e Coniugato

- Opposto: l'opposto $z = (a, b)$ è $(-a, -b)$
  infatti $z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$

- Inverso: ogni numero diverso da zero in $\mathbf{C}$ ha un reciproco, $z \neq 0 \iff a \neq 0 \vee b \neq 0$:

$$w := \left(\frac{a}{a^2 + b^2} ; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \tag{62}$$

- Coniugato: dal punto di vista geometrico corrisponde alla simmetria rispetto all'asse x ($\bar{z}$ si legge zeta segnato/sbarrato)
  $\bar{z} = a - i\,b = \begin{cases} Re(\bar{z}) = Re(z) = a \\ Im(\bar{z}) = -Im(z) = -b \end{cases}$

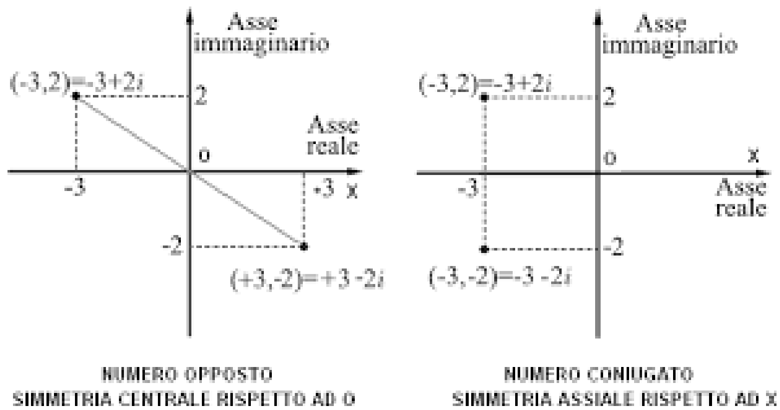

Figura 21: opposto e coniugato di un numero complesso

osservazioni:

- Possiamo osservre xhe un numero complesso è uguale al suo coniugato solo quando è reale: $z = \bar{z} \iff z \in \mathbf{R}$

- Vengono definiti numeri immaginari puri quei punti che giaciono sull'asse y del piano di Gauss (ovvero hanno $Re(z) = 0$), quindi è un multiplo dell'unità immaginaria. Lopposto di un numero immaginario puro è pari al suo coniugato $\bar{z} = -z \iff Re(z) = 0$

8.4.3 Modulo

Considero un numero immaginario $z = a + i\,b = (a, b)$, il modulo di z è:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} \tag{63}$$

Dal punto di vista geometrico il moduelo corrriponde alla distanza fra l'origine degli assi $(0, 0)$ e il punto $z = (a, b)$:

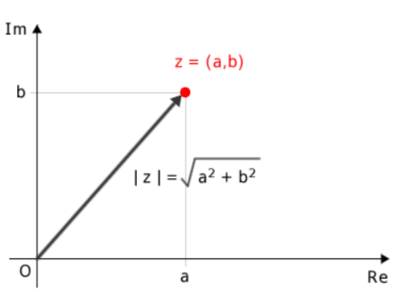

Figura 22: Grafico della funzione modulo in $\mathbf{C}$

Ora considero il modulo della differenza fra due numer complessi z e w:

$$|z - w| = |(a, b) - (c, d)| = |(a - c, b - d)| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \tag{64}$$

Dal punto di vista geometrico, il modulo di una differenza corrisponde alla distanza fra i due punti nel pianno di Gauss.

Proprietà del moduelo:

1. $|z| = |-z|$ (simmetria rispoetto al centro)
2. $|\bar{z}| = |z|$ (simmetria rispetto all'asse reale)
3. $\bar{z} + \bar{w} = z \bar{+} w$
4. $\bar{z} \cdot \bar{w} = z \bar{\cdot} w$
5. $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \implies |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

   Dimostrazione. $z \cdot \bar{z} = (a + i\,b)(a - i\,b) = a^2 - i\,a\,b + i\,a\,b - i^2\,b^2 = a^2 - \underbrace{i^2}_{=-1}\,b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ □

   Questa proprietà è utile per calcolare il reciproco, infatti: $\bar{z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{Re(z) - Im(z)}{|z|^2} =$
   $= \frac{Re(z)}{|z|^2} - i\,\frac{Im(z)}{|z|^2} \implies \begin{cases} Re(\frac{1}{z}) = \frac{Re(z)}{|z|^2} \\ Im(\frac{1}{z}) = -\frac{Im(z)}{|z|^2} \end{cases}$

6. Disuguaglianza triagolare (immagine 12): $|z + w| \leq |z| + |w|$

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \tag{65}$$

8.5 Forma trigonometrica

Considero un numero complesso $z \neq 0 \implies |z| \neq 0$:

$$z = |z| \cdot \frac{\bar{z}}{|z|} = z \cdot w = \begin{cases} \rho = |z| & modulo \\ w = \frac{\bar{z}}{|z|} & angolo \end{cases} \tag{66}$$

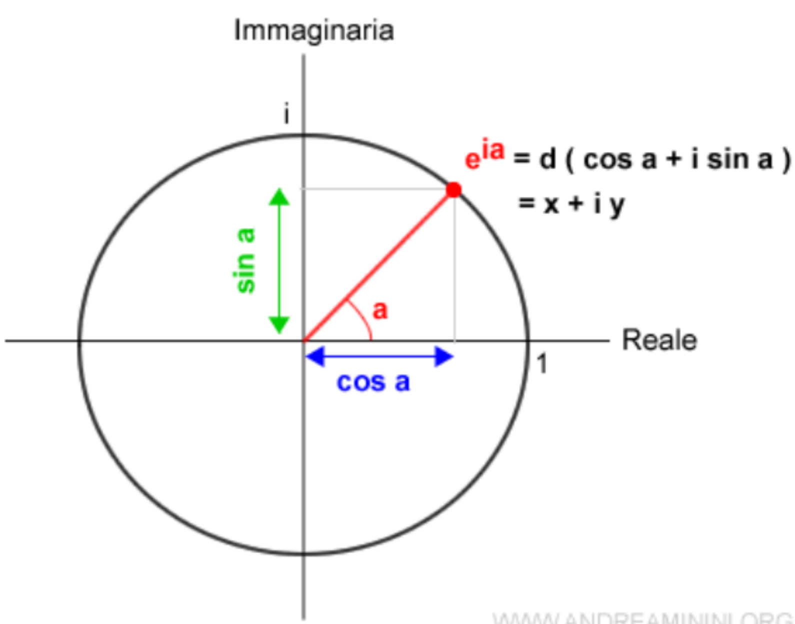

Figura 23: Foma gognometrica dei numeri complessi

È importante sottolineare che $|w| = 1$ e quindi non influisce sul modulo.

Formule della notazione gognometrica:

- Angolo: $w = (\cos\theta + \sin\theta) = \cos\theta + i\ \sin\theta$
- Modulo: $\rho = |z|$
- Numero completo: $z = \rho(cos\theta + i\ \sin\theta)$
- Parte reale: $Re(z) = \rho\cos\theta$
- Parte immaginaria: $Im(z) = \rho\sin\theta$
- Argomento: $Arg(z) = \theta$ (è difinito a meno di un multiplo di 2π)
- $\cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|}$
- $\sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}$
- $\tan(\theta) = \tan(Arg(z)) = \frac{Im(z)}{Re(z)} \quad , \quad Re(z) \neq 0$
- $\cot(\theta) = \cot(Arg(z)) = \frac{Re(z)}{Im(z)} \quad , \quad Im(z) \neq 0$

8.5.1 Formule di De Moivre (I e II)

Prodotto tra numeri complessi nella notazione gognometrica:

- Considero $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1) \in \mathbf{C}$
- Considero $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2) \in \mathbf{C}$
- $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2) = passaggi[i^2 = -1] = \rho_1 \cdot \rho_2\Big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)\Big)$
- $\begin{cases} \rho_1 \cdot \rho_2 = |z_1 \cdot z_2| & \text{prodotto dei moduli è il modulo del prodotto} \\ Arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = Arg(\theta_1) + Arg(\theta_2) & \text{Argomento del prodotto è la somma dell'argomento dei fattori} \end{cases}$

Elevamento a potenza di numero complesso nella notazione gognometrica:

- Considero $z = \rho_1(\cos\theta + i\ \sin\theta) \in \mathbf{C}$
- $z^k = \rho^k\Big(\cos(k\theta) + i\ sin(k\theta)\Big) \quad \forall\ k \in \mathbf{Z}$
- $\begin{cases} |z^k| = \rho^k = |z|^k \\ Arg(z^k) = k\ Arg(z) \quad \text{con } k \neq 2k\pi \end{cases}$

Esercizio di esempio sull'elevamento a potenza:

1. $(1+i)^8 = \prod_1^8(1+i) \implies$ molto lungo
2. Sia $z = 1 + i \implies \begin{cases} Re(z) = 1 \\ Im(z) = 1 \end{cases}$
3. Modulo: $\rho = |z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
4. Argomento: sapendo che $Re(z) = 1 = \rho(\cos\theta)$, l'argomento $Arg(z) = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$

5. $(1+i)^8 = z^8 = \rho^8\Big(\cos(8\,\theta) + i\,\sin(8\,\theta)\Big) = (\sqrt{2})^8\Big(\cos(2\pi) + i\,\sin(2\pi)\Big) = 16$

Formule di De Moivre con dimostrazioni:

Theorem 8.2. *Prima formula di De Moivre:*
Considero due numeri complessi $z_k = \rho_k\big(\cos(\theta_k) + i\,\sin(\theta_k)\big) \quad , \quad k = 1,2$*:*

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2)\big) \tag{67}$$

Theorem 8.3. *Seconda formula di De Moivre:*
Considero un numero $w \in \mathbf{C}/\{0\}$ *e* $n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$*, allora l'equazione...:*

$$z^n = w \tag{68}$$

...ha esattamente n-soluzioni $z_0, z_1, .., z_{n-1} \in \mathbf{C}$*, ovvero...:*

$$\sqrt[n]{z_k} = z_k^{\frac{1}{n}} = w \quad \forall\, k = 0,1,..,n-1 \tag{69}$$

...che sono date da (se $z = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ *):*

$$z_k = \rho^n\big(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)\big) \tag{70}$$

di conseguenza abbiamo che:

$$\begin{cases} Arg(z_k) = \theta_k = \frac{\theta+2k\pi}{n} \\ |z_k| = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}} \quad , \quad k = 0,1,..,k-1 \end{cases} \tag{71}$$

Dimostrazione seconda fomrula di De Moivre (67):

- verifichiamo le z_k siano radici (soluzioni) dell'equazione utilizzando la 1° formula di De Moivre (67)

  Dimostrazione. :

  $$z_k^n = \Big(\sqrt[n]{\rho}\big(\cos\theta_k + i\,\sin\theta_k\big)\Big)^n = (\sqrt[n]{\rho})^n\big(\cos(n\theta_k) + i\,\sin(n\theta_k)\big) =$$

  $$= \rho\Big(\cos(\theta+2k\pi) + i\,\sin(\theta+2k\pi)\Big) = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta) = w \implies \forall\, k = 0,1,..,n-1$$

  Sono radici distinte (in questo caso particolare coincidenti) □

- Verifichiamo che non ci siano radici oltre alle z_k:

  Dimostrazione. :
  Supponiamo che esista $z = v(cos\alpha + i\,\sin\alpha)$ che sia soluzione di $z^n = w$
  Il numero complesso z ha modulo $|z| = v > 0$ e angolo $Arg(z) = \alpha)$
  Allora:

  $$\Big(v\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha\Big)^n = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

  Che corrisponde a

  $$v^n\,\Big(\cos(n\,\alpha) + i\,\sin(n\,\alpha)\Big) = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) \implies v^n = \rho \implies v = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}$$

  Di conseguenza:

  $$n\,\alpha = \theta + 2k\pi \implies \alpha = Arg(z) = \frac{\theta+2k\pi}{n} \quad , \quad k \in \mathbf{Z}$$

  k è sovrabbonadate perchè per $k > n-1$ si aggiunge un angolo giro, quindi non si creano nuove soluzioni

  $$\implies 0 \leq k \leq n-1$$

  Si arriva alla formula:

  $$Arg(z_k) = \theta_k = \frac{\theta+2k\pi}{n}$$

  □

Corollary 8.3.1. *Le radici n-esime di* $w \in \mathbf{C}/\{0\}$ *sono vertici di un poligono regolare di n-lati inscritto sulla corconferenza centrata in* $0 \in \mathbf{C}$ *di raggio* $\sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}} = |w|^{\frac{1}{n}}$

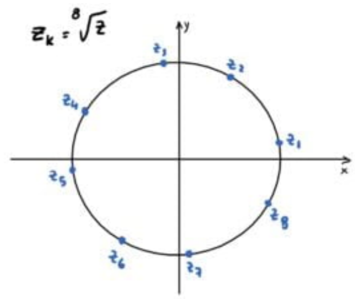

Figura 24: Poligono regolare di n-lati (soluzioni)

8.6 Teorema fondamentale dell'algebra

Definition 8.2. *un poligono è un a funzione $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ del tipo...:*

$$P(z) = c_0 + c_1 \cdot z^1 + c_2 \cdot z^2 + .. + c_n \cdot z^n \tag{72}$$

...dove $c_1, c_2, .., c_n \in \mathbf{C}$ sono i coefficienti e $n = gr(P)$ è il grado del polinomio (esponente massimo con coefficiente non nullo).

Ad esempio il polinomio $P(z) = z^2 + z + 1$ è di grado $gr(z) = 2$

Definition 8.3. *L'equazione $P(z)$ è algebrica di grado n, se le sue soluzioni sono(per definizione) gli zeri di P.*

Theorem 8.4 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *L'equazione $P(z) = 0$ ha $N -$ soluzioni w_1, w_2, w_N a cui corrispondono gli indici $m_1, m_2, .., m_N \in \mathbf{N}/\{0\}$ tali che $m_1 + m_2 + ... + m_N = n + gr(P)$*
Infatti:

$$P(z) = c_n(z - w_1)^{m1} \cdot (z - w_2)^{m2} \cdot ... \cdot (z - w_N)^{mN} \tag{73}$$

Si nota subito la grande differenza tra numeri complessi e numeri reali, imfatti nei reali ci sono molti polinomi irriducibili che non sia zzerano e per ciò non può valere anche in $\mathbf{R}$ il teorema fondamentale dell'algebra.

Theorem 8.5 (Teorema di completezza del campo complesso:)**.** *Un'equazione nel campo complesso ha:*

- *sempre almeno una radice per il teorema fondamentale dell'algebra.*
- *le radici sono di numero n per la seconda legge di De Moivre (formula 71).*

8.7 Trasformazioni geometriche nel piano di Gauss

1. Traslazione:
   Sia $z_0 \in \mathbf{C}$, , fissato $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$

   $$T(z) := z + z_0 \; \forall \; z \in \mathbf{C} \tag{74}$$

   Di fatto si fa la somma vettoriale con il metodo del parallelogramma, si nota che la traslazione sull'asse reale si ottiene sommando un numero complesso $(a, 0) \in \mathbf{R}$, mentre la traslazione sull'asse immaginario si ottiene sommando un numero complesso puro $(0, a)$.

2. Rotazione:
   Sia $w \in \mathbf{C}$, fissato $|w| = 1$ e considero $R : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $R(z) = w \cdot z$ Il modulo $|R(z)| = |w \cdot z| = \underbrace{|w|}_{=1} \cdot |z| =$ $|z|$ (resta invariato) $\implies$ $R(z)$ appartiene alla stessa circonferenza di z di raggio $|z|$ (centrata in $0 \in \mathbf{C}$).

L'argomento $Arg(z) = \alpha$ con il numero nella forma $w = \cos\alpha + i\ \sin\alpha$, considero $\theta = Arg(z)$
$Arg(z) = \alpha + \theta \implies$

$$R(z) = w \cdot z = |z| \cdot \Big(\cos(\alpha+\theta) + i\ \sin(\alpha+\theta)\Big) \tag{75}$$

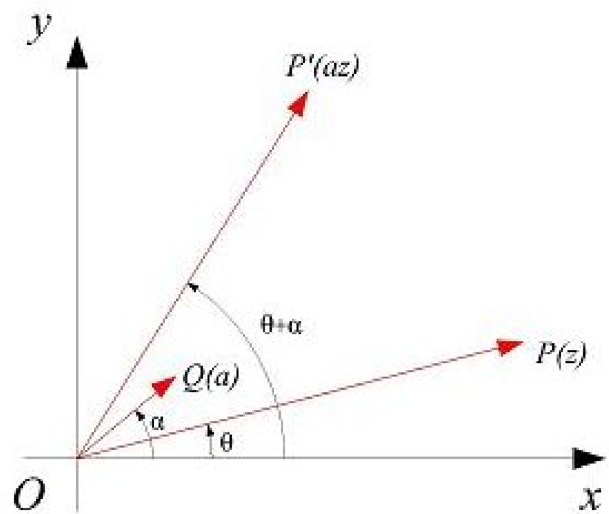

Figura 25: Rotazione piano complesso

3. Dilatazione:
Fissato $\rho > 0, \quad , \quad$ la funzione $D : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad , \quad D(z) = p \cdot z$ Il modulo è $|D(z)| = |\rho \cdot z| = |\rho| \cdot |z| = \rho \cdot |z|$
L'argomento $Arg(z) = \underbrace{Arg(\theta)}_{=0} + Arg(z) = Arg(z)$
Il numero complesso avrà lo stesso argomento ma il raggio della circonferenza (modulo) sarà dilatato di ρ volte.
$$R(z) = \rho \cdot z = \rho \cdot |z| \cdot \Big(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)\Big) \tag{76}$$

4. Inverisone:
$I : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad , \quad z = (a, b)$:
$$I(z) = -z = -(a, b) = (-a, b) \tag{77}$$
Corrisponde alla simmetria rispetto al punto $(0, 0)$ che è l'origine del piano di Gauss (opposto).

5. Simmetria:
$S : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad , \quad z = (a, b)$:
$$S(z) = \bar{z} = (a, -b) \tag{78}$$
Corrisponde alla simmetria rispetto all'asse reale e si ottiene il coniugato $\bar{z}$, che ha componnenti $Re(\bar{z}) = Re(z) \quad , \quad Im(\bar{z}) = -Im(z)$.

6. Trasformazione di Zhukovsky :
$$f : \mathbf{C}/\{0\} \to \mathbf{C} \quad , \quad f(z) = \frac{1}{2} \cdot \big(z + \frac{1}{z}\big) \tag{79}$$
Ad esempio se considero $|z| = 2 \quad , \quad z = \cos\theta + i\ \sin\theta$:

$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \big(z + \frac{1}{z}\big) = \frac{1}{2} \cdot \big(z + \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}\big) = \frac{1}{2} \cdot \big(z + \frac{\bar{z}}{|z|^2}\big) = 1 = Re(z)$

Questa funzione non altera l'angolo fra le curve ed è utile nello stidio della dinamica dei fluidi, ciò che viene altrato è la distanza fra i flussi (angoli fra tangente dei flussi resta invariata).

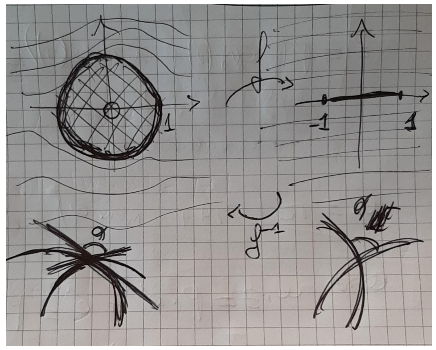

Figura 26: Funzione di Zukowski

8.8 Soluzioni delle equazioni di secondo grado in C

Considero un polinomio di secondo grado $a\,z^2 + b\,z + c = 0 \quad , \quad c \neq 0$:

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{80}$$

Si utilizza come nel campo **R**, ma il discriminante Δ rappresenta già 2 numeri. Nel campo complesso ci sono sempre 2 soluzioni per ogni equazione di secondo grado, al limite le due soluzioni possono essere coincidenti e si dice che sono di molteplicità 2 (nel caso di $\Delta = 0$).

Oltre al 5° grado non ci sono formule per rappresentare gli zeri di un polinomio, per i polinomi di 3° e 4° grado le formule sono estremamente complesse.

Esiste anche la formula ridotta:

$$z_{1,2} = \frac{-b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a} \tag{81}$$

8.9 Forma esponenziale

$$z = \rho\big(\cos\theta + i\,\sin\theta\big) =: \rho \cdot e^{i\cdot\theta} \tag{82}$$

Questa formula verrà dimostrata in seguito (Analisi II), compare la costante 'e' che è il numero di nepero e vale 2,718281828459.
La notazione esponenziale viene utilizzata nei prodotti, considero $w = r(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) = z \cdot e^{i\cdot\alpha}$
Il prodotto è:

$$w \cdot z = \rho \cdot e^{i\cdot\theta} \cdot = \rho \cdot r \cdot e^{(i\cdot\theta + i\alpha)} = p \cdot r\big(\cos(\alpha+\theta) + i\,\sin(\alpha+\theta)\big) \tag{83}$$

In questa formula possiamo notare che l'argomento $Arg(z \cdot w) = \theta + \alpha$ e il modulo $|z \cdot w| = \rho \cdot r$