12 Serie numeriche

12.1 Definizioni e proprietà

Motivazione dela necessita delle serie:
Consideriamo un intervallo $[0, 1]$ e lo dividiamo ripetutamente e teniamo l'intervallo destra che otteniamo dalla suddivisione.
A rigor di logica la somma $\sum_{n=0}^{\infty} |I_n|$ di tutte le parti in cui è stato suddiviso l'intervallo dovrebbe ritornare l'intervallo iniziale $[0, 1]$. Dobbiamo provare che sia verificata questa uguaglianza fra la somma degli intervallini e l'intervallo iniziale.

12.1.1 Definizione di serie numerica

Definition 12.1 (Serie numerica)**.** *:*
Sia data una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{R}$.
Definiamo la successione s_N *delle somme parziali:*

$$s_N := \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad \Longrightarrow \qquad N \geq 0 \qquad \{s_n\}_{N=0}^{\infty} \subset \mathbf{R}$$

Si dice che la somma della serie è (tecnicamente se non ammette limite non è appropriata la seguente scrittura):

$$\lim_{N\to+\infty} s_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_N =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{218}$$

Notiamo come la somma della serie coincide con l'integrale se la serie è definitivamente positiva:

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx$$

12.1.2 Carattere della serie

1. Serie convergente:
   se la successione $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ ammette limite finito, si dice che la serie definita dai $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge
2. Serie divergente:
   se la successione $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $\pm\infty$, si dice che la serie definita dai $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverge
3. Serie indeterminata:
   se la succesione $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ non ammette limite si dice che la serie è indeterminata

12.1.3 Proprietà delle serie

Osservazione sul carattere della serie:

Theorem 12.1. *Il carattere di una serie (convergente - divergente - indeterminata) non viene alterato se si trascurano un numero finito di termini, ovvero la serie* $\sum_{n=n_0}^{\infty}$ *ha la stesso carattere di* $\sum_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$

Dimostrazione.

$$\sum_{n} = 0^N a_n = \sum_{n=n_0+k}^{N} a_n + \sum_{n=n_0}^{n_0+k-1}$$

L'ultimo termine è indipendente da N e, se eliminato, non fa variare il carattere della serie.

□

Proprità della serie:

1. Linearità:

$$\sum_n \big(\alpha\, a_n + \beta\, b_n\big) = \alpha \sum_n a_n + \beta \sum_n b_n \qquad , \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

Se due serie sopra convergono, allora anche la terza converge.
Inoltre se $\sum_n a_n$ converge e $\sum_n b_n$ non converge, allora $\sum_n \big(\alpha\, a_n + \beta\, b_n\big)$ non converge.

2. Confronto:
Se $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall\, n$, allora:
   (a) se $\sum_n b_n$ converge, anche $\sum_n a_n$ converge a:

$$\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$$

   (b) se $\sum_n a_n$ diverge a $\pm\infty$, allora anche la serie $\sum_n b_n$ diverge a $\pm\infty$ poichè le somme parziali sono sempre maggiori.

3. Confronto asintotico:
Sia $0 \leq a_n \quad , \quad 0 \leq b_n \quad , \quad a_n \sim b_n \; per \; n \to +\infty.$ Allora:
   (a) $\sum_n a_n$ converge $\iff$ $\sum_n b_n$ converge
   (b) $\sum_n a_n$ diverge $\iff$ $\sum_n b_n$ diverge

Dimostrazione. :
Siccome $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \Longrightarrow :$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \geq N \mid |\frac{a_n}{b_n} - 1| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - 1 < +\varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad (1-\varepsilon)\cdot b_n < a_n < (1+\varepsilon)\cdot b_n \qquad , \quad n \geq N$$

Per il criterio del confronto (Teorema dei carabinieri) si conclude la dimostrazione □

4. Condizione necessaria per la convergenza:
La condizione necessaria affinchè la serie $\sum_n a_n$ converga è:

$$\lim_n a_n = 0$$

Quindi se $\lim_n a_n \neq 0$, allora la serie sicuramente non converge.

Dimostrazione. :
Considero $a_N = s_N - s_{N-1} \quad \Longrightarrow$ se la serie converge si ha che $\exists\, \lim_n s_N = \lim_N s_{N-1}$
Quindi si ha che:

$$\lim_N a_n = \lim_N \big(s_N - s_{N-1}\big) = \Big(\lim_N s_N\Big) - \Big(\lim_N s_{N-1}\Big) = 0 \quad (infinitesimo)$$

□

12.2 Teoremi delle serie

12.2.1 Teorema del confronto integrale

Theorem 12.2 (Teorema del confronto integrale)**.** *:*
Sia data una serie $\sum_n a_n$ a termini positivi e una funzione $f : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ integrabile edecrescente.
Se $a_n \sim f(n)$ per $n \to +\infty$, allora $\sum_n a_n$ converge

Dimostrazione del teorema del confronto integrale. :
Se $\quad x \in [n_1, n+1] \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(x+1) \quad$ per la monotonia (ipotesi)

Siccome è per ipotesi integrabile:

$$+\infty > \int_0^\infty f(x)\, dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)$$

Quindi la serie $\quad \sum_n f(n+1) \quad$ è convergente

Poichè $\quad a_n \sim f(n) \quad$ anche $\quad \sum_n a_n \quad$ è convergente

□

12.2.2 Criterio della radice

Theorem 12.3 (Teorema, criterio della radice)**.** *:*
Sia $0 \leq a_n$ (non negativo) e supponiamo che:

$$\exists\, l := \lim_n \sqrt[n]{a_n}$$

1. *se $0 \leq l < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge*
2. *se $l > 1$ la serie $\sum_n a_n$ diverge*
3. *(se $l = 1$ non si può dedurre nulla sul carattere della serie e ci si deve ricondurre a casi notevoli)*

Dimostrazione del criterio della radice. :
Dall'ipotesi segue che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \geq N \implies |\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$$

Se $0 < \varepsilon < l \quad \Longrightarrow \quad l - \varepsilon > 1 \quad$ e posso elevare alla n:

$$(l-\varepsilon)^n < a_n < (l+\varepsilon)^n \qquad , \quad n \geq N$$

Cioè stiamo confrontando la serie di regione $(l - \varepsilon)$ e $(l - \varepsilon)$:

1. se $l < 1 \quad , \quad$ scegliendo $\quad \varepsilon \mid l + \varepsilon > 1:$

$$\sum_{n \geq N} (l+\varepsilon)^n \quad \textit{converge}$$

   e per il teorema del confronto anche:

$$\sum_n a_n \quad \textit{converge}$$

2. se $l > 1 \quad , \quad$ scegliendo $\quad \varepsilon \mid l - \varepsilon > 1:$

$$\sum_{n \geq N} \big(l-\varepsilon\big)^n \quad \textit{diverge}$$

   e per il teorema del confronto anche:

$$\sum_n a_n \quad \textit{diverge}$$

□

12.2.3 Criterio del rapporto

Theorem 12.4 (Teorema, criterio del rapporto)**.** *:*
Sia $0 \leq a_n$ (non negativo) e supponiamo che:

$$\exists\, l := \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$$

Allora:

1. *se $0 \leq l < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge*
2. *se $l > 1$ la serie $\sum_n a_n$ diverge*
3. *(se $l = 1$ non si può dedurre nulla sul carattere della serie e ci si deve ricondurre a casi notevoli)*

Dimostrazione del criterio del rapporto. :
Dall'ipotesi segue che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \geq N \implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon \qquad \implies \qquad l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

Se $0 < \varepsilon < l \quad \implies \quad l - \varepsilon > 1$ e posso elevare alla n:

$$(l - \varepsilon) \cdot a_n < a_{n+1} < (l + \varepsilon) \cdot a_n \qquad , \quad n \geq N$$

Cioè stiamo confrontando la serie di regione $(l - \varepsilon)$ e $(l - \varepsilon)$:

1. se $l < 1$, scegliendo $0 < \varepsilon \mid l + \varepsilon < 1$ si ha:

   $$a_{n+1} < (l + \varepsilon) \cdot a_n < (l + \varepsilon)(l + \varepsilon) \cdot a_{n+1} < \cdots < (l + \varepsilon)^{n+1} \cdot a_n$$

   Quindi stiamo confrontando la serie con un'altra serie $\sum_{n \geq N} (l + \varepsilon)^n)$ geometrica convergente e per il criterio del confronto $\sum a_n$ è convergente.

2. se $l > 1$, scegliendo $\varepsilon > 0 \mid (l - \varepsilon) > 1$ si ha:

   $$a_{n+1} > (l + \varepsilon) \cdot a_n > (l + \varepsilon)(l + \varepsilon) \cdot a_{n+1} > \cdots > (l + \varepsilon)^{n+1} \cdot a_n$$

   e per il teorema del confronto anche: $\sum_n a_n$ *diverge*

□

12.2.4 Teorema della convergenza assoluta

Stiamo considerando il caso di una serie a segno variabile.

Definition 12.2 (Convergenza assoluta)**.** *:*
La serie $\sum_n a_n$ è assolutamente convergente se la serie $\sum_n |a_n|$ converge:

$$\sum_n |a_n| < +\infty \quad (\in \mathbf{R})$$

Theorem 12.5 (Convergenza assoluta $\implies$ converge semplicemente)**.** *:*
Se $\sum_n a_n$ converge assolutamente, allora converge semplicemnete a:

$$\left|\sum_n a_n\right| \leq \sum_n |a_n|$$

Dimostrazione del Teorema della convergenza assoluta. :
Considero la serie parziale dei termini positivi e qualli dei termini negativi separatamente:

$$s_N^+ := \sum_{n=0}^{N} a_n \geq 0 \qquad con\ a_n \geq 0 \qquad , \qquad s_N^- := \sum_{n=0}^{N} (-a_n) \geq 0 \qquad con\ a_n < 0$$

Tale che $\quad s_N = s_N^+ - s_N^-$

Considero la serie dei termini positivi:

$$s_N^+ = \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad (\in \mathbf{R})$$

Questo perchè la serie $\quad \sum a_n \quad$ converge assolutamente, cioè $\quad \sum_N |a_n| < +\infty$
Essendo $\quad \{s_N^+\}_{N \geq 0} \quad$ monotona crescente e superiormente limitata, allora per il criterio di convergenza delle successioni monotone limitate esiste:

$$\exists\, s^+ := \lim_{N \to +\infty} s_N^+ \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Analogamente per s_N^-:

$$s_N^- = \sum_{n=0}^{N} (-a_n) \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad (\in \mathbf{R})$$

Quindi per il criterio di convergenza delle successioni monotone limitate esiste:

$$\exists\, s^- := \lim_{N \to +\infty} s_N^- \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Per le proprietà dei limiti:

$$\exists \lim_{N \to +\infty} s_N = \lim_{N \to +\infty} (s_N^+ - s_N^-) = \lim_{N \to +\infty} (s_N^{)} - \lim_{N \to +\infty} (s_N^-) = s^+ - s^- \in \mathbf{R}$$

Non si hanno informazioni specifiche ne sul valore specifico, ne sul segno (positivo o negativo), ma solo sul fatto che è limitato.

□

12.2.5 Criterio di Leibniz

Theorem 12.6 (Teorema di Leibniz)**.** *:*
Consideriamo la serie $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad$ *dove:*

1. *La serie ha termini di segno alterno:* $\quad a_n \geq 0$
2. *Condizione necessaria per la convergenza della serie* $\quad \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
3. *È definitivamente decrescente:* $\quad \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \quad$ *che significa:*

$$\exists\, n_0 \geq 0 \mid n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad a_n \geq a_{n+1}$$

Allora la serie $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad$ *converge semplicemente:*

$$\exists\, s := \lim_{N \to +\infty} s_N = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \in \mathbf{R} \tag{219}$$

Inoltre:

$$s_{2N} \geq s \geq s_{2N+1} \quad , \quad N \geq 0$$

Con:

- $\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty} \quad$ *decrescente*
- $\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty} \quad$ *crescente*

In più il resto si scrive:

$$R_N := \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \textit{è una serie convergente tale che} \quad |R_N| \leq a_n \quad \forall\, N \geq 0 \tag{220}$$

Dimostrazione del Teorema di Leibniz. :
Poichè:

$$\lim_n |(-1)^n a_n| < \lim_n |a_n| = 0 \quad (Hp\,2)$$

La condizione necessaria per la convergenza è verificata.
Studiamo le somme paerziali pari e dispari:
- Pari:

$$s_0 = a_0 \geq 0$$

$$s_2 = \underbrace{a_0}_{s_0} - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = s_0 + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{\geq 0\; x\; Hp\, 3} \geq s_0$$

$$s_4 = \underbrace{a_0 - a_1 + a_2}_{s_2} - a_3 + a_4 = s_2 + \underbrace{a_4 - a_3}_{\geq 0\; x\; Hp\, 3} \geq s_2$$

Si deduce che la successione dei termini pari è decrescente:

$$\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty} \qquad \textit{decrescente}$$

- Dispari:

$$s_1 = a_0 - a_1 \geq 0$$

$$s_3 = \underbrace{a_0 - a_1}_{s_1} + a_2 - a_3 + = s_1 + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0\; x\; Hp\, 3} \geq s_1$$

Si deduce che la successione dei termini pari è decrescente:

$$\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty} \qquad \textit{decrescente}$$

Si forma quindi la seguente serie di disegualianze:

$$s_1 < s_3 < \cdots < s_{2N+1} = s_{2N} + a_{2N+1} \leq s_{2N} \leq \cdots \leq s_2 \leq s_0$$

Quindi le successioni $\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty}$ e $\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty}$ sono monotone e limitate, quindi per il teorema della convergenza delle successioni monotone limitate:

$$\exists \lim_{N \to +\infty} s_{2N} \quad , \quad \exists \lim_{N \to +\infty} s_{N+1}$$

Inoltre:

$$\lim_N \Big(s_{2N+1} - s_{2N} \Big) = \lim_N \Big(-a_{2N+1} \Big) = 0 \quad x\; Hp\, 2$$

Di conseguenza:

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\lim_N \big(s_{2N} \big)}_{= s} = \underbrace{\lim_N s_{2N'}}_{= s} =: s \in \mathbf{R}$$

Ciò significa che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_{pari}(\varepsilon) \geq 0 \,|\, (2N) \geq M_{pari}(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |s_{2N} - s| < \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_{dispari}(\varepsilon) \geq 0 \,|\, (2N+1) \geq M_{dispari}(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |s_{2N+1} - s| < \varepsilon$$

Definendo il massimo:

$$M(\varepsilon) := Max\Big(M_{pari}(\varepsilon), M_{dispari}(\varepsilon) \Big)$$

Si ha che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon) \geq 0 \,\Big|\, N \geq M(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |s_N - s| < \varepsilon \qquad cioe' \quad \exists \lim_N s_N = s$$

In particolare:

$$s_{2N+1} \leq s \leq s_{2N} \qquad con \quad s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Abbiamo che:

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n\right)}_{= s} - \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n\right)}_{= s_{N-1}} = s - s_{N-1}$$

Passando al limite:

$$\lim_N R_N = \lim_N \big(s - s_{N-1}\big) = s - \lim_N \big(s_{N-1}\big) = s - s = 0$$

Usando $\quad s_{2N+1} \leq s \leq s_{2N}$:

$$s_{2N-1} \underbrace{\leq}_{\text{A}} s \underbrace{\leq}_{\text{B}} s_{2N} \qquad \Longrightarrow \qquad s_{2N+1} \underbrace{\leq}_{\text{C}} s \leq s_{2N}$$

Sfruttando queste disugualianze si ottiene:

$$0 \underbrace{\leq}_{\text{A}} s - s_{2N-1} \underbrace{\leq}_{\text{B}} s_{2N} - s_{2N-1} = a_{2N}$$

$$0 \underbrace{\leq}_{\text{A}} s_{2N} - s \underbrace{\leq}_{\text{B}} s_{2N} - s_{2N+1} = a_{2N+1}$$

In ogni caso:

$$|s_N - s| \leq a_N$$

E sia per N pari che dispari:

$$|R_N| < a_{N-1} \quad \forall\, N \geq 0$$

$\square$

12.3 Serie di Taylor

12.3.1 Definizione di serie con esponenziale

Definition 12.3 (Serie di Taylor)**.** *:*
Sia f la funzione appartenente allo spazio delle funzioni deribabili un numero arbitrario di volte:

$$f \in C^{\infty}\Big((a,b)\Big) =: \{spazio\ funzioni\ derivabili\ \infty\ volte\} \qquad , \qquad con\ x : 0 \in (a,b)$$

Considero la serie di taylor di f in x_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)}_{***} = \lim_{n\to+\infty} T^f_{x_0,N}(x)$$

**** Sono i polinomi di Taylor di ordine $N \geq 0$.*
Per quali $x \in (a,b)$ la serie di Taylor converge? Per quali è la somma?
Usando il Teorema di Taylor cojn il resto di Lagrange abbiamo:

$$f(x) = T_N(x) + R_N(x) \qquad , \qquad R_N(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} \quad , \quad N \geq 0$$

Dove $\quad !c - x_0| < |x - x_0|$
Definendo:

$$M_N := Sup\big|f^n(x)\big| \qquad con\ x \in (a,b) \quad su\ ha \quad \underbrace{M_N < +\infty}_{finito}$$

Quindi si trova:

$$\left|f(x) - T_N(x)\right| = \left|R_N(x)\right| \leq \frac{M_{N+1}}{(N+1)!}(b-a)^{N+1}z$$

Quindi otteniamo qualcosa di uniforme rispetto a x nell'intervallo $[a,b]$ (non dipendente da x).
Quindi se il resto R_N converge a zero uniformemente, ovvero:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{M_{N+1}}{(N+1)}(b-a)^{N+1} = 0$$

La serie di Taylor converge e la sua somma è prorpio $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$$

La condizione di convergenza uniforme a zero del resto è verificata se:

$$M_N \leq K^N \qquad \textit{per qualche} \quad k \geq 0$$

12.3.2 Serie di Taylor

Qui sono elencate le principali serie di Taylor:

- Serie di Taylor dell'esponenziale:
  1. Considero la funzione esponenziale:
  $$f(x) = e^x \qquad \Longrightarrow \qquad f^n(x) = e^x \qquad \textit{con} \quad n \geq 0 \quad , \quad x \in \mathbf{R}$$
  2. Sappiamo che:
  $$\forall\, (a,b) \subset \mathbf{R} \qquad M_N := Sup\big(f^n(x)\big) = 1 \quad \forall\, N \geq 0 \,|\, x \in (a,b)$$
  3. Quindi abbiamo definito l'esponenziale come:
  $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

- Serie di Taylor del seno e coseno:
  - Considero la funzione seno:
  $$f(x) = \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \textit{con} \quad x \in \mathbf{R}$$
  - Considero la funzione coseno:
  $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- Serie di Taylor del logaritmo:
  1. Considero la funzione logaritmo:
  $$\log(1+x) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = (1+x^{-1}) \qquad , \qquad f^n = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-1} \quad n \geq 1$$
  2. Per ogni valore assunto da x nell'intervallo:
  $$\forall\, x \in (a,b) \qquad : \quad M_N \leq (N-1)!\,(1+a)^{-N}$$
  3. Quindi il logaritmo sarà:
  $$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{x^n}{n}\right) \qquad , \quad x > -1$$

12.3.3 Formula di Eulero

Formula di Eulero, forma esponenziale di un numero complesso:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta \qquad , \quad \theta \in \mathbf{R} \tag{221}$$

Dimostrazione della formula di eulero. :
Considero:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad , \quad z \in \mathbf{C}$$

Il limite della differenza è il modulo (modulo come $\quad |z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \quad$) di: :

$$\lim_{N\to+\infty} \left| e^z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = 0$$

Sostituiamo $\quad z = i\theta \quad , \quad \theta \in \mathbf{R}$:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!}}_{\text{termine pari}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{termine dispari}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}}_{\text{Serie Taylor } \cos(\theta)} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{Serie Taylor } \sin(\theta)} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$$

□

12.4 Esercizi sulle serie

Trucchetti da ricordare per gli esercizi:

- Ricordarsi che oltre ai metodi basati su teoremi, si può razionalizzare se ci sono delle radici e poi usare i teoremi.
- Ricordare la formula di Sterling per scomporre l'esponenziale.

12.4.1 Esempi di serie

- Serie convergente:
  1. Considero la serie di mengoli:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad n \geq 1$$

  2. Trovo la successione delle somme:

  $$s_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = 1 - \frac{1}{N+!}$$

  3. Passo al limite:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} s_n = \lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1$$

  4. Siccome il limite esiste ed è finito $\quad \Longrightarrow \quad$ serie converge

- Serie divergente:
  1. Analogamente si vede come nel punto 3 il limite esiste e non è finito, quindi sarà $\pm\infty$
  2. Una serie divergente è:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

- Serie indeterminata:

1. Considero la serie:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \quad \Longrightarrow \quad a_n = (-1)^n \quad , \quad n \geq 0$$
2. Trovo la successione delle somme;
$$s_N := \sum_{n=0}^{N} (-1)^n = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^N = \begin{cases} 0 & , \quad N\ dispari \\ -1 & , \quad N\ pari \end{cases}$$
3. Siccome non esiste il limite la serie è indeterminata:
$$\nexists \lim_{N \to +\infty} s_n \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \quad indeterminata$$

12.4.2 Serie particolari

- Serie geometrica (metodo classico):

1. Considero la serie geometrica;
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + \cdots + q^n \qquad q \geq 0$$
2. Se $q = 1$ allora diverge, infatti:
$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1 = +\infty$$
3. Se $q \neq 1$ allora:
$$s_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$
4. Passando al limite:
$$\lim_{N \to +\infty} s_N = \lim_{N \to +\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \begin{cases} +\infty & , \quad q > 1 \\ \frac{1}{1-q} & , \quad 0 \leq q < 1 \end{cases}$$

- Serie armonica (per confronto):

1. Considero la serie armonica:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
2. $A - n := \frac{1}{n} \to 0 \quad per\ n \to +\infty \qquad \Longrightarrow$ la condizione necessaria per la convergentìza è verificata
3. Considero la funzione $\quad f(x) = \log(1 + x) \quad , \quad x > -1$
4. La derivata prima è: $\quad f'(x) = \log(1 + x)^{-1} \qquad , \qquad f'(0) = 1$ quindi la tangente in $x = 0$ è $\quad y = x$
5. La derivata seconda è:$f''(x) = -(1 - x)^{-2} < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ è concava quindi il grafico sta sotto la tangente:
$$\ln(1 + x) \leq x \quad \forall\, x > -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \leq \frac{1}{n} \quad \forall\, n \geq 1$$
6. Ma sappiamo anche che:
$$\ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) \leq \frac{1}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(n + 1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

7. Passando alla somma della successione:

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \underbrace{\ln(N+1)}_{\to +\infty} - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}_{??}$$

8. Quindi $\sum_{n=1}^{N}$ converge per confronto

- Serie con confronto asintotico:
  1. Considero la serie:
  $$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[n]{e}-1}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = \left(e^{1/n}-1\right)\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$
  2. Siccome la serie asintotica converge, anche la serie considerata è convergente

- Serie con confronto integrale:
  1. Considero la serie:
  $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \qquad , \qquad \alpha \in (0,2)$$
  2. Nel caso $\alpha = 1$ abbiamo il caso limite della serie armonica che converge (esercizio precedente)
  3. Considero $f(x) = \frac{1}{n^\alpha}$ è integrabile a $+\infty$ per $\alpha > 1$
  4. Quindi si ha che $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ è convergente per $\{\alpha > 1\} \cup \{\alpha = 1\} = \{\alpha \geq 1\}$

- Serie esponenziale con :
  1. Sia $x \geq 0$ fissato:
  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = \frac{x^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_n+1}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0 = l \qquad (n \to +\infty)$$
  2. Vediamo che dopo aver applicato il criterio del rapporto la serie evidentemente converge
  3. Applicando Taylor con resto di Lagrange:
  $$e^x = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall\, x \geq 0$$

- Serie con Criterio di Leibniz:
  1. Considero la serie a segno alterno:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{n - 1n^2 + 1}_{a_n}$$
  2. Controllo le ipotesi del teorema:
     (a) Serie a segno alterno: $a_n \geq 0$
     (b) Definitivamente decrescente: $a_{n+1} \leq a_n$ (o con disequazione o con studio di funzione)
     (c) Siccome sono tutte verificate si può applicare il teorema di Leibniz $\Longrightarrow$ la serie converge semplicemente
     (d) Discuto la convergenza assoluta: noto che il comportamento asintotico è quello della serie armonica $\Longrightarrow$ quindi per il criterio del confronto non è convergente.
     (e) Ricordarsi che se si riesce a scomporre la serie in un numero finito di serie convergenti e una sola divergente si può dire che è divergente con dimostrazione per assurdo con il criterio di linearità.