10 Teoria per l'esame

1. **Se A è invertibile allora $det(A) \neq 0$ e $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.**

   Controllo invertibilità:
   come conseguenza della formula di Formula di Bindet, se A è invertibile allora il determinante:

   $$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

   Condizione matrice inversa. :
   $A \cdot A^{-1} = I \quad \Longrightarrow \quad det(A \cdot A^{-1}) = det(I) = 1$

   $det(A \cdot A^{-1}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad det(A) \neq 0$

   $\Longrightarrow \quad det(A) \neq 0$ è condizione necessaria e sufficente per stabilire se una matrice è invertibile:

   $$A \, \text{invertibile} \iff det(A) \neq 0 \tag{151}$$

   □

2. $Sol(A, b) = X_p + Sol(A, 0)$ **è una soluzione particolare del sistema $AX = b$.**
   Sistemi non omogenei:
   Per indicare una soluzione si utilizza la notazione $sol(A, b)$, dato un sistema $A \cdot X = b$
   Supponiamo $A \cdot X = b$ abbia soluzioni e fissiamo la soluzione particolare x_{part}. allora tutte le soluzioni del sistema sono date da $x_{part} + y$ al variare di y in $sol(A, \vec{0})$; in simboli $sol(A, b) = x_{part} + \underbrace{sol(A, \vec{0})}_{\text{sist. omogeneo associato}}$.

   Dimostrazione. :
   Se y è in $sol(A, b)$ allora:

   $$A \cdot (x_{part} + y) = A \cdot x_{part} + A \cdot y = b + \vec{0} = b$$

   Se x' è in $sol(A, b)$ allora sia

   $$y = x' - x_{part} \quad cosicchd' \quad x' = x_{part} + y$$

   Di conseguenza si ha che

   $$A \cdot y = A \cdot (x' - x_{part} = Ax' - Ax_{part} = b - b = \vec{o}$$
   $$\Longrightarrow \quad x' = x_{part} + y$$

   Con:

   $$y \in sol(A, \vec{0})$$

   □

3. **Se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sono n-vettori allora $L(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ è sosttospazio di R^n.**

   Per convenzione le combinazioni lineari dell'insieme vuoto è il vettore nullo: $L(\varnothing) = \{\vec{0}\}$. Lo spazio generato da $v_1, v_2, .., v_n$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^n$, infatti:

   - non è vuoto: $\vec{0} \in L(v_1, v_2, .., v_n) = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_n \cdot v_n$
   - è chiuso rispetto alla somma: se $v, W \in L(v_1, v_2, .., v_n) \implies$ allora anche $(v + w) \in L$ che corrisponde a $(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_n \cdot v_n) + (b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + .. + b_n \cdot v_n) = (a_1 + b_1) \cdot v_1 + (a_2 + b_2) \cdot v_2 + .. + (a_n + b_n) \cdot v_n$
   - è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare: se $v \in L(v_1, v_2, .., v_n) \implies$ allora anche $t \cdot v \in L$ che corrisponde
     $t \cdot (a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_n \cdot v_n) = (t \cdot a_1) \cdot v_1 + (t \cdot a_2) \cdot v_2 + .. + (t \cdot a_n) \cdot v_n$

4. **Se** $dimV = n$ **allora** n **vettori linearmente indipendenti formano una base.**

   Corollary 10.0.1 (Coneguenze del teorema della base V)**.** *:*
   Sia V uno spazio di dimensione finita, se $v_1, v_2, .., v_n$ *sono linearmente indipendenti e* $\dim(V) = n$ *allora* $\{v_1, v_2, .., v_k\}$ *è una base di* V*.*

   Dimostrazione. Siccome $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ è linearmente indipendente allora, per il teorema della base, è contenuto in una base B di V.
   Siccome B ha n elementi, ne segue che $B = v_1, v_2, .., v_n$.

   □

5. **Teorema del rango.**

   Theorem 10.1 (Teorema del rango)**.** *Il rango di una matrice A è uguale al rango della matrice trasposta, in simboli:*

$$rk(A) = rk(A^T) \tag{152}$$

   (Infatti il numero di colonne della matrice (A) è pari al numero di righe della matrice A trasposta (A^T).)

   Dimostrazione. :
   Supponiamo che A è $n \times m$ e sia $r = rk(A)$:
   - Possiamo estrarre dalle colonne di A una base per ottenere lo spazio colonna di A.
   - Sia B la matrice che ha per colonne gli elementi di questa base estratta.

   $\Longrightarrow$ allora abbiamo che ogni colonna di A è una combinazione lineare delle colonne di B
   - Ora consideriamo la matrice C tale che $A = B \cdot C$ quindi vale anche $A^T = C^T \cdot B^T$

   $\Longrightarrow$ Anche le colonne di A^T sono combinazioni lineari di C^T $\Longrightarrow$ lo spazio colonna di A^T è incluso nello spazio colonna di C^T, in simboli:

$$R(A^T) \subseteq R(C^T)$$

   $\Longrightarrow rk(A^T) \subseteq rk(C^T)$

   - C essendo di dimensioni $r \times m$ ha rango:

$$rk(C^T) \leq r \implies rk(A^T) \leq r = R(A)$$

   Abbiamo dimostrato che $rk(A^T) \leq rk(A)$.
   Ora consideriamo $A_0^T = (A^T)^T$ e $A_0 = A^T$, otteniamo che:

$$rk\big((A^T)^T\big) \leq rk(A^T)$$

   Mettiamo a sistema le due condizioni:

$$\begin{cases} rk(A^T) \leq rk(A) \\ rk\big((A^T)^T\big) \leq rk(A^T) \end{cases} \approx \begin{cases} rk(A^T) \leq rk(A) \\ rk(A) \leq rk(A^T) \end{cases} \implies rk(A) = rk(A^T)$$

   □

6. **Se $T : V \to W$ è lineare allora $T(\vec{0}) = \vec{0}$**

   Definition 10.1 (Trasformazione lineare). *Dati due spai vettoriali v e W, una trasformazione lineare da V in W è una funzione $f : A \to B$ tale che dati $v_1, v_2 \in V$ e $t \in \mathbf{R}$:*

   - $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
   - $f(t \cdot v_1) = t \cdot f(v_1)$

   Una trasformazione lineare $T : V \to W$ conserva il vettore nullo, ovvero:

   $$T(\vec{0}) = T(\vec{0} + \vec{0}) = T(\vec{0}) + T(\vec{0}) = \vec{0}$$

   Questo può essere usato per vedere se una trasformazione non è lineare, deriva dalla definizione di trasformazione lineare, perchè deve essere chiusa rispetto alla somma.

7. **Se $T : V \to W$ è lineare allora $Ker(T)$ è sottospazio di V.**

   Definition 10.2 (Nucleo). *In una trasformazione lineare i vettori del codominio sono i trasformati del dominio. Se $T : V \to W$ è una trasformazione lineare, allora è chiamato nucleo di T l'insieme:*

   $$Ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = \vec{0}\} \tag{153}$$

   Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $T : V \to W$ sono sottospazi vettoriali rispettivamente di V e di W.

   Dimostrazione sottospoazio (nucleo). Per verificare che $Ker(T)$ è sottospazio di V dobbiamo vedere che:

   \- È non vuoto (zero): $T(\vec{0}) = \vec{0}$ perchè ogni trasformazione lineare trasforma zero in zero, quindi $\vec{0} \in Ker(T)$

   \- Chiuso rispetto alla somma: se due vettori v e w stanno in $Ker(T)$, allora nel nucleo $T(v + w) = T(v) + T(w) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ perchè qualsiasi trasformata del nucleo resta zero.

   \- Chiuso rispetto al prodotto per scalare: se un vettori v sta in $Ker(T)$, allora nel nucleo $T(t \cdot w) = t \cdot T(w) = t \cdot \vec{0} = \vec{0}$ perchè qualsiasi trasformata del nucleo resta zero.

   □

8. **Se $T : V \to W$ è lineare allora T è iniettiva se e solo se $Ker(T) = \vec{0}$** T è iniettiva se e solo se il nucleo è nullo, quindi:

   $$iniettiva \iff Ker(T) = \{\vec{0}\}$$

   Dimostrazione ($\Longrightarrow$): iniettiva $\Longrightarrow$ $Ker(T) = \{\vec{0}\}$. :
   $T(v) = \vec{0} \quad , \quad T(\vec{0}) = \vec{0} \implies T(v) = T(\vec{0})$
   Siccome T è iniettiva: $\quad v = \vec{0} \implies Ker(T) = \{\vec{0}\}$ □

   Dimostrazione ($\Longleftarrow$): $Ker(T) = \{\vec{0}\} \implies$ iniettiva. :
   Assumendo che $Ker(T) = \{\vec{0}\} \implies T(v) = T(w) \quad ,$ se è iniettiva allora $v = w$
   Infatti $T(v) - T(w) = 0 \quad ,$ siccome T è lineare $\implies T(v) - T(w) = T(v - w) = \vec{0}$
   Quindi sappiamo che $\begin{cases} (v - w) \in Ker(T) \\ Ker(T) = \vec{0} \text{ per ipotesi} \end{cases} \implies v - w = \vec{0} \implies v = w \implies$ è iniettiva.

   □

9. **Teorema della dimensione.**

Theorem 10.2 (Teorema della dimesnione)**.** *:*
Se $T : V \to W$ è una trasformazione lineare tra due spazi vettoriali e V è di dimensione finita, allora:

- *$Im(T)$ è di dimensione finita*
- *$dimV = dimKerT + dimImT$*

Dimostrazione del teorema della Dimensione. :

Si sceglie una base $\{v_1, .., v_k\}$ di $Ker(T)$, si completa questa base ad una base di V.

Devo dimostrare che $\{T(v_{k+1}), .., T(v_n)\}$ è una base di $Im(T)$, quindi se lineamente indipendente.

Linearmente indipendente:

$$x_1T(v_{k+1}) + x_2T(v_{k+2}) + .. + x_{n-k}T(v_n) = \vec{0}$$

Allora siccome è una trasformazione lineare diventa:

$$T\Big(x_1\, v_{k+1} + x_2\, v_{k+2} + .. + x_{n-k}\, v_n\Big) = \vec{0}$$

Quindi siccome la trasformazione di zero è zero (deve stare in Ker(T)):

$$x_1\, v_{k+1} + x_2\, v_{k+2} + .. + x_{n-k}\, v_n = \vec{0} \implies \in Ker(T)$$

Di conseguenza:

$$x_1\, v_{k+1} + x_2\, v_{k+2} + .. + x_{n-k}\, v_n = y_1\, v_{k+1} + y_2\, y_{k+2} + .. + y_{n-k}\, v_n$$

Portando dall'altra parte:

$$x_1\, v_{k+1} + x_2\, v_{k+2} + .. + x_{n-k}\, v_n - y_1\, v_{k+1} - y_2\, y_{k+2} - .. - y_{n-k}\, v_n = \vec{0}$$

Siccome $\{v_1, v_2, .., v_k, v_{k+1}, .., v_n\}$ è base di V per ipotesi, allora sono vettori linearmente indipendenti che si annullano con:

$$x_1 = x_2 = .. = x_{n-k} = y_1 = y_2 = .. = y_{n-k} = 0$$

E posso scrivere vi come combinazione lineare dei vettori della base.

Se $T(v) \in Im(T)$ allora considero:

$v = x_1v_{k+1}+x_2v_{k+2}+..+x_{n-k}v_n+y_1v_{k+1}+y_2y_{k+2}+..+y_{n-k}v_n \implies$ trasf. lineare: $T(v) = x_1T(v_{k+1})+x_2T(v_{k+2})+..+x_{n-k}$

Siccome $T(v_1) = T(v_k) = \vec{0}$ tolgo i vettori dipendenti dalla y:

$$\implies T(v) = span\Big(T(v_k + 1), .., T(v_n)\Big)$$

Siccome il vettore è insieme generatore ed è linearmente indipendente è una base di $Im(T)$:

$$\{(T(v_k + 1), .., T(v_n)\}$$

Di conseguenza vale:

$$dim\big(Im(T)\big) = n - k = dim(V) - dim\big(Ker(T)\big)$$

Che corrisponde a:

$$dim(V) = dim\big(Ker(T)\big) + dim\big(Im(T)\big)$$

$\square$

10. **Teorema di Rouchè-Capelli.**

Theorem 10.3 (Teorema di Rouchè-Capelli)**.** *Sia A una matrice $n \times m$ e si consideri il sistema lineare di n equazioni e m incognite $AX = b$. Il sistema ha soluzione se e solo se*

$$rk(A) = rk(A, b)$$

(quindi se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa).

In tal caso il sistema ha ∞^{m-r} soluzioni, dove $r = rk(A) = rk(A, b)$ e m è il numero di incognite (numero colonne della matrice omogenea $n \times m$).

Dimostrazione del teorema di Rouchè-Capelli. :
- Parte 1:
Il sistema ha soluzione se e solo se:

$$\iff \exists\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \textit{tale che} \quad AX = b \implies x_1A^1 + .. + x_mA^m = b$$

Che corrisponde a dire che hanno lo stesso spazio colonna:

$$L(A^1, .., A^m, b) = L(A^1, .., A^m \iff R(A) = R(A, b)$$

$R(A) = R(A, b) \iff rk(A) = rk(A, b)$ infatti:
. + ($\implies$) Se due matrici hanno lo stesso spazio colonna, allora hanno lo stesso rango in quanto il rango è la dimensione dello pazio colonna.
. + ($\impliedby$) Per il teorema della base se due matrici hanno:

$$\begin{cases} dim(R(A)) = dim(R(A, b)) \\ R(A) \subseteq R(A, b) \end{cases} \implies r(A) = R(A, b)$$

- Parte 2:
Resta solo da dimostrare che se $r = rk(A) = rk(A, b)$ allora il sistema ha ∞^{m-r} soluzioni, ma questo segue dal Teorema nullità più rango (Teorema 6.3):

$$dim(Sol(A, 0) = null(A) = m - rk(A) = m - r$$

$\square$

11. **Teorema e formula di Cramer.**

Definition 10.3 (Sistema crameriano)**.** *Un sistema di n equazioni e n incognite è detto crameriano. Se un sistema crameriano $AX = b$ è tale che $det(A) \neq 0$, allora ha un'unica soluzione.*

Theorem 10.4 (Teorema di Cramer)**.** *Sia A una matrice quadrata di ordine n, allora il sistema crameriano $AX = b$ ha un'unica soluzione se e solo se $det(A) \neq 0$.*

Dimostrazione del Teorema di Cramer. :
È presente una sola soluzione del sistema se e solo se:

$$\iff \infty^0 \, soluzioni \quad \implies n_A - rk(A) = 0 \implies r = n \implies det(A) \neq 0$$

□

È importante sottolineare che ll Teorema di Cramer non dice che se $det(A) = 0$ allora il sistema non ha soluzione, dice solo che se $det(A) = 0$ e il sistema ha soluzione allora la soluzione non è unica.
Quindi se $det(A) = 0$, allora il sistema non ha soluzioni o ne ha più di una.

Procedimento del metodo di Cramer:

(a) Consideriamo il sistema crameriano $AX = b$ tale che $det(A) \neq 0$

(b) Considero il vettore-colonna (che corrisponde a X vettore delle variabili) $S \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$

(c) Allora l'unica soluzione si calcola con:
$$s_i = \frac{det\big(A(i, b)\big)}{det(A)}$$
Dove $A(i, b)$ è la matrice che si ottiene sosttuendo alla i-esima colonna di A il vettore b.

(d) Quindi nel caso di s_1 di una matrice 3×3 la formula sarà: $s_1 = \frac{det\big(A(b,A^2,A^3)\big)}{det\big(A\big)}$

Dimostrazione del Metodo di Cramer. :

Considero S il vettore colonna dell'unica soluzione di un sistema lineare $AX = b$: $\quad S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$

Posso dire che
$$AS = b \implies s_1A^1 + s_1A^1 + .. + s_nA^n = b$$
Siccome:
$$A = (A^1, A^2, .., A^n) \implies A(i, b) = (A^1, A^2, .., b^i, .., A^n) = (A^1, .., s_1A^1 + s_2A^2, .., s_nA^n, .., A^n)$$
$$det\big(A(i, b)\big) = det(A^1, A^2, .., b^i, .., A^n) = (A^1, .., s_1A^1 + s_2A^2, .., s_nA^n, .., A^n) = prop.\ multilinearita\ determ. =$$
$$= s_1 \cdot det(A^1, .., A^i, .., A^n) + s_2 \cdot det(A^1, .., A^i, .., A^n) + .. + s_n \cdot (A^1, .., A^i, .., A^n) = ***$$
L'unico elemento che non si annulla è l'i-esimo elemento:
$$*** = 0 + 0 + s_i \cdot det(A) + 0 + 0 = s_i \cdot det(A) \qquad \implies \qquad s_i = \frac{det\big(A(i, b)\big)}{det\big(A\big)}$$

□

12. **Se A è un matrice quadrata di ordine n allora A è invertibile se e solo se $rk(A) = n$**

Theorem 10.5. *Sia A una matrice quadrata di ordine n, allora il rango di A è uguale alla dimensione della matrice se e solo se il determinante è diverso da zero:*

$$rk(A)_n = n \iff det(A) \neq 0 \tag{154}$$

In particolare $v_1, v_2, .., v_n$ in $\mathbf{R}^n$ formano una base di $\mathbf{R}^n$ se e solo se il determinante della matrice che ha per righe (o per colonne) i vettori dati è diverso da zero.

Dimostrazione ($\Longrightarrow$): $T_A n$ suriettiva $\Longrightarrow$ $rk(A) = n$. :
Essendo T_A suriettiva:

$$\Longrightarrow Im(T_A) = \mathbf{R}^n \Longrightarrow R(A) = \mathbf{R}^n \Longrightarrow dim(R(A) = n \Longrightarrow rk(A) = n$$

□

Dimostrazione ($\Longleftarrow$): $rk(A) = n \Longrightarrow T_A n$ suriettiva. :

$$dim(Im(T_A)) = dim(\mathbf{R}^n) \Longrightarrow Im(T_A) \subseteq R^n$$

Per un corollario del teorema della base (sia V uno spazio di dimensione finita, se $v_1, v_2, .., v_k$ sono linearmente indipendenti in V, allora $k \leq dim(V)$):

$$\Longrightarrow Im(T_A) = \mathbf{R}^n \Longrightarrow T_A \quad suriettiva$$

□

13. **λ è autovalore di A se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico.**

Theorem 10.6 (Determinante, polinomio caratteristico e autovalori)**.** *:*
Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A, cioè è autovalore di A se e solo se:

$$p_a(\lambda) = 0$$

Dimostrazione del teorema. :
Considerato un autovalore λ, allora $\iff$:
- esiste v non nullo tale che $\quad Av = \lambda v$
- esiste v non nullo tale che:

$$Av - \lambda v = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad Av - \lambda Iv = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad (AI\lambda)v = \vec{0}$$

- esiste v non nullo tale che $\quad (A - I\lambda)v = \vec{0}$
- il sistema $(A - \lambda I)X = \vec{0}$ ha una soluzione non nulla se e solo se:

$$\iff det(A - \lambda I) = p_a(\lambda) = 0$$

□

14. **Se λ_1, λ_2 sono autovalori distinti di una matrice A allora i relativi autovettori sono linearmente indipendenti**

Lemma 10.7 (Lemma dell'indipendenza lineare degli autovettori)**.** *:*
Sia A una matrice quadrata. Siano $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ autovalori distinti di A. Se v_i è autovettore relativo a λ_i , allora i vettori $v_1, .., v_r$ sono linearmente indipendenti. (Che corrisponde ad affermare che autovettori relativi a autovalori distinti sono linearmente indipendenti).

Dimostrazione del lemma in un caso particolare. :
- Dimostriamo il lemma solo nel caso $r = 2$.
- Siano v_1 e v_2 autovettori relativi agli autovalori λ_1, λ_2.
Stiamo assumendo che $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Supponiamo che:

$$x\, v_1 + y\, v_2 = \vec{0}$$

E verifichiamo che $x = y = 0$
- Da $xv_1 + yv_2 = \vec{0}$ otteniamo che:

$$\lambda_1 x v_1 + \lambda_1 y v_2 = \vec{0}, Axv_1 + Ayv_2 = \vec{0} \Leftrightarrow x\lambda_1 v_1 + y\lambda_2 v_2 = \vec{0}$$

Sottraendo le due equazioni si trova

$$y\,(\lambda_2 - \lambda_1)\, v_2 = \vec{0}$$

- Siccome $\lambda_1 \neq \lambda_2$, abbiamo che $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Siccome v_2 è un autovettore, abbiamo che $v_2 \neq \vec{0}$ Dall'equazione:

$$y\,(\lambda_2 - \lambda_1)\, v_2 = \vec{0}$$

concludiamo che y = 0.
Dall'equazione $xv_1 + yv_2 = \vec{0}$ otteniamo $xv_1 = \vec{0}$.
Siccome v_1 è un autovettore, abbiamo che $v_1 \neq \vec{0}$, quindi x = 0.
Quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

□

15. **Un autovalore semplice è regolare.**

Definition 10.4 (Autovalore semplice)**.** *Un autovalore si dice semplice se $M_a(\lambda) = 1$*

Definition 10.5 (Autovalore regolare)**.** *Un autovalore si dice regolare se $M_g(\lambda) = m_a(\lambda)$*

Un autovalore semplice è anche regolare.

Dimostrazione. :
Se λ è autovalore semplice, allora:

$$m_a(\lambda) = 1$$

Quindi

$$m_g(\lambda) \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad m_g(\lambda) = dim(\mathbf{R}^n) \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad m_g(\lambda) = 1 = m_a(\lambda)$$

□

16. **Il 1° criterio di diagonalizzabilità.**

Lemma 10.8 (Lemma dell'indipendenza lineare degli autovettori)**.** *:*
Sia A una matrice quadrata. Siano $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ autovalori distinti di A. Se v_i è autovettore relativo a λ_i , allora i vettori $v_1, .., v_r$ sono linearmente indipendenti. (Che corrisponde ad affermare che autovettori relativi a autovalori distinti sono linearmente indipendenti).

Come conseguenza diretta del lemma precedente, si ottiene il corollario "Primo criterio di diagonalizzabilità":

Corollary 10.8.1 (Primo criterio di diagonalizzabilità). *:*
Se una matrice A quadrata di ordine n ha n autovalori distinti allora la matrice è diagonalizzabile.

Dimostrazione del primo criterio di digonazzibalità. :
gli n autovettori $v_1, .., v_n$ relativi agli n autovalori distinti sono indipendenti in $\mathbf{R}^n$ e quindi sono una base.

□

17. **Enunciato del II criterio di diagonalizzabilità e calcolo di una base formata da autovettori.**

Theorem 10.9 (Secondo criterio di diagonalizzazione). *:*
Una matrice quadrata A di ordine n è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche è n e ogni autovalore è regolare.

Quindi significa che per ogni autovalore ci sono abbstanza autovettori. Il polinomio caratteristico si fattorizza solo in fattori lineari ($q(t)$ è costante), quindi polinimio ha n radici contando le molteplicità.

Il secondo criterio di diagonalizzazione è necessario e sufficente.
La dimostrazione del secondo criterio descrive anche un modo per calcolare una base di autovettori una volta verificato che A è diagonalizzabile.

Dimostrazione del secondo criterio di diagonalizzazione. :
Dimostriamo solo che se vale il secondo criterio allora A è diagonalizzabile.
Siano $\lambda_1, .., \lambda_r$ gli autovalori distinti di A. Sia B_i una base dell'autospazio relativo a λ_1. Sia B l'unione delle basi B_i, ricordiamo che:

$$\#B_i = dim(\mathbf{R}^n_{\lambda i} = m_g(\lambda_i)$$

Chiaramente B ha:

$$m_g(\lambda_1) + .. + m_g(\lambda_r) = m_a(\lambda_1) + .. + m_a(\lambda_r) = n \; elementi$$

Sappiamo per ipotesi che:

$$m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) \quad \forall \; \lambda_i$$

Basta verificare che B è indipendente, in quanto formata da autovettori $\implies$ B è base.

Gli elementi che stanno in B_i distinte sono indipendenti (per Lemma dell'indipendenza lineare degli autovettori). Elementi che stanno nella stessa B_i sono indipendenti, quindi gli elementi di B sono indipendenti. Siccome B ha n elementi indipendenti è una base di formata da autovettori di A. In simboli:

$$m_i = m_g(\lambda_i) \qquad \text{Base di } \mathbf{R}^n_{\lambda i} \quad B = \{v_{i1}, .., v_{imi}\}$$

$$B = \{v_{11}, .., v_{1m1}, v21, ..v_{2m2}, ..., v_{ri}, .., v_{rmr}\}$$

La combinazione lineare deve avere come unica soluzione il vettore $\vec{0}$ per essere linearmente indipendente:

$$\underbrace{x_1 v_{11}, .., x_1 v_{1m1}}_{w_1} + \underbrace{..........}_{w_2} + \underbrace{x_{r1} v_{ri}, .., x_{r1} v_{rmr}}_{w_r} = \vec{0} \quad \implies \quad w_1 + w_2 + ... + w_r = \vec{0}$$

Sappiamo che $w_i \in \mathbf{R}^n_{\lambda_i}$ quindi stanno negli autospazi, quindi o sono zero o sono autovettori. Ma non possono essere autovettori perchè sarebbe una combinazione lineare di autovettori relativi ad autovalori distinti che è ha i coefficienti diversi da zero (sono tutti 1 i coefficienti). Questo è assurdo perchè sono indiependenti.
Se w_i sono autovettori $\quad w_1 + w_2 + ... + w_r = \vec{0}$ è combinazione lineare di autovettori indipendenti con coefficienti non nulli (applicazione del Lemma).

Questo implica che $w_i = 0$ per ogni i di conseguenza:$w_i = \vec{0} = x_{i1} v_{i1} + ... + x_{imi} \cdot v_{imi}$
Quindi $\{v_{i1}, ..., v_{imi}\}$ è indipendente $\implies$ $x_{ij} = 0$ $\implies$ B è indipendente.

□

18. **Se $\{v1, \ldots, vk\}$ è un insieme ortogonale allora è linearmente indipendente.**

    Definition 10.6 (Insieme di vettori ortogonali)**.** *un insieme $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ in uno spazio euclideo V si dice ortogonale se $v_i \neq \vec{0}$ per ogni i e $v_i \cdot v_j = 0$ con $i \neq j$. In simboli:*

    $$\begin{cases} v_i \neq \vec{0} & \forall\, i \\ v_i \cdot v_j = 0 \quad (v_1 \perp v_2) & \forall\, i \neq j \end{cases} \implies \textit{ortogonali}$$

    Dato un insieme ortogonale $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ si può costruire un insieme ortonormale $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$ ponendo:

    $$w_i = \frac{v_i}{||v_i||}$$

    Dimostrazione: insiemi ortogonali sono sempre linearmente indipendenti. :
    Se $\quad x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_rv_r \quad$ allora $\quad (x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_rv_r) = 0 \cdot v_i = 0$

    Quindi $\quad x_1(v_1 \cdot v_i) + x_2(v_2 \cdot v_i) + x_i(v_i \cdot v_i) + \cdots + x_r(v_r \cdot v_i) = 0$

    Siccome il prodotto di vettori ortogonali, per definizione, è nullo ogni termine $\quad v_i \cdot v_j = 0$.
    L'unico termine che sopravvive è $\quad v_i \cdot v_i \neq 0 \,\forall\, v_i$ in quanto per la proprietà definitoria di prodotto scalare, un prodotto fra un vettore e se stesso è nullo se e solo se il vettore è nulla, ma per ipotesi esso non è nullo.

    □

19. **Se A è una matrice simmetrica, λ_1, λ_2 sono autovalori distinti di A e v_1, v_2 sono i relativi autovettori allora v_1, v_2 sono ortogonali.**

    Theorem 10.10. *:*
    Se A è una matrice quadrata di ordine n simmetrica reale e v, w sono due autovettori di A relativi ad autovalori distinti, allora v e w sono ortogonali.

    Dimostrazione. :
    Consideriamo λ, μ gli autovalori relativi a v e w tali che $\quad Av = \lambda v$ e $\quad Aw = \mu w$
    Quindi abbiamo che:

    $$\lambda\, v \cdot w = \mu\, v \cdot w \quad \implies \quad (\lambda - \mu)\, v \cdot w = 0$$

    Siccome gli autovalori sono distiti $\quad \lambda \neq \mu$, di conseguenza il prodotto scalare $\quad v \cdot w = 0$, che si ottiene solo se i vettori o sono perpendicolari o uno dei due è nullo. Siccome non possono essere nulli, $\implies \quad v \perp w$ ortogonali

    □

20. **Enunciato del teorema spettrale e calcolo di una matrice modale ortogonale.**

    Theorem 10.11 (Teorema spettrale, enunciato 1)**.** *:*
    una matrice A reale quadrata di ordine n è simmetrica se e solo se esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di A. In particolare ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

    Theorem 10.12 (Teorema spettrale, enunciato 2)**.** *:*
    Sia A una matrice quadrata, allora esiste una matrice ortogonale M tale che:

    $$M^{-1} A\, M = M^T A\, M$$

    è diagonale se e solo se A è simmetrica

    Metodo per calcolare una base di autovettori ortonormale:

    (a) Sia A una matrice simmetrica e siano $\lambda_, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori distinti di A.
    (b) Per ogni autovalore si calcola una base dell'autospazio e la si ortonormalizza mediante Gram-Schmidt, quindi si trova una base ortonormale B_i dell'autospazio relativo a λ_1.

(c) Sia $\quad B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$. Se v è in B_i e w è in B_j con $i \neq j$, allora $v \cdot w = 0$.
(d) Se v e w stanno tutti e due in B_i , allora $v \cdot w = 0$ perché B_i è ortogonale.
(e) Quindi B è un insieme ortogonale.
(f) Siccome A è diagonalizzabile B ha n elementi e quindi è una base ortonormale.
(g) la matrice modale è la matrice che ha per colonne gli elementi di una base di autovettori.

21. **La formula dell'equazione cartesiana del piano passante per tre punti non allineati.** Dati tre punti non allineati (vettori associati ai punti sono linearmente indipendenti o si considera e vettori che congiungono i punti e si vedono se sono allineati):

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad P_1(x_1, y_1, z_1) \quad , \quad P_2(x_2, y_2, z_2)$$

Cerchiamoo di determinare l'equzione parametrica del piano passante per questi tre punti:

- Tramite equazione parametrica:
  (a) Poniamo il passaggio per il punto $\quad P_0(x_0, y_0, z_0)$
  (b) Come direzione del piano consideriamo $\quad \vec{P_0P_1} \quad , \quad \vec{P_0P_2}$
  (c) L'equazione parametrica del piano è:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t_1(y_1 - y_0) + t_2(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + t_2(z_1 - z_0) \end{cases}$$

- Tramite equazione cartesiana:
  (a) Il punto $\quad P = (x, y, z) \in \alpha \quad$ se e solo se il vettore $\vec{P_0P}$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{P_0P}$ e $\vec{P_0P_2}$
  (b) Quindi significa trovare per quali valori:

$$det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix}$$

  (c) Questa è l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti dati. In altro modo (che alla fine è lo stesso) si può risolvere il sistema crameriano dove si impone il passaggio per i tre punti e si trovano i parametri dell'equazione cartesiana generica del piano.
  (d) In teoria avremmo dovuto verificare prima del calcolo dell'equazione che i tre punti non sono allineati, ma questo passaggio non serve perchè è già implicito nel calcolo dell'equazione. Questo porterebbe a un determinate che è nullo.

22. **Discussione della posizione reciproca di una retta ed un piano nello spazio.** Sia il piano α e la retta r di equazione:

$$\alpha: \; ax + by + cz = d \qquad , \qquad r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

Volgiamo verificare se piano e retta sono incidenti o paralleli. Per fare questo studiamo l'intersezione del piano con la retta, chiaramente sfrutteremo il Teorema di Rouche Capelli.
L'intersezione del piano con la retta è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

Sia A la matrice dei coefficienti e $\vec{b}$ il vettore dei termini noti del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \qquad tc \quad rk(A) = \geq 2$$

Allora la posizione reciproca del piano e della retta sarà:

rkA	$rk(A, \vec{b})$	Soluzioni	
2	2	∞^1	la retta sta sul piano
2	3	nessuna	piano e retta paralleli e distinti
3	3	1	piano e retta incidenti

Figura 19: Posizione reciproca fra piano e retta

23. **Discussione della posizione reciproca di due rette nello spazio.** Date le rette r, s di equazione cartesiana:

$$r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases} \qquad , \qquad s: \begin{cases} a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z = d'_1 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z = d'_2 \end{cases}$$

Vogliamo verificare la loro posizione reciproca. Per fare questo studiamo la loro intersezione che è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z = d'_1 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z = d'_2 \end{cases}$$

Siano A la matrice dei coefficienti e $\vec{b}$ il vettore dei termini noti del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d'_1 \\ d'_2 \end{pmatrix}$$

Allora la posizione reciproca delle rette sarà:

rkA	$rk(A, \vec{b})$	Soluzioni	
2	2	∞^1	rette coincidenti
2	3	nessuna	rette parallele e distinte
3	3	1	rette incidenti
3	4	nessuna	rette sghembe

Figura 20: Posizione reciproca fra due rette

24. **Il principio di ortogonalità.** Sia V uno spazio vettoriale e sia $(v \cdot w)$ un prodotto scalare su V.
Sia U un sottospazio di V.
Allora, dato $v \in V$, il vettore di U che minimizza la distanza da v è la proiezione ortogonale di v su U:

$$min_{u \in U} ||v - u|| = ||v - p_U(v)|| = ||p_{U^\perp}(v)|| \tag{155}$$

Questo vettore è anche unico.

Dimostrazione. :
Sia u_v la priezione ortogonale di v su U. Quindi $w_v = v - u_v$ è ortogonale a U
Se $u \in U$ allora:

$$||v-u||^2 = ||v-u+u_v-u_v||^2 = \big(v-u_v-(u-u_v)\big)\cdot\big(v-u_v-(u-u_v)\big)=$$
$$= (v-u_v)\cdot(v-u_v) - 2(v-u_v)\cdot(u-u_v) + (u-u_v) + (u-u_v)\cdot(u-u_v) =$$
$$= (v-u_v)\cdot(v-u_v) - \underbrace{2w_v}_{\in w^\perp}\cdot\underbrace{(u-u_v)}_{\in W} + (u-u_v)\cdot(u-u_v) =$$
$$= ||v-u_v||^2 + ||u-u_v||^2 \geq ||v-u_v||^2$$

□

25. **La formula per la distanza tra due spazi affini.**

Definition 10.7 (Distanza fra spazi affini)**.** *:*
Indichiamo con $d(P,Q)$ *la distanza tra due punti, quindi:*

$$d(P,Q) = \big|\big|\vec{PQ}\big|\big|$$

Dati due spazi affini A, B nel piano o nello spazio si definisce la distanza $d(A,B)$ tra A e B come la minima distanza tra i punti di A e quelli di B.
In simbli:

$$d(A,B) = min_{p \in A, Q \in B} d(P,Q) \tag{156}$$

Se $A = P + U$ e $B = Q + W$ sono spazi affini con giaciture U, W rispettivamente allora:

$$d(A,B) = \big|\big|p_{(U+W)^\perp}(\vec{PQ})\big|\big| \tag{157}$$

Dimostrazione. :
Siano $A = P + U$ e $B = Q + W$ spazi affini.
Siccome $p_{(U+W)}(\vec{PQ} \in (U+W)$ abbiamo che:

$$p_{(U+W)}(\vec{PQ} = u_0 + w_0 \qquad con \quad u_0 \in U \quad , \quad w_0 \in W$$

Quindi $P_0 = P + u_0$, $Q_0 = Q - w_0$ sono punti di a e B rispettivamente.
Se P' e Q' sono punti qualsiasi di A e B allora $P' = P + u'$ e $Q' = Q + w'$, quindi:

$$d(P', Q') = ||\vec{P'Q'}|| = ||\vec{PQ} - (u' - w')|| \underbrace{\geq}_{***} ||p_{(U+W)^{\perp}}(\vec{PQ})|| =$$

***: sfrunttando il principio di ortogonalità.

$$||\vec{PQ} - p_{(U+W)}(\vec{PQ})|| = ||\vec{PQ} - u_0 - w_0|| = ||\vec{P_0Q_0}|| = d(P_0, Q_0)$$

Di conseguenza:

$$d(P', Q') \geq d(P_0, Q_0) \qquad \Longrightarrow \qquad d(A, B) = d(P_0, Q_0) = \big| \big| p_{(U+W)^{\perp}}(\vec{PQ}) \big| \big|$$

$\square$

26. **La formula per la distanza di un punto da una retta nel piano.** Sia r la retta di equazione $ax + by + c = 0$.
Siccome $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ è un vettore normale alla retta allora la distanza di P_0 da r è:

$$d(P_0, r) = \big| \big| p_{\vec{n}}(\vec{PP_0}) \big| \big| = \Bigg| \Bigg| \left(\frac{\vec{PP_0} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||^2} \right) \vec{n} \Bigg| \Bigg| = \frac{\big| \vec{PP_0} \cdot \vec{n} \big|}{||\vec{n}||}$$

Esplicitando $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e usando il fatto che $ax + by = -c$.
Troviamo che la formula della distanza in $\mathbf{R}^2$ è:

$$d(P_0, r) = \frac{\big| a\, x_0 + b\, y_0 + c \big|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{158}$$

Dimostrazione. :
Considero il punto A generico e il punto B appartenente alla retta r:

$$A = P_0 + \{\vec{0}\} \qquad , \qquad B = r = P_0 + L\big((v)\big)$$

La distanza tra i punti A e B sarà:

$$d(A, B) = \Big| \Big| P_{\big(\{\vec{0} + \{L(v)\}\big)^{\perp}}(\vec{P_0P}) \Big| \Big| = \Big| \Big| P_{\underbrace{L(v)^{\perp}}_{\vec{n}\ di\ r}}(\vec{P_0P}) \Big| \Big| = \Big| \Big| P_{\vec{n}}(\vec{P_0P}) \Big| \Big|$$

Esplicitiamo $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Quindi la formula ricavata diventa:

$$d(P_0, r) = \Bigg| \Bigg| \frac{(\vec{P_0P} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||^2} \vec{n} = \frac{\big| (\vec{P_0P} \cdot \vec{n} \big|}{||\vec{n}||} = \frac{\big| (x - x_0)\, a + (y - y_0)\, b \big|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\big| ax + by - x_0a - y_0b \big|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = ***$$

Siccome $ax + by = -c$, allora sostituendo otteniamo (poi si cambia segno tanto siamo dentro al valore assoluto:

$$*** = \frac{\big| -c - x_0a - y_0b \big|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad d(P_0, r) = \frac{\big| ax_0 + by_0 + c \big|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Analogamente si dimostra in $\mathbf{R}^3$ e si generalizza in $\mathbf{R}^n$.

$\square$

27. **La formula per la distanza tra due rette sghembe.** Date due rette sghembe in forma vettoriale:

$$r : P = P0 + tv \qquad , \qquad s : P = Q0 + tw$$

Si ha che la minima distanza tra le due rette è la lunghezza della proiezione $\vec{P_0Q_0}$ di lungo un vettore ortogonale sia a v che a w.
Da questa osservazione si ricava la formula generale:

$$d(r,s) = \frac{\left|\vec{P_0Q_0} \cdot (v \wedge w)\right|}{||v \wedge w||} \tag{159}$$

Se consideriamo le rette in equazione parametrica:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \qquad , \qquad s : \begin{cases} x = x'_0 + tl' \\ y = y'_0 + tm' \\ z = z'_0 + tn' \end{cases}$$

Allora la formula diventa:

$$d(r,s) = \frac{\left| det \begin{pmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(mn' - m'n)^2 + (ln' - l'n)^2 + (lm' - l'm)^2}} \tag{160}$$

Dimostrazione. :
In $*A*$ sfruttiamo il fatto che le rette sghembe siamo linearmente indipendenti, quindi:

$$rk\Big(L(v) + L(w)\Big) = 2 \quad \Longrightarrow \quad rk\Big(L(v) + L(w)\Big)^{\perp} = dim(\mathbf{R}^3) - rk\Big(L(v) + L(w)\Big) = 3 - 2 = 1$$

Quindi possiamo trovare:

$$d(r,s) = \left|\left|P_{\big(L(v)+L(w)\big)^{\perp}}\big(\vec{P_0P_0}\big)\right|\right| = *A* = \left|\left|P_{(v\wedge w)}\big(\vec{P_0Q_0}\big)\right|\right| = \frac{\left|\vec{P_0Q_0} \cdot (v \wedge w)\right|}{||v \wedge w||^2}(v \wedge w) = \frac{\left|\vec{P_0Q_0} \cdot (v \wedge w)\right|}{||v \wedge w||}$$

□

28. **La relazione tra la matrice di una quadrica e la matrice della quadrica rototraslata.**
Equazione della rototraslazione di una quadrica:
Se Q è una quadrica di equazione $p(X) = 0$ e R è una rototraslazione, allora la quadrica $R(Q)$ ha equazione:

$$p\big(R^{-1}(X)\big) = 0 \tag{161}$$

Dimostrazione. :
Il punto X sta su $R(Q)$ se e solo se $\quad X = R(X') \quad$ con X' su Q.
Segue che $\quad X = R^{-1}(X) \quad$ e, siccome X' sta su Q, allora $\quad p(X') = 0$.
Quindi X sta su $R(Q)$ se e solo se:

$$0 = p(X') = p\big(R^{-1}(X)\big)$$

□

Equazione della rototraslazione di una quadrica:
Sia Q una quadrica.
Sia R una rototraslazione.
Sia A la matrice di Q.

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix} \qquad , \qquad M = \begin{pmatrix} M_0 & v \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione di Q è $p(X) = 0$ con:

$$p(X) = (X^T \;\; 1)\, A \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \tag{162}$$

Inoltre, sia M la matrice di R , quindi:

$$\begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia Q la vecchia qudrica prima della tototraslazione, e $R(Q)$ l'equazione della trasformata:

$$0 = P(X) \qquad , \qquad P\big(R^{-1}(X)\big) = 0$$

Allora abbiamo:

$$0 = P\big(R^{-1}(X)\big) = \begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \left(M^{-1} \begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix}\right)^T A\, M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = ***$$

Sfruttando le proprietà della trasposta:

$$*** = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}^T (M^{-1})^T A\, M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad (X^T \;\; 1)(M^{-1})^T A\, M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza la matrice di $R(Q)$ è:

$$\big(M^{-1}\big)^T A\, M^{-1} \tag{163}$$

dove M è la matrice di R.

29. **La matrice di Gram di una forma quadratica è unica.**

Theorem 10.13 (Teorema della matrice di Gram)**.** *:*
Una forma quadratica $q(X)$ si può quindi scrivere in modo compatto come:

$$q(X) = X^T\, S\, X$$

Dove S è una matrice simmetrica.
La matrice S è unica ed è detta matrice di Gram di una forma quadratica.

Dimostrazione. :
Supponiamo per assurdo che esistano due matrici simmetriche:
\- Sulla diagonale:
Si considerano le singole colonne moltiplicando per la base canonica:

$$q(e_i) = e_i^T\, S\, e_i = e_i^T\, S^i = s_{ii} \qquad e \qquad q(e_i) = e_i^T\, S'\, e_i = e_i^T\, S^i{\prime} = s'_{ii}$$

Quindi abbiamo visto che sulla diagonale gli sono uguali le matrici S e S': $\quad s_{ii} = s'_{ii}$

\- Fuori dalla diagonale:
Relativo a S:

$$q(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T S(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T (S^i + S^j) = s_{ii} + s_{ji} + s_{ij} + s_{jj}$$

Relativo a S':

$$q(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T S'(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T (S^i{\prime} + S^j{\prime}) = s'_{ii} + s'_{ji} + s'_{ij} + s'_{jj}$$

Di conseguenza, sfruttando il fatto che sulla diagonale le matrici sono uguali ($\quad s_{ii} = s'_{ii} \quad$):

$$s_{ii} + s_{ji} + s_{ij} + s_{jj} = s'_{ii} + s'_{ji} + s'_{ij} + s'_{jj} = s_{ii} + s'_{ji} + s'_{ij} + s_{jj}$$

Ora sfruttiamo l'ipotesi della simmetria, ovvero che $S = S^T$:

$$\underbrace{S_{ij} + S_{ji}}_{=\ x\ simm.} = \underbrace{S'_{ij} + S'_{ji}}_{=\ x\ simm.}$$

Allora:

$$\Longrightarrow \qquad 2\, S_{ij} = 2\, S'_{ij} \qquad \Longrightarrow \qquad S = S'$$

□

30. **Una forma quadratica q su $\mathbf{R}^n$ è semidefinita positiva se e solo se ha segnatura $(r, 0)$ ed è definita positiva se e solo se ha segnatura $(n, 0)$.**

Theorem 10.14 (Segnatura con forma semidefinita e definita positiva)**.** *:*

(a) La forma q su $\mathbf{R}^n$ è semidefinita positiva se e solo se ha segnatura $(r, 0)$
(b) La forma q su $\mathbf{R}^n$ è definita positiva se e solo se ha segnatura $(n, 0)$

Dimostrazione ($\Longleftarrow$). :
Sia S la matrice di Gram di $q(X)$, assumiamo che abbia segnatura $(r, 0)$ e dimostriamo che $r(x) \geq 0$ ovvero che gli autovalori di S sono tutti positivi.

Per il teorema spettrale esiste una matrice ortogonale M tale che:

$$M^T SM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad , \quad con \quad \lambda_i > 0$$

Sia $\quad X' = M^T X \quad \Longrightarrow \quad MX' = MM^T X = X \quad$ cosicchè $\quad X = MX'$

Calcoliamo $q(X)$:

$$q(X) = X^T SX = (MX')^T SMX' = prop.trasposta = X'M^T SMX' = (X')^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} X'$$

Esplicitiamo X' , scrivendolo come: $\quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

Quindi sostiuiamo e si ottiene:

$$q(X) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \cdots + \lambda_r(x'_r)^2 \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q(x) \geq 0$$

Quindi $q(X)$ è semidefinita positiva.

- Se $r < n$ allora è chiaro che possiamo avere $q(X) = 0 \quad con \quad X \neq \vec{0}$
Ad esempio se scelgo $\quad X = Me_{r+1} \quad$ allora $\quad X' = e_{r+1} \quad$ quindi:

$$q(X) = \lambda_1(x'_1)^2 + \cdots + \lambda_r(x'_r)^2 = 0$$

- Se invece $r = n$ e $q(X) = 0$ allora:

$$q(X) = \lambda_1(x'_1)^2 + \cdots + \lambda_n(x'_n)^2 = 0$$

da cui si ottiene: $\quad x'_1 = x'_2 = \cdots = x'_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad X' = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad X = MX' = \vec{0}$
Quindi se la segnatura è (n,0) la forma è definita positiva. $\square$

Dimostrazione ($\Longrightarrow$). :
Rimane solo da vedere l'impliczione diretta, ovvero che se $q(X$ è semidefinita positiva allora la segnatura di $q(X)$ è $(r, 0)$, cioè tutti gli autovalori della matrice di Gram sono maggiori o uguali a zero.

Se λ è un autovalore della matice di Gram S di $q(X)$ e v è un vettore relativo all'autovalore λ, allora:

$$0 \leq q(v) = v^T Sv = v^T \lambda v = \lambda ||v||^2$$

Siccome $||v|| > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda \geq 0$

$\square$

31. **Calcolo della segnatura di una forma quadratica su $\mathbf{R}^n$.**

Definition 10.8 (Numero di variazioni)**.** *:*
Dato il polinomio:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{r} a_j\, t_j^i \qquad , \quad a_j \neq 0 \quad , \quad 0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_r$$

Il numero di variazioni di segno è il numero di j tali che:

$$sgn(a_j) \neq sgn(a_{j-1})$$

Esempio per chiaririre, nel polinomio $p(t)$ il numero di variazioni è 2, infatti (non si contano i termini co coefficiente nullo):

$$p(t) = -2t^7 + 3t^4 - t^2 - 1 \qquad // \qquad -1 \to -1 \to +3 \to -1 \qquad // \quad 2\, variazioni$$

Theorem 10.15 (Teorema del criterio di Cartesio)**.** *:*
Il numero di variazioni di un polinomio è il massimo numero di radici positive del polinomio.
Se il polinomio ha solo radici reali allora il numero di variazioni è il numero di radici positive contato con la loro molteplicità.

Applicazione del criterio di Cartesio al calcolo della segnatura di una matrice simmetrica:

- Se A è simmetrica allora il polinomio caratteristico ha solo radici reali, quindi il numero di autovalori positivi è uguale al numero di variazioni del polinomio caratteristico:

$$\#\, autovalori\, positivi \ = \#\, n.\, variazioni$$

- Il numero di autovalori nulli è uguale alla nullità di A:

$$\#\, autovalori\, nulli \ = dim\big(N(A)\big) = null(A)$$

- Il numero di autovalori negativi è uguale a:

$$\#\, autovalori\, negativi \ = n - null(A) - \#\, autovalori\, positivi \ = rk(A) - \#\, n.\, variazioni$$

Sapendo queste relazioni, possiamo riscivere la segnatura (r, s) di una forma quadratica $q(X)$ con:

- r : numero di variazioni del polinomio caratteristico dell amtrice di Gram S di $q(X)$
- $s = rk(S) - r$

32. **Gli invarianti affini e la classificazione affine di una conica.**
Data l'equazione di una conica sia A la sua matrice:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix} \qquad , \quad A_0 = A_0^T \in \mathbf{R}^{2\times 2}$$

Gli invarianti metrici della conica sono

- Invariante cubico: $I_3 = det(A)$
- Invariante quadratico: $I_2 = det(A_0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$
- Invariante lineare: $I_1 = tr(A_0) = \lambda_1 + \lambda_2$

Gli invarianti metrici rimangono invariati se si applica una rototraslazione alla conica.
Dal segno degli invarianti metrici è possibile (tranne in un caso) classificare affinemente la conica.

Elenco delle coniche:

- Coniche non degeneri ($I_3 \neq 0$):
  - Ellisse immaginaria: $I_2 > 0 \quad , \quad I_1 I_3 > 0$
  - Ellisse: $I_2 > 0 \quad , \quad I_1 I_3 < 0$
  - Iperbole: $I_2 < 0$
  - Parabola: $I_2 = 0$

- Coniche degeneri ($I_3 = 0$):
  - Ellisse degenere (punto): $I_2 > 0$
  - Iperbole degenere (due rette incidenti): $I_2 < 0$

$$rk(A_0) = 2 \qquad rk(A) = 2 \qquad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$$

  - Retta doppia: $I_2 = 0 \quad , \quad rk(A) = 1$

$$rk(A_0) = 1 \qquad x^2 = 0$$

  - Rette parallele: $I_2 = 0 \quad , \quad I_1 f' < 0$
  - Rette immaginarie: $I_2 = 0 \quad , \quad I_1 f' > 0$

Nei casi degeneri con $I_2 = 0$, gli invarianti metrici non bastano: bisogna calcolare f' :

$$non\ ha\ senso: \quad f' = \frac{det(A)}{det(A_0)} \qquad \Longrightarrow \qquad f' = P(c_0) \quad , \quad c_0 = \ centro$$