4 Grafici

4.1 Definizione di grafico

Definition 4.1 (Grafico)**.** *Un grafico $G \subseteq A \times B$ è detto grafico se (con A e B insiemi numerici):*

$$\begin{cases} (x,y) \in G \\ (x,z) \in G \end{cases} \implies y = x \implies (x,y) = (x,z) \tag{9}$$

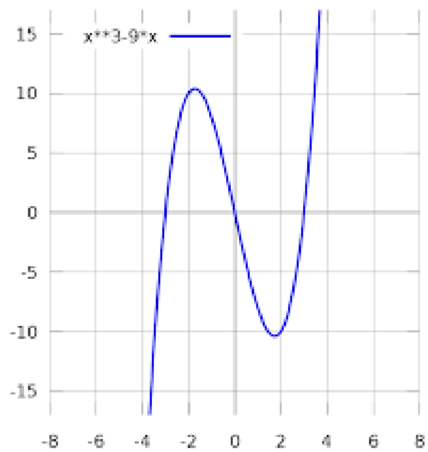


Figura 5: Grafico e funzioni

Una qualsiasi retta versticale può intersecare il grafico al più in un punto.

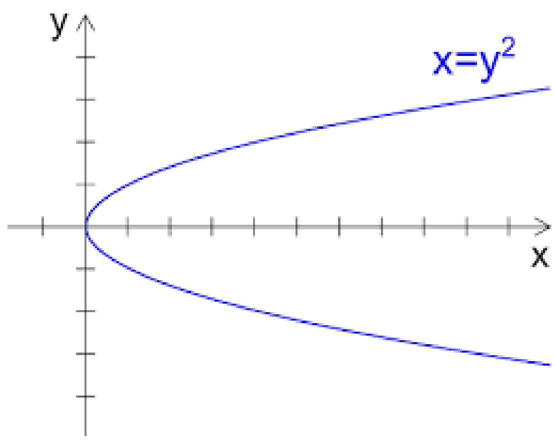


Figura 6: Non grafico

4.2 Dominio

Definition 4.2 (Dominio)**.** *Il dominio è la proiezione della curva G sull'asse x (in questo caso A):*
$D := \{x \in A : \exists y \in B | (x,y) \in G\}$

Definition 4.3 (Immagine)**.** *L'immagine è la proiezione della curva G sull'asse y (in questo caso B):*
$Im(G) := \{y \in B : \exists x \in D | (x,y) \in G\}$

4.3 Immagine

4.4 Funzioni associate al grafico

- $G \subset A \times B$

$$\forall\, a \in D \exists!\, b \in Im(G) \mid (a,b) \in G \tag{10}$$

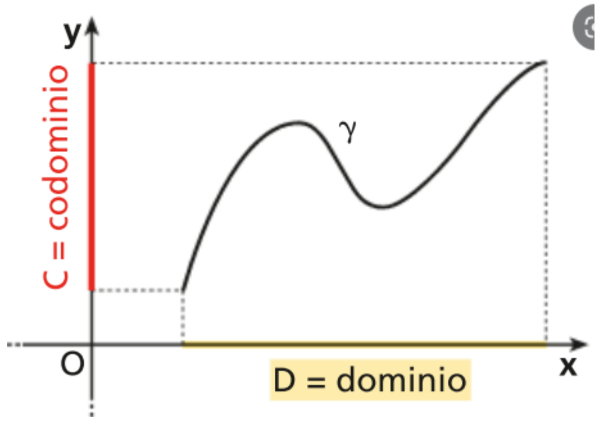


Figura 7: Dominio e immagine di un grafico

- b si denota con il simbolo $f(a)$ per ricordare che esso dipende da a.
- Un'altra scittura della funzione è: $f : D \implies Im(G)$
- $$G = \Big\{ \Big(a, f(a) \Big) \in A \times B : a \in D \Big\} \tag{11}$$

4.5 Grafico associato alla funzione

Questo caso lo analizzeremo attravaerso un esempio:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1} \tag{12}$$

Questa funzione associa ad ogni X (numero reale) una Y (numero reale) limitatamente al dominio.

$$D(fr) = \Big\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 \neq 1 \Big\} = \Big\{ x \in \mathbb{Q} : x \neq \pm 1 \Big\} \tag{13}$$

$$G(f) = \Big\{ \Big(x, f(x) \Big) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : X \in D(f) \Big\} = \Big\{ (x, \frac{2x-1}{x^2+1}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : X \neq \pm 1 \Big\} \tag{14}$$

Insime rispetta la definizione di grafico: ad un valore y è associata al più un valore x (corrispondenza fra grafico e oggetti analitici).

4.6 Tipologie di funzioni

4.6.1 Funzione suriettiva

Definition 4.4 (Funzione suriettiva)**.** *La funzione $f : A \implies B$ viene definita suriettiva in un piano $A \times B$ se ad ogni y corrisponde almeno una x (il codominio è tutto l'asse y):*

$$\forall b \in B \, \exists \, a \in A \mid b = f(a) \tag{15}$$

Un esempio di funzione suriettiva è la funzione omografica (figura 9), mentre la parabola non è una funzione suriettiva.

4.6.2 Funzione iniettiva

Definition 4.5 (Funzione Iniettiva)**.** *Una funzione $f : A \implies B$ viene definita iniettiva in un piano $A \times B$ se ad ogni y corrisponde al più una X:*

$$\begin{cases} a_1, a_2 \in A \\ f(a_1) = f(a_2) \end{cases} \implies a_1 = a_2 \tag{16}$$

Che corrisponde al dire:

$$\begin{cases} a_1, a_2 \in A \\ \forall a_1 \neq a_2 \end{cases} \implies f(a_1) = f(a_2) \tag{17}$$

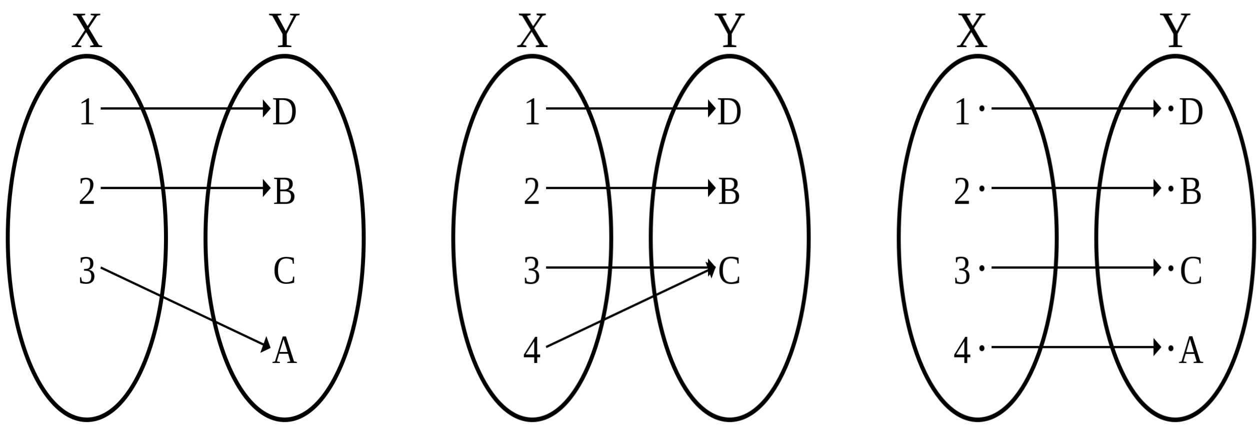
Un esempio di funzione iniettiva è la parabola con asse verticale (figura 9).

4.6.3 Funzione biunivoca

Definition 4.6. *Una funzione* $f : A \implies B$ *viene definita biunivoca in un piano* $A \times B$ *se ad ogni* x *corrisponde una ed una sola* y*:*

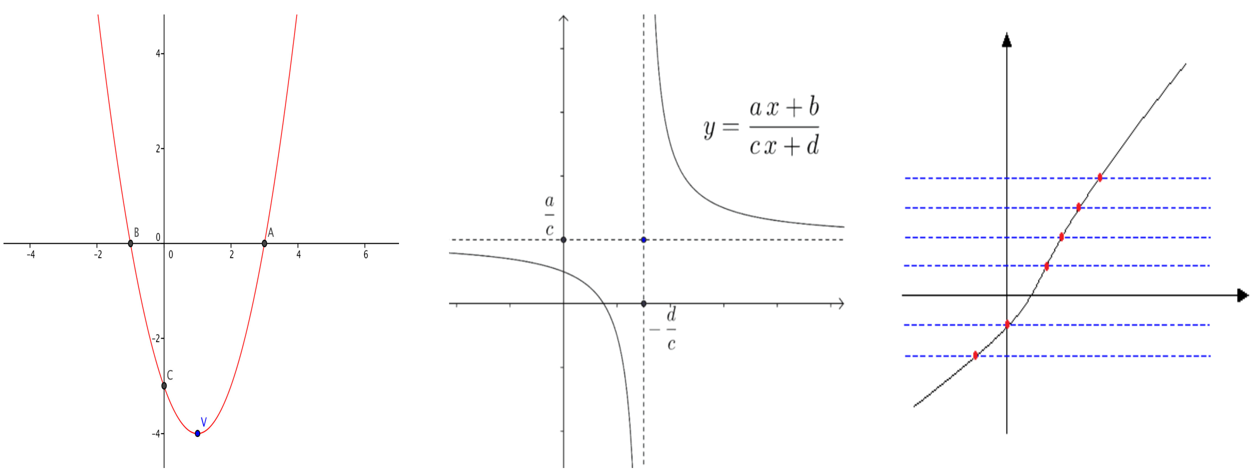
$$\forall\, b \in B\; \exists!\, a \in A \mid b = f(a) \tag{18}$$

Quindi possimao affermare che una funzione è biunivoca se essa è sia suriettiva che iniettiva. Un esempio di funzione biunivoca è la retta $y = x$ (figura 9).



(a) Iniettiva (b) Suriettiva (c) Biunivoca

Figura 8: Gli insiemi delle tre tipologie di fuzioni particolari



(a) Iniettiva (b) Suriettiva (c) Biunivocae

Figura 9: I grafici delle tre tipologie di fuzioni particolari

4.7 Funzione modulo

4.7.1 Definizione modulo

Definition 4.7. *Considerata una funzione* $f : \mathbf{Q} \implies \mathbf{Q}$*, viene definita funzione modulo quando:*

$$f(q) = \begin{cases} -q & , \quad q < 0 \\ -q & , \quad q \geq 0 \end{cases} \tag{19}$$

Di conseguenza la funzione modulo:

- non è iniettiva
- non è suriettiva
- ha il grafico che è la bisettrice del 1° e 3° quadrante.

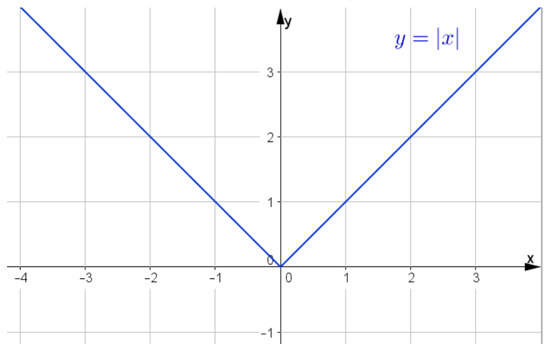


Figura 10: Grafico della funzione modulo

4.7.2 Distanza euclidea

Definition 4.8. *Considerati $a, b \in \mathbf{Q}$, la funzione f distanza fra a e b viene definita come:*

$$f(a,b) := |a-b| = \begin{cases} b-a & , \quad q < 0 \\ a-b & , \quad q \geq 0 \end{cases} \tag{20}$$

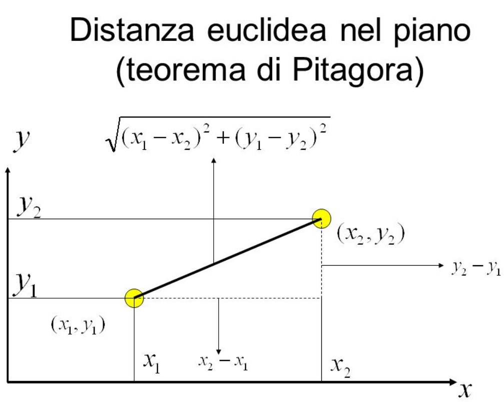


Figura 11: Grafico della funzione modulo

4.7.3 Proprietà modulo

1. $|q| = 0 \Leftrightarrow q = 0$
2. $|q_1 \cdot q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$
3. Disuguaglinza triangolare: $|q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|$ ed è valida anche nel piano (2 dimensioni) e nello spazio (3 dimensioni).
4. Disuguaglianza triangolare per la distanza: $|q_1 - q_2| \leq |q_1 - q_3| + |q_3 - q_2|$
5. $|q| = |-q|$

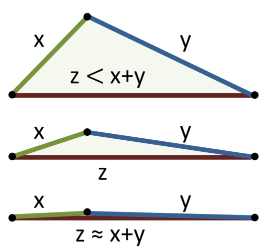


Figura 12: Disuguaglianza tringolare per la distanza

6 Succesioni

6.1 Limite della successione

Definition 6.1 (Successione)**.** *Una successione in un insieme dato X è una funzione $f : D \implies X$ con dominio D numerabile (il più delle volte $D \subseteq \mathbf{Z}$)*

Una notazione alternativa è:

$$n \in D \quad , \quad f(n) := x_n \mid \{x_n\}_{n\in D} \subseteq X \tag{34}$$

Successioni come sistema dinamico e tempo discreto:

- $D =$ insieme dei tempi
- $x_n =$ posizione al tempo $n \in D$
- $\{x_n\}_{n\in D} \subseteq X$ orbita del sistema (come se si scattassero delle foto a tempo discreto per vedere in che punto dell'orbita si trova x_n)

Esercizi ed esempi di successioni:

1. Successione illimitata non convergente: il limite esiste ma non è razionale: $\{n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{Q} \quad , \quad x_n = n \, \forall \, n \geq 0$
2. Successione limitata convergente: la velocità diminuisce tendendo verso zero senza mai assumerne il valore (esiste il limite):

   $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbf{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} D = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}\} \\ x_n = \frac{1}{n} \end{pmatrix}$
3. Successione periodica perfetta: è un pendolo elementare (metronomo) che oscilla tra due posizoni:

   $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathbf{Q} \quad , \quad x_n = \begin{cases} -1 & , \quad n \, dispari \\ +1 & , \quad n \, pari \end{cases}$
4. Successione costante:

   $\{C\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbf{Q} \quad , \quad (C \in \mathbf{Q} \, fissato)$

   $\lim_{n\to+\infty} c = c$ sapenso che $x_n = c \, \forall \, n \geq 0 \quad , \quad l = c$

   $|x_n - l| = |c - c| = 0 < \{ \, \forall \, \varepsilon > 0$ (tautologia)

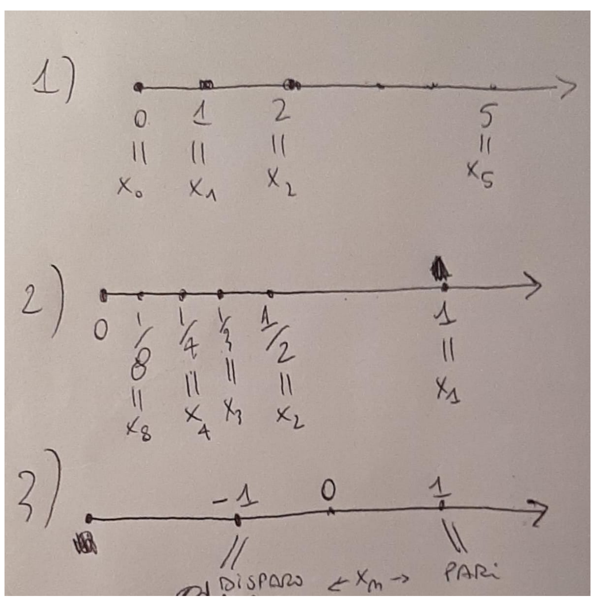


Figura 14: Esempi di successioni

Definition 6.2 (Limite di successione)**.** *Il limite di successione in* $\in \mathbf{Q}$ *è una successione* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathbf{Q}$ *che converge al numero* $l \in \mathbf{Q}$ *e in simboli si scrive:*

$$\lim_{x\to+\infty} x_n = l \tag{35}$$

Le definzioni formali di limite sono:

1. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \mid n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - l| < \varepsilon$
2. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \mid n \geq N(\varepsilon) \implies l - \varepsilon < x_0 < l + \varepsilon$
3. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \mid n \geq N(\varepsilon) \implies x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$
4. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \mid n \geq N(\varepsilon) \implies \{x_n\}_{n\geq N(\varepsilon)} \subset (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Per capire meglio, ricordiamo che ε è l'errore (tolleranza) ed è un numero infinitesamente piccolo e $N(\varepsilon)$ è la soglia, ovvero quel valore oltre al quale la successione è racchiusa nell'intervallo $(l - \varepsilon,\ l + \varepsilon)$, infatti viene definita convergenza a limite asintotico:

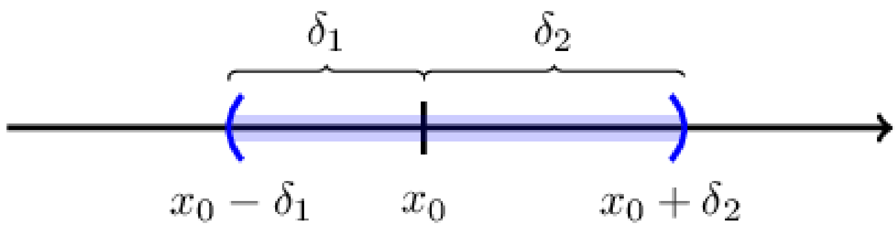


Figura 15: Intorno di x_0 verso il quale converge la funzione

Osservazioni sulla posizione della successione in base a x_n ed esiste il limite che tende a $+\infty$:

- $n < N(\varepsilon)$ successione si trova in punti casuali
- $n > N(\varepsilon)$ successione si accumula verso il valore del limite (l) e il codominio diventa

  $C = \Big\{ n > N(\varepsilon) \mid n \in \big[l - \varepsilon,\ l + \varepsilon\big] \Big\}$

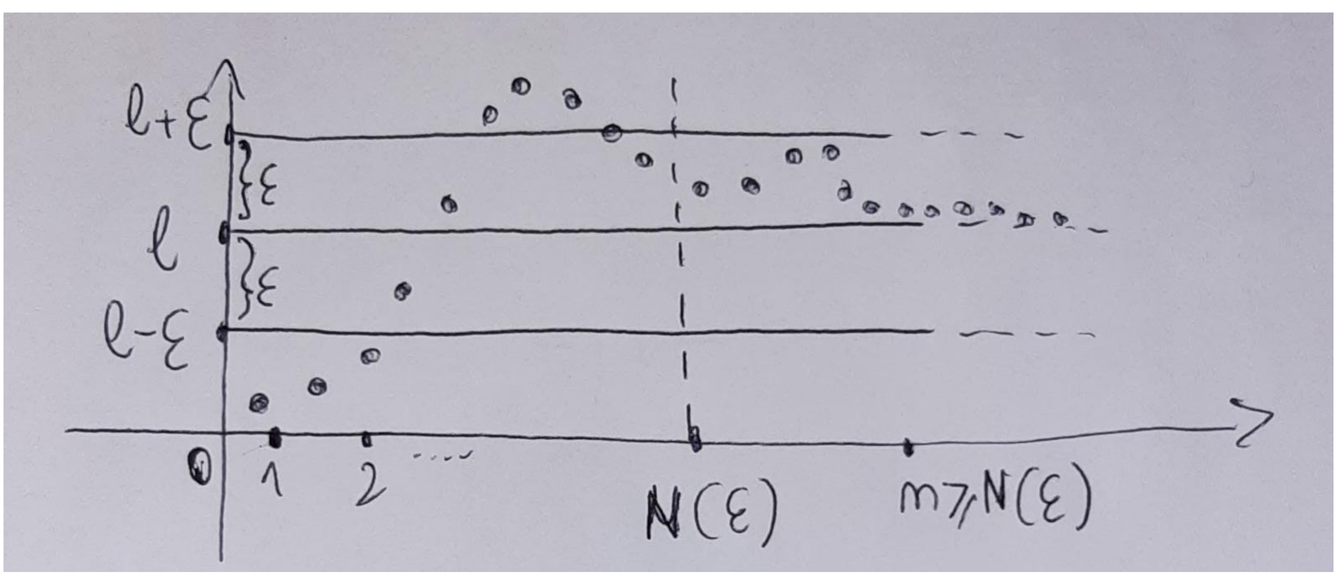


Figura 16: Intrappolamento successione con $n \geq N(\varepsilon)$

6.2 Convergenza della successione

Consideriamo l'esempio 2 nell'immagine 14, va dimostrato che:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbf{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_n = \frac{1}{4} \\ l = 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Si parte dal fondo e si procede a ritroso:

1. Risolvere la disuguaglianza con n incognita
2. Fissiamo $\varepsilon > 0$
3. si arriva a $n \geq N(\varepsilon) \implies$ si cerca per quali valori di $n \geq 1$ l'intrappolamento:

$$l - \varepsilon < \frac{1}{n} < l + \varepsilon \quad , \quad l = 0 \tag{37}$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} < +\varepsilon \implies \frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}$$

4. Scelgo come soglia $N(\varepsilon$ il numero più piccolo naturale maggiore di $\frac{1}{n}$
5. Così se $n > N(\varepsilon)$, allora $n \geq N(\varepsilon) > V_\varepsilon$
6. quindi rileggendo a ritroso si ottiene che:

$$\begin{gathered} 0 - \varepsilon < V_n < 0 + \varepsilon \\ -\varepsilon < V_n < +\varepsilon \\ \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{gathered}$$

6.3 Proprietà del limite

- Proprietà 1:

$$se : \exists \lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbf{Q} \implies \text{allora il limite è unico} \tag{38}$$

Dimostrazione proprità 1. :

Siano $\lim_n a_n = l_1 \quad , \quad \lim_n a_n = l_2$

$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, N_1(\varepsilon) \geq 0 \,|\, n \geq N_1(\varepsilon) \implies |a_n - l_1| < \varepsilon$

$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, N_1(\varepsilon) \geq 0 \,|\, n \geq N_2(\varepsilon) \implies |a_n - l_2| < \varepsilon$

$n \geq max\big(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\big) =: N(\varepsilon) \implies$ si ha che: $n \geq N_1(\varepsilon) \quad , \quad n \geq N_2(\varepsilon)$

Bisogna dimostrare che: $0 \leq |l_1 - l_2| = |(l_1 - a_n) + (a_n - l_2)| = |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

$\implies \forall\, \varepsilon > 0 \quad , \quad 0 \leq |l_1 - l_2| < 2\varepsilon \implies |l_1 - l_2| = 0 \implies l_1 = l_2$

□

- Proprieta 2:

$$se : \exists \lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbf{Q} \implies \text{allora } \{a_n\}_n \text{ è limitata} \tag{39}$$

Dimostrazione proprità 2. :

$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, N_1(\varepsilon) \geq 0 \,|\, n \geq N(\varepsilon) \implies a \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

$\implies$ per $n \geq N(\varepsilon)$ la successione è intrappolata nell'intervallo, mentre per $n < N(\varepsilon)$ può essere fuori

$\implies \{a_n\}_{n \geq N(\varepsilon)} \subset (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ è limitata

Sappiamo che $\{a_n\}_{n\in\{0,1,\ldots,N(\varepsilon)-1\}}$ è limitata perchè è un insieme finito

$\implies$ quindi $\{a_n\}_{n\geq 0} = \left(\{a_n\}_{n\in\{0,1,\ldots,N(\varepsilon)-1\}}\right) \cup \left(\{a_n\}_{n\geq N(\varepsilon)}\right)$

Possiamo concludere che la successione è limitata poichè essa è l'unione di insiemi limitati.

□

- proprieta 3:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \left(\lim_{n\to+\infty}(a_n)\right) + \left(\lim_{n\to+\infty}(b_n)\right) = l_1 + l_2 \tag{40}$$

Dimostrazione proprità 3. :

Dalle ipotesi (aggiungiamo il modulo per garantirne la positività):

$|(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| = |(a_n - l_1) + (b_n - l_2)| \leq$ Disug Triang $\leq |(a_n - l_1)| + |(b_n - l_2)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Si cerca quella soglia oltre alla quale la differenza sia infinitesimale, cioè: $0 \leq |(a_n - l_1) + (b_n - l_2)| < 2\varepsilon$

Se $n \geq N(\varepsilon) := max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ dove rispettiamente:
-$N_1(\varepsilon)$ è la soglia di $\implies |a_n - l_1|$
-$N_2(\varepsilon)$ è la soglia di $\implies |a_n - l_2|$

□

- Proprietà 4:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to+\infty}(a_n)\right) \cdot \left(\lim_{n\to+\infty}(b_n)\right) = l_1 \cdot l_2 \tag{41}$$

Dimostrazione proprità 4. :

$0 \leq |(a_n \cdot b_n - l_1 \cdot b_n) + (l_1 \cdot b_n - l_1 \cdot l_2)| = prop\, associat. = |(a_n - l_1)\cdot b_n + l_1 \cdot (b_n - l_2)| =$

$\leq |(a_n - l_1)\cdot b_n| + |l_1 \cdot (b_n - l_2)| = |a_n - l_1| \cdot |b_n| + |l_1| \cdot |b_n - l_2| = ***$

Sappiamo che ($|a_n - l_1|$) è arbitrariamente piccolo (infinitesimale) e ($|b_n|$) è arbitrariamente grande, ma (B) essendo convergente è limitato $\implies$ il prodotto dei due termini è arbitrariamente piccolo (minore di ε) $\implies$ il prodotto dei due termini è minore di ε.

Poichè $\{b_n\}$ è convergente, essa è limitata: $\exists M \geq 0 \mid |b_n| < M \,\forall\, n \geq 0 \implies$ allora: $*** = |a_n - b_1| \cdot M + |l_1| \cdot |b_n - l_2| < \varepsilon \cdot M + |l_1| \cdot \varepsilon = M + |l_1| \cdot \varepsilon \quad$ se $n \geq N_1(\varepsilon) \quad , \quad n \geq N_2(\varepsilon)$

□

- Proprietà 5:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\left(\lim_{n\to+\infty}(a_n)\right)}{\left(\lim_{n\to+\infty}(b_n)\right)} = \frac{l_1}{l_2} \tag{42}$$

6.4 Teroemi delle successioni

Sono utili perchè permettono, sapendo risolvere dei limiti semplici, di calcore limiti composti difficili da analizzare:

1. Teorema della Permanenza del Segno: utilizzato per controllare rapidamente il risultati:

$$\begin{cases} se\; a_n \geq 0 \\ \exists\, l := \lim_{n\to+\infty}(a_n) \end{cases} \implies l \geq 0 \tag{43}$$

Dimostrazione del teorema della Permanenza del Segno. :

Per assunrdo, supponiamo $l < 0$ e definiamo $\varepsilon := -\frac{l}{2} > 0$, poichè $\exists \lim_{n\to+\infty}(a_n)$ abbiamo:

$\exists N(l) \geq 0 \mid n \geq N(\varepsilon) \implies (l-\varepsilon) < a_n < (l+\varepsilon)$

Sostituiamo $\varepsilon = -\frac{l}{2}$ e otteniamo: $a_n < l + \varepsilon = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$ che abbiamo definito essere negativo

$\implies$ questo è assurdo perchè per ipotesi $a_n \geq 0 \,\forall\, n \geq 0$

□

2. Teorema della monotonia: è una conseguenza del Teorema 43 ed è utilizzato nelle succeccessioni complicate per trovare degli intorni nei quali è contenuto il limite:

$$\begin{cases} se\ a_n \leq 0 \\ \exists\, l_1 := \lim_{n\to+\infty}(a_n) \\ \exists\, l_2 := \lim_{n\to+\infty}(b_n) \end{cases} \implies l_1 \leq l_2 \tag{44}$$

Dimostrazione del teorema della monotonia. :

$l_1 - l_2 = c$ per il teorema della somma dei limiti

Essendo $a_n > b_n \implies a_n - b_n \geq 0$

$\implies$ di conseguenza: $\lim_n(a_n - b_n) > 0$ per teorema della permanenza del segno (43)

$\lim_n(a_n - b_n) > 0 \implies l_1 - l_2 > 0 \implies l_1 > l_2$

□

3. Teorema 3: il prodotto di una successione che converge a zero (infinitesimale) ed una successione limitata da come risultato una successione convergente a zero:

$$\begin{cases} se\ \lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0 \\ \{b_n\}_{n\geq 0} \text{ è limitato (no caso indeterminazione)} \end{cases} \implies \exists \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = 0 \tag{45}$$

Dimostrazione della proprità 3. :

Dati due limiti $\lim_n a_n = 0$ e $\lim_n b_n$ limitato: $\implies \big(\lim_n a_n\big)\cdot\big(\lim_n b_n\big) = 0 \cdot \big(\lim_n b_n\big)$

Ma essendo $\big\{b_n\big\}_{n\geq 0}$ limitata per ipotesi $\implies 0 \cdot \lim_n b_n = 0$

Ciò significa che: $\big(\lim_n a_n\big)\cdot\big(\lim_n b_n\big) = \big(\lim_n a_n\big)\cdot\big(a_1 \cdot b_1\big) = 0$

□

4. Teorema di Cauchy:

Theorem 6.1. *se la successione è convergente (esiste limite finito), allora i punti della successione oltre ad una certa soglia sono vicini tra di loro (si accumulano i punti fra loro stessi)[nella formula non è coinvolto il valore del limite (solo nella dimostrazione)]:*

Se $\exists\big(\lim_n(a_n)\big) \in \mathbf{Q} \implies$:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \geq 0 \mid n, m \geq N(\varepsilon) \implies |a_n - a_m| < \varepsilon \tag{46}$$

Dimostrazione del Teorema di Cauchy. ;

Sia $l := \lim_{n\to+\infty} a_n$ al valore limite $\quad , \quad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \geq 0 \mid n, m \geq N(\varepsilon) \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$

Quindi se $n, m \geq N(\varepsilon)$ si ha: $|a_n - a_m| = |(a_n - l) + (l - a_m)| \leq |a_n - l| + |a_m - l| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

$\implies$ il Teorema di cauchy è condizione necessaria affinchè una successione converga verso un valore definito e limitato (significa che esiste il limite finito)

$\implies$ il Teorema di cauchy è condizione sufficiente nell'insieme R dei numeri reali, nell'insieme Q dei numeri razionali non è sufficiente, per ciò è necessario introdurre e costrire l'insieme R.

□

Procedimento esercizio per verificare se una successione è di Cauchy in **Q**:

(a) Data una successione $x_n = (1 + \frac{1}{n^2})$ cerchiamo per quali valori n, m vale: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad , \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$
(b) Per la disugualianza triangolare (12) sappiamo che $|x_n - x_m| \geq |x_n| - |x_m| =$ perchè in questo caso sono elevati alla seconda $= x_n - x_m$
(c) Se $x_n, x_m \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies |x_n - x_m| \leq (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$
(d) Cerchiamo i valori m, n che soddisfano questa equazione e scegliamo una soglia $N(\varepsilon)$ pari alla soluzione (molto grande)
(e) Quindi abbiamo $m, n >$ *soluzione* e possiamo dire che la successione ripetta il teorema di Cauchy.

6.5 Insieme quoziente

Definiamo l'insieme quoziente:

Definition 6.3. *Sia X un insieme, una relazione di equivalenza su X è un sottoinsieme* **R** *del prodotto cartesiano di X per se stesso:*

$$\mathbf{R} \subset \{X \times X\} \tag{47}$$

Le proprietà dell'insieme quoziente sono le seguenti, inoltre se una relazione ripetta tutte e tre le seguenti prorietà, essa è difinita relazione dei equivalenza:

1. Riflessività: $\quad (x, x) \in \mathbf{R}\, \forall\, x \in X \quad ,$ ovvero che se x è sempre in relazione con se stesso
2. Transitività: $\quad (x, y), (y, z) \in \mathbf{R} \implies (x, z) \in \mathbf{R} \quad ,$ ovvero che se x è in relazione con y e y è in relazione con z, allora anche x è in relazione con z
3. Simmetricità: $\quad (x, y) \in \mathbf{R} \implies (y, x) \in \mathbf{R} \quad ,$ ovvero che se x è in relazione con y, allora anche y è in relazione con x

L'insieme quozione si può scrivere nella notazione: $[x]_{\mathbf{R}} := \left\{ y \in X \mid x\, in\, relazione\, con\, y \right\} \subset X$

Definiamo la classe di equivalenza:

Definition 6.4. *L'insieme quozionete forma la classe di equivalenza secondo una specifica regola di equivalenza, l'insieme X di equivalenza è l'unione fra le classi di equivalenza di tale insieme:*

$$X/\mathbf{R} := \left\{ x_{\mathbf{R}} \mid x \in X \right\} \tag{48}$$

Ad esempio: $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ sono due rappresentanti della stessa classe di equivalenza dello stesso numero razionale.

I numeri razionali (**Q**) sono l'insieme quozionte $\frac{m_0}{n_0} = \frac{m_1}{n_1}$ con $n_0, n_1 \neq 0$ se rappresentano lo stesso numero razionale.
In simboli: $m_0 \cdot n_1 = m_1 \cdot n_0 \quad , \quad$ con $m_0, m_1, n_0, n_1 \in \mathbf{Z}$
La relazione di equivalenza si indica con "$\sim$": $\quad (m_0, n_0) \sim (m_1, n_1)$

9 Funzioni di variabili Reali

9.1 Definizioni limite e continuità

Definition 9.1 (Limite di funzione)**.** *Considerata una funzione $f : D \to \mathbf{R} \quad , \quad D \subseteq \mathbf{R}$, si dice che $f(x)$ ha limite $l \in \mathbf{R}$ in $x_0 \in D'$ se:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, \begin{cases} x \in D \\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \\ x \neq x_0 \end{cases} \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{84}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{85}$$

Ciò significa che esiste una soglia oltre la quale i punti si accumulano verso un valore reale l (D' insieme dei punti di accumulazione).
Viene posto $x \neq x_0$ perchè il limite non comprende il punto, la funzione si avvicina al limite ma non lo raggiunge (resta nell'intorno), può essere il caso di una funzione che si avvicina ad un punto $x_0 \notin D$ che non appartiene al dominio.

Definition 9.2 (Funzione continua)**.** *Se in più $x_0 \in (D \cap D') \wedge l = f(x_0)$ si dice che la funzione è continua nel punto x_0, in simboli:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, x \in \big((D \backslash \{0\}) \cap (x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)\big) \implies f(x) \in \big(l - \varepsilon, l + \varepsilon\big) \tag{86}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l = f(x_0) \tag{87}$$

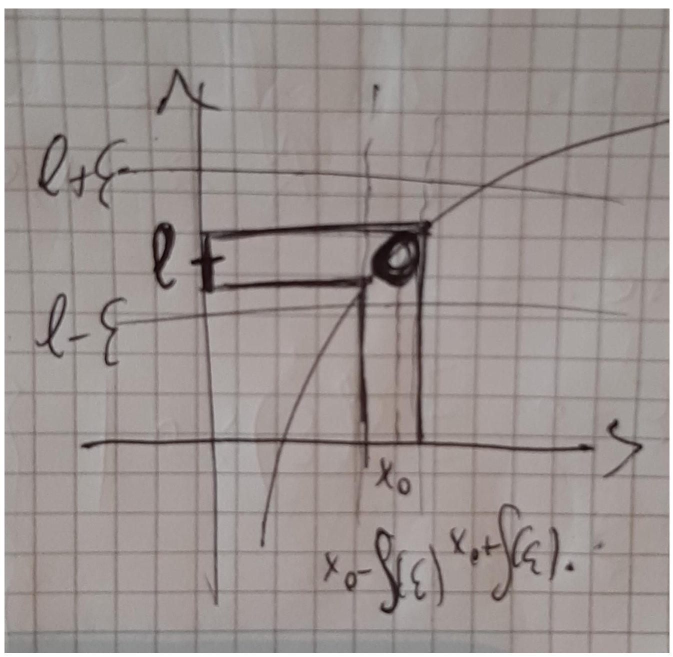


Figura 27: Limite di funzione continua

Si può considerare anche solo un intrno monolaterale di un punto, in questo caso si parla di limite destro e limite sinistro

- Limite destro (relativo all'introno destro):

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = l \tag{88}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, (x_0) < x < (x_0 + \delta(\varepsilon)) \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{89}$$

- Limite sinistro (relativo all'intorno sinistro):

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = l \tag{90}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, (x_0 - \delta(\varepsilon)) < x < (x_0) \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{91}$$

Nel caso in cui la funzione è continua solamente da destra o sinistra possiamo scrivere (esempio con continutità da destra):

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l = f(x) \tag{92}$$

9.2 Asintoto

Definition 9.3 (Asintoto)**.** *Un asintoto è una retta, o più generalmente una curva, alla quale si avvicina indefinitamente una funzione data.*

9.2.1 Asintoto verticale

- Funzione tende a (+) infinito:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \tag{93}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\, \exists\, \delta(M) > 0 \,|\, \begin{cases} x \in D \\ |x - x_0| < \delta(M) \\ x \neq x_0 \end{cases} \implies |f(x)| > M \tag{94}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\, \exists\, \delta(M) > 0 \,|\, x \in \Big((D \backslash \{x_0\}) \cap \big(x_0 - \delta(M), x_0 + \delta(M)\big)\Big) \implies f(x) \in (M, +\infty) \tag{95}$$

- Funzione tende a (-) infinito:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \tag{96}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\, \exists\, \delta(M) > 0 \,|\, \begin{cases} x \in D \\ |x - x_0| < \delta(M) \\ x \neq x_0 \end{cases} \implies |f(x)| < -M \tag{97}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\, \exists\, \delta(M) > 0 \,|\, x \in \Big((D \backslash \{x_0\}) \cap \big(x_0 - \delta(M), x_0 + \delta(M)\big)\Big) \implies f(x) \in (-\infty, M) \tag{98}$$

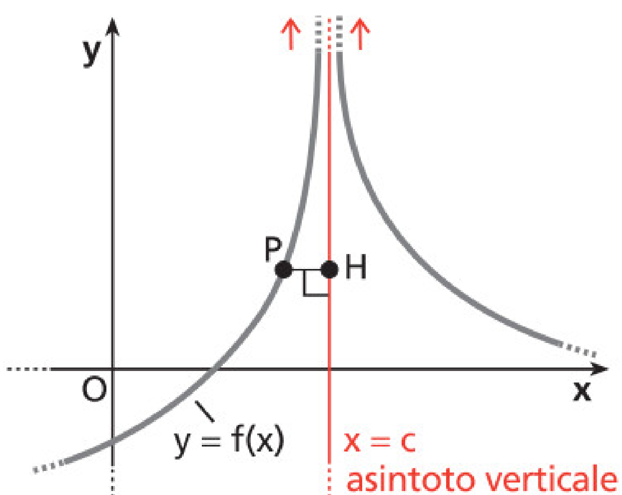


Figura 28: Asintoto verticale

9.2.2 Asintoto orizzontale

Il grafico della funzione si confonde con la semiretta orizzontale (asintoto).

- Dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ non è superiormente limitato e x_0 a (+) infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \tag{99}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{R} \mid \begin{cases} x \in D \\ x > N(\varepsilon) \end{cases} \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{100}$$

- Dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ non è inferiormente limitato e x_0 tende a (-) infinito:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \tag{101}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{R} \mid \begin{cases} x \in D \\ x < -N(\varepsilon) \end{cases} \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{102}$$

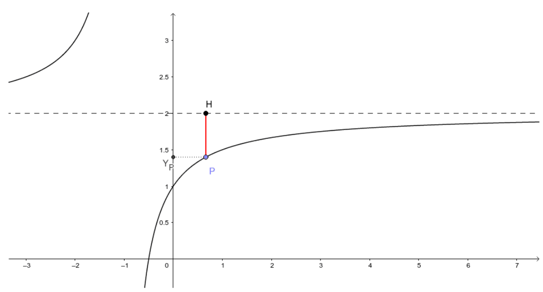


Figura 29: Asintoto orizzontale

9.2.3 Asintoto obliquo

Definition 9.4 (Asintoto obliquo)**.** *Considero una generica retta* $y = mx + q \quad , \quad m \neq 0$ *, viene definito asintoto obliquo se e solo se per* x *che tende a più o meno infinito* ($x \to \pm\infty$) *succede che* $\quad f(x) - (mx + q) \to 0$ *.*

Geometricamnete corrisponde alla distanza tra punto appartenente al grafico e il punto sulla retta $\frac{1}{\infty}$

Condizione necessaria affinchè esista l'asintoto obliquo (devono essere vere entrambe):

- La funzione e la sua proiezione sull'asse x deve essere dello stesso grado per x che tende a infinito:

$$\frac{f(x)}{x} \to m \in \mathbf{R} \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{103}$$

- Se la prima condizione è verificata, allora devo controllare anche che:

$$f(x) - mx \to q \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{104}$$

Definizione formali dell'asintoto:

- Dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ non è superiormente limitato, x_0 tende verso (+) infinito e la funzione tende verso (+) infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \tag{105}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\ \exists\, N(M) \in \mathbf{R} \mid \begin{cases} x \in D \\ x > N(M) \end{cases} \implies |f(x)| > M \tag{106}$$

- Dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ non è inferiormente limitato, x_0 tende verso (+) infinito e la funzione tende verso (-) infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \tag{107}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\ \exists\, N(M) \in \mathbf{R} \mid \begin{cases} x \in D \\ x < -N(M) \end{cases} \implies |f(x)| > M \tag{108}$$

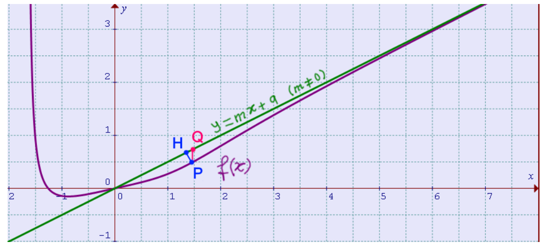


Figura 30: Asintoto obliquo

9.3 Esercizi

9.3.1 Continuità

Verificare la continuità delle seguenti funzioni:

1. Es1 (funzione costante):
   Considero $c \in \mathbf{R}, sf : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad , \quad f(c) = c0$, sia $x_0 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} \varepsilon > |f(x) - fg(x_0)| = |c - c| = 0 \\ \forall\, \delta > o, x \in (x : 0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases} \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \implies \lim_{x \to x_0} c = c \tag{109}$$

   Si procede a ritroso: sappoendo che sia continua la funzione, allora la funzione è intrappolata in un intervallo (modulo della distanza$< \varepsilon$).

2. Es2 (funzione identità):
   Considero una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad , \quad f(x) = x$, sia $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon > |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \implies \textit{scelgo}\, \delta(\varepsilon) := \varepsilon \quad \textit{cosi} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \tag{110}$$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon \tag{111}$$

3. Es3 (funzione quadrato):
   Considero una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad , \quad f(x) := x^2 \quad , \quad x_0 = 2:$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = f(2) = 2^2 = 4 \tag{112}$$

   Considero un $\varepsilon > 0:$

$$\varepsilon > |f(x) - f(2)| = x^2 - 2^2 = |x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = \underbrace{|x - 2|}_{\to 0} \cdot \underbrace{|x + 2|}_{\to 4} \tag{113}$$

   Possiamo limitare l'intervallo $x \in (1, 3)$ che sono gli interi che racchiudono il punto x_0 al verso quale tende la x, se:

$$\varepsilon > |x - 2| \cdot |3^2 - 2^2| \quad \textit{cioe} \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \tag{114}$$

   Si ha che:

$$\varepsilon > 5|x - 2| > |x - 2| \cdot |x + 2| = |x^2 - 4| = |f(x) - f(2)| \tag{115}$$

   Quindi scelgo come soglia $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5}$

9.3.2 Limiti con definizione

1. Es1 (asintoto verticale):
   Considero il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \tag{116}$$

   Procedendo a ritroso posso supperre che eesista un M tale che:

$$M < f(x) = \frac{1}{|x|} \implies |x| < \frac{1}{M} \implies |x - 0| < \frac{1}{M} \tag{117}$$

Scelgo $\delta(M) = \frac{1}{M}$, quindi :

$$|x - 0| < \delta(M) \implies M = \frac{1}{|x|} = f(x) \tag{118}$$

2. Es2 (asintoto orizzontale):
   Considero il seguente limite ($l = 0$):

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{119}$$

   Quindi posso dire che esiste un:

   $$\varepsilon > |f(x) - l| = |\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{x} \iff |x| < \frac{1}{\varepsilon} \implies |x - 0| < \frac{1}{\varepsilon} \tag{120}$$

   Scelgo un $\delta(\varepsilon)$:

   $$\delta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \quad \implies \quad |x - 0| < \delta(\varepsilon) \implies |x| < \frac{1}{\varepsilon} \implies \varepsilon < \frac{1}{|x|} \tag{121}$$

   È evidente quanto sia complicato, di conseguenze è utile introdurre le proprietà dei limiti.

9.4 Teoremi delle funzioni

9.4.1 Proprietà dei limiti

Le dimostrazioni sono simili a quelle scritte nelle successioni: link alle dimostrazini (6.3).

1. Unicità limite:

   $$se \quad \exists \lim_{x \to x_0} f(c) = l \quad allora \quad unico \tag{122}$$

   Dimostrazione. $0 \leq |l_1 - l_2| = |\big(l_1 - f(x)\big) - \big(l_2 - f(x)\big)| = |l_1 - f(x) + f(c) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2|$ □

2. Intorno:

   $$se \quad \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbf{R} \implies x \in \Big(\big(x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)\big) \cap D \backslash \{x_0\}\Big) \tag{123}$$

   Allora f è localmente limitato vicino (nell'intrno) di x_0 (punto escluso).

3. Somma:

   $$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) + g(x)\Big) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{124}$$

   Limite della somma è pari alla somma dei limiti.

4. Prodotto:

   $$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{125}$$

   Limite del prodotto è pari al prodotto dei limiti.

5. Quoziente:

   $$\lim_{x \to x_0} \Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \tag{126}$$

   Limite del quoziente è pari al quoziente dei limiti.

6. Permanenza del segno:

(a) Versione 1:

$$\begin{cases} 0 \leq f(x) \, \forall \, x \in D \\ l := \lim_{x \to x_0} f(x) \end{cases} \implies l \geq 0 \tag{127}$$

Se una funzione è positiva in tutto il suo dominio, allora il limite della funzione in qualsisi punto (anche all'infinito) sarà positiva (e viceversa con negativo).

(b) Versione 2:

$$Se \lim_{x \to x_0} =: l > 0 \quad , \quad x \in \big((x_0 + \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)\big) \quad \implies \quad f(x) \in \big(l - \varepsilon, l + \varepsilon\big) \tag{128}$$

Se il limite della funzione in x_0 è di valore l strettamente positivo, allora il valore di $f(x)$ è intrappolato in un intervallo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

7. Monotonia:

(a) Versione 1:

$$Se \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad , \quad x \in \big((x_0 + \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)\big) \tag{129}$$

$$Allora \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x) \leq \lim_{x \to x_0} h(x) \tag{130}$$

Se una funzione ha volore maggio re di un'altra nell'intorno di x_0, allora il limite della funzione resterà maggiore di quell'altra con $x \to x_0$.

(b) Versione 2 (Teorema dei carabinieri/ del confronto):
Sapendo che vale la proprietà del quoziente:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \implies f(x) - l \leq g(x) - l \leq h(x) - l \tag{131}$$

Data una funzione g(x), posso trovare due funzioni che fungono da barriere che stringono i valori della mia funzione fino a collasseare su un punto, in modo da trovare il valore di un particolare limite confrontando il limiti delle due funzioni che la racchiudono.

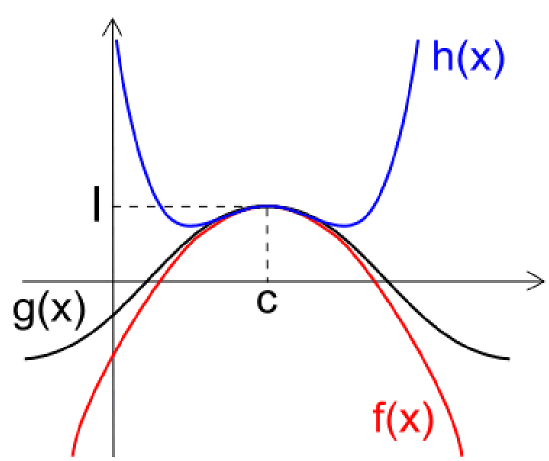


Figura 31: Teorema del confronto / dei carabinieri

9.4.2 Limiti di funzione composta

Considero $D(f) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, $D(g) \xrightarrow{g} \mathbf{R}$, $Sia \quad Im(f) \subseteq D(G) \implies$ allora ha senso:

$$g \circ f: \quad D(f) \xrightarrow{g\circ f} \mathbf{R} \quad , \quad \big(g\circ f\big) := g\big(f(x)\big) \tag{132}$$

Supponiamo che $x_0 \in D(f)'$ sia punto di accumulazione, allora:

$$\exists\, y_0 := f(x) \quad , \quad \exists\, l := \begin{cases} \lim f(x) \\ y = y_0 \end{cases} \implies \exists \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = l \tag{133}$$

Dimostrazione. Considero $|g(f(x)) - l| \implies \lim_{x\to x_0} f(y) = l$:

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta(\varepsilon)>0\,|\,(y-y_0)<\delta(\varepsilon) \implies \varepsilon > |\underbrace{g(y)}_{\lim f(x)} - l\,| \tag{134}$$

Scelgo $\varepsilon' := \delta(\varepsilon)\,\exists\,\delta'(\varepsilon') > 0 \,\big|\, |x - x_0| < \delta'(\varepsilon)$

Di conseguenza si ha che $|f(x) - y_0| > \varepsilon' := \delta(\varepsilon)$

Quindi se $|f(x) - x_0| < \varepsilon' \implies \varepsilon > |g\big(f(x)\big)|$ □

9.4.3 Continuità della funzione inversa

Considero una funzione $f(a,b) \to \mathbf{R}$ che è iniettiva e continua in $x_0 \subset (a,b)$:
Possiamo considerare la funzione inversa $f^{-1}: Im(f)$:

$$\begin{cases} f^{-1}(\big(f(x)\big)= x \\ f\big(f^{-1}(y)\big)= y \end{cases} \implies f^{-}1 \ continua\ in\ y_0 := f(x_0 \tag{135}$$

Siccome è continua, la funzione non è composta da tratti (funzione connessa), si può tracciare il grafico senza alzare la mano dal foglio. In caso di funzioni a tratti con punti di discontinuità, si possono chiamare funzione disconnesse.

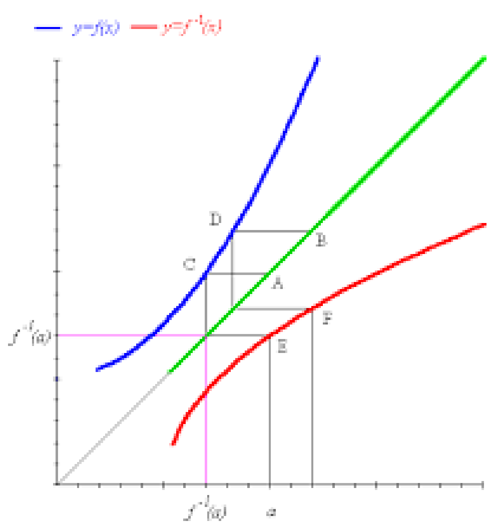


Figura 32: Grafico di una funzione inversa continua

Theorem 9.1. *Considerata una funzione continua $f(x)$, se esiste la funzione suia funzione inversa $f^{-}1(x)$, allora anch'essa è una funzione continua.*

La dimostrazione è data dal fatto che la funzione inversa è data dalla funzione identità, che di fatto è la simmetria rispetto alla retta $y = x$.

9.4.4 Proprietà della funzione continua

Considero una funzione $f:\ D \to C \quad , \quad d \subseteq \mathbf{R} \quad , \quad C := \{\text{insieme delle funzioni continue } \ \forall\, x \in D\}$

1. Somma:

$$f, g \in C(D) \implies (f+g) \in C(D) \tag{136}$$

2. Prodotto:

$$f, g \in C(D) \implies (f \cdot g) \in C(D) \tag{137}$$

3. Quoziente:

$$f, g \in C(D) \implies \left(\frac{f}{g}\right) \in C(D) \quad , \quad g \neq 0 \tag{138}$$

4. Inversa:

$$f:\ (a,b) \to (c,d) \quad , \quad f \in C(D) \implies f^{-1} \in C(D) \quad , \quad g \neq 0 \implies \mathit{allora}\ f^{-1} \in C\big(c,d)\big) \tag{139}$$

5. Composta:

$$f \in C\big(D(f)\big) \quad , \quad g \in C\big(D(g)\big) \quad , \quad Im(f) \subseteq D(g) \implies \mathit{allora}\ (f \circ g) \in C\big(D(f)\big) \tag{140}$$

6. Potenza ennesima:

$$f:\ D \to C \quad , \quad f_n(x) = x^n \in C(\mathbf{R}) \quad \forall\, x \in D,\ n \geq 0 \tag{141}$$

Dimostrazione per induzione della continuità della potenza ennesima. :

Calcolo $P(n_0)$ della funzione $f_n(x) = x^n$ nel caso di $x_0 = 0, 1, 2, 3$:

Costante: $f_0(x) = c \quad \implies f_0 \in C(\mathbf{R})\, \forall\, x \in \mathbf{R}$

Identità: $f_1(x) = x \quad \implies f_1 \in C(\mathbf{R})\, \forall\, x \in \mathbf{R}$

Quadrato: $f_2(x) = x^2 = x \cdot x \quad \implies f_2 \in C(\mathbf{R})\, \forall\, x \in \mathbf{R}$ in quato prodotto di due funzioni continue come verificato nel punto precedente (x proprietà)

Possiamo supporre come vera $P(n)$, allora cerchiamo di dimostrare $P(n+1)$:

$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = \underbrace{x^n}_{\in\, c} \cdot \underbrace{x^1}_{\in\, c}$ in quanto $f_n(x)$ è continua x ipotesi (supposizione) e $f_1(x)$ è continua come verificato precedentemente.

Di conseguenza è verificata $F_{n+1} \in \mathbf{R}$ (continua) $\implies f_n(x) \in c(\mathbf{R})\, \forall\, n \geq 0$ per il principio di induzione.

□

7. Continuità dei polinomi:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} \Big(c_n\, x^n = \underbrace{c_0}_{\text{const}} + \underbrace{c_1\, x^1}_{f_1\, \in\, C} + \underbrace{c_2\, x^2}_{f_2\, \in\, C} + .. + \underbrace{c_n\, x^n}_{f_n\, \in\, C} \Big) \tag{142}$$

Siccome è una sommatoria fra funzioni continue come abbiamo dimostrato precedentemente con il metodo di induzione, allora il polinomio $P(x)$ è anch'esso continuo $\implies P(x) \in C8\mathbf{R})$

8. Continuità di funzioni razionali:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad d(R) := \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\} \tag{143}$$

$$Con\; q, p\; polinomo \quad , \quad P, Q \in C(\mathbf{R}) \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{p}{q} \tag{144}$$

Ciò è valido grazie alla proprietà che afferma che la funzione quiziente di due funzioni continue è anch'essa continua.

9. Continuità della funzione seno:
Non spiegato.

9.4.5 Limiti notevoli

.

Limiti Notevoli: Tabella

funzioni goniometriche	
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsen\ x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctg\ x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ mx}{sen\ nx} = \frac{m}{n}$	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{(arc\,cos\,x)^2}{1-x} = 2$
funzioni esponenziali e logaritmiche	
$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{log_a(1+x)}{x} = log_a e$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln\, a$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{1+a^x} = \begin{cases} 1 & se\ a < 1 \\ \frac{1}{2} & se\ a = 1 \\ 0 & se\ a > 1 \end{cases}$

v.2 www.matematika.it

Figura 33: Limiti notevoli

9.5 Asintotici

9.5.1 Definizione e proprietà

Definition 9.5 (Asintotici)**.** *Siano f, g due funzioni definite e non nulle in un intorno $I(x_0)\backslash\{x_0\}$ con $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora si diche che f è asintotica a g se e solo se:*

$$f(x) \sim g(x) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad (x \to x_0) \tag{145}$$

Se due funzioni sono asintotiche, allorqa godono di certe proprietà:

1. $\sim$ è una relazione di equivalenza
2. $f(x) \sim g(x) \implies \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ oppure non esistono entrambi i limiti (es: seno e coseno).
3. Ci sono funzioni con lo stesso limite ma non asintotiche.
4. Se $f(x) \sim f_1(x)$ e $g(x) \sim g_1(x)$, allora anche il loro prodotto, quoziente ed elevamento ad un finito sono asintotici. NON valgono prorpietà come la somma, elevamento a funzione o prorità distibutiva a meno di ipotesi più stringenti

9.5.2 Asintotici notevoli

.

Tabella degli infinitesimi equivalenti

$$\sin(\alpha x) \sim \alpha x \quad \text{per } x \to 0$$

$$\tan(\alpha x) \sim \alpha x \quad \text{per } x \to 0$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\ln(1 + x) \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

$$\arcsin(x) \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

$$\arctan(x) \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

Figura 34: Asintotici notevoli

9.5.3 o piccolo e gerarchia degli infiniti

Definition 9.6 (o-piccolo)**.** *Data $f, g : 8a, b) \to \mathbf{R}$, si dice che f è $o -$ piccolo di g per $x \to x_0$ se:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \implies \quad f(x) = o\big(g(x)\big) \tag{146}$$

Definition 9.7 (Gerarchia degli infiniti)**.** *da cui derivano*

1. *Con $x \to x_0$, se $f(x), g(x) \to 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, si dice che g è infinitesimo di ordine superiore rispetto a f.*

2. Con $x \to x_0$, se $|f(x)|, |g(x)| \to +\infty$, $\frac{g(x)}{f(x)} \to 0 \iff \frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$, si dice che f è infinito di ordine superiore rispetto a f.

:

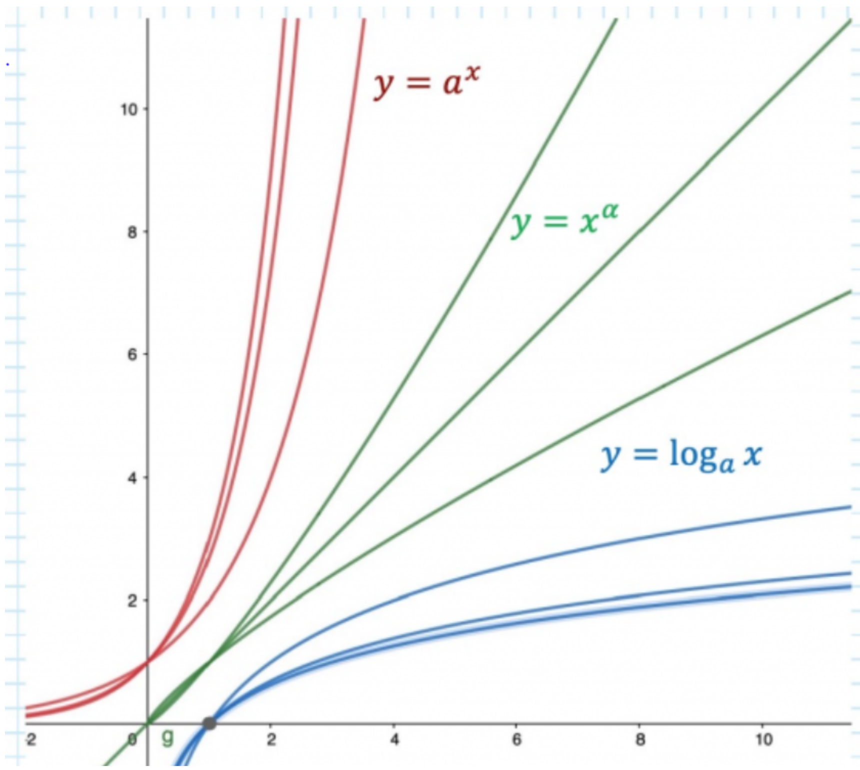


Figura 35: Gerarchia degli infiniti

9.6 Teoremi delle funzioni continue

9.6.1 Teorema di Weistrass

9.6.2 Teorema degli Zeri

9.6.3 Corollario dei valori intermedi

PROPRIETA' DELLE FUNZIONI CONTINUE.

FABIO CIPRIANI

1. Proprieta' fondamentali delle funzioni continue

Dimostriamo qui di seguito tre proprieta' fondamentali delle funzioni continue.

Theorem 1.1. *(Weierstrass: esistenza di estremi globali)*
Sia $f \in C([a, b])$ una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Esistono allora il massimo e minimo globali di f su $[a, b]$. Piu' precisamente:

$$\exists\, x_m, x_M \in [a, b] \qquad \text{tale che} \qquad x \in [a, b] \qquad \Rightarrow \qquad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)\,.$$

In altre parole, $M := f(x_M)$ e' il valore massimo e $m := f(x_m)$ il valore minimo di f su $[a, b]$.

Proof. Ci limiteremo a provare l'esistenza del massimo. Sia $M := \sup \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ l'estremo superiore dell'immagine della funzione. Per le proprieta' dell'estremo superiore, esiste una successione $\{y_n\} \subset \mathrm{Im}(f)$ tale che $\lim_n y_n = M$. Sia quindi $\{x_n\} \subset [a, b]$ una successione tale che $f(x_n) = y_n$ per la quale, evidentemente, si ha

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n y_n = M\,.$$

Se per un certo n si ha $y_n = M$ allora $M \in \mathrm{Im}(f)$ e' un valore massimo per la funzione (e $x_n \in [a, b]$ e' il punto di massimo). Se invece $y_n \neq M$ per ogni n, allora la successione $\{x_n\}$ e' un insieme limitato e infinito e, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, ammette almeno un punto di accumulazione che denotiamo con $x_M \in [a, b]$. Esistera' quindi almeno una sotto-successione $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ convergente a x_M: $\lim_k x_{n_k} = x_M$. Poiche' f e' continua

$$M = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_M) \in \mathbb{R}.$$

Questo dimostra che $M := \sup \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{R}$ e' finito e che appartiene a all'imagine $\mathrm{Im}(f)$: M e' quindi un valore massimo di $\mathrm{Im}(f)$ (cioe' di f), assunto da f nel punto $x_M \in [a, b]$ (punto di massimo). $\square$

Theorem 1.2. *(Proprieta' degli zeri di funzioni continue)*
Sia data una funzione continua $f \in C([a,b])$ sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Se

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

(cioe' f assume valori di segno opposto agli estremi $[a,b]$) allora

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \qquad \text{tale che} \qquad f(x_0) = 0\,.$$

Proof. Per comodita' di notazione poniamo $a_0 := a$ e $b_0 := b$. Sia $c := \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio di $[a_0, b_0]$. Se $f(c) = 0$ abbiamo trovato il punto $x_0 := c$ dove f si annulla. Altrimenti, tra $[a_0, c]$ e $[c, b_0]$, denotiamo con $[a_1, b_1]$ quello ai cui estremi f assume segno opposto. Iterando questo procedimento (dicotomia) otteniamo una successione decrescente di intervalli

$$\dots \subset [a_{n+1}\,, b_{n+1}] \subset [a_n\,, b_n] \dots \subset [a_1\,, b_1] \subset [a_0\,, b_0]$$

tali che per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0\,. \tag{1.1}$$

Poiche', per costruzione, la successione $\{a_n\}$ e' crescente e superiormente limitata da b_0

$$\dots a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_0\,,$$

la successione $\{b_n\}$ e', per costruzione, decrescente e inferiormente limitata da a_0

$$a_0 \leq \dots\dots b_{n+1} \leq b_n \leq \dots$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0\,,$$

per il Teorema del Limite delle Successioni Monotone Limitate

$$\exists\, x_0 = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n \in \mathbb{R}\,.$$

Passando al limite nella (1.1), per il Teorema della permanenza del segno e poiche' f e' continua in x_0 si ha

$$f(x_0)^2 = f(x_0) \cdot f(x_0) = \Big(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\Big) \cdot \Big(\lim_{n\to\infty} f(b_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$$

e quindi che $f(x_0) = 0$. $\square$

Theorem 1.3. *(Proprieta' dei valori intermedi e immagine di una funzione continua)*
Sia data una funzione continua $f \in C([a,b])$ sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e siano

$$M := \max_{[a,b]} f\,, \qquad\qquad m := \min_{[a,b]} f$$

i suoi valori massimo e minimo su $[a,b]$. Allora per ogni $\lambda \in (m, M)$

$$\exists\, x_\lambda \in [a,b] \qquad \text{tale che} \qquad f(x_\lambda) = \lambda\,.$$

In particolare l'immagine di una funzione continua f su di un intervallo chiuso $[a,b]$ e' l'intervallo chiuso $[m, M]$ compreso tra il valore minimo e massimo assoluti:

$$\mathrm{Im}\,(f) := f([a,b]) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a,b]\} = [m, M]\,.$$

Proof. Siano x_m un punto di minimo e x_M un punto di massimo di f su $[a,b]$. Possiamo limitarci al caso $x_m < x_M$. La conclusione del teorema discende allora applicando il Teorema degli Zeri alla funzione continua $g \in C([x_m, x_M])$ definita da $g(x) := f(x) - \lambda$ sull'intervallo chiuso $[x_m, x_M]$. $\square$

Example 1.4. Mostrare che l'equazione $e^x = 1 + 2x$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $(1,3)$.
Svolgimento. Consideriamo la funzione $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x := e^x - 1 - 2x)$. La funzione e' continua in quanto composta di funzioni continue (esponenziale, polinomi): $f \in C([1,3])$. Poiche' $f(1) = e - 3 < 0$ e $f(3) = e^3 - 7 > 2^3 - 7 = 1 > 0$, il Teorema degli zeri implica che esiste $x_0 \in (1,3)$ tale che $f(x_0) = 0$ e quindi che $e^{x_0} = 1 + 2x_0$.

Example 1.5. Mostrare che l'equazione $x^3 + 12 = 3x^2 + 4x$ ha ha esattamente tre soluzioni in $\mathbb{R}$.
Svolgimento. Poiche' le soluzioni coincidono con gli zeri del polinomio di terzo grado $f(x) := x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, il loro numero non puo' superare tre. Notiamo che f, in quanto polinomio, e' una funzione continua su $\mathbb{R}$. Poiche'

$$f(-3) = -30 < 0 \ , \qquad f(0) = +12 > 0 \ , \qquad f(+\frac{5}{2}) = -\frac{9}{8} < 0 \ , \qquad f(+5) = +42 > 0 \, ,$$

applicando ripetutamente il Teorema degli zeri alla funzione f sugli intervalli $[-3, 0]$, $[0, +\frac{5}{2}]$, $[+\frac{5}{2}, +5]$ otteniamo l'esistenza di tre zeri $x_1 \in [-3, 0]$, $x_2 \in [0, +\frac{5}{2}]$, $x_3 \in [+\frac{5}{2}, 5]$.