13 Teoria per l'esame

1. **Formule di de Moivre per il prodotto di numeri complessi (dimostrazione).**

Prodotto tra numeri complessi nella notazione gognometrica:

Theorem 13.1. *Prima formula di De Moivre:*
Considero due numeri complessi $z_k = \rho_k\big(\cos(\theta_k) + i\ \sin(\theta_k)\big) \quad , \quad k = 1, 2$*:*

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)\big) \tag{222}$$

- Considero $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1) \in \mathbf{C}$
- Considero $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2) \in \mathbf{C}$
- $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = passaggi[i^2 = -1] = \rho_1 \cdot \rho_2\Big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\ \sin(\theta_1+\theta_2)\Big)$
- $\begin{cases} \rho_1 \cdot \rho_2 = |z_1 \cdot z_2| \quad \text{prodotto dei moduli è il modulo del prodotto} \\ Arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = Arg(\theta_1) + Arg(\theta_2) \quad \text{Argomento del prodotto è la somma dell'argomento dei fattori} \end{cases}$

2. **Formule di de Moivre per le radici n-esime di un numero complesso (dimostrazione).**

Theorem 13.2. *Seconda formula di De Moivre:*
Considero un numero $w \in \mathbf{C}/\{0\}$ *e* $n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$*, allora l'equazione...:*

$$z^n = w \tag{223}$$

...ha esattamente n-soluzioni $z_0, z_1, .., z_{n-1} \in \mathbf{C}$*, ovvero...:*

$$\sqrt[n]{z_k} = z_k^{\frac{1}{n}} = w \quad \forall\, k = 0, 1, .., n-1 \tag{224}$$

...che sono date da (se $z = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ *):*

$$z_k = \rho^n\big(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)\big) \tag{225}$$

di conseguenza abbiamo che:

$$\begin{cases} Arg(z_k) = \theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \\ |z_k| = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}} \quad , \quad k = 0, 1, .., k-1 \end{cases} \tag{226}$$

Dimostrazione seconda fomrula di De Moivre (67):

- verifichiamo le z_k siano radici (soluzioni) dell'equazione utilizzando la 1° formula di De Moivre (67)

  Dimostrazione. :

  $$z_k^n = \Big(\sqrt[n]{\rho}\big(\cos\theta_k + i\ \sin\theta_k\big)\Big)^n = (\sqrt[n]{\rho})^n\big(\cos(n\theta_k) + i\ \sin(n\theta_k)\big) =$$

  $$= \rho\Big(\cos(\theta + 2k\pi) + i\ \sin(\theta + 2k\pi)\Big) = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta) = w \implies \forall\, k = 0, 1, .., n-1$$

  Sono radici distinte (in questo caso particolare coincidenti) □

- Verifichiamo che non ci siano radici oltre alle z_k:

  Dimostrazione. :
  Supponiamo che esista $\quad z = v(cos\alpha + i\ \sin\alpha) \quad$ che sia soluzione di $\quad z^n = w$
  Il numero complesso z ha modulo $\quad |z| = v > 0 \quad$ e angolo $\quad Arg(z) = \alpha)$
  Allora:

  $$\Big(v\ (\cos\alpha + i\ \sin\alpha\Big)^n = \rho\ (\cos\theta + i\ \sin\theta)$$

Che corrisponde a

$$v^n \Big(\cos(n\,\alpha) + i\,\sin(n\,\alpha)\Big) = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) \implies v^n = \rho \implies v = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}$$

Di conseguenza:

$$n\,\alpha = \theta + 2k\pi \implies \alpha = Arg(z) = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad , \quad k \in \mathbf{Z}$$

k è sovrabbonadate perchè per $k > n-1$ si aggiunge un angolo giro, quindi non si creano nuove soluzioni

$$\implies 0 \le k \le n-1$$

Si arriva alla formula:

$$Arg(z_k) = \theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

□

3. **Continuità delle funzioni derivabili (dimostrazione).**

Theorem 13.3 (Continuità delle funzioni derivabili)**.** *Se una funzione è derivabile, allora sicuramente è anche continua (condizione necessaria).*

$$\begin{cases} f : (a,b) \to \mathbf{R} \quad , \quad x_0 \in (a,b) \\ f \textit{ derivabile in } x_0 \end{cases} \implies f \textit{ è continua in } x_0 \tag{227}$$

Dimostrazione della continuità delle funzioni derivabili. :

$$\lim_{x\to x_0}\Big(f(x) - f(x_0)\Big) = \lim_{x\to x_0}\Big(\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}\Big)\cdot(x - x_0) =$$
$$= \Big(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to x_0}(x - x_0)\Big) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

□

4. **Lemma di Fermat (dimostrazione).**

Theorem 13.4 (Lemma di Fermat)**.** *Considero una funzione $f : (a,b) \to \mathbf{R} \quad , \quad x_0 \in (a,b)$ è un punto di esteremo per la funzione (massimo 0 minimo), se la funzione è derivabile in x_0, allora la sua derivata vale zero*

Geometricamente significa che la tangente in quel determinato punto è parallela all'asse x e siamo in corrispondenza di un punto stazionario (o punto critico se si tratta di problemi di termoodinamica).

Dimostrazione del Teorema di Fermat (solo nel caso di massimo). :
Sia $x_0 \in (a,b)$ il massimo di f nell'intervallo (a,b) tale che per ogni punto nell'intervallo generico vale:

$$f(x_M) \geq f(x)$$

(A) Consideriamo il caso in cui $x > x_M$, si ha che:

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \leq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\implies \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_M}{x - x_M} \leq 0$$

Siccome il limite destro e sinistro coincidono:

$$\implies \quad f'(x) = \lim_{x \to x_M} \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \leq 0$$

(B) Consideriamo il caso in cui $x < x_M$, si ha che:

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \geq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\implies \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_M}{x - x_M} \geq 0$$

Siccome il limite destro e sinistro coincidono

$$\implies \quad f'(x) = \lim_{x \to x_M} \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \geq 0$$

Dalle equazioni ottenute da A e B si ha che:

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases} \quad \implies f'(x) = 0 \quad \textit{punto stazionario}$$

Quindi una funzione ha un numero finito di punti stazionari che possono essere di massimo, minimo o flesso.

□

5. **Teorema di Lagrange (dimostrazione).**

Theorem 13.5 (Teorema di Lagrange)**.** *Se $f \in C([a,b])$ è derivabile in (a,b) (estremi esclusi perchè deve essere derivabile sia nell'intorno destro che sinistro) , allora:*

$$\exists\, c \in (a,b) \mid \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \tag{228}$$

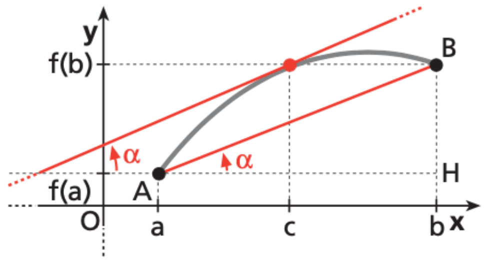

Figura 51: Teorema di Lagrange

Il teorema di Lagrange afferma che quando una funzione ad una variabile è continua e derivabile in un intervallo compatto (chiuso e limitato), allora ammette almeno un punto in cui la derivata prima è pari al rapporto incrementale che c'è tra i punti estremi dell'intervallo.
È importante sottolineare che il punto c, detto punto di Lagrange, non è necessariamente unico.

Dimostrazione del teorema di Lagrange. :

1) Consideriamo una funzione $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ tale che:

$$g(x) := f(a) + \Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big)(x-a)$$

Osserviamo che g è un polinomio di grado $gr(g) \leq 1$, di conseguenza il suo grafico è una retta.

2) Per costruzione (g: retta passante per a e b):

$$g(a) = f(a) \qquad , \qquad g(b) = f(b)$$

Quindi g condivide con f sia a che b. In altre parole g è la retta passante per $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$.

3) La retta ha per coefficente angolare:

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

4) $g \in C(\mathbf{R})$ è derivabile in $\mathbf{R}$, quindi:

$$g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

5) Consideriamo la funzione $h := f - g$ su l'intervallo $[a,b]$. La funzine h è continua in tutto l'intervallo estremi inclusi e derivabile nell'intervallo estremi esclusi in quanto differenza fra funzioni continue.

Per il Teorema di Weistrass (insieme limitato e infinito, quindi esiste punto di accumulazione) esiste un punto $x_m, x_M \in [a,b]$ che è estremo globale:

6A) Consideriamo il caso in cui gli estremi di $[a,b]$ coincidono con x_m, x_M di $h(x)$.

Poichè:

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0 \qquad e \qquad h(b) = f(b) - g(b) = 0$$

per ipotesi è definizione di retta.

Si ha che:

$$h(x) = 0\, \forall\, x \in [a,b] \implies 0 = h(x) = f(x) - g(x) \implies f(x) = g(x)$$

Quindi:

$$f'(x) = g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \Longrightarrow \qquad Teorema\,verificato$$

6B) Invece se almeno uno tra x_m, x_M sia strettamente incluso in $[a, b]$, quindi:

$$(x_m \vee x_M) \in (a, b)$$

Supponiamo sia $x_m \in (a, b)$, applicando il Lemma di Fermat ottengo che:

$$0 = h'(x_M) = f'(x_M) - g'(x_M)$$

Quindi:

$$f'(x_M) = g'(x_M) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi il teorema verificato $\forall\, c \in (a, b)$

□

Caso particolare del Teorema di Lagrange, il teorema di Rolle:

Theorem 13.6 (Teorema di Rolle)**.** *:*
Considerata una funzione tale che $f(A) = f(b)$, allora $\exists\, c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \tag{229}$$

6. **Teorema sulla caratterizzazione delle funzioni monotone (dimostrazione).**

Theorem 13.7 (Test della monotonia)**.** *:*
Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in (a, b) , allora:

(a) f *crescente* $\Longleftrightarrow f'(x) > 0\, \forall\, x \in (a, b)$

(b) f *decrescente* $\Longleftrightarrow f'(x) < 0\, \forall\, x \in (a, b)$

(c) f *stazionaria* $\Longleftrightarrow f'(x) = 0\, \forall\, x \in (a, b)$

Dimostrazione del punto 1, funzione crescente. Considero:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \qquad se \quad a < x < y < b$$

Per il teorema sella permanenza del segno:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \forall\, c \in (a, b)$$

Viceversa, supponiamo che $\quad f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad$.
Consideriamo i punti $\quad a < x < y < b$, per il teorema di Lagrange applicato a f sull'intervallo $[a, b]$ segue che:

$$\exists\, c \in (x, y) \,|\, 0 \leq f'(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq f(y) \quad \forall\, x, y \in (a, b) \quad , \quad x < y$$

Questo significa che f è crescente. Analogamente si dimostra anche la decrescenza.

□

In generale non vale il test della monotonia se la funzione nell'intervallo non è continua.

Corollary 13.7.1 (Corollario della caratterizzazione delle funzioni costanti)**.** *:*
Considero $f(a,b) \to \mathbf{R}$ *è derivabile, allora la funzione* f *è costante, quindi la sua derivata prima* $f'(x) = 0 \ \forall \ x \in (a,b)$.

Viceversa se $f'(x) \neq 0 \, \forall \, x \in (a,b)$ *, allora per il test della monotonia* f *è sia crescente che decrescente in senso lato, quindi è costante.*

Corollary 13.7.2. *Se* $f : D \to \mathbf{R}$ *con* D *unione di intervalli e* f *derivabile in* D*, allora* $f'(x) = 0 \, \forall \, x \in D$ *se e solo se* f *è localmente costante (costante nell'intervallo o nel caso limite in un punto).*

7. **Teorema di de l'Hospital (dimostrazione).**

Theorem 13.8 (Teorema di De L'Hopital)**.** *:*
Sia $f, g(a,b) \to \mathbf{R}$ *derivabile e* $g \neq 0$ *tale che:*

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) \\ \\ \exists \, \frac{\lim_{x \to x_0^+} f'(x)}{\lim_{x \to x_0^+} g'(x)} \end{cases} \implies allora \quad \frac{\lim_{x \to x_0^+} f'(x)}{\lim_{x \to x_0^+} g'(x)} = l \tag{230}$$

Dimostrazione del Teorema di De L'Hopital. :
Definiamo $f(a) = g(a) = 0$ estendibile in maniera continua all'intervallo $[a,b)$ e fissiamo $x \in [a,b)$, quindi abbiamo $f, g \in C([a,x])$ e in più derivabili in (a,x) poichè derivabili in $[a,b)$ per ipotesi.

Allora f, g sono derivabili in (a,b) e continue in $x = a$.
Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $h : [a,x] \to \mathbf{R}$ definita come:

$$h(y) := f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x) \quad \forall \, y \in [a,x]$$

Sappiamo che esiste:

$$\exists \, y(x) \in (a,x) \mid \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'\big(g(x)\big)$$

che sta a indicare che il punto di lagrange dipende da x, allora $\implies h'\big(g(x)\big) = 0$

Devo trovare $h'(y)$, dove x è fissato:

$$0 = h'\big(g(x)\big) = f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x) \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'\big(y(x)\big)}{g'\big(y(x)\big)} \qquad \text{(intorno del punto)}$$

Si ha che:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'\big(y(x)\big)}{g'\big(y(x)\big)} = ***$$

Poichè $a < y(x) < x$ si ha che:

$$\lim_{x \to a^+} y(x) < a^+$$

Quindi per il teorema del limite della funzione composta;

$$*** = \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l$$

□

8. **Formula di Taylor con il resto secondo Peano (dimostrazione).**

Theorem 13.9 (Teorema di Taylor con resto di Peano)**.** *:*
Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ derivabile n-volte con $(n \geq 1)$ in $x_0 \in (a,b)$. Definiamo il suo polinomio di Taylor di ordine n in x_0 (con $x \in \mathbf{R}$) come:

$$T^f_{n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f^2(x_0)(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (231)$$

Allora esiste la funzione resto di ordine n in x_0:

$$R^f_{n,x_0}(x) : (a,b) \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + R^f_{n,x_0}(x) \qquad \textit{con } x \in (a,b) \quad (232)$$

E il resto è infinitesimo di ordine maggiore di n per $x \geq x_0$ (raffinamento del lemma delle derivate con il resto):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T^f_{n,x_0}(x) - R^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad (233)$$

Quindi $R^f_{n,x_0}(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ per $x \to x_0$:

$$f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + o\big((x-x_0)^n\big) \quad \textit{per } x \to x_0 \quad (234)$$

Dimostrazione del Teorema di Taylor con resto di Peano. :

Definiamo $R^f_{n,x_0}(x)$ come differenza tra $f(x)$ e $T^f_{n,x_0}(x)$:

$$R^f_{n,x_0}(x) = f(x) - R^f_{n,x_0}(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$$

Con De l'Hopital:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = dH = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \big(T^f_{n,x_0}\big)'(x)}{n \cdot (x-x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\Big)'}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k(k-1)!} \cdot k(x-x_0)^k\Big)}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

Applichiamo il teorema di De L'hopital per $(n-1)$volte quindi i coefficienti di grado minore di $(n-1)$ si azzerano:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{n-1}(x) - \Big(f^{n-1}(x_0) + f^n(x_0)(x-x_0)\Big)}{n(n-1)(n-2)\cdot 2(x-x_0)^1} = \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \to x_0} \Big[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^n(x_0)\Big] = \frac{1}{n!} \cdot \Big\{f^n(x_0) - f^n(x_0)\Big\} = 0$$

□

9. **Primo Teorema Fondamentale del Calcolo (dimostrazione).**

Theorem 13.10 (1° teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *:*
Se $f \in C\big([a,b]\big)$ è cobntinua, allora è integrabile su $[a,b]$ (quindi l'area del grafico ha un senso).
La notazione per le funzioni integrabili è:

$$\mathcal{R}\big([a,b]\big) := \big\{ \textit{insieme di tutte le } f \textit{ integrabili su } [a,b] \big\} \tag{235}$$

Definition 13.1 (primitiva di una funzione)**.** *Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ data una funzione $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ è detta primitiva di f se:*

- *F è derivabile*
- *$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$*

Due funzioni primitive F, G di f, rispettivamente $F' = f \quad , \quad G' = f$ differiscono di una costane su $[a,b]$ che è $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0 \quad \Longrightarrow \quad F - G$ è costante su $[a,b]$. Si dice che sono curve parallele o coincidenti se la distanza è zero.
Abbiamo visto l'integrale definito come diferenza fra funzione in $F(b) - F(a)$, per indicare una famiglia di primitive si usa la notazione:

$$\int f(x)\, dx = g(x) + k \tag{236}$$

Dimostrazione del 1° teorema fondamentale del calcolo integrale. :
Per ogni partizione:

$$P = \big\{I_k\big\}_{k=1}^{n} \quad , \quad I_k = \big[x_k, x_k + 1\big] \qquad con \quad x_0 = a \quad , \quad x_n = b$$

Abbiamo:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \big[F(x_k) - F(x_{k-1})\big] = ***$$

Questa sommatoria rappresenta una somma telescopica (si semplificano tutti i termini tranne il primo e l'ultimo).
Applicando il teorema di Lagrange a F su $\big[x_k, x_k + 1\big]$ (controllo e sono rispettate tutte le ipotesi del T. di Lagrange):

$$\Longrightarrow \quad \exists\, y_k \in (x_{k-1}, x_k) \,\Big|\, \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(y_k) = f(y_k)$$

Cioè:

$$F'(y_k) - F(x_{k-1}) = f(y_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = |I_k| \cdot f(y_k) \qquad con \quad |I_K| \quad lunghezza$$

Sostituiamo in $\;***\;$ e si ottiene:

$$*** = \sum_{k=1}^{n} |I_k| f(y_k)$$

Poichè:

$$y_k \in (x_{k-1}, x_k) \;\Longrightarrow\; \quad Inf(f) \le f(y_k) \le Sup(f) \qquad nell'intervallino \quad I_k$$

Quindi passando alla sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| \begin{pmatrix} Inf(f) \\ I_k \end{pmatrix} \le \sum_{k=1}^{n} |I_k| \cdot f(y_k) \le \sum_{k=1}^{k} \cdot \begin{pmatrix} Sup(f) \\ I_k \end{pmatrix}$$

Che corrisponde a:

$$s(f,P) \le F(b) - F(a) \le S(f,P) \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(I)$$

Passando a Inf e Sup:

$$Sup\{s(f,P) \mid P \in \mathcal{P}(I)\} \le F(b) - F(a) \le Inf\{S(f,P) \mid P \in \mathcal{P}(I)\}$$

Quindi:

$$\underline{I}(f) \leq F(b) - F(a) \leq \bar{I}(f)$$

Poichè per ipotesi f è integrabile :

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$$

si ha che:

$$F(b) - F(a) = \underline{I}(f) = \bar{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{237}$$

□

10. **Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo (dimostrazione).**

Theorem 13.11 (2° teorema del calcolo integrale)**.** *:*
Sia $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ e definiamo la funzione integrale F su $[a,b]$:

$$F : [a,b] \to \mathbf{R} \qquad F(x) := \int_a^x f = \int_a^x f(y)\,dy \tag{238}$$

(a) se f è limitata allora F è continua
(b) se f è continua allora F è derivabile in (a,b) e:

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad x \in (a,b)$$

Quindi la funzione integrale F è primitiva della funzione integrale f:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f = f(x) \quad , \quad x \in (a,b)$$

Dimostrazione del 2° teorema fondamenmtale del calcolo integrale. :
- Punto 1: se f è limitata allora F è continua
Se f è limitata $\Longrightarrow$ esiste M tale che:

$$|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Quindi:

$$\Big|F(x+h)-F(x)\Big| = *** = \Big|\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\Big| = addittivita' = \Big|\int_x^{x+h} f\Big| \leq proprieta' \leq \int_x^{x+h} |f| \leq \int_x^{x+h} M = M \cdot |h|$$

Passando al limite di h che tende a 0:

$$M \cdot |h| \to 0 \quad , \quad h \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h\to 0}\Big|F(x+h) - F(x)\Big| = 0 \quad cioe' \quad \lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$$

Quindi F è continua per ogni $x \in [a,b]$

- Punto 2: se f è continua allora F è derivabile in (a,b) e $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$
La media dell'integrale di f sull'intervallo di lunghezza h è:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = *** = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f = t.\,media = f\big(y(h)\big)$$

Questo per il teorema della media selezionando un opportuno $y(h)$
Tra x e $x+h$:

$$\Big|y(h) - x\Big| \leq \Big|(x+h) - x\Big| = |h| \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} y(h) = x$$

E poichè è continua in x, allora:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f\big(y(h)\big) = \int\Big(\lim_{h\to 0}\big(y(h)\big)\Big) = f(x)$$

Quindi in un singolo punto l'incremento dell'area sottesa dal grafico è pari al limite dell'integrale su un intrevallo che tende a zero, che è il valore dellìa funzione stessa.

□

Una conseguenza del 2° teorema fondamentale del calcolo integrale è che il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale può essere espresso come:

$$\int_a^x F' = F(x)F(a) \quad cioe' \quad F(x) = F(a) + \int_a^x F'$$

11. **Teoremi di integrazione per parti (dimostrazione).**

Theorem 13.12 (integrazione per parti)**.** *:*
Sia $f, g \in C\big([a, b]\big)$ *e* $f', g' \in C\big([a, b]\big)$ *, allora:*

$$\int_a^b f' \cdot g = \big[f \cdot g\big]_a^b - \int_a^b f \cdot g'$$

Dimostrazione dell'integrazione per parti. :
Partendo dalla regola di Leibniz di derivazione di Leibniz si ricava la formula di integrazione oer parti.

$$\big(f \cdot g\big)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Si integrano entrambi i membri dell'equazione di Leibniz:

$$\int_a^b \big(f \cdot g\big)' = \int_a^b \big(f' \cdot g + f \cdot g'\big) = \int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g'$$

Poichè $(f \cdot g)$ è primitiva di $(f \cdot g)'$, per il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale $\quad *** = \big[f \cdot g\big]_a^b$

□

12. **Teoremi di integrazione per sostituzione (dimostrazione).**

Theorem 13.13 (Integrazione per sostituzione)**.** *:*
Sia $f \in C\big([a, b]\big) \subset \mathcal{R}$, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ *derivabile,* $\varphi' \in C\big([a, b]\big)$ *strettamente monotona e crescente. Fissato* $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, *allora vale la seguente proprietà:*

$$\int_a^b f(y)\, dy = \int_c^d f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \cdot d(x) \tag{239}$$

Dimostrazione dell'integrazione per sostituzione. :
Sia $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ primitiva di F , così per il 1° Teorema del calcolo integrale:

$$\int_a^b f(y)\_dy = F(b) - F(a)$$

Sia $\quad G := F \circ \varphi : [c, d] \to \mathbf{R} \quad$ per il teorema della funzione composta:

$$G' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' \quad cioe' \quad G'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi' = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'$$

Quindi G' è una primitiva di $(f \circ g) \cdot \varphi'$, di conseguenza per il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_c^d f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx = G(d) - G(c) = F\big(\varphi(d)\big) - F\big(\varphi(x)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f = \int_a^b f(y)\, dy$$

□

13. **Serie a termini positivi: Criterio della Radice (dimostrazione).**

Theorem 13.14 (Teorema, criterio della radice)**.** *:*
Sia $0 \leq a_n$ (non negativo) e supponiamo che:

$$\exists\, l := \lim_n \sqrt[n]{a_n}$$

(a) se $0 \leq l < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge
(b) se $l > 1$ la serie $\sum_n a_n$ diverge
(c) (se $l = 1$ non si può dedurre nulla sul carattere della serie e ci si deve ricondurre a casi notevoli)

Dimostrazione del criterio della radice. :
Dall'ipotesi segue che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \geq N \implies |\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon \qquad \implies \qquad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$$

Se $0 < \varepsilon < l \quad \implies \quad l - \varepsilon > 1$ e posso elevare alla n:

$$(l-\varepsilon)^n < a_n < (l+\varepsilon)^n \qquad , \quad n \geq N$$

Cioè stiamo confrontando la serie di regione $(l-\varepsilon)$ e $(l-\varepsilon)$:

(a) se $l < 1$, scegliendo $\varepsilon \mid l + \varepsilon < 1$:

$$\sum_{n \geq N} (l+\varepsilon)^n \quad \textit{converge}$$

e per il teorema del confronto anche:

$$\sum_n a_n \quad \textit{converge}$$

(b) se $l > 1$, scegliendo $\varepsilon \mid l - \varepsilon > 1$:

$$\sum_{n \geq N} \left(l-\varepsilon\right)^n \quad \textit{diverge}$$

e per il teorema del confronto anche:

$$\sum_n a_n \quad \textit{diverge}$$

□

14. **Serie a termini positivi: Criterio del Rapporto (dimostrazione).**

Theorem 13.15 (Teorema, criterio del rapporto)**.** *:*
Sia $0 \leq a_n$ (non negativo) e supponiamo che:

$$\exists\, l := \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$$

Allora:

(a) se $0 \leq l < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge
(b) se $l > 1$ la serie $\sum_n a_n$ diverge
(c) (se $l = 1$ non si può dedurre nulla sul carattere della serie e ci si deve ricondurre a casi notevoli)

Dimostrazione del criterio del rapporto. :
Dall'ipotesi segue che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \geq N \implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon \qquad \implies \qquad l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

Se $0 < \varepsilon < l \quad \implies \quad l - \varepsilon > 1$ e posso elevare alla n:

$$(l - \varepsilon) \cdot a_n < a_{n+1} < (l + \varepsilon) \cdot a_n \qquad , \quad n \geq N$$

Cioè stiamo confrontando la serie di regione $(l - \varepsilon)$ e $(l - \varepsilon)$:

(a) se $l < 1$, scegliendo $0 < \varepsilon \mid l + \varepsilon < 1$ si ha:

$$a_{n+1} < (l + \varepsilon) \cdot a_n < (l + \varepsilon)(l + \varepsilon) \cdot a_{n+1} < \cdots < (l + \varepsilon)^{n+1} \cdot a_n$$

Quindi stiamo confrontando la serie con un'altra serie $\sum_{n \geq N}(l + \varepsilon)^n)$ geometrica convergente e per il criterio del confronto $\sum a_n$ è convergente.

(b) se $l > 1$, scegliendo $\varepsilon > 0 \mid (l - \varepsilon) > 1$ si ha:

$$a_{n+1} > (l + \varepsilon) \cdot a_n > (l + \varepsilon)(l + \varepsilon) \cdot a_{n+1} > \cdots > (l + \varepsilon)^{n+1} \cdot a_n$$

e per il teorema del confronto anche: $\sum_n a_n$ *diverge*

□

15. **Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno (dimostrazione).**

Theorem 13.16 (Teorema di Leibniz)**.** *:*
Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *dove:*

(a) La serie ha termini di segno alterno: $a_n \geq 0$

(b) Condizione necessaria per la convergenza della serie $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

(c) È definitivamente decrescente: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *che significa:*

$$\exists\, n_0 \geq 0 \mid n \geq n_0 \quad \implies \quad a_n \geq a_{n+1}$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *converge semplicemente:*

$$\exists\, s := \lim_{N\to+\infty} s_N = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \in \mathbf{R} \tag{240}$$

Inoltre:

$$s_{2N} \geq s \geq s_{2N+1} \quad , \quad N \geq 0$$

Con:

- $\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty}$ *decrescente*
- $\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty}$ *crescente*

In più il resto si scrive:

$$R_N := \sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \textit{è una serie convergente tale che} \quad |R_N| \leq a_n \quad \forall\, N \geq 0 \tag{241}$$

Dimostrazione del Teorema di Leibniz. :
Poichè:

$$\lim_n |(-1)^n a_n| < \lim_n |a_n| = 0 \quad (Hp\,2)$$

La condizione necessaria per la convergenza è verificata.
Studiamo le somme paerziali pari e dispari:

- Pari:

$$s_0 = a_0 \geq 0$$

$$s_2 = \underbrace{a_0}_{s_0} - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = s_0 + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{\geq 0\; x\; Hp\, 3} \geq s_0$$

$$s_4 = \underbrace{a_0 - a_1 + a_2}_{s_2} - a_3 + a_4 = s_2 + \underbrace{a_4 - a_3}_{\geq 0\; x\; Hp\, 3} \geq s_2$$

Si deduce che la successione dei termini pari è decrescente:

$$\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty} \qquad decrescente$$

- Dispari:

$$s_1 = a_0 - a_1 \geq 0$$

$$s_3 = \underbrace{a_0 - a_1}_{s_1} + a_2 - a_3 + = s_1 + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0\; x\; Hp\, 3} \geq s_1$$

Si deduce che la successione dei termini pari è decrescente:

$$\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty} \qquad decrescente$$

Si forma quindi la seguente serie di disegualianze:

$$s_1 < s_3 < \cdots < s_{2N+1} = s_{2N} + a_{2N+1} \leq s_{2N} \leq \cdots \leq s_2 \leq s_0$$

Quindi le successioni $\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty}$ e $\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty}$ sono monotone e limitate, quindi per il teorema della convergenza delle successioni monotone limitate:

$$\exists \lim_{N \to +\infty} s_{2N} \qquad , \qquad \exists \lim_{N \to +\infty} s_{N+1}$$

Inoltre:

$$\lim_N \Big(s_{2N+1} - s_{2N} \Big) = \lim_N \Big(-a_{2N+1} \Big) = 0 \quad x\; Hp\, 2$$

Di conseguenza:

$$\implies \quad \underbrace{\lim_N \big(s_{2N} \big)}_{=s} = \underbrace{\lim_N s_{2N'}}_{=s} =: s \in \mathbf{R}$$

Ciò significa che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_{pari}(\varepsilon) \geq 0 \,|\, (2N) \geq M_{pari}(\varepsilon) \quad \implies \quad |s_{2N} - s| < \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_{dispari}(\varepsilon) \geq 0 \,|\, (2N+1) \geq M_{dispari}(\varepsilon) \quad \implies \quad |s_{2N+1} - s| < \varepsilon$$

Definendo il massimo:

$$M(\varepsilon) := Max\Big(M_{pari}(\varepsilon), M_{dispari}(\varepsilon) \Big)$$

Si ha che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon) \geq 0 \,\Big|\, N \geq M(\varepsilon) \quad \implies \quad |s_N - s| < \varepsilon \qquad cioe' \quad \exists \lim_N s_N = s$$

In particolare:

$$s_{2N+1} \leq s \leq s_{2N} \qquad con \quad s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Abbiamo che:

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n\right)}_{=s} - \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n a_n\right)}_{=s_{N-1}} = s - s_{N-1}$$

Passando al limite:

$$\lim_N R_N = \lim_N \left(s - s_{N-1}\right) = s - \lim_N \left(s_{N-1}\right) = s - s = 0$$

Usando $\quad s_{2N+1} \leq s \leq s_{2N}$:

$$s_{2N-1} \underbrace{\leq}_{\text{A}} s \underbrace{\leq}_{\text{B}} s_{2N} \qquad \Longrightarrow \qquad s_{2N+1} \underbrace{\leq}_{\text{C}} s \leq s_{2N}$$

Sfruttando queste disugualianze si ottiene:

$$0 \underbrace{\leq}_{\text{A}} s - s_{2N-1} \underbrace{\leq}_{\text{B}} s_{2N} - s_{2N-1} = a_{2N}$$

$$0 \underbrace{\leq}_{\text{A}} s_{2N} - s \underbrace{\leq}_{\text{B}} s_{2N} - s_{2N+1} = a_{2N+1}$$

In ogni caso:

$$|s_N - s| \leq a_N$$

E sia per N pari che dispari:

$$|R_N| < a_{N-1} \quad \forall\, N \geq 0$$

$\square$

16. **Criterio del confronto asintotico (dimostrazione).**
Confronto asintotico:
Sia $0 \leq a_n \quad , \quad 0 \leq b_n \quad , \quad a_n \sim b_n \; per \; n \to +\infty.$ Allora:
    (a) $\sum_n a_n$ converge $\quad \Longleftrightarrow \quad \sum_n b_n$ converge
    (b) $\sum_n a_n$ diverge $\quad \Longleftrightarrow \quad \sum_n b_n$ diverge

Dimostrazione. :
Siccome $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \Longrightarrow$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \geq N \mid |\frac{a_n}{b_n} - 1| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - 1 < +\varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad (1-\varepsilon) \cdot b_n < a_n < (1+\varepsilon) \cdot b_n \quad , \quad n \geq N$$

Per il criterio del confronto (Teorema dei carabinieri) si conclude la dimostrazione

$\square$