10 Calcolo differenziale

Il calcolo differenziale di Leibniz-Newton risolve il problema di approssimare funzioni complicate con funzioni semplici del tipo $f(x) = mx + q$, quindi polinomi di ordine inferiore al primo.

È utile anche per approssimare l'andamento dei grafici in dei determinati punti precisi.

10.1 definizione e teoremi

10.1.1 Definizione di derivata

Definition 10.1 (Derivata di una funzine)**.** *Considero una funzione* $f(a,b) \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a,b)$ *diremo che* f *è derivabile in* x_0 *se:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} \right) \in \mathbf{R} \tag{147}$$

Questo limite del rapporto incrementale prende il nome di derivata prima nel punto x_0 *e si indica con* $f'(x_0)$*.*

Il rapporto di oscillazione definito in un intervallo specifico corrisponde al $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \Delta X \to 0$

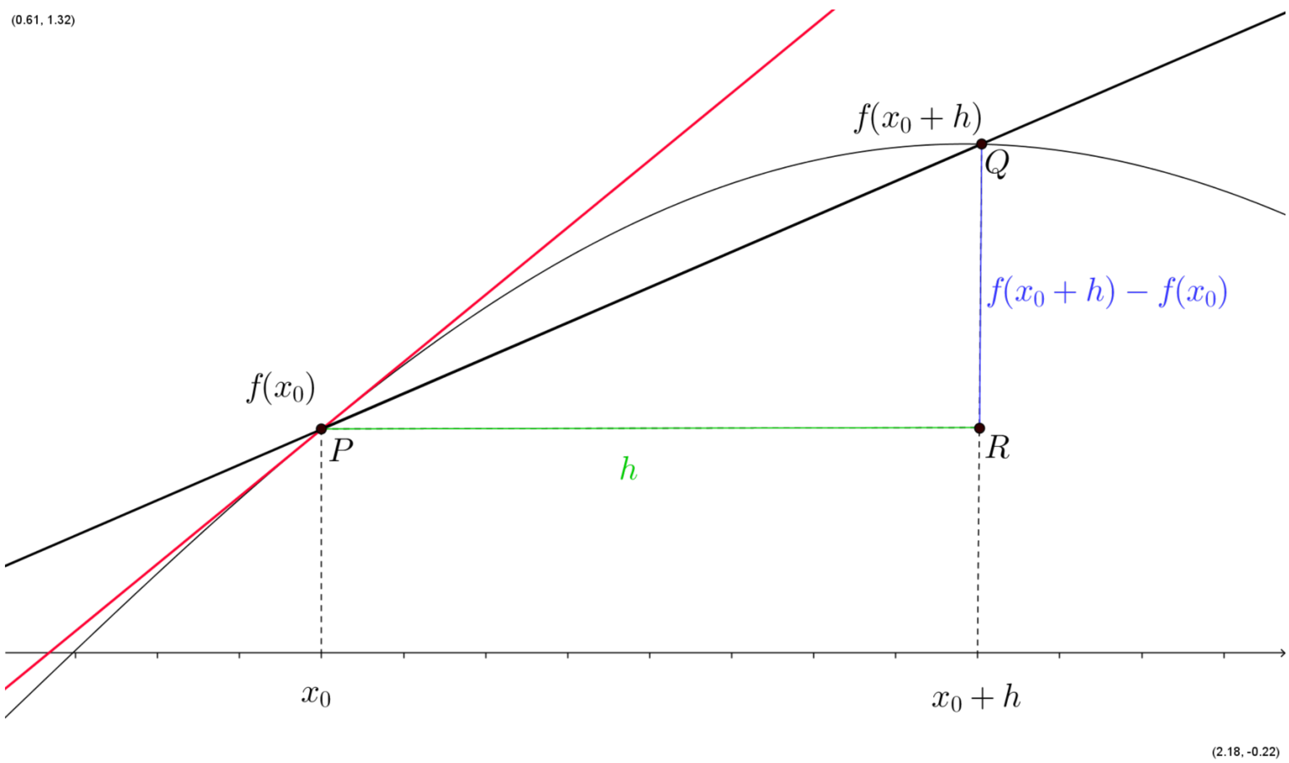


Figura 36: Significato geometrico di derivata

Nel caso limite dove $x = x_0$ il rapporto incrementale assume il valore della tangente dell'angolo formato dalla retta tangente alla curva in x_0 e l'asse x.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} \right) = \tan(\theta_x) \in \mathbf{R} \tag{148}$$

Questo valore limite è il coefficiente angolare della retta tangete alla curva $G(f)$, la tangente si può esprimere nella forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad , \quad y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{149}$$

In risposta al problema analitico:

Lemma 10.1. *Se* $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ *è derivabile in* $x_0 \in (a,b)$ *, allora (*R *è funzione resto o errore) esiste* $R : (a,b) \to \mathbf{R}$ *tale che:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x) \quad \forall\, x \in (a,b) \tag{150}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0 \tag{151}$$

Ciò significa che la differenza fra la funzione complessa e la sua approssimazione tende a zero più velocemente rispetto a che il punto x tende verso x_0.
Da un punto di vista geometrico il Resto o errore è la differenza fra $f(x)$ e la sua approssimazione lineare.

Dimostrazione del Lemma. :
Definiamo $R(x) := f(x) - [f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)]$, allora:

- L'equazione 1 del Lemma (150) è verificata.

- Dimostrazione per l'equazione 2 del Lemma (151):

Considero $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ □

10.1.2 Continuità delle funzioni derivabili

Theorem 10.2 (Continuità delle funzioni derivabili)**.** *Se una funzione è derivabile, allora sicuramente è anche continua (condizione necessaria).*

$$\begin{cases} f : (a,b) \to \mathbf{R} \quad , \quad x_0 \in (a,b) \\ f \text{ derivabile in } x_0 \end{cases} \implies f \textit{ è continua in } x_0 \tag{152}$$

Dimostrazione della continuità delle funzioni derivabili. :
$\lim_{x\to x_0}\Big(f(x) - f(x_0)\Big) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\right)\cdot(x - x_0) = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\cdot\Big(\lim_{x\to x_0}(x - x_0)\Big) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$

□

10.1.3 Calcolo derivate con proprietà

Derivabilità dei polinomi di diverso grado:
Considero la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad , \quad f(x), x \in \mathbf{R} \quad , \quad fix\, x_0 \in \mathbf{R}$

- Costante: $f(x) = c$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} 0 = 0 \tag{153}$$

- Identità: $f(x) = x$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1 \tag{154}$$

- Parabola: $f(x) = x^2$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} x + x_0 = x_0 + x_0 = 2x_0 \tag{155}$$

- Seno: $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$

  Dimostrazione. Appiamo che nel primo e secondo quadrante $\sin x \leq x \leq \tan x \implies$

  Se considero il valore assoluto $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \implies$ l'inversa è $\frac{1}{\sin x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\tan x}$

  Per il teorema dei carabinieri: $1 = \lim_{x\to x_0} 1 \leq \lim_{x\to x_0} |\frac{x}{\sin x}| \leq \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\cos x} = 1$

  Siccome è composta da due funzini dispari, essa è pari e per simmetria posso togliere il valore assoluto

  $\implies \lim_{x\to x_0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$ □

- Coseno: $\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

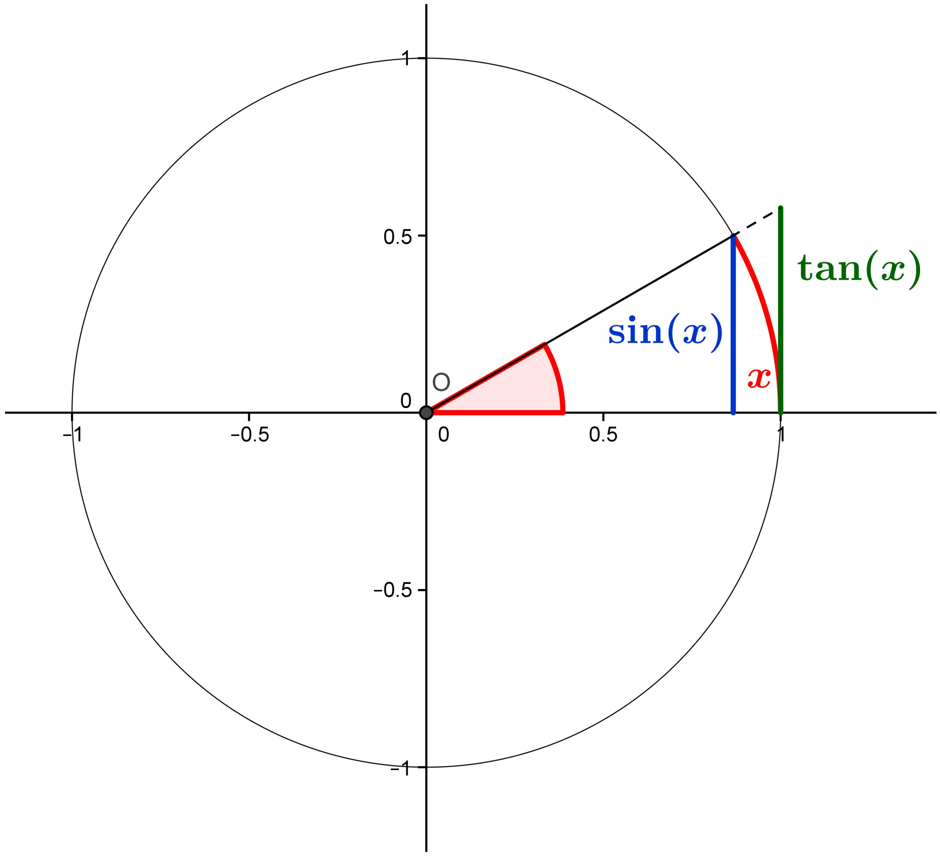


Figura 37: Dimostrazione geometrica di $f'(\frac{\sin x}{x})$

Dimostrazione. :
$\lim_{x\to x_0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to x_0} (\frac{\sin}{x})^2 \cdot \frac{1}{1+1cosx} = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{\sin}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} \frac{1}{1+\cos x}\right) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ □

- Seno in 0: $\lim_{x\to x_0} \sin(x) = 1$
  Infatti la tangente del seno tendendo a zero è la bisettrice del primo quadrante.

  Dimostrazione. $f'(0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$ □

- Seno e Coseno 1: $\sin'(x) = \cos x$
  $\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\ \cos(h)+\cos(x)\ \sin(h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \sin(x) \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)(\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}) = \lim_{h\to 0} \sin(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot h + \cos(x) = \cos(x) \implies \sin'(x) = \cos(x)$

- Seno e Coseno 2: $\cos'(x) = -\sin x$
  Dimostrazione analoga alla precedente.

Regole del calcolo delle derivate:

1. Linearità:

Theorem 10.3 (Linearità)**.** *La combinazione lineare di funzioni derivabile è una funzione derivabile.*

$$(a\, f + b\, g)'(x) = a\, f'(x) + b\, g'(x) \quad , \quad a, b \in \mathbf{R} \tag{156}$$

Dimostrazione. $\lim_{h\to 0} \frac{(a\, f(x+h)+b\, g(x+h)-(a\, f(x)+b\, g(x))}{h} = a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\ f(x)}{h} + b \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = a \cdot f'(x) + b\, g'(x)$ □

2. Regola di Leibniz:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{157}$$

Dimostrazione. $\lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = (\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h})(\lim_{h\to 0} g(x+h)) + f(x)\cdot(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ □

3. Derivata di frazione (quoziente):

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x)^2} \quad , \quad g(x) \neq 0 \tag{158}$$

4. Derivata della funione composta:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{159}$$

Dimostrazione. $\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)-g(f(x))}{h} = \big(\frac{g(f(h+h)-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\big)\cdot\big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\big) = ***$

Poichè f è continua in x, allora $z = f(x+h) \quad y = f(x)$ (sappiamo che x tende a y per h che tende a zero)

$*** = \frac{g(z)-g(y)}{z-y} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \Longrightarrow \quad g'(xy) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ □

5. Derivata della funzione inversa:

$$\big(f^{-1}(y)\big) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} \qquad se \ \exists \, f'\big(f^{-1}(y)\big) \tag{160}$$

$$\big(f^{-1}(y)\big)\cdot\big(f(y)\big) = 1 \tag{161}$$

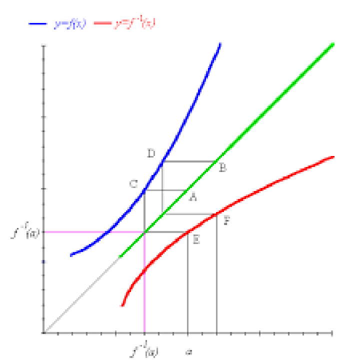


Figura 38: Derivata di funzione inversa

6. Derivata di potenze (regola generale):

$$f_n(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \qquad \forall\, n \geq 0 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \tag{162}$$

Dimostrazione per induzione. :

$n = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f_n'(x) = 0$ già verificato in precedenza

Supponiamo che per $\quad f_(x) = x^n \quad sia \quad f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$, allora calcoliamo:

$f_{(n+1)}(x) = (f_n \cdot f_1)'(x) =$ Regola di Leibniz $= f_n'(x) \cdot f_1(x) = n \cdot x^n + x^n = (n+1) \cdot x^n$
Quindi $P(n+1)$ è vera e di conseguenza per induzione la formula è verificata per ogni numero naturale.

La stessa dimostrazione prova che vale anche per i numeri negativi ($\forall\, x \in \mathbf{Z}$). □

7. Derivata di polinomi:
   Considero $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + .. + cx^2 + dx^1 + e$, vale la formuala:

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot x^k\Big)' = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k \cdot x^{k-1}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n+1} c_{k+1} \cdot (k+1) \cdot x^k\Big) \tag{163}$$

10.1.4 Derivate fondamentali

8. Derivate fondamentali (funzioni elementari):

derivate delle funzioni elementari	
$D\, k = 0$ dove k è una costante	$D\; senx = cosx$
$D\, x^n = n\, x^{n-1}$	$D\; cosx = -\, senx$
$D\, \frac{1}{x^n} = Dx^{-n} = -\, n\, x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$D\; tgx = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
$D \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$D\; cotgx = -\frac{1}{sen^2 x} = -1 - cotg^2 x$
$D\, \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\; arcsenx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D\, log_a x = \frac{1}{x} log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{lna}$	$D\; arccosx = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D\ln x = \frac{1}{x}$	$D\; arctgx = \frac{1}{1+x^2}$
$D\, a^x = a^x\, ln\, a = a^x \cdot \frac{1}{log_a e}$	$D\; arccotgx = -\frac{1}{1+x^2}$
$D\, e^x = e^x$	$D\, \lvert x \rvert = \frac{x}{\lvert x \rvert} = \frac{\lvert x \rvert}{x}$

Figura 39: Derivata fondamentali

10.2 Teoremi per lo studio di funzioni

10.2.1 Lemma di Fermat

Theorem 10.4 (Lemma di Fermat)**.** *Considero una funzione* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a, b)$ *è un punto di esteremo per la funzione (massimo 0 minimo), se la funzione è derivabile in* x_0*, allora la sua derivata vale zero*

Geometricamente significa che la tangente in quel determinato punto è parallela all'asse x e siamo in corrispondenza di un punto stazionario (o punto critico se si tratta di problemi di termoodinamica).

Dimostrazione del Teorema di Fermat (solo nel caso di massimo). :
Sia $x_0 \in (a, b)$ il massimo di f nell'intervallo (a, b) tale che per ogni punto nell'intervallo generico vale:

$$f(x_M) \geq f(x)$$

(A) Consideriamo il caso in cui $x > x_M$, si ha che:

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \leq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_M}{x - x_M} \leq 0$$

Siccome il limite destro e sinistro coincidono:

$$\implies \quad f'(x) = \lim_{x \to x_M} \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \leq 0$$

(B) Consideriamo il caso in cui $x < x_M$, si ha che:

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \geq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\implies \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_M}{x - x_M} \geq 0$$

Siccome il limite destro e sinistro coincidono

$$\implies \quad f'(x) = \lim_{x \to x_M} \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \geq 0$$

Dalle equazioni ottenute da A e B si ha che:

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases} \implies f'(x) = 0 \quad \textit{punto stazionario}$$

Quindi una funzione ha un numero finito di punti stazionari che possono essere di massimo, minimo o flesso.

□

Corollary 10.4.1 (Corollario del Lemma di Fermat)**.** *:*
Se $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, i suoi punti di estremo (massimo e minimo) sono da cercarsi nell'unione $A \cup B$ dove A, B sono insiemi finiti:

- $A = \{x \in (a, b) \mid \begin{cases} \exists\, f'(x) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \}$ *insieme dei punti critici*
- $B = \{x \in (a, b) \mid \nexists f'(x)\}$ *insieme dei punti singolari*

Ciò significa che massimi e minimi (anche se punti di non derivabilità) si hanno qaundo la derivata prima si annulla o non è definita.
Alcuni esempi:

- Funzione modulo $f(x) := |x| \implies$ in zero non esiste la derivata perchè limite destro è diverso dal sinistro, quindi è un punto singolare e quindi sono in presenza di un massimo (in questo caso).
- Funzione quadrato $f(x) := x^2 \implies$ in zero si annulla la derivata prima e sono in oresenza di un minimo.
- Funzione cubo $f(x) := x^3 \implies$ in zero sia A che B sono vuoti infatti non si ha ne massimo ne minimo, è presente un flesso a tangente orizzonatale.

Theorem 10.5 (Teorema di Lagrange)**.** *Se $f \in C([a, b])$ è derivabile in (a, b) (estremi esclusi perchè deve essere derivabile sia nell'intorno destro che sinistro) , allora:*

$$\exists\, c \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{164}$$

Il teorema di Lagrange afferma che quando una funzione ad una variabile è continua e derivabile in un intervallo compatto (chiuso e limitato), allora ammette almeno un punto in cui la derivata prima è pari al rapporto incrementale che c'è tra i punti estremi dell'intervallo.
È importante sottolineare che il punto c, detto punto di Lagrange, non è necessariamente unico.

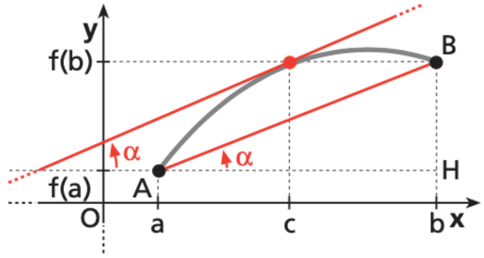


Figura 40: Teorema di Lagrange

Dimostrazione del teorema di Lagrange. :

1) Consideriamo una funzione $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ tale che:

$$g(x) := f(a) + \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a)$$

Osserviamo che g è un polinomio di grado $gr(g) \leq 1$, di conseguenza il suo grafico è una retta.

2) Per costruzione (g: retta passante per a e b):

$$g(a) = f(a) \qquad , \qquad g(b) = f(b)$$

Quindi g condivide con f sia a che b. In altre parole g è la retta passante per $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$.

3) La retta ha per coefficente angolare:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4) $g \in C(\mathbf{R})$ è derivabile in $\mathbf{R}$, quindi:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

5) Consideriamo la funzione $h := f - g$ su l'intervallo $[a, b]$. La funzine h è continua in tutto l'intervallo estremi inclusi e derivabile nell'intervallo estremi esclusi in quanto differenza fra funzioni continue.

Per il Teorema di Weistrass (insieme limitato e infinito, quindi esiste punto di accumulazione) esiste un punto $x_m, x_M \in [a, b]$ che è estremo globale:

6A) Consideriamo il caso in cui gli estremi di $[a, b]$ coincidono con x_m, x_M.

Poichè:

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0 \qquad e \qquad h(b) = f(b) - g(b) = 0$$

per ipotesi è definizione di retta.

Si ha che:

$$h(x) = 0\,\forall\, x \in [a, b] \implies 0 = h(x) = f(x) - g(x) \implies f(x) = g(x)$$

Quindi:

$$f'(x) = g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \Longrightarrow \qquad Teorema\,verificato$$

6B) Invece se almeno uno tra x_m, x_M sia strettamente incluso in $[a, b]$, quindi:

$$(x_m \vee x_M) \in (a, b)$$

Supponiamo sia $x_m \in (a, b)$, applicando il Lemma di Fermat ottengo che:

$$0 = h'(x_M) = f'(x_M) - g'(x_M)$$

Quindi:

$$f'(x_M) = g'(x_M) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi il teorema verificato $\forall\, c \in (a,b)$

$\square$

Caso particolare del Teorema di Lagrange, il teorema di Rolle:

Theorem 10.6 (Teorema di Rolle)**.** *:*
Considerata una funzione tale che $f(A) = f(b)$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \tag{165}$$

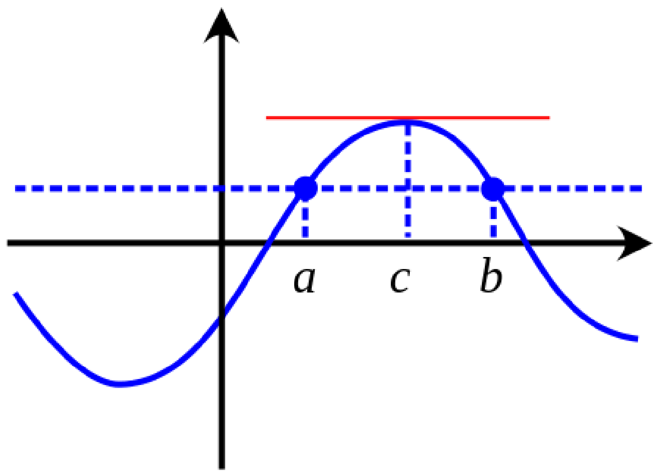


Figura 41: Teorema di Rolle

Theorem 10.7 (Test della monotonia)**.** *:*
Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in (a,b) , allora:

1. *f crescente $\iff f'(x) > 0\, \forall\, x \in (a,b)$*
2. *f decrescente $\iff f'(x) < 0\, \forall\, x \in (a,b)$*
3. *f stazionaria $\iff f'(x) = 0\, \forall\, x \in (a,b)$*

Dimostrazione del punto 1, funzione crescente. Considero:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \qquad se \quad a < x < y < b$$

Per il teorema sella permanenza del segno:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \forall\, c \in (a,b)$$

Viceversa, supponiamo che $\quad f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b) \quad$.
Consideriamo i punti $\quad a < x < y < b$, per il teorema di Lagrange applicato a f sull'intervallo $[a,b]$ segue che:

$$\exists\, c \in (x,y) \,|\, 0 \leq f'(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq f(y) \quad \forall\, x, y \in (a,b) \quad , \quad x < y$$

Questo significa che f è crescente. Analogamente si dimostra anche la decrescenza.

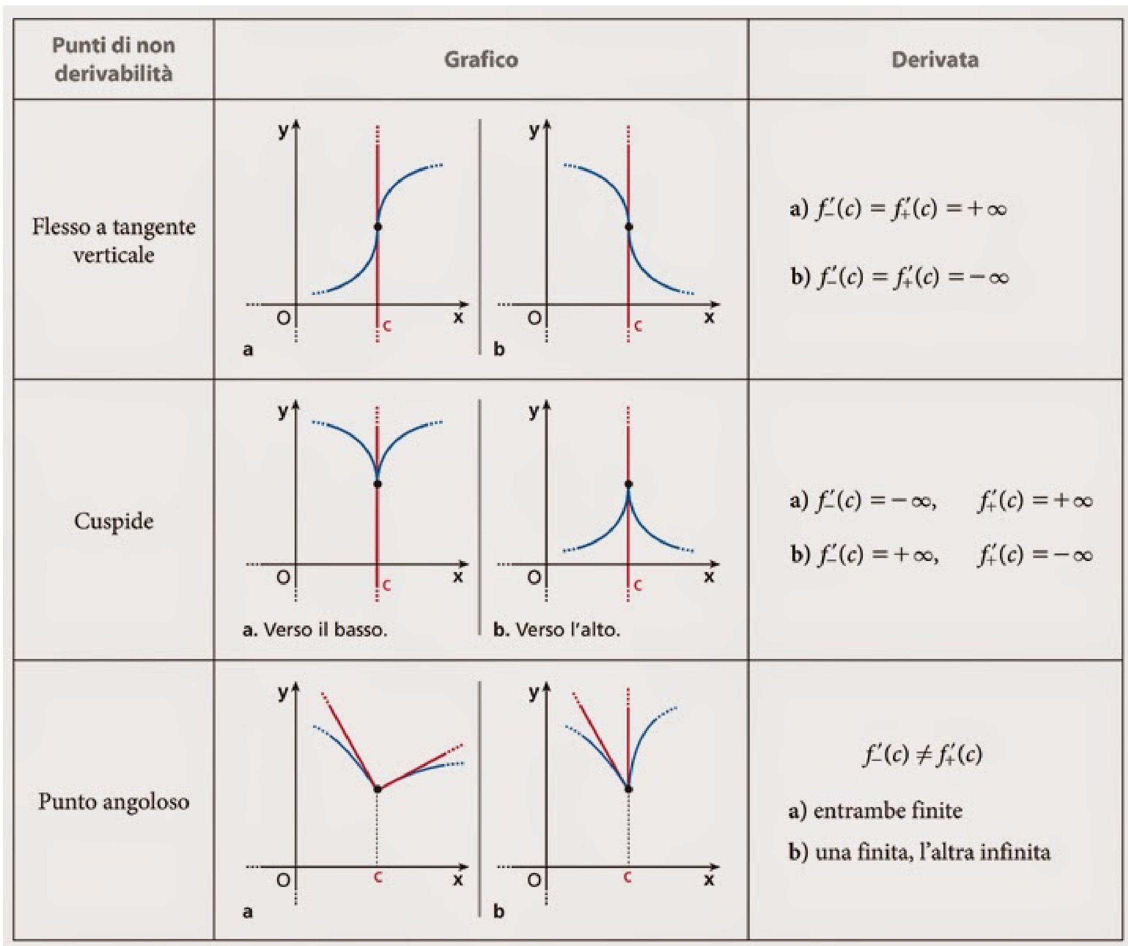
$\square$

In generale non vale il test della monotonia se la funzione nell'intervallo non è continua.

Corollary 10.7.1 (Corollario della caratterizzazione delle funzioni costanti)**.** *:*
Considero $f(a,b) \to \mathbf{R}$ è derivabile, allora la funzione f è costante, quindi la sua derivata prima $f'(x) = 0 \forall x \in (a,b)$. Viceversa se $f'(x) \neq 0\,\forall\,x \in (a,b)$, allora per il test della monotonia f è sia crescente che decrescente in senso lato, quindi è costante.

Corollary 10.7.2. *Se $f : D \to \mathbf{R}$ con D unione di intervalli e f derivabile in D, allora $f'(x) = 0\;\forall\,x \in D$ se e solo se f è localmente costante (costante nell'intervallo o nel caso limite in un punto).*

10.2.2 Punti di non derivabilità



Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale	a, b	a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
Cuspide	a. Verso il basso. b. Verso l'alto.	a) $f'_-(c) = -\infty$, $f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = +\infty$, $f'_+(c) = -\infty$
Punto angoloso	a, b	$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ a) entrambe finite b) una finita, l'altra infinita

Figura 42: Punti di non derivabilità

.

Anche detti punti particolari dove non è definita la derivata prima:

1. Punti di discontinuità eliminabili:
   Considerata $f : (a, x_0) \cup (x_0, b)$ continua, x_0 è definito punto di discontinuità eliminabile se $\exists l := \lim_{x \to x_=} f(x)$ poichè esiste una estensione continua di f in (a,b):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in (a, x_0) \cup (x_0, b) \\ l & , \quad x = x_0 \end{cases} \tag{166}$$

Considerata $f:(a,x_0)\cup(x_0,b)$ continua, x_0 è definito punto di discontinuità eliminabile se $\exists l := \lim_{x\to x_=} f(x)$ poichè esiste una estensione continua di f in (a,b):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \quad , \quad x \in (a,x_0)\cup(x_0,b) \\ l \quad , \quad x = x_0 \end{cases} \tag{167}$$

2. Punti angolosi:
   È punto angoloso quando il limite destro e sinistro della derivata esistono ma non coincidono (almeno una finita):

$$\exists \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{168}$$

3. Flessi verticali:
   È flesso a tangente verticale quando il limite destro e sinistro della tangente sono entrambi o $+\infty$ o $-\infty$:

$$\lim_{x\to x_0\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \quad \vee \quad \lim_{x\to x_0\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \tag{169}$$

4. Cuspidi:
   I limiti della derivata devono tendere a infinito e devono essere discordi:

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty \\ \\ \lim_{x\to x_0\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mp\infty \end{cases} \tag{170}$$

Theorem 10.8 (Teorema del criterio di derivabilità)**.** *:*
Sia $f(a,b)\to\mathbf{R}$, $x_0\in(a,b)$, f derivabile in $(a,b)\backslash\{x_0\}$:

$$Se \quad \lim_{x\to x_0-} f'(x) = \lim_{x\to x_0+} f'(x) \in \mathbf{R} \tag{171}$$

Allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0)=l$. La funzione può essere definita derivabile e continua in x_0.

Dimostrazione del criterio di derivabilità. :
Sia $x\in(a,b)$, per il Teorema di Lagrange $\exists c(x)$ tra x e x_0 tale che $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$ ($c :=$ punto di Lagrange)

Quindi abbiamo che $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f'\big(c(x)\big) = ***$

Poichè $x_0 < c(x) < x$ così $\lim_{x\to x_0^+} c(x) = x_0$ e quindi per il teorema del limite di funzione composta

$*** = f'\big(\lim_{x\to x_0^+} c(x)\big) = l$

Analogamente si dimostra che $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$

$\implies$ quindi $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbf{R} \implies \exists f'(x_0) = l+$

□

10.2.3 Concavità e convessità

Definition 10.2 (Funzione convessa)**.** *Sia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ derivabile in (a,b), essa si definisce convessa se l suo grafuico sta al di sopra di tutte le sue rette tangenti:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad \forall\, x\in(a,b) \tag{172}$$

Definition 10.3 (Funzione concava)**.** *Sia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ derivabile in (a,b), essa si definisce concava se l suo grafuico sta al di sotto di tutte le sue rette tangenti:*

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad \forall\, x\in(a,b) \tag{173}$$

Theorem 10.9 (Derivata seconda e concavità)**.** *Sia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ derivabile 2-volte, allora:*

1. *f è convessa* $\Longleftarrow f^2(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$
2. *f è cancava* $\Longleftarrow f^2(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$

Dimostrazione di (1) per funzione convessa. :
Applicando il teorema di Taylor-Lagrange all'ordine $n = 1$, si ha che esiste c tra x e x_0:

$$f(x) = T^f_{1,x_0}(x) + \frac{f^2(x)}{2!}(x - x_0)^2 \geq \Big(f^2(c) \geq 0\Big) \geq T^f_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall\, x \in (a,b)$$ □

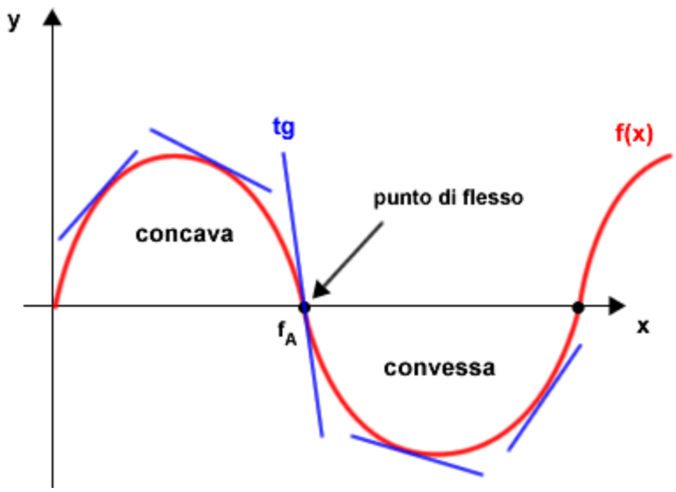


Figura 43: Funzione concava e convessa

Definition 10.4 (Flessi obliqui)**.** *I punti dove cambia la concavità di f, ovvero dove cambia di segno la derivata seconda $f^2(x)$, sono detti flessi obliqui.*

10.2.4 Funzione esponenziale

LA FUNZIONE ESPONENZIALE.

FABIO CIPRIANI

1. La funzione esponenziale: costruzione e proprieta'.

I polinomi e le funzioni razionali sono costruite usando le operazioni algebriche dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Le funzioni trigonometriche sono definite attraverso relazioni fondamentali della geometria Euclidea.

La funzione esponenziale (e la sua inversa funzione logaritmo) e' invece costruita usando la completezza dell'insieme dei numeri reali e le sue conseguenze quali le proprieta' del Limite di successioni e funzioni a valori reali.

Sulla semiretta $[0,+\infty)$ consideriamo i polinomi

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad x \in [0,+\infty).$$

Per ogni $x \geq 0$ fissato, la successione di numeri reali $\{s_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ e' crescente poiche'

$$s_{n+1}(x) - s_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0.$$

Mostreremo ora che la successione e' superiormente limitata ed otterremo cosi' la sua convergenza applicando il Teorema di Convergenza delle successioni Monotone e Limitate.
Per $x \geq 0$ fissato scegliamo un numero naturale $m \in \mathbb{N}$ tale che $2x < m$. Per $n \geq m$ abbiamo

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} = s_{m-1}(x) + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
&= s_{m-1}(x) + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k(k-1)\cdots m\cdot(m-1)!} \\
&\leq s_{m-1}(x) + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{m^{k-m}\cdot(m-1)!} \\
&= s_{m-1}(x) + \frac{x^m}{(m-1)!} \sum_{k=m}^{n} \frac{x^{k-m}}{m^{k-m}} \\
&= s_{m-1}(x) + \frac{x^m}{(m-1)!} \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{x}{m}\right)^{k-m} \\
&= s_{m-1}(x) + \frac{x^m}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{n-m} \left(\frac{x}{m}\right)^{k} \\
&= s_{m-1}(x) + \frac{x^m}{(m-1)!} \frac{1-(x/m)^{n-m+1}}{1-(x/m)} \\
&\leq s_{m-1}(x) + \frac{x^m}{(m-1)!} \frac{1}{1-(x/m)} \\
&\leq s_{m-1}(x) + 2\frac{x^m}{(m-1)!} < +\infty\,.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Poiche' il membro di destra non dipende da n, ne deduciamo che la successione $\{s_n(x)\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ e' anche superiormente limitata. Per ogni $x \geq 0$ fissato, esiste quindi il limite

$$s(x) := \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \in [0,+\infty)$$

che definisce una funzione $s : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Poiche' $s_n(x) \geq s_1(x) = 1 + x \geq 1$ per ogni $n \geq 1$ e $x \geq 0$, per la Proprieta' di Monotonia del Limite, si ha che la funzione s assume valori strettamente positivi: in particolare

$$s(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x) \geq \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \qquad x \geq 0.$$

Possiamo allora estendere la funzione al semiasse negativo $s : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ ponendo

$$s(x) := \frac{1}{s(-x)} \qquad x < 0$$

ottenendo cosi' una funzione $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ detta *esponenziale* definita sui numeri reali. Notiamo che

$$s(0) = \lim_{n\to+\infty} s_n(0) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

Il valore $s(1) \in \mathbb{R}$ e' detto *numero di Nepero* ed e' denotato con la lettera

$$e := s(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in (2,+\infty).$$

Scegliendo nella formula (1.1) $m = 2$ e $x = 1$ si ha che $e \in (2,3)$.

1.1. **Equazione funzionale della funzione esponenziale.** Dimostriamo l'equazione funzionale (o legge delle potenze)

$$s(x)s(y) = s(x+y) \qquad x, y \in \mathbb{R}\,. \tag{1.2}$$

Nell'identita'

$$s_n(x)s_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} = \sum_{k,j=0}^{n} \frac{x^k y^j}{k!j!}, \tag{1.3}$$

introducendo il nuovo indice $m := j + k = 0, \cdots, 2n$, operando la sostituzione $j = m - k \geq 0$ e utilizzando la formula del **binomio di Newton**, per $x, y \geq 0$ otteniamo l'identita'

$$\begin{aligned} s_n(x)s_n(y) &= \sum_{m=0}^{2n} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k y^{m-k}}{k!(m-k)!} \\ &= \sum_{m=0}^{2n} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(j-k)!} x^k \cdot y^{m-k} \\ &= \sum_{m=0}^{2n} \frac{1}{m!} \cdot (x+y)^m \\ &= s_{2n}(x+y) \end{aligned} \tag{1.4}$$

da cui, per le **proprieta' dei limiti di successioni**, abbiamo

$$s(x)s(y) = \Big(\lim_n s_n(x)\Big) \cdot \Big(\lim_n s_n(y)\Big) = \lim_n s_n(x)s_n(y) = \lim_n s_{2n}(x+y) = s(x+y) \qquad x, y \geq 0.$$

Se $x, y < 0$ abbiamo

$$s(x)s(y) = \frac{1}{s(-x)s(-y)} = \frac{1}{s(-x-y)} = \frac{1}{s(-(x+y))} = s(x+y).$$

Infine se $x < 0$ e $y \geq 0$ e $y + x \geq 0$, abbiamo $-x \geq 0$ e

$$s(y)s(x) = s(y+x-x)s(x) = s(y+x)s(-x)s(x) = s(y+x)s(x)^{-1}s(x) = s(y+x).$$

Se $x < 0$ e $y \geq 0$ ma $y + x \leq 0$, abbiamo $-x \geq 0$, $-y \leq 0$, $-x - y \geq 0$ ed infine

$$s(y+x)^{-1} = s(-(y+x)) = s(-x-y) = s(-x)s(-y) = s(x)^{-1}s(y)^{-1}.$$

L'equazione funzionale (1.2) giustifica la seguente notazione per la funzione esponenziale:

$$s(x) =: e^x \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Infatti, in tale notazione l'equazione funzionale assume la forma della legge delle potenze dell'aritmetica:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

1.2. **Monotonia della funzione esponenziale.** Se $0 < x < y$ abbiamo $x^k < y^k$ per $k = 0, \cdots, n$ e quindi $s_n(x) < s_n(y)$. Per la **proprieta' di monotonia dei limiti di successioni** abbiamo $s(x) \leq s(y)$. In piu' se $x \leq y$ e $s(x) = s(y)$ allora

$$1 = s(y)s(x)^{-1} = s(y)s(-x) = s(y-x) \geq 1 + (y-x)$$

per cui $0 \leq y - x \leq 0$ e quindi $y = x$. Quindi la funzione s e' strettamente monotona crescente su $[0, +\infty)$. Poiche' per $x < 0$ si ha, per definizione, $s(x) = s(-x)^{-1}$, abbiamo che s e' strettamente crescente anche su $(0, +\infty)$. Poiche' $s(x) \geq 1$ per $x \geq 0$ e che quindi $s(x) \leq 1$ per $x \leq 0$, abbiamo che la funzione esponenziale e' strettamente crescente su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$.

1.3. **Continuita' della funzione esponenziale.** Per $0 \leq x \leq 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 \leq e^x - e^0 &= \lim_n s_n(x) - 1 = \lim_n (s(x) - 1) = \lim_n \Big(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1\Big) = \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= x \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{(k+1)!} \leq x \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = xe^x \leq xe \end{aligned}$$

da cui $0 \leq \lim_{x\to 0^+}(e^x - e^0) \leq \lim_{x\to 0^+} ex = 0$ e quindi $\lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$. La funzione esponenziale e' quindi continua da destra in $x = 0$. D'altra parte poiche'

$$\lim_{x\to 0^-} e^x = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{\lim_{y\to 0^+} e^y} = \frac{1}{1} = 1$$

la funzione e' anche continua da sinistra in $x = 0$ ed e' quindi continua in $x = 0$. Da cio' risulta anche che per $x \geq 0$ fissato, si ha

$$\lim_{y\to x} e^y = \lim_{y\to x} e^{y-x+x} = \lim_{y\to x} e^x e^{y-x} = e^x \lim_{y\to x} e^{y-x} = e^x \lim_{h\to 0} e^h = e^x$$

e che quindi la funzione e' continua in ogni punto di $[0, +\infty)$. Poiche' su $(-\infty, 0)$ la funzione esponenziale e' composta di funzioni continue

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} \qquad x \leq 0$$

essa risulta continua anche su $(-\infty, 0)$ per il **Teorema di Continuita' della Funzione Composta**.

1.4. **Limiti agli estremi del dominio.** Poiche' per $x \geq 0$ si ha $e^x = s(x) \geq s_1(x) = 1 + x$, otteniamo che

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

ed anche

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{\lim_{x\to-\infty} e^{-x}} = \frac{1}{\lim_{y\to+\infty} e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0^+\,.$$

1.5. **Immagine della funzione esponenziale.** Poiche' la funzione esponenziale e' strettamente crescente, il minimo ed il massimo valore che essa assume su un intervallo $[x, y] \subset \mathbb{R}$ sono rispettivamente e^x e e^y. Per il **Teorema dei Valori Intermedi**, l'immagine della funzione esponenziale su $[x, y]$ e' l'intervallo $[e^x, e^y]$. Poiche' $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ e $\lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$ abbiamo che l'immagine su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ e' la semiretta aperta

$$\mathrm{Im}\,(s) = (0, +\infty).$$

1.6. **Funzione Logaritmo.** Essendo la funzione esponenziale strettamente crescente, essa risulta invertibile. La funzione inversa e' detta *logaritmo (in base e)* e denotata con il simbolo ln. Il suo dominio coincide con l'immagine della funzione esponenziale

$$D(\ln) = (0, +\infty), \qquad e^{\ln y} = y, \qquad \ln e^x = x, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \qquad y \in (0, +\infty).$$

Per il **Teorema di Continuita' della Funzione Inversa**, abbiamo che la funzione logaritmo e' continua in tutti i punti del suo dominio

$$\ln \in C((0, +\infty)).$$

1.7. **Limite notevole della funzione esponenziale.** Dimostriamo il seguente limite notevole della funzione esponenziale

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Poiche' $1 + x \le e^x$ per $x \ge 0$, abbiamo che

$$1 \le \frac{1+x}{x} \le \frac{e^x - 1}{x} \qquad x \ge 0.$$

D'altra parte abbiamo gia' visto che se $0 \le x \le 1$ si ha $e^x - 1 \le xe^x$. Poiche' la funzione esponenziale e' continua in $x = 0$, abbiamo

$$1 \le \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \le \lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$$

per cui $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Unendo questo risultato alla continuita' della funzione esponenziale in $x = 0$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} e^x \frac{e^{-x} - 1}{-x} = \lim_{y\to 0^+} e^{-y} \frac{e^y - 1}{y} = \Big(\lim_{y\to 0^+} e^{-y}\Big)\Big(\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y - 1}{y}\Big) = 1 \cdot 1 = 1$$

e quindi $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

1.8. **Limite notevole della funzione logaritmo.** Dimostriamo il seguente limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Sostituendo $x = \ln(1+y)$ abbiamo $y = e^x - 1$ e che, per la continuita' della funzione logaritmo, $x \to 0$ quando $y \to 0$. Quindi

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1.$$

1.9. **Derivata della funzione esponenziale.** Denotiamo con $s : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ la funzione esponenziale

$$s(x) := e^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

e calcoliamo la sua derivata in un punto $x \in \mathbb{R}$ del suo dominio usando il limite notevole dell'esponenziale:

$$s'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x\,.$$

1.10. **Derivata della funzione logaritmo.** Calcoliamo la derivata della funzione logaritmo in un punto $y \in (0, +\infty)$ del suo dominio, usando il limite notevole del logaritmo:

$$\ln'(y) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(y+h) - \ln y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{y+h}{y})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{y} \frac{\ln(1 + h/y)}{h/y} = \frac{1}{y} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{y} \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{y}\,.$$

10.2.5 Teorema di De L'Hopital

Theorem 10.10 (Teorema di De L'Hopital)**.** *:*
Sia $f, g(a,b) \to \mathbf{R}$ derivabile e $g \neq 0$ tale che:

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) \\ \exists \, \frac{\lim_{x\to x_0^+} f'(x)}{\lim_{x\to x_0^+} g'(x)} \end{cases} \implies \textit{allora} \quad \frac{\lim_{x\to x_0^+} f'(x)}{\lim_{x\to x_0^+} g'(x)} = l \tag{174}$$

Dimostrazione del Teorema di De L'Hopital. :
Definiamo $f(a) = g(a) = 0$ estendibile in maniera continua all'intervallo $[a,b)$ e fissiamo $x \in [a,b)$, quindi abbiamo $f, g \in C([a,x])$ e in più derivabili in (a,x) poichè derivabili in $[a,b)$ per ipotesi.

Allora f, g sono derivabili in (a,b) e continue in $x = a$.
Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $h : [a,x] \to \mathbf{R}$ definita come:

$$h(y) := f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x) \quad \forall\, y \in [a,x]$$

Sappiamo che esiste:

$$\exists\, y(x) \in (a,x) \mid \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'\big(g(x)\big)$$

che sta a indicare che il punto di lagrange dipende da x, allora $\implies h'\big(g(x)\big) = 0$

Devo trovare $h'(y)$, dove x è fissato:

$$0 = h'\big(g(x)\big) = f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x) \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'\big(y(x)\big)}{g'\big(y(x)\big)} \qquad \text{(intorno del punto)}$$

Si ha che:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'\big(y(x)\big)}{g'\big(y(x)\big)} = *\!*\!*$$

Poichè $a < y(x) < x$ si ha che:

$$\lim_{x\to a^+} y(x) < a^+$$

Quindi per il teorema del limite della funzione composta;

$$*\!*\!* = \lim_{y\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l$$

□

10.2.6 Derivate di ordine n

Definition 10.5. *Se $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ è $(n-1)$volte derivabile in $x_0 \in (a', b') \subset (a,b)$ e la derivata di ordine $(n-1)$ $f^{n-1}(x)$ è a sua volta derivabile in x_0, diremo che f è $n-$volte derivabile e:*

$$f^n(x) = \big(f^{n-1}\big)'(x) \quad con \quad n \geq 1 \tag{175}$$

10.2.7 Seno e coseno iperbolico

- Seno iperbolico:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad D[\sinh x] = \begin{cases} \sinh x & , \quad n\ pari \\ \cosh x & , \quad n\ dispari \end{cases} \tag{176}$$

- Coseno iperbolico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad D^n[\cosh x] = \begin{cases} \sinh x & , \quad n\ dispari \\ \cosh x & , \quad n\ pari \end{cases} \tag{177}$$

- Tangente iperbolica:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \tag{178}$$

- Vale la relazione utile negli integrali:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{179}$$

- Comportamento asintotico $\quad x \to 0$:

$$\sinh(x) \sim x$$
$$\cosh(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$
$$\tanh(x) \sim x$$

- L'inversa del seno iperbolico è:

$$\sinh^{-1}(x) = \text{settsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \tag{180}$$

- L'inversa del coseno iperbolico è:

$$\cosh^{-1}(x) = \text{settCosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \tag{181}$$

Dimostrazione per inversa del seno iperbolico. :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-t}}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2x = e^x - \frac{1}{e^x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{(e^t)^2 - 2x\, e^t - 1}{e^t} = 0$$
$$e^t_{1/2} = x \pm \sqrt{x^2+1} \quad \Longrightarrow \quad t = \log\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (\textit{no negativo per log})$$

□

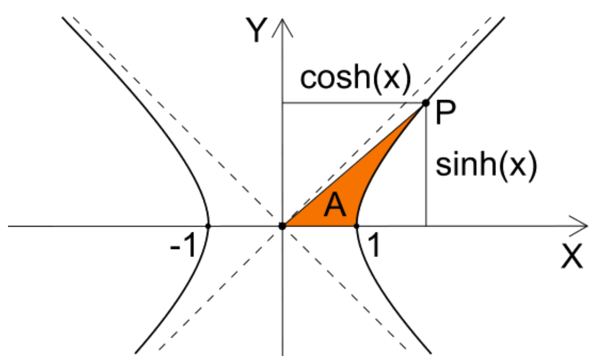


Figura 44: Seno e coseno iperbolico

10.3 Teorema di Taylor

10.3.1 Teorema di Taylor con resto di Peano

Theorem 10.11 (Teorema di Taylor con resto di Peano)**.** *:*
Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ derivabile n-volte con $(n \geq 1)$ in $x_0 \in (a,b)$. Definiamo il suo polinomio di Taylor di ordine n in x_0 (con $x \in \mathbf{R}$) come:

$$T^f_{n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f^2(x_0)(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{182}$$

Allora esiste la funzione resto di ordine n in x_0:

$$R^f_{n,x_0}(x) : (a,b) \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + R^f_{n,x_0}(x) \qquad \textit{con } x \in (a,b) \tag{183}$$

E il resto è infinitesimo di ordine maggiore di n per $x \geq x_0$ (raffinamento del lemma delle derivate con il resto):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T^f_{n,x_0}(x) - R^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \tag{184}$$

Quindi $R^f_{n,x_0}(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ per $x \to x_0$:

$$f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + o\big((x-x_0)^n\big) \quad \textit{per } x \to x_0 \tag{185}$$

Dimostrazione del Teorema di Taylor con resto di Peano. :

Definiamo $R^f_{n,x_0}(x)$ come differenza tra $f(x)$ e $T^f_{n,x_0}(x)$:

$$R^f_{n,x_0}(x) = f(x) - R^f_{n,x_0}(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$$

Con De l'Hopital:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = dH = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \big(T^f_{n,x_0}\big)'(x)}{n \cdot (x - x_=)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(x)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\Big)'}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

Applichiamo il teorema di De L'hopital per $(n-1)$volte quindi i coefficienti di grado minore di $(n-1)$ si azzerano:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{n-1} - \Big(f^{n-1}(x_0) + f^n(x_0)(x-x_0)\Big)}{n(n-1)(n-2) \cdot 2(x-x_0)^1} = \Big[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^n(x_0)\Big]\frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \to x_0} = \frac{1}{n!} \cdot \Big\{f^n(x_0) - f^n(x_0)\Big\} = 0$$

□

10.3.2 Teorema di Taylor con resto di Lagrange

Theorem 10.12 (Dimostrazione del Teorema di Taylor con resto di Lagrange)**.** *:*
Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ $(n+1)$-volte derivabile in (a,b):

1. *Se fissato $x \in (a,b)$, allora esiste c tra x e x_0 $\big(|x-x_0| < |x-x_0|\big)$ (se $n=0$ è il Teorema di Lagrange):*

$$f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} \quad \forall\, c \in (a,b) \tag{186}$$

2. *Se con $x \in (a,b)$ e $M_n := Sup\big(\big|f^{(n)}(x)\big|\big) < +\infty$, allora:*

$$\big|f(x) - T^f_{n,x_0}(x)\big| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)} \quad \forall\, x \in (a,b) \tag{187}$$

   Osserviamo che il rapporto $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)} \to 0$ nella maggior parte dei casi perchè a denominatore c'è un fattoriale.

10.3.3 Formula di Stirling

Formula di Stirling che approssima l'andamento del fattoriale verso $+\infty$:

$$n! \sim \sqrt{2\pi \cdot n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \qquad \textit{con } n \to +\infty \tag{188}$$

10.3.4 Sviluppi di Mclaurin

10.3.5 Applicazioni di taylor

- Studio dei limiti non immediati che non si risolvono tramite limiti notevoli e asintotici
- Grafico locale di una funzione:
  1. trovare la tangente in x_0

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + o(x^{10}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + o(x^{10}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{arctanh} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \\
&\quad + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

$$
\text{con} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \cdots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}
$$

Figura 45: Sviluppi notevoli di Taylor-Mclaurin

2. fare $f(x) - T_1(x) = val + o(x) \quad , \quad val \neq 0$
3. studiare il segno della differenza

- trovare derivate n-esime di funzioni:
  1. trovare sviluppo di Taylor fino a n
  2. siccome il coefficiente della potenza ennesima del polinomio di taylor è $\quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
  3. si pone $\quad a_n =$ termine dello sviluppo
- Stima numerica con taylor fino a certa precisione