Analisi Matematica 1

Banfi Tommaso Felice

September 2022 - January 2023

Indice

1 Introduzione al Corso Analisi 1 **5**
1.1 Obiettivi dell'insegnamento . . . 5
1.2 Risultati di apprendimento attesi . . . 5
1.3 Argomenti trattati . . . 5
1.4 Prerequisiti . . . 6
1.5 Modalità di valutazione . . . 6

2 Insiemi **7**
2.1 Simboli utilizzati . . . 7
2.2 Operazioni tra insiemi . . . 7
2.3 Insiemi numerici . . . 7
2.4 Cardinalità di un insieme . . . 8
2.5 Intervallo di insieme in Q . . . 8
2.6 Insieme limitato in Q . . . 9

3 Strumenti matematici utili **9**
3.1 Notazioni e scritture . . . 9
3.1.1 Sommatoria . . . 9
3.1.2 Produttoria . . . 10
3.1.3 Fattoriale . . . 10
3.2 Metodi risolutivi importanti . . . 10
3.2.1 Regola di Ruffini . . . 10
3.2.2 Divisione fra polinomi . . . 10

4 Grafici **11**
4.1 Definizione di grafico . . . 11
4.2 Dominio . . . 11
4.3 Immagine . . . 11
4.4 Funzioni associate al grafico . . . 11
4.5 Grafico associato alla funzione . . . 12
4.6 Tipologie di funzioni . . . 12
4.6.1 Funzione suriettiva . . . 12
4.6.2 Funzione iniettiva . . . 12
4.6.3 Funzione biunivoca . . . 13
4.7 Funzione modulo . . . 13
4.7.1 Definizione modulo . . . 13
4.7.2 Distanza euclidea . . . 14
4.7.3 Proprietà modulo . . . 14

5 Dimostrazioni **16**
5.1 Principio di Induzione . . . 16
5.2 Dimostrazioni per Induzione . . . 16
5.2.1 Somma di Gauss . . . 16
5.2.2 Somme geometriche . . . 16
5.2.3 Dimostrazione della Disugualianza di Bernulli . . . 17
5.2.4 Dimostrazione del Binomio di Newton . . . 17

5.2.5 Dimostrazione per le somme 3k+1 . . . 19
5.2.6 Dimostrazione necessità di numeri reali . . . 19

6 Succesioni **20**
6.1 Limite della successione . . . 20
6.2 Convergenza della successione . . . 22
6.3 Proprietà del limite . . . 22
6.4 Teroemi delle successioni . . . 23
6.5 Insieme quoziente . . . 25

7 Numeri Reali **26**
7.1 Costruzione dell'insieme dei numeri Reali . . . 26
7.1.1 Definizione . . . 26
7.1.2 Operazioni algeriche in R . . . 26
7.2 Immersione di Q in R . . . 26
7.3 Completezza dei numeri Reali . . . 27
7.3.1 Convergenza di successioni monotone e limitate . . . 27
7.3.2 Esistenza del Sup() per insiemi superiormente limitati . . . 27
7.3.3 Teorema di Bolzano-Weistrass . . . 27

8 Numeri Complessi **33**
8.1 Definizione e costeuzione del campo complesso . . . 33
8.2 Operazioni e proprietà in C . . . 34
8.3 Immersione di R in C . . . 34
8.4 Forma algebrica . . . 35
8.4.1 Operazioni in forma algebrica . . . 35
8.4.2 Opposto, Inverso e Coniugato . . . 36
8.4.3 Modulo . . . 36
8.5 Forma trigonometrica . . . 37
8.5.1 Formule di De Moivre (I e II) . . . 38
8.6 Teorema fondamentale dell'algebra . . . 40
8.7 Trasformazioni geometriche nel piano di Gauss . . . 40
8.8 Soluzioni delle equazioni di secondo grado in C . . . 42
8.9 Forma esponenziale . . . 42

9 Funzioni di variabili Reali **43**
9.1 Definizioni limite e continuità . . . 43
9.2 Asintoto . . . 44
9.2.1 Asintoto verticale . . . 44
9.2.2 Asintoto orizzontale . . . 45
9.2.3 Asintoto obliquo . . . 45
9.3 Esercizi . . . 46
9.3.1 Continuità . . . 46
9.3.2 Limiti con definizione . . . 46
9.4 Teoremi delle funzioni . . . 47
9.4.1 Proprietà dei limiti . . . 47
9.4.2 Limiti di funzione composta . . . 49
9.4.3 Continuità della funzione inversa . . . 49
9.4.4 Proprietà della funzione continua . . . 50
9.4.5 Limiti notevoli . . . 51
9.5 Asintotici . . . 52
9.5.1 Definizione e proprietà . . . 52
9.5.2 Asintotici notevoli . . . 52
9.5.3 o piccolo e gerarchia degli infiniti . . . 52
9.6 Teoremi delle funzioni continue . . . 53
9.6.1 Teorema di Weistrass . . . 53
9.6.2 Teorema degli Zeri . . . 53
9.6.3 Corollario dei valori intermedi . . . 53

10 Calcolo differenziale **57**
10.1 definizione e teoremi . . . 57
10.1.1 Definizione di derivata . . . 57
10.1.2 Continuità delle funzioni derivabili . . . 58
10.1.3 Calcolo derivate con proprietà . . . 58
10.1.4 Derivate fondamentali . . . 61
10.2 Teoremi per lo studio di funzioni . . . 61
10.2.1 Lemma di Fermat . . . 61
10.2.2 Punti di non derivabilità . . . 65
10.2.3 Concavità e convessità . . . 66
10.2.4 Funzione esponenziale . . . 67
10.2.5 Teorema di De L'Hopital . . . 72
10.2.6 Derivate di ordine n . . . 72
10.2.7 Seno e coseno iperbolico . . . 72
10.3 Teorema di Taylor . . . 73
10.3.1 Teorema di Taylor con resto di Peano . . . 73
10.3.2 Teorema di Taylor con resto di Lagrange . . . 74
10.3.3 Formula di Stirling . . . 74
10.3.4 Sviluppi di Mclaurin . . . 74
10.3.5 Applicazioni di taylor . . . 74

11 Calcolo integrale **76**
11.1 Definizioni di integrale . . . 76
11.1.1 Significato geometrico . . . 76
11.1.2 Esempio con parabola . . . 76
11.1.3 Partizione di intervalli . . . 77
11.1.4 Integrale inferiore e superiore . . . 77
11.1.5 Integrale di Reimann . . . 78
11.2 Teoremi relativi agli integrali . . . 78
11.2.1 1° teorema fondamentale del calcolo integrale . . . 78
11.2.2 Proprietà e interpretazione dell'integrale . . . 79
11.2.3 Integrazione per parti . . . 80
11.2.4 Integrazione per sostituzione . . . 80
11.2.5 Integrali di funzioni razionali fratte . . . 82
11.2.6 Teorema della Media . . . 83
11.2.7 2° teorema del calcolo integrale . . . 83
11.3 Integrali su intervalli particolari . . . 84
11.3.1 Integrabilità di funzioni con salti . . . 84
11.3.2 Integrale di funzioni su insiemi non limitati . . . 85
11.3.3 Integrali di funzioni non limitate . . . 85
11.3.4 Area delimitata da funzioni . . . 86
11.4 Funzione integrale . . . 87
11.4.1 Definizione della funzione integrale . . . 87
11.4.2 Dominio della funzione integrale (esercizi) . . . 87
11.4.3 Derivata di integrale composto . . . 88
11.4.4 Itegrali notevoli fondamentali . . . 88

12 Serie numeriche **89**
12.1 Definizioni e proprietà . . . 89
12.1.1 Definizione di serie numerica . . . 89
12.1.2 Carattere della serie . . . 89
12.1.3 Proprietà delle serie . . . 89
12.2 Teoremi delle serie . . . 90
12.2.1 Teorema del confronto integrale . . . 90
12.2.2 Criterio della radice . . . 91
12.2.3 Criterio del rapporto . . . 92
12.2.4 Teorema della convergenza assoluta . . . 92
12.2.5 Criterio di Leibniz . . . 93
12.3 Serie di Taylor . . . 95

12.3.1 Definizione di serie con esponenziale . . . 95
12.3.2 Serie di Taylor . . . 96
12.3.3 Formula di Eulero . . . 97
12.4 Esercizi sulle serie . . . 97
12.4.1 Esempi di serie . . . 97
12.4.2 Serie particolari . . . 98

13 Teoria per l'esame **101**

Sommario

Sono uno studente di Ingegneria informatica al Politecnico di Milano. Questi sono gli appunti di Analisi Matematica 1, ovvero la branca della Matematica che si occupa dello studio delle funzioni e degli insiemi nell'ottica del calcolo infinitesimale; nella fattispecie viene detta Analisi Matematica 1, o più brevemente Analisi 1, la parte dell'Analisi Matematica relativa al calcolo infinitesimale in una dimensione. L'esame Analisi Matematica 1 del primo semestre (primo anno) è tenuto dal Professor Cipriani Fabio Eugenio Giovanni, viene erogato in italiano e vale 10 CFU.

1 Introduzione al Corso Analisi 1

1.1 Obiettivi dell'insegnamento

Il corso si propone di fornire il linguaggio ed i tradizionali elementi di base dell' Analisi Matematica, focalizzandosi in particolare sui seguenti argomenti, che costituiscono un bagaglio culturale imprescindibile all'interno di un percorso di studi in Ingegneria:

- elementi di logica formale ed insiemi numerici;
- successioni e serie numeriche;
- calcolo differenziale e integrale per le funzioni reali di una variabile reale.

Conservando la tradizionale struttura logica su cui poggia il "calcolo", gli argomenti verranno presentati privilegiando l'aspetto costruttivo, senza tuttavia rinunciare al rigore necessario ad un uso critico e consapevole degli strumenti matematici nei problemi di ingegneria e delle discipline applicate.

1.2 Risultati di apprendimento attesi

Ci si attende che, al superamento dell'esame, lo studente: abbia compreso e conosca i principi fondamentali, la teoria e i concetti elementari dei Campi Numerici e dell'Analisi Infinitesimale (limiti, serie numeriche, derivate, studi di funzioni, integrali) (DdD 1); sia in grado di padroneggiare le tecniche proprie dell'Analisi Matematica di base e di applicarle ai problemi strettamente inerenti la materia, con il fine di poter poi individuare, nel corso della carriera accademica e professionale, le tecniche analitiche opportune per risolvere problemi matematici che si trovi a dover affrontare (DdD 2).

1.3 Argomenti trattati

1. Insiemi Numerici Richiami sui numeri naturali, interi, razionali. Il principio di induzione. Coefficiente binomiale, potenza n-sima di un binomio. Numeri reali . Ordinamento e completezza. Potenze con esponente reale, logaritmi. Numeri complessi. Forma algebrica, trigonometrica, esponenziale di un numero complesso. Rappresentazione nel piano di Gauss. Operazioni sui numeri complessi. Radici n-sime di un numero complesso. Teorema fondamentale dell'Algebra.

2. Funzioni reali di una variabile reale

   - Generalità

     Funzione; dominio, codominio, rappresentazione cartesiana. Successione. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Funzione composta, funzione inversa.

     Funzioni reali di variabile reale: funzioni limitate, monotone, simmetriche, periodiche.

     Funzioni elementari.

   - Limiti Definizione di limite di successione. Unicità del limite. Teorema della permanenza del segno. Teorema del confronto. Algebra dei limiti. Forme di indecisione. Esistenza del limite per successioni monotone. Il numero e. Limiti notevoli. Limiti di funzioni. Infiniti, infinitesimi e loro confronto: uso dei simboli di "asintotico" e di "o piccolo".
   - Continuità Definizione, continuità in un punto, in un insieme. Punti di discontinuità e loro classificazione. Funzioni continue su intervalli: teoremi di Weierstrass, degli zeri e dei valori intermedi.
   - Calcolo differenziale Definizione di derivata e sue interpretazioni. Derivate di funzioni elementari. Continuità e derivabilità. Regole di derivazione. Derivata di funzione composta. Classificazione dei punti di non derivabilità. Massimi e minimi locali. Punti stazionari. Teorema di Fermat, teorema di Lagrange. Conseguenze del teorema di Lagrange. Teorema di De L'Hospital. Formula di Taylor con resto secondo Peano e con resto secondo Lagrange. Concavità e convessità. Continuità e derivabilità di funzione inversa. Studio del grafico di una funzione. Primitiva, integrale indefinito.
   - Calcolo integrale Integrale definito. Teorema della media. Funzione integrale. I e II teorema fondamentale del calcolo integrale. Metodi di integrazione. Calcolo di aree piane.
   - Integrali generalizzati Integrale generalizzato per funzioni illimitate su un intervallo limitato o definite su un intervallo illimitato. Criteri di integrabilità. Integrabilità assoluta e integrabilità semplice. Cenni alle funzioni integrali.

3. Serie numeriche Definizione di serie e prime proprietà. Serie geometrica, serie di Mengoli, serie armonica. Serie a termini non negativi: criterio del confronto, del rapporto, della radice. Serie a termini di segno qualunque: convergenza e convergenza assoluta. Criterio di Leibnitz.

1.4 Prerequisiti

Sono richieste le competenze di base fornite dalla scuola superiore. In particolare, è richiesta la conoscenza dei seguenti argomenti:

- geometria analitica;
- trigonometria;
- logaritmi ed esponenziali;
- equazioni e disequazioni (logaritmiche, trigonometriche, con valore assoluto).

1.5 Modalità di valutazione

L'esame potrà essere svolto sostenendo le prove in itinere, o sostenendo uno degli appelli d'esame previsti in gennaio-febbraio, giugno-luglio e agosto-settembre. Sono previste due prove in itinere, la prima a metà corso e la seconda alla fine del corso. In ciascuna prova lo studente dovrà dimostrare un'adeguata competenza sia nella parte di esercizi che nella parte di teoria. L'accesso alla seconda prova in itinere è subordinato al superamento della prima. Lo Studente che ottiene una valutazione positiva nella prima prova ma fallisce la seconda deve ripetere l'esame completo in uno degli appelli regolari.La valutazione favorevole sul complesso delle due prove in itinere, seguita da un'eventuale prova orale, si traduce nel superamento dell'esame. Le prove degli appelli d'esame constano di una prova scritta, dove lo Studente dovrà dimostrare un'adeguata competenza sia nella parte di esercizi che nella parte di teoria, seguita da un'eventuale prova orale. Le date delle prove scritte saranno pubblicate sulla pagina ufficiale del Politecnico.
PARTECIPARE AD UNA PROVA SCRITTA E' NECESSARIO ESSERSI ISCRITTI AL RELATIVO APPELLO D'ESAME NEI TEMPI PREVISTI.

2 Insiemi

13 Settembre 2022

2.1 Simboli utilizzati

- Insieme: A, B, X, Y
- Elemento: $a \in A$
- Contenuto o uguale: $A \subseteq B$
- Strettamente contenuto: $A \subset B$
- Descrizione: A := {Descrizione degli elementi presenti in A} = {1, 2, 5}[1]
- Simboli di insiemistica:
  1. Per ogni: $\forall$
  2. Esiste: $\exists$
  3. Non esiste: $\nexists$
  4. Esiste ed è unico: $\exists!$
  5. Implica: $\implies$
  6. Tale che: $|$

2.2 Operazioni tra insiemi

- Unione: $A \cup B$
- Intersezione: $A \cap B$
- Insieme vuoto:
  1. $A \cup \emptyset = A$ // Elemento neutro
  2. $A \cap \emptyset = \emptyset$ // Elemento assorbente

  Possiamo osservare che Somma : Unione = Prodotto : Intersezione
- Complementare: $A \subseteq B \wedge A^c := \{\forall b \in B : b \notin A\}$
- Prodotto cartesiamo:
  1. $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
  2. $A \times B \times C := \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$
  3. $A \times A := A^2$
  4. $A \times A \times A := A^3$

2.3 Insiemi numerici

- Naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- Interi: $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$
- Razionali: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
- Reali: $\mathbb{R}$ per colmare i "buchi" lasciati nella linea dei numeri, ad esempio $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ che non è esprimibile sotto forma di frazione di interi
- Complessi: $\mathbb{C}$ per trovare delle soluzioni ad equazioni impossibili in $\mathbb{R}$, come potrebbe essere per $\sqrt{2} = -1$

[1] Il simbolo ":=" dice che ciò che l'insieme è definito dagli elementi indicati dalla parte opposta dei : nell'uguaglianza

2.4 Cardinalità di un insieme

La Cardinalità è il numero (k) di elementi (e) presenti in un insieme (K):
$K := \{e_0, e_1, e_2, ..., e_k\}$

Theorem 2.1. *Due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità, se esiste una funzione $f : A \implies B$ che sia biunivoca.*

$$\#(A) = \#(B), \exists f : A \implies B \text{ sia biunivoca.} \tag{1}$$

Theorem 2.2. *Un insieme A è infinito, cioè contiene infiniti elementi, se ha la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio:*

$$\exists f : A \implies A^1 \text{ biettiva } |A = A^1 \tag{2}$$

Altrimenti A si definisce insieme finito: $\#(A) < \infty$

Ogni insieme A che ha la stessa cardinalità di $\{1, 2, 3, ..., n\}$ per $n \leq 1$ si dice che ha cardinalità n: $\#(A) = n$
Inoltre possiamo affermare che $\#(A) < \#(B)$ se $\exists$ una funzione $f : A \implies B$ suriettiva (A ha meno elementi di B).

Theorem 2.3. *Gli insiemi numerici dei numeri Naturali, Interi e Razionali hanno la stessa cardinalità (del numerabile), mentre l'insieme dei numeri Reali ha cardinalità maggiore definita "cardinalità del continuo":*

$$\#(\mathbb{N}) = \infty = \#(\mathbb{Z}) = \#(\mathbb{Q}) < (\mathbb{R}) \tag{3}$$

È stato dimostrato (2.4) che non esistono cardinalità intermedie fra quella del numerabile e quella del continuo.

Di seguito ci sono esempi pratici e dimostrazioni sulla cardinalità di insiemi numerici:

- Dimostrazione breve della cardinalità del numerabile e del continuo:

  Cardinalità del numerabile e del continuo. Consideriamo un insiame X e definiamo P(X) l'insieme delle parti, ovvero quel particolare insieme composto da tutti i sottoinsiemi di X (quindi in P ci sono $\not O$, X e tutte le combinazioni di elementi di X)
  $\implies \#\big(P(X)\big) > \#(X)$
  Si passa dal numerabile di X al continuo di P(X) ☐

- Dimostrazione insieme infinito:

  Insieme infinito. $\#(\mathbb{N}) = \infty \quad , \quad f : \mathbb{N} \implies \mathbb{N}^1 := \{2 \cdot n | n \in \mathbb{N}\}$
  $f(n) = 2n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad \mathbb{N}^1 \subset \mathbb{N}$
  f è iniettiva?: $f(n) = f(m) \implies 2n = 2m \implies$ funzione è iniettiva
  f è suriettiva?: ogni numero pari naturale è il doppio di un altro numero naturale, di conseguenza la funzione è suriettiva
  $\implies$ la funzione è biunivoca ☐

- Dimostrazione insieme finito:

  Insieme finito. Considero un insieme finito $A = \{1, 2\}$, cioè $\exists f : A \implies A^1|$ f sia biunivoca *da* A a A^1
  Se consideriamo l'insieme $A^1 = \{1\}$ ogni funzione $f : A \implies A^1$ non è iniettiva perchè $f(1) = 1 = f(2)$ (codominio + solo un punto)
  Analogamente si dimostra che con l'insieme $A = \{2\}$ non si ottiene una funzione biunivoca $\implies$ possiamo dire che è un insieme finito per il teorema 2.1 e 2.2. ☐

2.5 Intervallo di insieme in Q

Definition 2.1. *Dati due numeri $a, b \in \mathbf{Q}$ l'intervallo (a, b) è dato da:*

$$(a, b) := \{x \in \mathbf{Q} : a < x < b\} \tag{4}$$

L'intervallo può essere:

- Chiuso: $(a, b) := \{x \in \mathbf{Q} : a < x < b\}$
- Aperto: $[a, b] := \{x \in \mathbf{Q} : a \leq x \leq b\}$
- Misto: $[a, b) := \{x \in \mathbf{Q} : a \leq x < b\}$

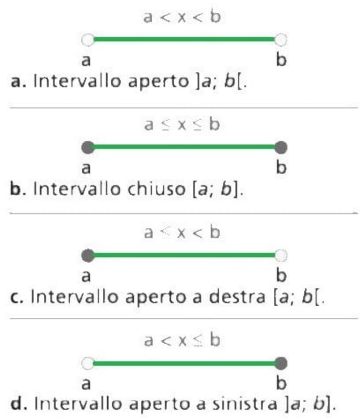


Figura 1: Tipologie di intervalli

2.6 Insieme limitato in Q

Definition 2.2. *Dato un insieme $A \subset \mathbf{Q}$, esso viene definito limitato se è contenuto in un insieme $B \in \mathbf{Q}$ che include strettamente A:*

$$\exists\, A \subset B = (b_1, b_2) \subset \mathbf{Q} \quad , \quad b_1, b_2 \quad , \quad b_1 < b_2 \mid A \subset (b_1, b_2) \tag{5}$$

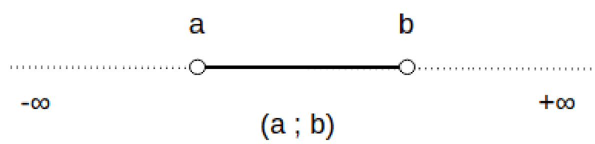


Figura 2: Intervallo limitato

Possiamo affermare che:

- Tutti gli intervalli sono limitati
- Gli insiemi $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ non sono limitati
- Ogni insieme finito $\#(A) < \infty$ è limitato

3 Strumenti matematici utili

3.1 Notazioni e scritture

3.1.1 Sommatoria

Definition 3.1. *Sia a_n un numero dipendente (eventualmentea9 da un intero non negativo (quindi naturale), la sommatoria S viene definita come:*

$$S = \sum_{n=n_01}^{m} a_n := a_{n0} + a_{n1} + a_{n2} + ... + a_m \tag{6}$$

C'è un aprticolare sommatoria chiamata sommatoria degenere che ha come indici $n_0, n_1 \mid n_0 = n_1$, in questo caso la sommatoria si riduce al numero a_n.

3.1.2 Produttoria

Definition 3.2. *Sia a_n un numero dipendente (eventualmentea9 da un intero non negativo (quindi naturale), la produttoria P viene definita come:*

$$P = \prod_{n=n_0 1}^{m} a_n := a_{n0} \cdot a_{n1} \cdot a_{n2} \cdot ... \cdot a_m \tag{7}$$

3.1.3 Fattoriale

Definition 3.3. *Il fattoriale di un numero n si definisce come:*

$$\begin{cases} o! := 1 \quad , \quad n = 0 \\ \\ n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \quad , \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{8}$$

3.2 Metodi risolutivi importanti

3.2.1 Regola di Ruffini

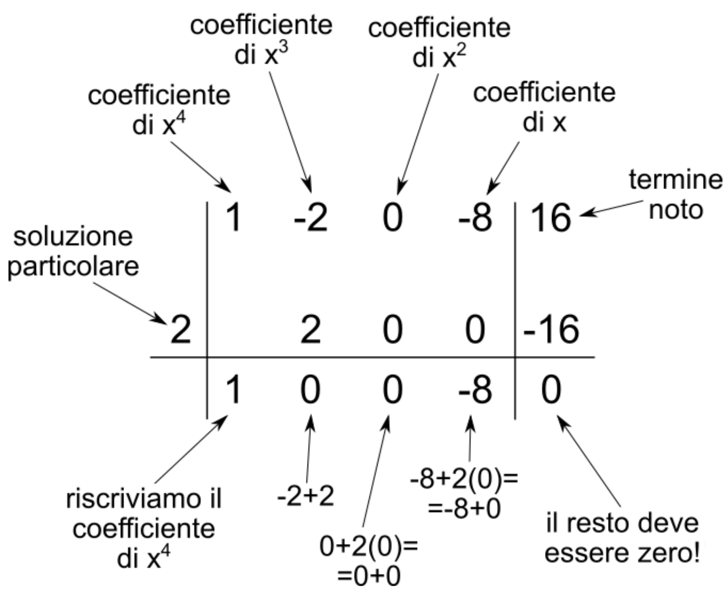


Figura 3: Regola di Ruffini per la scomposizione di polinomi non immediati

3.2.2 Divisione fra polinomi

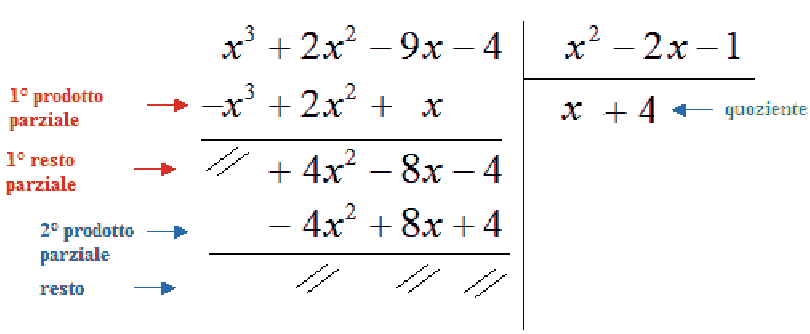


Figura 4: Metodo per dividere due polinomi (per scomposizione)

4 Grafici

4.1 Definizione di grafico

Definition 4.1 (Grafico)**.** *Un grafico $G \subseteq A \times B$ è detto grafico se (con A e B insiemi numerici):*

$$\begin{cases} (x,y) \in G \\ (x,z) \in G \end{cases} \implies y = x \implies (x,y) = (x,z) \tag{9}$$

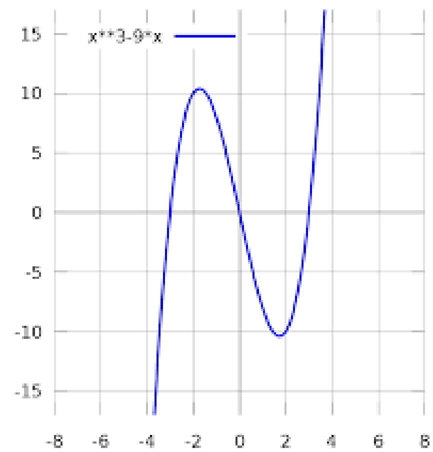


Figura 5: Grafico e funzioni

Una qualsiasi retta versticale può intersecare il grafico al più in un punto.

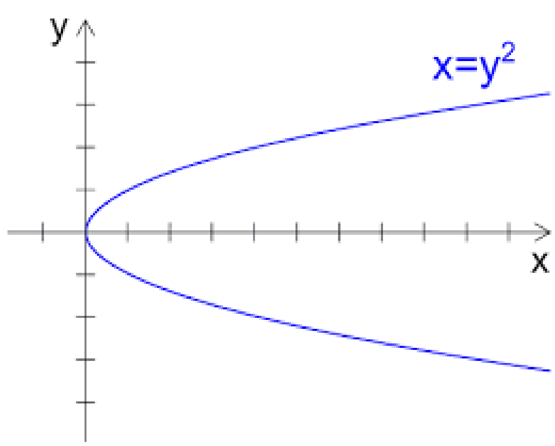


Figura 6: Non grafico

4.2 Dominio

Definition 4.2 (Dominio)**.** *Il dominio è la proiezione della curva G sull'asse x (in questo caso A):*
$D := \{x \in A : \exists y \in B | (x,y) \in G\}$

Definition 4.3 (Immagine)**.** *L'immagine è la proiezione della curva G sull'asse y (in questo caso B):*
$Im(G) := \{y \in B : \exists x \in D | (x,y) \in G\}$

4.3 Immagine

4.4 Funzioni associate al grafico

- $G \subset A \times B$

$$\forall\, a \in D \exists!\, b \in Im(G) \mid (a,b) \in G \tag{10}$$

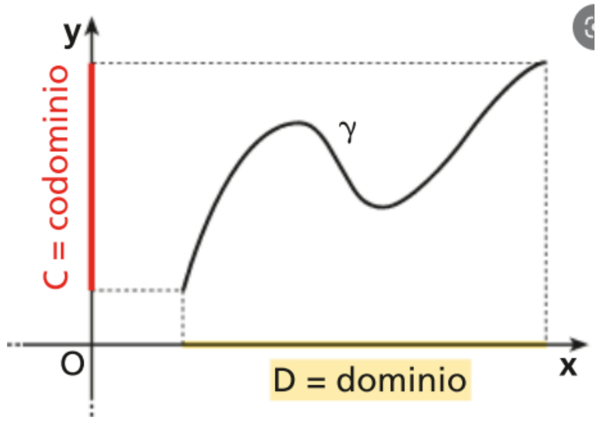


Figura 7: Dominio e immagine di un grafico

- b si denota con il simbolo $f(a)$ per ricordare che esso dipende da a.
- Un'altra scittura della funzione è: $f : D \implies Im(G)$
- $$G = \Big\{ \Big(a, f(a) \Big) \in A \times B : a \in D \Big\} \tag{11}$$

4.5 Grafico associato alla funzione

Questo caso lo analizzeremo attravaerso un esempio:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1} \tag{12}$$

Questa funzione associa ad ogni X (numero reale) una Y (numero reale) limitatamente al dominio.

$$D(fr) = \Big\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 \neq 1 \Big\} = \Big\{ x \in \mathbb{Q} : x \neq \pm 1 \Big\} \tag{13}$$

$$G(f) = \Big\{ \Big(x, f(x) \Big) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : X \in D(f) \Big\} = \Big\{ (x, \frac{2x - 1}{x^2 + 1}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : X \neq \pm 1 \Big\} \tag{14}$$

Insime rispetta la definizione di grafico: ad un valore y è associata al più un valore x (corrispondenza fra grafico e oggetti analitici).

4.6 Tipologie di funzioni

4.6.1 Funzione suriettiva

Definition 4.4 (Funzione suriettiva)**.** *La funzione $f : A \implies B$ viene definita suriettiva in un piano $A \times B$ se ad ogni y corrisponde almeno una x (il codominio è tutto l'asse y):*

$$\forall b \in B \, \exists \, a \in A \mid b = f(a) \tag{15}$$

Un esempio di funzione suriettiva è la funzione omografica (figura 9), mentre la parabola non è una funzione suriettiva.

4.6.2 Funzione iniettiva

Definition 4.5 (Funzione Iniettiva)**.** *Una funzione $f : A \implies B$ viene definita iniettiva in un piano $A \times B$ se ad ogni y corrisponde al più una X:*

$$\begin{cases} a_1, a_2 \in A \\ f(a_1) = f(a_2) \end{cases} \implies a_1 = a_2 \tag{16}$$

Che corrisponde al dire:

$$\begin{cases} a_1, a_2 \in A \\ \forall a_1 \neq a_2 \end{cases} \implies f(a_1) = f(a_2) \tag{17}$$

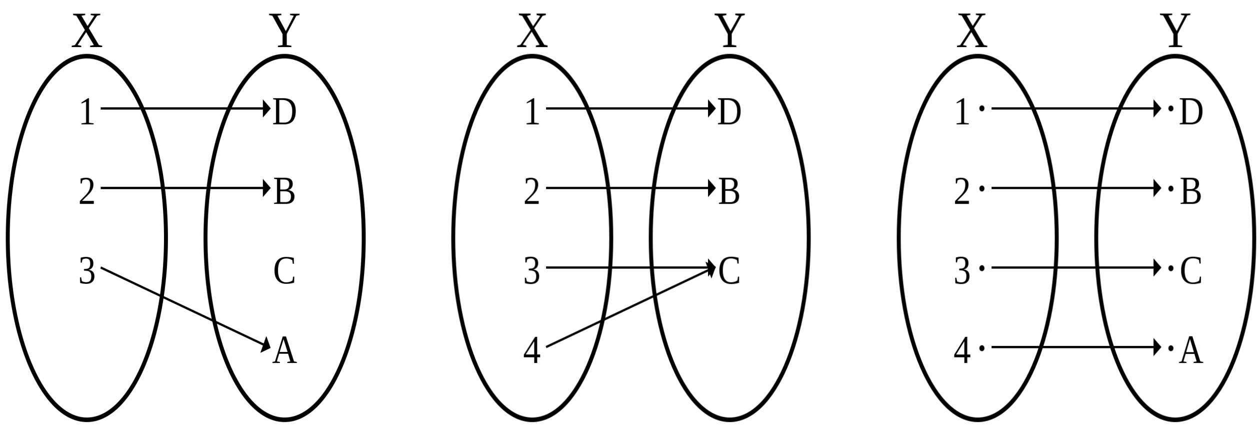
Un esempio di funzione iniettiva è la parabola con asse verticale (figura 9).

4.6.3 Funzione biunivoca

Definition 4.6. *Una funzione $f : A \implies B$ viene definita biunivoca in un piano $A \times B$ se ad ogni x corrisponde una ed una sola y:*

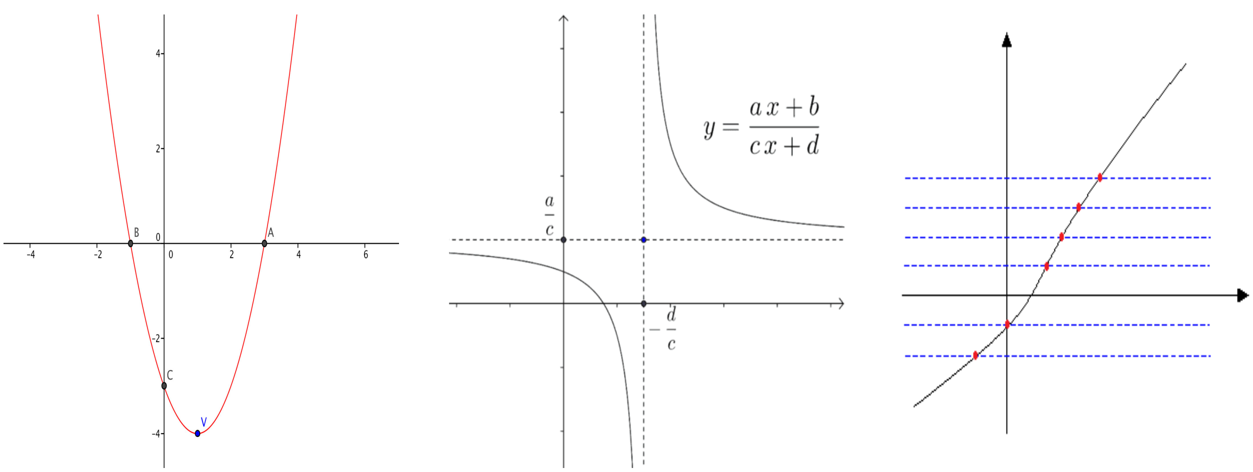
$$\forall\, b \in B\; \exists!\, a \in A \mid b = f(a) \tag{18}$$

Quindi possimao affermare che una funzione è biunivoca se essa è sia suriettiva che iniettiva. Un esempio di funzione biunivoca è la retta $y = x$ (figura 9).



(a) Iniettiva (b) Suriettiva (c) Biunivoca

Figura 8: Gli insiemi delle tre tipologie di fuzioni particolari



(a) Iniettiva (b) Suriettiva (c) Biunivocae

Figura 9: I grafici delle tre tipologie di fuzioni particolari

4.7 Funzione modulo

4.7.1 Definizione modulo

Definition 4.7. *Considerata una funzione $f : \mathbf{Q} \implies \mathbf{Q}$, viene definita funzione modulo quando:*

$$f(q) = \begin{cases} -q & , \quad q < 0 \\ -q & , \quad q \geq 0 \end{cases} \tag{19}$$

Di conseguenza la funzione modulo:

- non è iniettiva
- non è suriettiva
- ha il grafico che è la bisettrice del 1° e 3° quadrante.

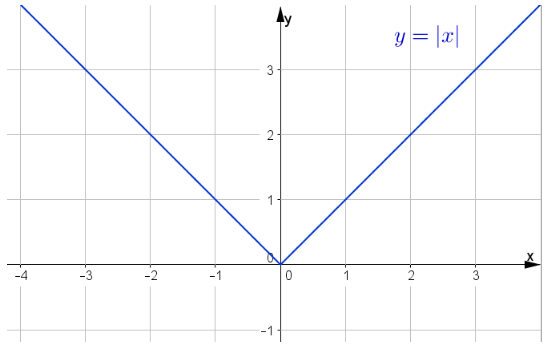


Figura 10: Grafico della funzione modulo

4.7.2 Distanza euclidea

Definition 4.8. *Considerati $a, b \in \mathbf{Q}$, la funzione f distanza fra a e b viene definita come:*

$$f(a,b) := |a-b| = \begin{cases} b-a & , \quad q < 0 \\ a-b & , \quad q \geq 0 \end{cases} \tag{20}$$

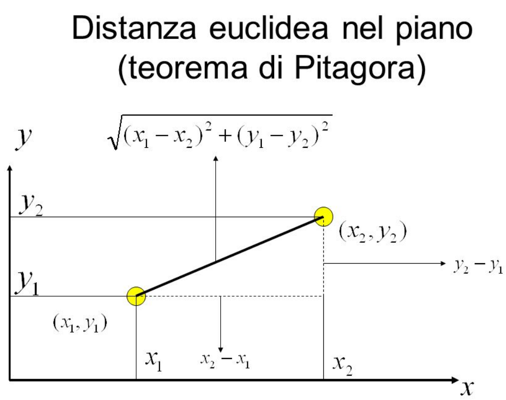


Figura 11: Grafico della funzione modulo

4.7.3 Proprietà modulo

1. $|q| = 0 \Leftrightarrow q = 0$
2. $|q_1 \cdot q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$
3. Disuguaglinza triangolare: $|q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|$ ed è valida anche nel piano (2 dimensioni) e nello spazio (3 dimensioni).
4. Disuguaglianza triangolare per la distanza: $|q_1 - q_2| \leq |q_1 - q_3| + |q_3 - q_2|$
5. $|q| = |-q|$

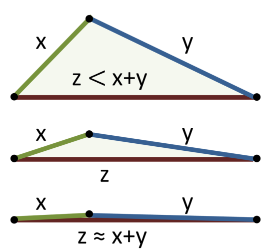


Figura 12: Disuguaglianza tringolare per la distanza

5 Dimostrazioni

5.1 Principio di Induzione

Definition 5.1 (Principio di Induzione). *Il Principio di Induzione è un metodo dimostrativo che si basa sulle proprietà dell'insieme dei numeri naturali, in particolare il fatto che* $\mathbf{N}$ *abbia un numero iniziale che è lo zero e tutti i numeri* $n \in \mathbf{N}$ *hanno un successivo* $n+1$.

Theorem 5.1. *Sia* n_0 *un numero naturale e per ogni n maggiore o uguale a* n_0 *sia* $P(n)$ *un predicato (cioè una formula), se* $P(n_0)$ *è vera e* $P(n) \implies P(n+1)$ *è vera (tavole di verità dell'implicazione), allora si può affermare che* $P(n)$ *è vera per ogni numero naturale:*

$$n_0 \in \mathbf{N} \quad , \quad \forall n \geq n_1 \quad , \quad \textit{sia } P(n) \textit{ un predicato, se:} \tag{21}$$

$$\begin{cases} P(n_0) \ \textit{vera} \\ P(n) \implies P(n+1) \ \textit{vera} \end{cases} \implies P(n) \ \textit{vera} \ \forall \, n \in \mathbf{N} \tag{22}$$

5.2 Dimostrazioni per Induzione

5.2.1 Somma di Gauss

$$\forall \, n \geq 1 \quad , \quad 1+2+3+...+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \tag{23}$$

Somma di Gauss. sia $n_0 = 1 \quad , \quad \forall \, n \geq n_0 = 1$

$P(n) = 1+2+3+...+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

$P(n_0) = P(1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \implies$ è vera

$\implies$ possiamo supporre $P(n)$ come vera

Per assunzione $P(n_0)$ vera consideriamo: $(1+2+3+...+n)+(n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) =$

$= (n+1) \cdot (\frac{n}{2}+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$

$\implies$ ha dimostrato che $P(n+1)$ è vera

$\begin{cases} P(n) \implies P(n+1) = Vero \\ Vero \implies Vero = Vero \end{cases} \implies P(n) \, Vera \, \forall \, n \geq 1$ per il Principio di Induzione. □

5.2.2 Somme geometriche

Sia $q \in \mathbf{Q} \quad , \quad q \neq 1 \quad , \quad n \in \mathbf{N}:$

$$P(n) = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{(n+1)}}{1-q} \tag{24}$$

- *Somma Geometriche (classica).* :

  Calcoliamo $P(1) = 1 + q^1 = \frac{1-q^{1+1}}{1-q} = \frac{(1-q) \cdot (1-q)}{1-q}$

  Calcoliamo $P(2) = 1 + q^2 = \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{(1+q^2) \cdot (1-q)}{1-q} \implies$ con differenza di cubi

  Andrebbe dimostrata per ogni n fino all'infinito, per questo andremo a vedere la dimostrazione per induzione. □

- *Somma Geometriche (induzione).* :

  Assumiamo $P(n_0) = P(1)$ come vera e deduciamo:

$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + ... + q^n + q^{n+1} = \frac{1-q^{(n+1)}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{(n+1)}+q^{(n+1)}-q^{(n+2)}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$

$P(n) \implies P(n+1) = Vero$

$\implies P(n)\, Vera\, \forall\, n \geq 1$ per il Principio di Induzione. $\square$

- *Somma Geometriche (successione).* :

  $q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + ... + q^n = \sum_{k=0}^{n}(q^k) = \frac{1-q^{(n+1)}}{1-q}$

  Sai ora : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(q^k)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-q^{(n+1)}}{1-q}\right) =$

  $= propr.\, limiti = \frac{1-lim_n q^{(n+1)}}{1-q} = \left[\frac{1-0}{1-q}\right] = \left[\frac{1}{1-q}\right]$ $\square$

5.2.3 Dimostrazione della Disugualianza di Bernulli

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad , \quad n \geq 0 \wedge x \in (-1, +\infty) \tag{25}$$

Disugualianza di Bernulli. consideriamo $n = 0 \mid n \in \mathbf{N}$:

$(1+x)^n = (1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x \quad \implies$ la tesi è vera

Supponiamo sia vera $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad , \quad x > -1$ per lo studio segno disugualianza

Dimostriamo $(1+x)^{(n+1)} \geq (1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x) \cdot (1+n \cdot x) = 1 + n \cdot x + x + n \cdot x^2 = 1 + (n+1) \cdot x + x^2$

Dopo aver raccolto la x $\implies 1 + (n+1) \cdot x + x^2 \geq 1 \cdot (n+1) \cdot x + n \cdot x^2 = 1 + (n+1) \cdot x$

$\implies$ per induzione $(a+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall\, n \geq 0 \wedge x \in (-1, +\infty)$ $\square$

5.2.4 Dimostrazione del Binomio di Newton

Prima è importante introdurre le basi matematiche:

Definition 5.2. *Sia* $n \geq 1 \quad , \quad 0 \leq k \leq n$*, il coefficiente binomiale "n su k" è:*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{26}$$

Le proprietà del coefficiente binomiale sono:

- Proprietà 1:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \tag{27}$$

- Proprietà 2:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{1 \cdot (n-1)!} = n \tag{28}$$

- Proprietà 3:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \implies \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{n \cdot (n-k)! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{29}$$

- Proprietà 4:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{30}$$

Dimostrazione proprietà 4.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)! \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!} = \tag{31}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-k)}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{(n-k)! \cdot k!} \tag{32}$$

$\Longrightarrow$ grazie alle prorpietà non è necessario applicare sempre la definizione del Binomio di Newton, ad esempio con il Triangolo di Tartaglia riusciamo ad individuare i coefficienti qualsiasi sia l'esponente per cui è elevato un binomio. □

Figura 13: Triangolo di Tartaglia

Definition 5.3. *Consideriamo $a, b \in \mathbf{Q}$ e un $n \geq 1$, la formula del Binomio di Newton è:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \tag{33}$$

Dimostazione Binomio di Newton (per induzione). :
$P(n_0) = P(1) = (a+b)^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot a^k \cdot b^{1-k} = 1 \cdot a^0 \cdot b^1 + 1 \cdot a^1 = b + a = a + b$

$\Longrightarrow$ $P(1)$ vero, quindi possiamo supporre $P(n)$ come vero.

Considero $P(n+1) = (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^k \cdot b^{(n-1)-k}$

E sappiamo che $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = [\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}] \cdot (a+b) =$

$= a \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} + b \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{k+1} \cdot b^{n-k+1}$

Ora riscriviamo la sommatoria con degli indici diversi:

$\sum_{n+1}^{i=1} \binom{n}{i-1} \cdot a^i \cdot b^{n+1-i} + \sum_{n+1}^{i=1} \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n+1-i} =$

$= \binom{n}{n+1-n-1} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{n}^{i=1} [\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}] \cdot a^i \cdot b^{n+1-i} + \binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot b^{n+1} =$

$= \binom{n}{n+1-n-1} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{n}^{i=1} [\binom{n+1}{i}] \cdot a^i \cdot b^{n+1-i} + \binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot b^{n+1} =$

$= a^{(n+1)} (\sum_{i=1}^{n} [\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}] \cdot [a^i \cdot b^{(n+1-i)}]) + b^{n+1} =$

$= a^{(n+1)} (\sum_{i=1}^{n} [\binom{n+1}{i}] \cdot [a^i \cdot b^{(n+1-i)}]) + b^{n+1} =$

$= \binom{n+1}{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot b^{(n+1-i)} + \binom{n+1}{0} \cdot (a^0 \cdot b^{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot (a^i \cdot b^{n+1-i})$

$\Longrightarrow$ dimostrato per induzione □

5.2.5 Dimostrazione per le somme 3k+1

Link alla dimostrazione

5.2.6 Dimostrazione necessità di numeri reali

La motivazione che ha portato all'introduzione dei numeri reali è il fatto che ci sono alcune equazioni, come quella per trovare la diagonale del quadrato di lato 1, che non hanno soluzioni tra i numeri razionali. Ad esempio $\nexists\, x \in \mathbf{Q} \mid x^2 = 2$.

Costruzione di numeri reali da razionali. consideriamo per assurdo un numero $x = \frac{m}{n} \mid x \in \mathbf{Q}$ che è soluzione di $x^2 = 2$

$\implies m^2$ deve essere pari perchè è un quadrato $\implies m$ si può scrivere come $m = 2 \cdot p \quad , \quad p \in \mathbf{N}$

Siccome $x = \frac{m}{n}$ e $x^2 = 2 \implies 2 = \frac{m^2}{n^2} \implies 2 \cdot n^2 = m^2 = (2 \cdot p)^2 = 4 \cdot p^2$

Sappiamo che $n^2 = 2 \cdot p^2$ e sono pari, $\implies n$ è pari perchè è il doppio del quadrato di un numero naturale

$\implies$ è necessario che m e n abbiano un fattore comune, ma se così fosse si potrebbero semplificare (trovando un numero intero alla fine) e questo è un assurdo $\implies$ è necessario introdurre un nuovo insieme numerico che chiameremo reali ($\mathbf{R}$). $\square$

6 Succesioni

6.1 Limite della successione

Definition 6.1 (Successione)**.** *Una successione in un insieme dato X è una funzione $f : D \implies X$ con dominio D numerabile (il più delle volte $D \subseteq \mathbf{Z}$)*

Una notazione alternativa è:

$$n \in D \quad , \quad f(n) := x_n \mid \{x_n\}_{n \in D} \subseteq X \tag{34}$$

Successioni come sistema dinamico e tempo discreto:

- $D =$ insieme dei tempi
- $x_n =$ posizione al tempo $n \in D$
- $\{x_n\}_{n \in D} \subseteq X$ orbita del sistema (come se si scattassero delle foto a tempo discreto per vedere in che punto dell'orbita si trova x_n)

Esercizi ed esempi di successioni:

1. Successione illimitata non convergente: il limite esiste ma non è razionale: $\{n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{Q} \quad , \quad x_n = n \, \forall \, n \geq 0$
2. Successione limitata convergente: la velocità diminuisce tendendo verso zero senza mai assumerne il valore (esiste il limite):

   $\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbf{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} D = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}\} \\ x_n = \frac{1}{n} \end{pmatrix}$
3. Successione periodica perfetta: è un pendolo elementare (metronomo) che oscilla tra due posizoni:
   $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathbf{Q} \quad , \quad x_n = \begin{cases} -1 & , \quad n \, dispari \\ +1 & , \quad n \, pari \end{cases}$
4. Successione costante:
   $\{C\}_{n \geq 0} \subseteq \mathbf{Q} \quad , \quad (C \in \mathbf{Q} \, fissato)$

   $\lim_{n \to +\infty} c = c$ sapenso che $x_n = c \, \forall \, n \geq 0 \quad , \quad l = c$

   $|x_n - l| = |c - c| = 0 < \{ \, \forall \, \varepsilon > 0$ (tautologia)

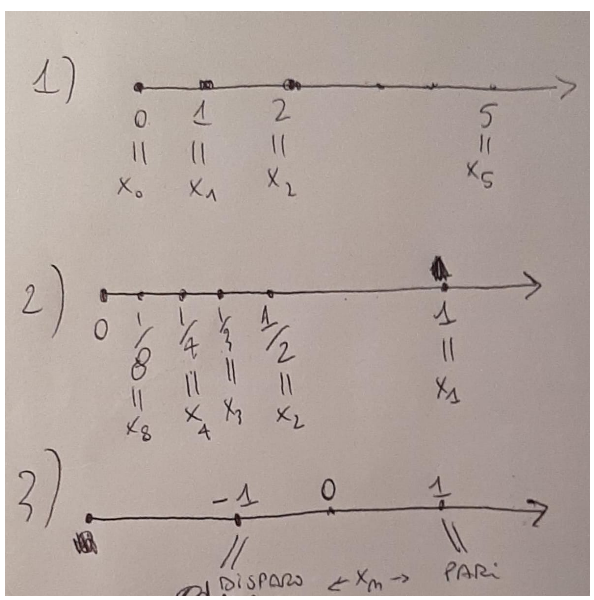


Figura 14: Esempi di successioni

Definition 6.2 (Limite di successione)**.** *Il limite di successione in* $\in \mathbf{Q}$ *è una successione* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathbf{Q}$ *che converge al numero* $l \in \mathbf{Q}$ *e in simboli si scrive:*

$$\lim_{x\to+\infty} x_n = l \tag{35}$$

Le definzioni formali di limite sono:

1. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \mid n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - l| < \varepsilon$
2. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \mid n \geq N(\varepsilon) \implies l - \varepsilon < x_0 < l + \varepsilon$
3. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \mid n \geq N(\varepsilon) \implies x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$
4. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \mid n \geq N(\varepsilon) \implies \{x_n\}_{n\geq N(\varepsilon)} \subset (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Per capire meglio, ricordiamo che ε è l'errore (tolleranza) ed è un numero infinitesamente piccolo e $N(\varepsilon)$ è la soglia, ovvero quel valore oltre al quale la successione è racchiusa nell'intervallo $(l - \varepsilon,\ l + \varepsilon)$, infatti viene definita convergenza a limite asintotico:

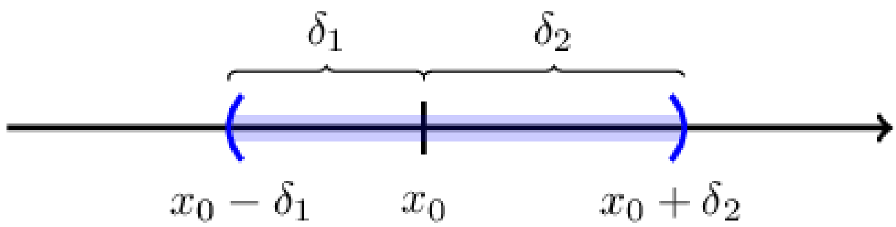


Figura 15: Intorno di x_0 verso il quale converge la funzione

Osservazioni sulla posizione della successione in base a x_n ed esiste il limite che tende a $+\infty$:

- $n < N(\varepsilon)$ successione si trova in punti casuali
- $n > N(\varepsilon)$ successione si accumula verso il valore del limite (l) e il codominio diventa

  $C = \Big\{ n > N(\varepsilon) \mid n \in \big[l - \varepsilon,\ l + \varepsilon\big] \Big\}$

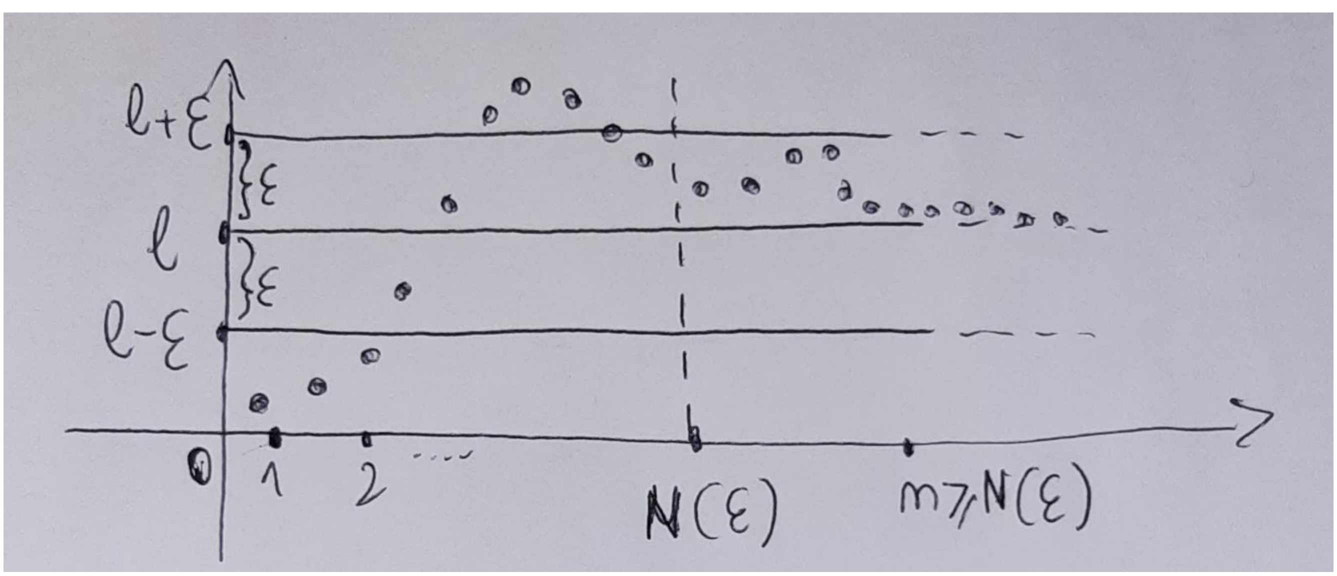


Figura 16: Intrappolamento successione con $n \geq N(\varepsilon)$

6.2 Convergenza della successione

Considieriamo l'esempio 2 nell'immagine 14, va dimostrato che:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbf{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_n = \frac{1}{4} \\ l = 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Si parte dal fondo e si procede a ritroso:

1. Risolvere la disuguaglianza con n incognita
2. Fissiamo $\varepsilon > 0$
3. si arriva a $n \geq N(\varepsilon) \implies$ si cerca per quali valori di $n \geq 1$ l'intrappolamento:

$$l - \varepsilon < \frac{1}{n} < l + \varepsilon \quad , \quad l = 0 \tag{37}$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} < +\varepsilon \implies \frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}$$

4. Scelgo come soglia $N(\varepsilon$ il numero più piccolo naturale maggiore di $\frac{1}{n}$
5. Così se $n > N(\varepsilon)$, allora $n \geq N(\varepsilon) > V_\varepsilon$
6. quindi rileggendo a ritroso si ottiene che:

$$\begin{gathered} 0 - \varepsilon < V_n < 0 + \varepsilon \\ -\varepsilon < V_n < +\varepsilon \\ \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{gathered}$$

6.3 Proprietà del limite

- Proprietà 1:

$$se : \exists \lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbf{Q} \implies \text{allora il limite è unico} \tag{38}$$

Dimostrazione proprità 1. :

Siano $\lim_n a_n = l_1 \quad , \quad \lim_n a_n = l_2$

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_1(\varepsilon) \geq 0 \,|\, n \geq N_1(\varepsilon) \implies |a_n - l_1| < \varepsilon$

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_1(\varepsilon) \geq 0 \,|\, n \geq N_2(\varepsilon) \implies |a_n - l_2| < \varepsilon$

$n \geq max\big(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\big) =: N(\varepsilon) \implies$ si ha che: $n \geq N_1(\varepsilon) \quad , \quad n \geq N_2(\varepsilon)$

Bisogna dimostrare che: $0 \leq |l_1 - l_2| = |(l_1 - a_n) + (a_n - l_2)| = |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

$\implies \forall\, \varepsilon > 0 \quad , \quad 0 \leq |l_1 - l_2| < 2\varepsilon \implies |l_1 - l_2| = 0 \implies l_1 = l_2$

□

- Proprieta 2:

$$se : \exists \lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbf{Q} \implies \text{allora } \{a_n\}_n \text{ è limitata} \tag{39}$$

Dimostrazione proprità 2. :

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_1(\varepsilon) \geq 0 \,|\, n \geq N(\varepsilon) \implies a \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

$\implies$ per $n \geq N(\varepsilon)$ la successione è intrappolata nell'intervallo, mentre per $n < N(\varepsilon)$ può essere fuori

$\implies \{a_n\}_{n \geq N(\varepsilon)} \subset (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ è limitata

Sappiamo che $\{a_n\}_{n \in \{0,1,\ldots,N(\varepsilon)-1\}}$ è limitata perchè è un insieme finito

$\implies$ quindi $\{a_n\}_{n \geq 0} = \big(\{a_n\}_{n \in \{0,1,\ldots,N(\varepsilon)-1\}}\big) \cup \big(\{a_n\}_{n \geq N(\varepsilon)}\big)$

Possiamo concludere che la successione è limitata poichè essa è l'unione di insiemi limitati.

□

- proprieta 3:
$$\lim_{n \to +\infty}(a_n + b_n) = \Big(\lim_{n \to +\infty}(a_n)\Big) + \Big(\lim_{n \to +\infty}(b_n)\Big) = l_1 + l_2 \tag{40}$$

Dimostrazione proprità 3. :

Dalle ipotesi (aggiungiamo il modulo per garantirne la positività):

$|(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| = |(a_n - l_1) + (b_n - l_2)| \leq$ Disug Triang $\leq |(a_n - l_1)| + |(b_n - l_2)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Si cerca quella soglia oltre alla quale la differenza sia infinitesimale, cioè: $0 \leq |(a_n - l_1) + (b_n - l_2)| < 2\varepsilon$

Se $n \geq N(\varepsilon) := max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ dove rispettiamente:
-$N_1(\varepsilon)$ è la soglia di $\implies |a_n - l_1|$
-$N_2(\varepsilon)$ è la soglia di $\implies |a_n - l_2|$

□

- Proprietà 4:
$$\lim_{n \to +\infty}(a_n \cdot b_n) = \Big(\lim_{n \to +\infty}(a_n)\Big) \cdot \Big(\lim_{n \to +\infty}(b_n)\Big) = l_1 \cdot l_2 \tag{41}$$

Dimostrazione proprità 4. :

$0 \leq |(a_n \cdot b_n - l_1 \cdot b_n) + (l_1 \cdot b_n - l_1 \cdot l_2)| = prop\, associat. = |(a_n - l_1) \cdot b_n + l_1 \cdot (b_n - l_2)| =$

$\leq |(a_n - l_1) \cdot b_n| + |l_1 \cdot (b_n - l_2)| = |a_n - l_1| \cdot |b_n| + |l_1| \cdot |b_n - l_2| = * * *$

Sappiamo che $(|a_n - l_1|)$ è arbitrariamente piccolo (infinitesimale) e $(|b_n|)$ è arbitrariamente grande, ma (B) essendo convergente è limitato $\implies$ il prodotto dei due termini è arbitrariamente piccolo (minore di ε) $\implies$ il prodotto dei due termini è minore di ε.

Poichè $\{b_n\}$ è convergente, essa è limitata: $\exists M \geq 0 \mid |b_n| < M \; \forall \, n \geq 0 \implies$ allora: $* * * = |a_n - b_1| \cdot M + |l_1| \cdot |b_n - l_2| < \varepsilon \cdot M + |l_1| \cdot \varepsilon = M + |l_1| \cdot \varepsilon \quad$ se $n \geq N_1(\varepsilon) \quad , \quad n \geq N_2(\varepsilon)$

□

- Proprietà 5:
$$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\big(\lim_{n \to +\infty}(a_n)\big)}{\big(\lim_{n \to +\infty}(b_n)\big)} = \frac{l_1}{l_2} \tag{42}$$

6.4 Teroemi delle successioni

Sono utili perchè permettono, sapendo risolvere dei limiti semplici, di calcore limiti composti difficili da analizzare:

1. Teorema della Permanenza del Segno: utilizzato per controllare rapidamente il risultati:
$$\begin{cases} se\; a_n \geq 0 \\ \exists\, l := \lim_{n \to +\infty}(a_n) \end{cases} \implies l \geq 0 \tag{43}$$

Dimostrazione del teorema della Permanenza del Segno. :

Per assunrdo, supponiamo $l < 0$ e definiamo $\varepsilon := -\frac{l}{2} > 0$, poichè $\exists \lim_{n\to+\infty}(a_n)$ abbiamo:

$\exists N(l) \geq 0 \mid n \geq N(\varepsilon) \implies (l-\varepsilon) < a_n < (l+\varepsilon)$

Sostituiamo $\varepsilon = -\frac{l}{2}$ e otteniamo: $a_n < l + \varepsilon = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$ che abbiamo definito essere negativo

$\implies$ questo è assurdo perchè per ipotesi $a_n \geq 0 \, \forall \, n \geq 0$

$\square$

2. Teorema della monotonia: è una conseguenza del Teorema 43 ed è utilizzato nelle succeccessioni complicate per trovare degli intorni nei quali è contenuto il limite:

$$\begin{cases} se \; a_n \leq 0 \\ \exists \, l_1 := \lim_{n\to+\infty}(a_n) \\ \exists \, l_2 := \lim_{n\to+\infty}(b_n) \end{cases} \implies l_1 \leq l_2 \tag{44}$$

Dimostrazione del teorema della monotonia. :

$l_1 - l_2 = c$ per il teorema della somma dei limiti

Essendo $a_n > b_n \implies a_n - b_n \geq 0$

$\implies$ di conseguenza: $\lim_n(a_n - b_n) > 0$ per teorema della permanenza del segno (43)

$\lim_n(a_n - b_n) > 0 \implies l_1 - l_2 > 0 \implies l_1 > l_2$

$\square$

3. Teorema 3: il prodotto di una successione che converge a zero (infinitesimale) ed una successione limitata da come risultato una successione convergente a zero:

$$\begin{cases} se \; \lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0 \\ \{b_n\}_{n\geq 0} \text{ è limitato (no caso indeterminazione)} \end{cases} \implies \exists \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = 0 \tag{45}$$

Dimostrazione della propriètà 3. :

Dati due limiti $\lim_n a_n = 0$ e $\lim_n b_n$ limitato: $\implies \big(\lim_n a_n\big)\cdot\big(\lim_n b_n\big) = 0 \cdot \big(\lim_n b_n\big)$

Ma essendo $\big\{b_n\big\}_{n\geq 0}$ limitata per ipotesi $\implies 0 \cdot \lim_n b_n = 0$

Ciò significa che: $\big(\lim_n a_n\big)\cdot\big(\lim_n b_n\big) = \big(\lim_n a_n\big)\cdot\big(a_1 \cdot b_1\big) = 0$

$\square$

4. Teorema di Cauchy:

Theorem 6.1. *se la successione è convergente (esiste limite finito), allora i punti della successione oltre ad una certa soglia sono vicini tra di loro (si accumulano i punti fra loro stessi)[nella formula non è coinvolto il valore del limite (solo nella dimostrazione)]:*

Se $\exists\big(\lim_n(a_n)\big) \in \mathbf{Q} \implies$:

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \geq 0 \mid n, m \geq N(\varepsilon) \implies |a_n - a_m| < \varepsilon \tag{46}$$

Dimostrazione del Teorema di Cauchy. ;

Sia $l := \lim_{n\to+\infty} a_n$ al valore limite $\quad , \quad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \geq 0 \mid n, m \geq N(\varepsilon) \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$

Quindi se $n, m \geq N(\varepsilon)$ si ha: $|a_n - a_m| = |(a_n - l) + (l - a_m)| \leq |a_n - l| + |a_m - l| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

$\implies$ il Teorema di cauchy è condizione necessaria affinchè una successione converga verso un valore definito e limitato (significa che esiste il limite finito)

$\implies$ il Teorema di cauchy è condizione sufficiente nell'insieme R dei numeri reali, nell'insieme Q dei numeri razionali non è sufficiente, per ciò è necessario introdurre e costrire l'insieme R.

□

Procedimento esercizio per verificare se una successione è di Cauchy in **Q**:

(a) Data una successione $x_n = (1 + \frac{1}{n^2})$ cerchiamo per quali valori n, m vale: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad , \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$
(b) Per la disugualianza triangolare (12) sappiamo che $|x_n - x_m| \geq |x_n| - |x_m| =$ perchè in questo caso sono elevati alla seconda $= x_n - x_m$
(c) Se $x_n, x_m \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies |x_n - x_m| \leq (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$
(d) Cerchiamo i valori m, n che soddisfano questa equazione e scegliamo una soglia $N(\varepsilon)$ pari alla soluzione (molto grande)
(e) Quindi abbiamo $m, n >$ *soluzione* e possiamo dire che la successione ripetta il teorema di Cauchy.

6.5 Insieme quoziente

Definiamo l'insieme quoziente:

Definition 6.3. *Sia X un insieme, una relazione di equivalenza su X è un sottoinsieme* **R** *del prodotto cartesiano di X per se stesso:*

$$\mathbf{R} \subset \{X \times X\} \tag{47}$$

Le proprietà dell'insieme quoziente sono le seguenti, inoltre se una relazione ripetta tutte e tre le seguenti prorietà, essa è difinita relazione dei equivalenza:

1. Riflessività: $\quad (x, x) \in \mathbf{R}\, \forall\, x \in X \quad ,$ ovvero che se x è sempre in relazione con se stesso
2. Transitività: $\quad (x, y), (y, z) \in \mathbf{R} \implies (x, z) \in \mathbf{R} \quad ,$ ovvero che se x è in relazione con y e y è in relazione con z, allora anche x è in relazione con z
3. Simmetricità: $\quad (x, y) \in \mathbf{R} \implies (y, x) \in \mathbf{R} \quad ,$ ovvero che se x è in relazione con y, allora anche y è in relazione con x

L'insieme quozione si può scrivere nella notazione: $[x]_{\mathbf{R}} := \Big\{ y \in X \mid x\, in\, relazione\, con\, y \Big\} \subset X$

Definiamo la classe di equivalenza:

Definition 6.4. *L'insieme quozionete forma la classe di equivalenza secondo una specifica regola di equivalenza, l'insieme X di equivalenza è l'unione fra le classi di equivalenza di tale insieme:*

$$X/\mathbf{R} := \Big\{ x_{\mathbf{R}} \mid x \in X \Big\} \tag{48}$$

Ad esempio: $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ sono due rappresentanti della stessa classe di equivalenza dello stesso numero razionale.

I numeri razionali (**Q**) sono l'insieme quozionte $\frac{m_0}{n_0} = \frac{m_1}{n_1}$ con $n_0, n_1 \neq 0$ se rappresentano lo stesso numero razionale.
In simboli: $m_0 \cdot n_1 = m_1 \cdot n_0 \quad , \quad$ con $m_0, m_1, n_0, n_1 \in \mathbf{Z}$
La relazione di equivalenza si indica con "$\sim$": $\quad (m_0, n_0) \sim (m_1, n_1)$

7 Numeri Reali

7.1 Costruzione dell'insieme dei numeri Reali

Dopo aver dimostrato che è necessario completare la linea dei numeri razionali (dimostrazione 5.2.6), andiamo a costruire l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali.

7.1.1 Definizione

Definition 7.1. *Sia:* $X := \{$*insieme delle successioni di Cauchy dei numeri razionali*$\}$
$\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathbf{Q}$ *sono relazioni se* $\lim_{n \to +\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$
L'insieme dei numeri Reali è l'insieme quoziente fra l'insieme X delle relazioni di Cauchy e R che è una relazione di equivalenza, quindi devono valere la riflessività, la simmetricità e la transitività:

$$\mathbf{R} = X/R \tag{49}$$

7.1.2 Operazioni algeriche in R

Considero $\mathbf{R} = [\{a_n\}]_{\mathbf{R}}\,, [\{b_n\}]_{\mathbf{R}} \in X/R$:

- Somma: $[\{a_n\}]_{\mathbf{R}} + [\{b_n\}]_{\mathbf{R}} := [\{a_n + b_n\}]_{\mathbf{R}}$
- Prodotto: $[\{a_n\}]_{\mathbf{R}} \cdot [\{b_n\}]_{\mathbf{R}} := [\{a_n \cdot b_n\}]_{\mathbf{R}}$

Queste operazioni in $\mathbf{R}$ hanno le stesse proprietà di quando si opera in $\mathbf{Q}$, come associativa, distributiva, elemento neutro; oltre a queste, i numeri razionali sono ordinati (non ci sono discontinuità nella linea dei numeri, ad esempio $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$).

Ora andremo a spiegare cosa significa che l'insieme dei numeri reali è ordinato:
Avremo che $[\{a_n\}]_{\mathbf{R}}$ è positivo se:

- è vero che:
$$\exists\, q > 0\,,\ \mathbf{N} \geq 0 \,|\, n \geq N \implies a_n \geq q \tag{50}$$
- ad esempio, la successione $\frac{1}{n}$ è rappresentante della classe di equivalenza dello zero.
- inoltre sappiamo che:
$$[\{a_n\}]_{\mathbf{R}} < [\{b_n\}]_{\mathbf{R}}\ se\ [\{b_n\}]_{\mathbf{R}} - [\{a_n\}]_{\mathbf{R}} > 0 \tag{51}$$
- siccome stiamo considerando delle successioni di Cauchy, siamo sicuri che il limite sia o positivo, o negativo, o zero.
- di conseguenza o $a > b$ o $b > a \implies$ si ha un ordinamento forte.

7.2 Immersione di Q in R

Consideriamo la funzione $j:\ \mathbf{Q} \implies \mathbf{R}$ tale che:

$$j(q) = \Big[\{\alpha\}_n\Big]_{\mathbf{R}} \in \mathbf{R} \tag{52}$$

È una successione costante, quindi convergente, di Cauchy e posso trovare l'insieme della classe di equivalenza.
Due classi A e B sono equivalenti se un rappresentante della classe A è anche rappresentante della classe B.
Si può facilmente dimostrare che j è iniettiva e nel codominio è biunivoca, ciò significa che ad ogni $x \in \mathbf{Q}$ corrisponde un $x_1 \in \mathbf{R}$.
Controllo se valgono le proprietà anche in $\mathbf{R}$:

- Somma: $j(q_1) + j(q_2) = j(q_1 + q_2)$
- Prodotto: $j(q_1) \cdot j(q_2) = j(q_1 \cdot q_2$

Ciò per dimostrare che non si è perso nulla nell'immersione di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$, infatti valgono ancora le proprietà.

Bisogna definire cosa è un intervallo in $\mathbf{R}$:

Definition 7.2 (Limite in $\mathbf{R}$)**.** *Considerati due numeri reali $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$:*

$$(r_1, r_2) := \{x \in \mathbf{R} \,|\, r_1 < x < r_2\} \subset \mathbf{R} \tag{53}$$

Ora possiamo definire il limite in $\mathbf{R}$:

Definition 7.3 (Limite in $\mathbf{R}$)**.** *Considero $r_n \in \mathbf{R}$, $l \in \mathbf{R}$, si dirà che r_n converge a l se:*

$$\forall\, \varepsilon > o\,,\, \exists\, N(\varepsilon) \,|\, n \geq N(\varepsilon) \implies r_n \in \big(l - \varepsilon, l + \varepsilon\big) \tag{54}$$

Possiamo afferna che le proprietà dei limiti di successioni razionali restano vere anche per limiti di successioni di numeri reali; ad esempio anche in $\mathbf{R}$ è vero che la somma di limiti è pari al limite della somma.
Ora spieghiamo e dimostriamo un teorema fondametale conseguente a quello di Cauchy in $\mathbf{R}$:S

Theorem 7.1 (Teorema fondamentale di completezza dei numeri reali)**.** *la condizione di Cauchy per successioni di numeri reali è necessaria e suffciente per la convergenza.*

Theorem 7.2 (Convergenza di successioni monotone limitate)**.** *Sia $x_n \in \mathbf{R}$ una successione di numeri reali monotona crescente (ma vale anche per i decrescenti)...:*

$$x_n \leq x_n + 1 \,\forall\, n \geq 0 \tag{55}$$

...e superiormente limitata (M è una barriera):

$$\exists\, M \in \mathbf{R} \,|\, x_n \leq M \,\forall\, n \geq 0 \tag{56}$$

$\implies$ *allora la successione $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ è di Cauchy e quindi è convergente, cioè $\exists\, \lim_{n \to +\infty}(x_n) \in \mathbf{R}$ (senza necessariamente sapere il valore verso il quale converge il limite).*

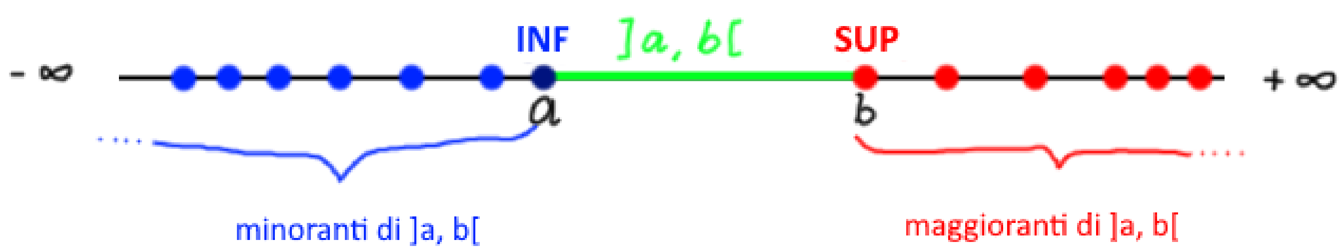


Figura 17: Inferiore - Superiore - Maggiorante - Minorante

7.3 Completezza dei numeri Reali

7.3.1 Convergenza di successioni monotone e limitate

7.3.2 Esistenza del Sup() per insiemi superiormente limitati

7.3.3 Teorema di Bolzano-Weistrass

COMPLETEZZA DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI $\mathbb{R}$.

FABIO CIPRIANI

1. Completezza dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ la condizione di Cauchy e' necessaria e sufficiente per la convergenza di successioni. Da questa proprieta' di completezza ne seguono altre tre che dimostriamo qui di seguito. La prima riguarda la convergenza di successioni monotone, la seconda l'esistenza dell'estremo superiore di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ mentre la terza concerne l'esistenza di punti di accumulazione di sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$.

Theorem 1.1. *(Convergenza di successione monotone e limitate in $\mathbb{R}$) Sia $\{x_n \in \mathbb{R} : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ una successione monotona crescente (risp. decrescente) e superiormente (risp. inferiormente) limitata. Allora la successione e' convergente in $\mathbb{R}$.*

Proof. Limiteremo la dimostrazione alle successioni crescenti superiormente limitate. Per la completezza di $\mathbb{R}$ e' sufficiente mostrare che la successione possiede la proprieta' di Cauchy seguente:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \text{esiste} \qquad N \geq 1 \qquad \text{tale che se} \qquad n, m \geq N \qquad \text{allora} \qquad |x_n - x_m| < \varepsilon\,.$$

Supponiamo, per assurdo, che la successione non sia di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$ si avrebbe che

$$\forall\; N \geq 1 \qquad \text{esistono} \qquad n_N\,, m_N \geq N \qquad \text{tale che} \qquad |x_{n_N} - x_{m_N}| \geq \varepsilon\,.$$

Possiamo supporre che $m_N \leq n_N$ per ogni $N \geq 1$ di modo che, essendo la successione crescente si abbia

$$x_{n_N} - x_{m_N} = |x_{n_N} - x_{m_N}| \geq \varepsilon\,.$$

Per $N_1 := 1$ siano quindi $n_1 \geq m_1 \geq 1$ tali che $x_{n_1} \geq \varepsilon + x_{m_1}$,
per $N_2 := n_1$ siano quindi $n_2 \geq m_2 \geq N_2 = n_1$ tali che $x_{n_2} \geq \varepsilon + x_{m_2}$,
...
per $N_{k+1} := n_k$ siano quindi $n_{k+1} \geq m_{k+1} \geq N_{k+1} = n_k$ tali che $x_{n_{k+1}} \geq \varepsilon + x_{m_{k+1}}$,
....
Poiche' la successione e' crescente abbiamo che $m_{k+1} \geq n_k$ implica che $x_{m_{k+1}} \geq x_{n_k}$ e di conseguenza che

$$x_{n_{k+1}} \geq \varepsilon + x_{m_{k+1}} \geq \varepsilon + x_{n_k} \geq \cdots \geq k\varepsilon + x_{n_1} \geq k\varepsilon + x_1 \qquad \forall \quad k \geq 1.$$

Quindi

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_{k+1}} = +\infty\,.$$

Poiche' cio' contraddice l'ipotesi di limitatezza superiore, la successione e' necessariamente di Cauchy. $\square$

Esercizio. Mostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ cioe' che l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni razionali.

Esercizio. Mostrare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ cioe' che l'equazione $x^2 = 3$ non ha soluzioni razionali.

Esercizio. Sia $p \in \mathbb{P}$ un numero primo. Mostrare che $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ cioe' che l'equazione $x^2 = p$ non ha soluzioni razionali. **Suggerimento**: ogni numero naturale $m \in \mathbb{N}$ puo' essere decomposto in maniera unica come prodotto di numeri primi

$$m = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \qquad p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}\,, \qquad n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\,.$$

Example 1.2. La successione definita per ricorrenza da

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad n \geq 1\,,$$

converge al numero $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Poiche' $x_1 = 2 > 0$ per definizione e, se supponiamo $x_n > 0$, dalla relazione di ricorrenza, segue che $x_{n+1} > 0$, per il Principio di Induzione si deduce che $x_n > 0$ per $n \geq 1$ per cui la successione e' ben definita (in particolare cioe' $x_n \neq 0$ per $n \geq 1$) e inferiormente limitata.

Poiche' $x_1 = 2 \in \mathbb{Q}$ per definizione e, se supponiamo $x_n \in \mathbb{Q}$, dalla relazione di ricorrenza, segue che $x_{n+1} \in \mathbb{Q}$, per il Principio di Induzione si deduce che $x_n \in \mathbb{Q}$ per $n \geq 1$ per cui la successione e' formata da numeri razionali.

Poiche' per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $(a-b)^2 \geq 0$, ne segue la disuguaglianza $2ab \leq a^2+b^2$. La relazione di ricorrenza implica allora che per $n \geq 1$ si abbia

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad \Rightarrow \qquad 2 + x_n^2 = 2x_n x_{n+1} \leq x_n^2 + x_{n+1}^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2 \leq x_{n+1}^2\,.$$

Poiche' $x_1^2 = 4 > 2$ si ha

$$x_n^2 \geq 2 \qquad \forall \quad n \geq 1\,.$$

Poiche' per $n \geq 1$ si ha

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \Big(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\Big) = \frac{x_n}{2} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \geq 0,$$

la successione e' monotona decrescente e inferiormente limitata e quindi, per il Teorema 1.1 convergente in $\mathbb{R}$. Sia $l := \lim_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R}$ il suo limite. Infine, poiche' la relazione di ricorrenza implica che

$$l = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\Big) = \frac{l}{2} + \frac{1}{l}\,,$$

deduciamo che il numero l e' la soluzione positiva dell'equazione $l^2 = 2$, cioe' che $l = \sqrt{2}$.

Esercizio. Siano $k \geq 1$ intero e $p > 0$ fissati. Si scelga $x_1 \in \mathbb{N}$ tale che $x_1^k \geq p$ e si mostri che la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} := \frac{k-1}{k} x_n + \frac{p}{k x_n^{k-1}} \qquad n \geq 1\,,$$

converge al numero $p^{1/k} \in \mathbb{R}$.
Suggerimento: si usi la disuguaglianza di Bernoulli: $a^k \geq (1-k) + ka$ valida per $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$.

Definition 1.3. (Estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo)
Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, un numero $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e' detto **extremo superiore di** A se

- $\overline{x}$ un **maggiorante di** A
$$x \in A \Rightarrow x \leq \overline{x}$$
- e se $\overline{x}$ e' il **minimo dei maggioranti di** A nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$, $\overline{x} - \varepsilon$ non e' un maggiorante di A, esiste cioe' $x \in A$ tale che $\overline{x} - \varepsilon < x$.

Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, un numero $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e' detto **extremo inferiore di** A se

- $\overline{x}$ un **minorante di** A
$$x \in A \Rightarrow x \geq \overline{x}$$
- e se $\overline{x}$ e' il **massimo dei minoranti di** A nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$, $\overline{x} - \varepsilon$ non e' un minorante di A, esiste cioe' $x \in A$ tale che $\overline{x} - \varepsilon > x$.

Se esiste, l'estremo superiore (risp. inferiore) di A si indica con $\sup A$ (risp. $\inf A$). Se l'estremo superiore (risp. inferiore) appartiene all'insieme, $\sup A \in A$ (risp.$\inf A \in A$), allora e' detto **massimo** (risp. **minimo**) e indicato con $\max A$ (risp. $\min A$).

Example 1.4. Se $A = (a, b)$ allora $\sup A = b$, $\inf A = a$ e non esistono $\max A$ e $\min A$. Se $B = [a, b]$ allora $\sup A = \max A = b$, $\inf A = \min A = a$.

Esercizio. Determinare, se esistono, $\sup A\,, \inf A\,, \max A\,, \min A$ di
$$A := \{(-1)^{n+1} - \frac{1}{n} : n \geq 1\}\,.$$

Esercizio. Sia $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la successione dell'Esempio 1.2. Determinare $\inf A$.

Se un insieme A **non e' superiormente (risp. inferiormente) limitato** allora non esistono maggioranti (risp. minoranti) ne tantomeno esiste $\sup A$ (risp. $\inf A$). Viceversa

Theorem 1.5. *(Esistenza dell'estremo superiore per insiemi superiormente limitati)* *Se $A \subset \mathbb{R}$ e' superiormente limitato, allora esiste* $\sup A \in \mathbb{R}$.

Proof. Poiche' A e' superiormente limitato, esiste $b_0 \in \mathbb{R}$ maggiorante di A:

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq b_0 .$$

Sia $a_0 \in A$ un elemento fissato di A di modo che

$$[a_0\,, b_0] \cap A \neq \emptyset .$$

Sia $c := \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio di $[a_0\,, b_0]$ e consideriamo i due sub-intervalli

$$[a_0\,, c] \qquad \text{e} \qquad [c\,, b_0] .$$

Evidentemente in almeno uno dei due sub-intervalli vi sono elementi di A. Ne scegliamo uno dei due, denotandolo con $[a_1\,, b_1]$, optando per quello di destra se entrambe le meta' contengono elementi di A. Evidentemente abbiamo che

$$[a_1\,, b_1] \cap A \neq \emptyset$$

e che b_1 e' un maggiorante di A:

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq b_1 .$$

Iterando questo procedimento (detto di dicotomia) otteniamo una successione decrescente di intervalli

$$\cdots \subset [a_{n+1}\,, b_{n+1}] \subset [a_n\,, b_n] \cdots \subset [a_1\,, b_1] \subset [a_0\,, b_0]$$

tali che per ogni $n \geq 1$ si ha che b_n e' maggiorante di A

$$n \geq 1\,, \qquad x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq b_n \tag{1.1}$$

e che per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$[a_n\,, b_n] \cap A \neq \emptyset .$$

Poiche ' la successione $\{a_n\}$ e' crescente e superiormente limitata da b_0

$$\ldots a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_0 ,$$

la successione $\{b_n\}$ e' decrescente e inferiormente limitata da a_0

$$a_0 \leq \ldots \ldots b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0 ,$$

per il Teorema 1.1, esiste $\overline{x} \in \mathbb{R}$ limite comune delle due successioni

$$\overline{x} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

Mostriamo ora che proprio $\overline{x}$ e' $\sup A$. Infatti, per il teorema del confronto, passando al limite nella (1.1) abbiamo che

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq \overline{x}$$

e che quindi $\overline{x}$ e' un maggiorante di A. Se, per assurdo, non fosse $\overline{x} = \sup A$, esisterebbe $\varepsilon > 0$ per il quale $\overline{x} - \varepsilon$ sarebbe un maggiorante di A, strettamente minore di $\overline{x}$:

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq \overline{x} - \varepsilon < \overline{x} .$$

Ma poiche' $\overline{x} = \lim_{n\to+\infty} a_n$, esisterebbe $n \geq 1$ per cui $\overline{x} - \varepsilon < a_n < \overline{x}$. Cio' contradirebbe il fatto che, per costruzione, $[a_n\,, b_n] \cap A \neq \emptyset$. $\square$

Definition 1.6. (Punti di accumulazione)
Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e' detto di **accumulazione per** E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (E \setminus \{\overline{x}\}) \cap (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) \neq \emptyset$$

cioe' se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in E \setminus \{\overline{x}\} \quad \textit{such that} \ |x - \overline{x}| < \varepsilon$$

cioe' se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ l'insieme \ \ E \cap (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) \ \ e' \ infinito \ (ha \ cioe' \ infiniti \ elementi)\,.$$

L'insieme dei punti di accumulazione di $E \subseteq \mathbb{R}$ e' detto **insieme derivato di** E e si denota con $\mathbf{E}'$.

Dato un insieme A, indicheremo con il simbolo $\sharp(\mathbf{A}) = \infty$ il fatto che abbia infiniti elementi (cioe' che non sia un insieme finito).

Theorem 1.7. *(Proprieta' di Bolzano-Weierstrass.)*
Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato e infinito. L'insieme dei punti di accumulazione E' di E e' allora non vuoto:

$$E' \neq \emptyset\,.$$

Proof. Poiche' E e' limitato, esiste un intervallo limitato $[a_0\,, b_0] \subset \mathbb{R}$ che lo contine: $E \subseteq [a_0\,, b_0]$. Sia $c := \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio di $[a_0\,, b_0]$. Evidentemente almeno uno dei due sub-intervalli

$$[a_0\,, c] \qquad \text{e} \qquad [c\,, b_0]$$

contiene infiniti punti di E. Ne scegliamo uno e lo denotiamo con $[a_1\,, b_1]$. Avremo che $[a_1\,, b_1] \cap E$ e' infinito:

$$\sharp([a_1\,, b_1] \cap E) = \infty\,.$$

Iterando questo procedimento (detto di dicotomia) otteniamo una successione decrescente di intervalli

$$\cdots \subset [a_{n+1}\,, b_{n+1}] \subset [a_n\,, b_n] \cdots \subset [a_1\,, b_1] \subset [a_0\,, b_0]$$

tali che per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$\sharp([a_n\,, b_n] \cap E) = \infty\,.$$

Poiche' la successione $\{a_n\}$ e' crescente e superiormente limitata da b_0

$$\ldots a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_0\,,$$

la successione $\{b_n\}$ e' decrescente e inferiormente limitata da a_0

$$a_0 \leq \ldots\ldots b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0\,,$$

per il Teorema 1, esiste $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tale che

$$\overline{x} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n\,.$$

Scegliendo $x_n \in [a_n\,, b_n] \cap E$ con $x_n \neq \overline{x}$ (cio' si puo' fare poiche' in $[a_n\,, b_n] \cap E$ vi sono infiniti punti ed al piu' uno solo di essi puo' coincidere con $\overline{x}$), otteniamo una successione $\{x_n\} \subseteq E \setminus \{\overline{x}\}$ tale che

$$a_n \leq x_n \leq b_n \qquad n \geq 1\,.$$

Per il teorema del confronto (per limiti di successioni) abbiamo che $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ e che quindi $\overline{x} \in E'$. $\square$

8 Numeri Complessi

8.1 Definizione e costeuzione del campo complesso

Definition 8.1. *I numeri complessi costituiscono un insieme che estende l'insieme dei numeri reali ed in cui, a partire dalla definizione di unità immaginaria, è possibile estrarre le radici ad indice pari di numeri negativi e risolvere le equazioni di secondo grado con discriminante negativo.*

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \tag{57}$$

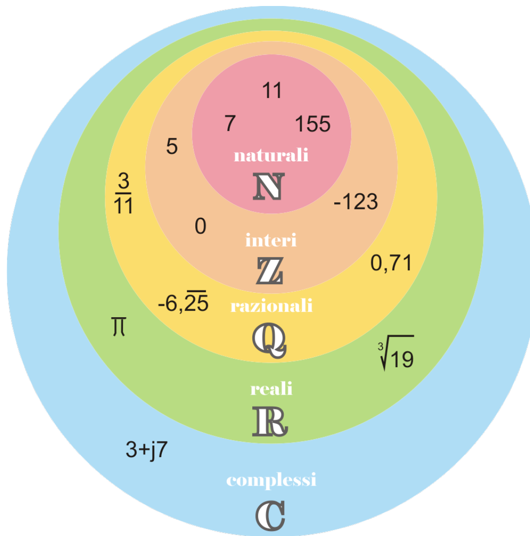


Figura 18: Insiemi numerici

Nell'insieme dei numeri complessi esiste la soluzione dell'equazione $z^2 + 1 = 0 \implies z^2 = -1$:

$$\exists\, z \in \mathbf{C}, z \notin \mathbf{R} \mid z^2 = -1 \tag{58}$$

Theorem 8.1. *Tutte le equazioni hanno soluzione nell'insieme dei numeri complessi (**C**).*

Il campo complesso **C** si ottiene dal prodotto scalare fra **R** e se stesso, di conseguenza un numero complesso è rappresentato da una coppia di numeri reali:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad , \quad z = (a, b) \in \mathbf{R} \tag{59}$$

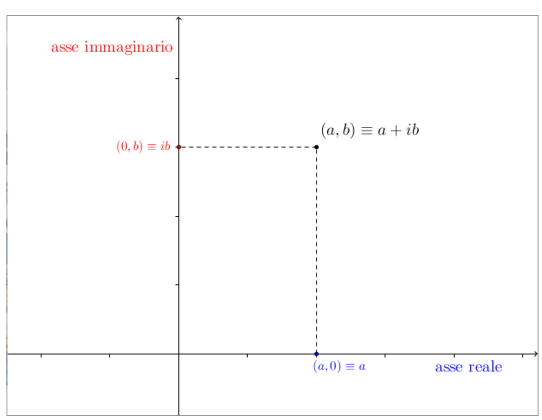


Figura 19: Piano di Gauss dei numeri Complessi

8.2 Operazioni e proprietà in C

Definizione delle operqzioni nel campo complesso:

- Somma: si segue la rgola del parallelogramma

$$\begin{cases} z = (a,b) \in \mathbf{C} \\ w = (c,d) \in \mathbf{C} \end{cases} \implies z + w := (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

- Prodotto:
  $z \cdot w := (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

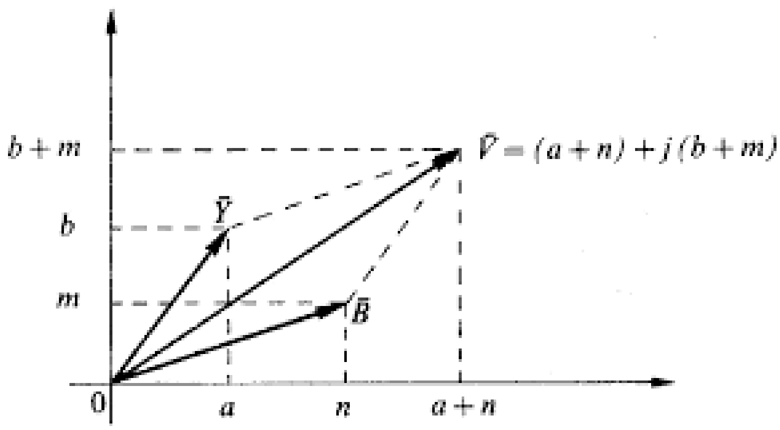


Figura 20: Somma di numeri complessi (parallelogramma)

Proprietà delle operazioni ereditate dai numeri reali nel campo complesso:

1. Communtatività:
   - $z + w = w + z$
   - $z \cdot w = w \cdot z$
2. Associatività:
   - $z + (w + v) = (z + w) + z$
   - $z \cdot (w \cdot v) = (z \cdot w) \cdot z$
3. Distributività:
   - $z \cdot (w + v) = z \cdot w + z \cdot v$
4. Elemento neutro:
   - Somma: $(0,0)$ infatti $(a,b) + (0,0) = (0+a, 0+b) = (a,b)$
   - Prodotto: $(1,0)$ infatti $(a,b) \cdot (1,0) = (1a - 0b, 0a + 1b) = (a,b)$

8.3 Immersione di R in C

Funzione di immersione dell'insieme dei numeri Reali nell'insieme dei numeri Complessi:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \quad , \quad f(x) = (x, 0) \; \forall \, x \in \mathbf{R} \tag{60}$$

Questa funzione è iniettiva infatti se $f(x) = f(y) \implies (x,0) = (y,0) \implies x = y$

Noi sappiamo che l'insieme $\mathbf{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbf{C}$, i numeri Reali sono rappresentati dall'asse x nel piano

di Gauss e sono quelli con la coordinata b uguale a zero, ad esempio $(4, 0)$ fa parte della stessa classe di equivalenza del numero $4 \in \mathbf{R}$.
Per comodità utilizzeremo una notazione ridotta per rappresentare i numeri Complessi che fanno parte del sottoinsieme dei numeri Reali: $f(x) = (x, 0) \to x$ e in questo caso stiamo rapppresentando il numero razionale x sempre nel campo complsso Ad esempio:

- Somma: $f(x) + f(y) = (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0 + 0) = (x + y, 0) = f(x + y)$
- Prodotto: $f(x) \cdot f(y) = (x, 0) \cdot (y, 0) = (xy - 0, 0x + 0y) = f(x \cdot y, 0) = f(x \cdot y)$

8.4 Forma algebrica

considero un numero $z = (a, b) \in \mathbf{C} \to (a, b) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + (0, b) = a + (0, b) = a + (0, 1) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = a + (0, 1) \cdot f(b) = a + (0, 1)b = \underbrace{a + i \cdot b}_{\text{forma algebrica}}$

Utilizzeremo più spesso la notazione dei numeri complessi in forma algebrica perchè è più comoda nelle operazioni (soprattutto la moltiplicazione in $\mathbf{C}$):

$$(a, b) = a + i \cdot b \tag{61}$$

Abbiamo posto $i = (0, 1) \in \mathbf{C}$ e viene detta unità immaginaria:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i = (0, 1)$
- $i^2 = -1 = (-1, 0)$ infatti $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (0, 1) = f(-1)$ // i è il numero complesso soluzione dell'equazione $x^2 = -1$, ovvero $sol(x^2 = -1) = i$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1 = i^0$
- I valori di i si ripetono ciclicamente con un periodo di 2π.

Nella forma algerbra possiamo distinguere due parti che compongono il numero complesso, consideriamo il numero complesso $z = (a, b) = a + i \cdot b$:

- Parte reale: $Re(z) := a \quad , \quad a \in \mathbf{R}$
- Parte immaginaria: $Im(z) := b \quad , \quad b \in \mathbf{R}$

Di conseguenza possiamo scrivere: $z = Re(z) + i \cdot Im(z) = a + i \cdot b$
I coefficienti $a, b \in \mathbf{R}$ non comprendono l'unità imaginaria.
Ad esempio $z = 2 - 3i \implies \begin{cases} Re(z) = 2 \\ Im(z) = 3 \end{cases}$

8.4.1 Operazioni in forma algebrica

- Somma:
  $z + w = (a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = p.assoc = (a + c) + (i \cdot b + i \cdot d) = p.distr = (\underbrace{a + c}_{\text{a'}}) + i \cdot (\underbrace{b + d}_{\text{b'}})$ con $a', b' \in \mathbf{R}$
- Prodotto:
  $z \cdot w = (a + i \cdot b)(c + i \cdot d) = (a \cdot c + i \cdot a \cdot d + i \cdot b \cdot c + i \cdot b \cdot i \cdot d) = \big(a \cdot c + i \cdot (a \cdot d + b \cdot c) + \underbrace{i^2}_{= -1} \cdot b \cdot d\big) =$

  $(ac - bd) + i \cdot (ad + bc) = (a, b)(c, d)$

8.4.2 Opposto, Inverso e Coniugato

- Opposto: l'opposto $z = (a, b)$ è $(-a, -b)$
  infatti $z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$

- Inverso: ogni numero diverso da zero in $\mathbf{C}$ ha un reciproco, $z \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq 0 \vee b \neq 0$:

$$w := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \tag{62}$$

- Coniugato: dal punto di vista geometrico corrisponde alla simmetria rispetto all'asse x ($\bar{z}$ si legge zeta segnato/sbarrato)
  $\bar{z} = a - i\,b = \begin{cases} Re(\bar{z}) = Re(z) = a \\ Im(\bar{z}) = -Im(z) = -b \end{cases}$

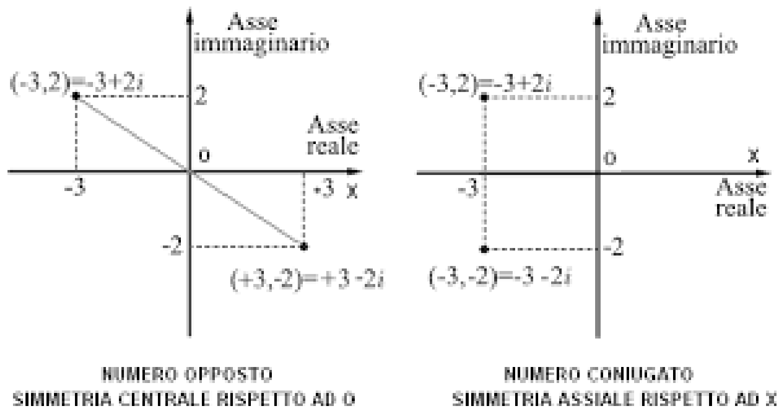


Figura 21: opposto e coniugato di un numero complesso

osservazioni:

- Possiamo osservre xhe un numero complesso è uguale al suo coniugato solo quando è reale: $z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbf{R}$

- Vengono definiti numeri immaginari puri quei punti che giaciono sull'asse y del piano di Gauss (ovvero hanno $Re(z) = 0$), quindi è un multiplo dell'unità immaginaria. Lopposto di un numero immaginario puro è pari al suo coniugato $\bar{z} = -z \Longleftrightarrow Re(z) = 0$

8.4.3 Modulo

Considero un numero immaginario $z = a + i\,b = (a, b)$, il modulo di z è:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} \tag{63}$$

Dal punto di vista geometrico il moduelo corrriponde alla distanza fra l'origine degli assi $(0, 0)$ e il punto $z = (a, b)$:

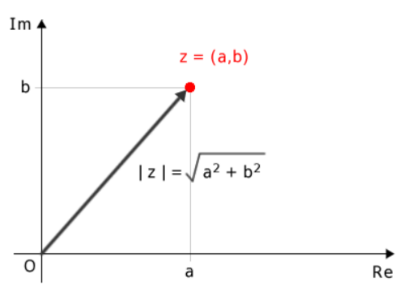


Figura 22: Grafico della funzione modulo in $\mathbf{C}$

Ora considero il modulo della differenza fra due numer complessi z e w:

$$|z - w| = |(a, b) - (c, d)| = |(a - c, b - d)| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \tag{64}$$

Dal punto di vista geometrico, il modulo di una differenza corrisponde alla distanza fra i due punti nel pianno di Gauss.

Proprietà del moduelo:

1. $|z| = |-z|$ (simmetria rispoetto al centro)
2. $|\bar{z}| = |z|$ (simmetria rispetto all'asse reale)
3. $\bar{z} + \bar{w} = z \bar{+} w$
4. $\bar{z} \cdot \bar{w} = z \bar{\cdot} w$
5. $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \implies |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

   Dimostrazione. $z \cdot \bar{z} = (a + i\, b)(a - i\, b) = a^2 - i\, a\, b + i\, a\, b - i^2\, b^2 = a^2 - \underbrace{i^2}_{=-1}\, b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ □

   Questa proprietà è utile per calcolare il reciproco, infatti: $\bar{z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{Re(z) - Im(z)}{|z|^2} =$
   $= \frac{Re(z)}{|z|^2} - i\, \frac{Im(z)}{|z|^2} \implies \begin{cases} Re(\frac{1}{z}) = \frac{Re(z)}{|z|^2} \\ Im(\frac{1}{z}) = -\frac{Im(z)}{|z|^2} \end{cases}$

6. Disuguaglianza triagolare (immagine 12): $|z + w| \leq |z| + |w|$

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \tag{65}$$

8.5 Forma trigonometrica

Considero un numero complesso $z \neq 0 \implies |z| \neq 0$:

$$z = |z| \cdot \frac{\bar{z}}{|z|} = z \cdot w = \begin{cases} \rho = |z| & \textit{modulo} \\ w = \frac{\bar{z}}{|z|} & \textit{angolo} \end{cases} \tag{66}$$

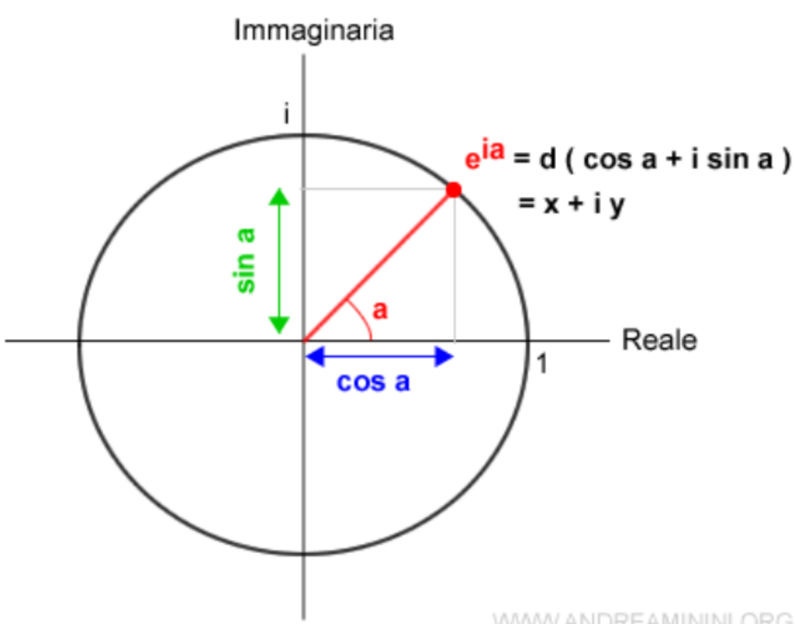


Figura 23: Foma gognometrica dei numeri complessi

È importante sottolineare che $|w| = 1$ e quindi non influisce sul modulo.

Formule della notazione gognometrica:

- Angolo: $w = (\cos\theta + \sin\theta) = \cos\theta + i\ \sin\theta$
- Modulo: $\rho = |z|$
- Numero completo: $z = \rho(cos\theta + i\ \sin\theta)$
- Parte reale: $Re(z) = \rho\cos\theta$
- Parte immaginaria: $Im(z) = \rho\sin\theta$
- Argomento: $Arg(z) = \theta \quad$ (è difinito a meno di un multiplo di 2π)
- $\cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|}$
- $\sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}$
- $\tan(\theta) = \tan(Arg(z)) = \frac{Im(z)}{Re(z)} \quad , \quad Re(z) \neq 0$
- $\cot(\theta) = \cot(Arg(z)) = \frac{Re(z)}{Im(z)} \quad , \quad Im(z) \neq 0$

8.5.1 Formule di De Moivre (I e II)

Prodotto tra numeri complessi nella notazione gognometrica:

- Considero $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1) \in \mathbf{C}$
- Considero $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2) \in \mathbf{C}$
- $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2) = passaggi[i^2 = -1] = \rho_1 \cdot \rho_2\Big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)\Big)$
- $\begin{cases} \rho_1 \cdot \rho_2 = |z_1 \cdot z_2| \quad \text{prodotto dei moduli è il modulo del prodotto} \\ Arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = Arg(\theta_1) + Arg(\theta_2) \quad \text{Argomento del prodotto è la somma dell'argomento dei fattori} \end{cases}$

Elevamento a potenza di numero complesso nella notazione gognometrica:

- Considero $z = \rho_1(\cos\theta + i\ \sin\theta) \in \mathbf{C}$
- $z^k = \rho^k\Big(\cos(k\theta) + i\ sin(k\theta)\Big) \quad \forall\ k \in \mathbf{Z}$
- $\begin{cases} |z^k| = \rho^k = |z|^k \\ Arg(z^k) = k\ Arg(z) \quad \text{con } k \neq 2k\pi \end{cases}$

Esercizio di esempio sull'elevamento a potenza:

1. $(1+i)^8 = \prod_1^8 (1+i) \implies$ molto lungo
2. Sia $z = 1 + i \implies \begin{cases} Re(z) = 1 \\ Im(z) = 1 \end{cases}$
3. Modulo: $\rho = |z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
4. Argomento: sapendo che $Re(z) = 1 = \rho(\cos\theta)$, l'argomento $Arg(z) = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$

5. $(1+i)^8 = z^8 = \rho^8\Big(\cos(8\,\theta) + i\ \sin(8\,\theta)\Big) = (\sqrt{2})^8\Big(\cos(2\pi) + i\ \sin(2\pi)\Big) = 16$

Formule di De Moivre con dimostrazioni:

Theorem 8.2. *Prima formula di De Moivre:*
Considero due numeri complessi $z_k = \rho_k\big(\cos(\theta_k) + i\ \sin(\theta_k)\big) \quad , \quad k = 1, 2$*:*

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)\big) \tag{67}$$

Theorem 8.3. *Seconda formula di De Moivre:*
Considero un numero $w \in \mathbf{C}/\{0\}$ *e* $n \geq 1,\ n \in \mathbf{N}$*, allora l'equazione...:*

$$z^n = w \tag{68}$$

...ha esattamente n-soluzioni $z_0, z_1, .., z_{n-1} \in \mathbf{C}$*, ovvero...:*

$$\sqrt[n]{z_k} = z_k^{\frac{1}{n}} = w \quad \forall\, k = 0, 1, .., n-1 \tag{69}$$

...che sono date da (se $z = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ *):*

$$z_k = \rho^n\big(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)\big) \tag{70}$$

di conseguenza abbiamo che:

$$\begin{cases} Arg(z_k) = \theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \\ |z_k| = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}} \quad , \quad k = 0, 1, .., k-1 \end{cases} \tag{71}$$

Dimostrazione seconda fomrula di De Moivre (67):

- verifichiamo le z_k siano radici (soluzioni) dell'equazione utilizzando la 1° formula di De Moivre (67)

  Dimostrazione. :

  $$z_k^n = \Big(\sqrt[n]{\rho}\big(\cos\theta_k + i\ \sin\theta_k\big)\Big)^n = (\sqrt[n]{\rho})^n\big(\cos(n\theta_k) + i\ \sin(n\theta_k)\big) =$$

  $$= \rho\Big(\cos(\theta + 2k\pi) + i\ \sin(\theta + 2k\pi)\Big) = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta) = w \implies \forall\, k = 0, 1, .., n-1$$

  Sono radici distinte (in questo caso particolare coincidenti) □

- Verifichiamo che non ci siano radici oltre alle z_k:

  Dimostrazione. :
  Supponiamo che esista $\quad z = v(cos\alpha + i\ \sin\alpha) \quad$ che sia soluzione di $\quad z^n = w$
  Il numero complesso z ha modulo $\quad |z| = v > 0 \quad$ e angolo $\quad Arg(z) = \alpha)$
  Allora:

  $$\Big(v\ (\cos\alpha + i\ \sin\alpha\Big)^n = \rho\ (\cos\theta + i\ \sin\theta)$$

  Che corrisponde a

  $$v^n\ \Big(\cos(n\,\alpha) + i\ \sin(n\,\alpha)\Big) = \rho\ (\cos\theta + i\ \sin\theta) \implies v^n = \rho \implies v = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}$$

  Di conseguenza:

  $$n\,\alpha = \theta + 2k\pi \implies \alpha = Arg(z) = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad , \quad k \in \mathbf{Z}$$

  k è sovrabbonadate perchè per $k > n-1$ si aggiunge un angolo giro, quindi non si creano nuove soluzioni

  $$\implies 0 \leq k \leq n-1$$

  Si arriva alla formula:

  $$Arg(z_k) = \theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

  □

Corollary 8.3.1. *Le radici n-esime di* $w \in \mathbf{C}/\{0\}$ *sono vertici di un poligono regolare di n-lati inscritto sulla corconferenza centrata in* $0 \in \mathbf{C}$ *di raggio* $\sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}} = |w|^{\frac{1}{n}}$

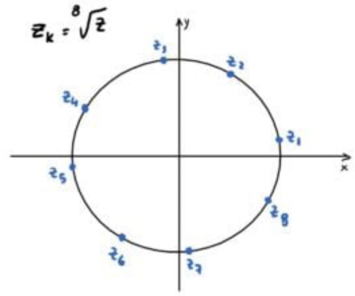


Figura 24: Poligono regolare di n-lati (soluzioni)

8.6 Teorema fondamentale dell'algebra

Definition 8.2. *un poligono è un a funzione* $P: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *del tipo...:*

$$P(z) = c_0 + c_1 \cdot z^1 + c_2 \cdot z^2 + .. + c_n \cdot z^n \tag{72}$$

...dove $c_1, c_2, .., c_n \in \mathbf{C}$ *sono i coefficienti e* $n = gr(P)$ *è il grado del polinomio (esponente massimo con coefficiente non nullo).*

Ad esempio il polinomio $P(z) = z^2 + z + 1$ è di grado $gr(z) = 2$

Definition 8.3. *L'equazione* $P(z)$ *è algebrica di grado n, se le sue soluzioni sono(per definizione) gli zeri di P.*

Theorem 8.4 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *L'equazione* $P(z) = 0$ *ha* $N-$ *soluzioni* w_1, w_2, w_N *a cui corrispondono gli indici* $m_1, m_2, .., m_N \in \mathbf{N}/\{0\}$ *tali che* $m_1 + m_2 + ... + m_N = n + gr(P)$
Infatti:

$$P(z) = c_n(z - w_1)^{m1} \cdot (z - w_2)^{m2} \cdot ... \cdot (z - w_N)^{mN} \tag{73}$$

Si nota subito la grande differenza tra numeri complessi e numeri reali, imfatti nei reali ci sono molti polinomi irriducibili che non sia zzerano e per ciò non può valere anche in $\mathbf{R}$ il teorema fondamentale dell'algebra.

Theorem 8.5 (Teorema di completezza del campo complesso:)**.** *Un'equazione nel campo complesso ha:*

- *sempre almeno una radice per il teorema fondamentale dell'algebra.*
- *le radici sono di numero n per la seconda legge di De Moivre (formula 71).*

8.7 Trasformazioni geometriche nel piano di Gauss

1. Traslazione:
   Sia $z_0 \in \mathbf{C}$, , fissato $T: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$

   $$T(z) := z + z_0 \; \forall \, z \in \mathbf{C} \tag{74}$$

   Di fatto si fa la somma vettoriale con il metodo del parallelogramma, si nota che la traslazione sull'asse reale si ottiene sommando un numero complesso $(a, 0) \in \mathbf{R}$, mentre la traslazione sull'asse immaginario si ottiene sommando un numero complesso puro $(0, a)$.

2. Rotazione:
   Sia $w \in \mathbf{C}$, fissato $|w| = 1$ e considero $R: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $R(z) = w \cdot z$ Il modulo $|R(z)| = |w \cdot z| = \underbrace{|w|}_{=1} \cdot |z| = |z|$ (resta invariato) $\implies R(z)$ appartiene alla stessa circonferenza di z di raggio $|z|$ (centrata in $0 \in \mathbf{C}$).

L'argomento $Arg(z) = \alpha$ con il numero nella forma $w = \cos\alpha + i\ \sin\alpha$, considero $\theta = Arg(z)$
$Arg(z) = \alpha + \theta \implies$

$$R(z) = w \cdot z = |z| \cdot \Big(\cos(\alpha+\theta) + i\ \sin(\alpha+\theta)\Big) \tag{75}$$

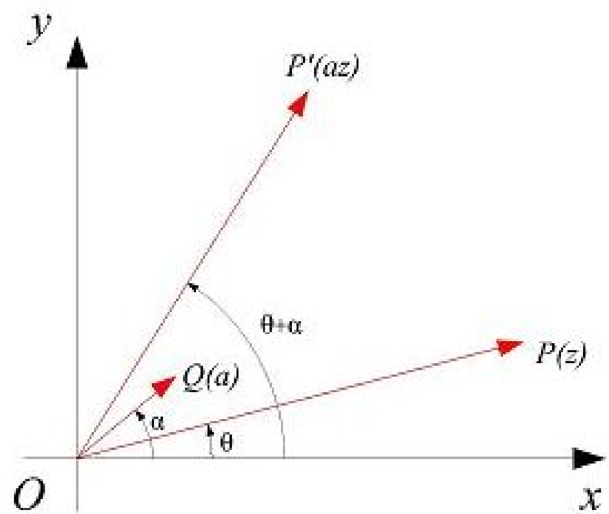


Figura 25: Rotazione piano complesso

3. Dilatazione:
   Fissato $\rho > 0, \quad , \quad$ la funzione $D : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad , \quad D(z) = p \cdot z$ Il modulo è $|D(z)| = |\rho \cdot z| = |\rho| \cdot |z| = \rho \cdot |z|$
   L'argomento $Arg(z) = \underbrace{Arg(\theta)}_{=0} + Arg(z) = Arg(z)$
   Il numero complesso avrà lo stesso argomento ma il raggio della circonferenza (modulo) sarà dilatato di ρ volte.
   $$R(z) = \rho \cdot z = \rho \cdot |z| \cdot \Big(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)\Big) \tag{76}$$

4. Inverisone:
   $I : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad , \quad z = (a, b)$:
   $$I(z) = -z = -(a, b) = (-a, b) \tag{77}$$
   Corrisponde alla simmetria rispetto al punto $(0, 0)$ che è l'origine del piano di Gauss (opposto).

5. Simmetria:
   $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad , \quad z = (a, b)$:
   $$S(z) = \bar{z} = (a, -b) \tag{78}$$
   Corrisponde alla simmetria rispetto all'asse reale e si ottiene il coniugato $\bar{z}$, che ha componnenti $Re(\bar{z}) = Re(z) \quad , \quad Im(\bar{z}) = -Im(z)$.

6. Trasformazione di Zhukovsky :
   $$f : \mathbf{C}/\{0\} \to \mathbf{C} \quad , \quad f(z) = \frac{1}{2} \cdot \big(z + \frac{1}{z}\big) \tag{79}$$
   Ad esempio se considero $|z| = 2 \quad , \quad z = \cos\theta + i\ \sin\theta$:

   $f(z) = \frac{1}{2} \cdot \big(z + \frac{1}{z}\big) = \frac{1}{2} \cdot \big(z + \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}\big) = \frac{1}{2} \cdot \big(z + \frac{\bar{z}}{|z|^2}\big) = 1 = Re(z)$

   Questa funzione non altera l'angolo fra le curve ed è utile nello stidio della dinamica dei fluidi, ciò che viene altrato è la distanza fra i flussi (angoli fra tangente dei flussi resta invariata).

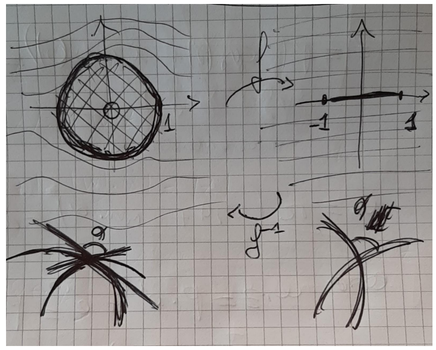


Figura 26: Funzione di Zukowski

8.8 Soluzioni delle equazioni di secondo grado in C

Considero un polinomio di secondo grado $a\,z^2 + b\,z + c = 0 \quad , \quad c \neq 0$:

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{80}$$

Si utilizza come nel campo **R**, ma il discriminante Δ rappresenta già 2 numeri. Nel campo complesso ci sono sempre 2 soluzioni per ogni equazione di secondo grado, al limite le due soluzioni possono essere coincidenti e si dice che sono di molteplicità 2 (nel caso di $\Delta = 0$).

Oltre al 5° grado non ci sono formule per rappresentare gli zeri di un polinomio, per i polinomi di 3° e 4° grado le formule sono estremamente complesse.

Esiste anche la formula ridotta:

$$z_{1,2} = \frac{-b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a} \tag{81}$$

8.9 Forma esponenziale

$$z = \rho\big(\cos\theta + i\ \sin\theta\big) =: \rho \cdot e^{i\cdot\theta} \tag{82}$$

Questa formula verrà dimostrata in seguito (Analisi II), compare la costante 'e' che è il numero di nepero e vale 2,718281828459.
La notazione esponenziale viene utilizzata nei prodotti, considero $w = r(\cos\alpha + i\ \sin\alpha) = z \cdot e^{i\cdot\alpha}$
Il prodotto è:

$$w \cdot z = \rho \cdot e^{i\cdot\theta} \cdot = \rho \cdot r \cdot e^{(i\cdot\theta + i\alpha)} = p \cdot r\big(\cos(\alpha+\theta) + i\ \sin(\alpha+\theta)\big) \tag{83}$$

In questa formula possiamo notare che l'argomento $Arg(z \cdot w) = \theta + \alpha$ e il modulo $|z \cdot w| = \rho \cdot r$

9 Funzioni di variabili Reali

9.1 Definizioni limite e continuità

Definition 9.1 (Limite di funzione)**.** *Considerata una funzione* $f : D \to \mathbf{R} \quad , \quad D \subseteq \mathbf{R}$*, si dice che* $f(x)$ *ha limite* $l \in \mathbf{R}$ *in* $x_0 \in D'$ *se:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, \begin{cases} x \in D \\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \\ x \neq x_0 \end{cases} \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{84}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{85}$$

Ciò significa che esiste una soglia oltre la quale i punti si accumulano verso un valore reale l (D' insieme dei punti di accumulazione).
Viene posto $x \neq x_0$ perchè il limite non comprende il punto, la funzione si avvicina al limite ma non lo raggiunge (resta nell'intorno), può essere il caso di una funzione che si avvicina ad un punto $x_0 \notin D$ che non appartiene al dominio.

Definition 9.2 (Funzione continua)**.** *Se in più* $x_0 \in (D \cap D') \wedge l = f(x_0)$ *si dice che la funzione è continua nel punto* x_0*, in simboli:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, x \in \big((D \backslash \{0\}) \cap (x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)\big) \implies f(x) \in \big(l - \varepsilon, l + \varepsilon\big) \tag{86}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l = f(x_0) \tag{87}$$

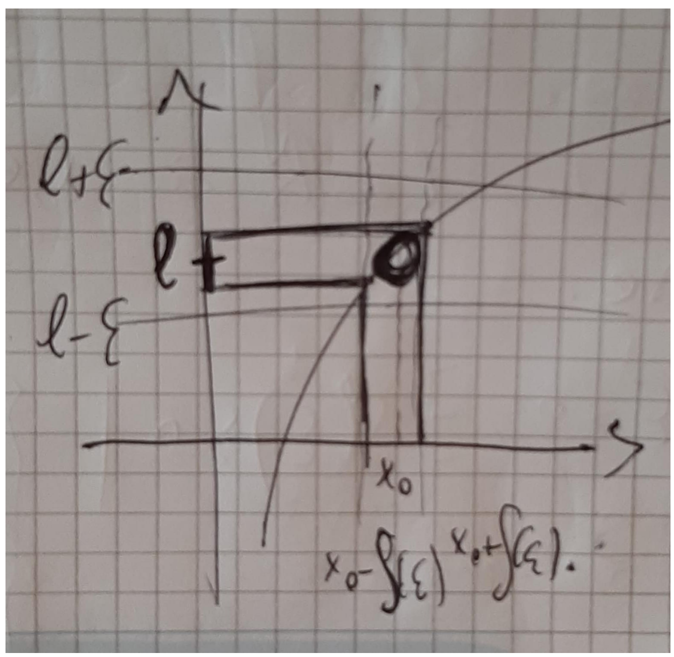


Figura 27: Limite di funzione continua

Si può considerare anche solo un intrno monolaterale di un punto, in questo caso si parla di limite destro e limite sinistro

- Limite destro (relativo all'introno destro):

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = l \tag{88}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, (x_0) < x < (x_0 + \delta(\varepsilon)) \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{89}$$

- Limite sinistro (relativo all'intorno sinistro):

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = l \tag{90}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, (x_0 - \delta(\varepsilon)) < x < (x_0) \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{91}$$

Nel caso in cui la funzione è continua solamente da destra o sinistra possiamo scrivere (esempio con continutità da destra):

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l = f(x) \tag{92}$$

9.2 Asintoto

Definition 9.3 (Asintoto)**.** *Un asintoto è una retta, o più generalmente una curva, alla quale si avvicina indefinitamente una funzione data.*

9.2.1 Asintoto verticale

- Funzione tende a (+) infinito:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \tag{93}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\, \exists\, \delta(M) > 0 \,|\, \begin{cases} x \in D \\ |x - x_0| < \delta(M) \\ x \neq x_0 \end{cases} \implies |f(x)| > M \tag{94}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\, \exists\, \delta(M) > 0 \,|\, x \in \Big((D \backslash \{x_0\}) \cap \big(x_0 - \delta(M), x_0 + \delta(M)\big) \Big) \implies f(x) \in (M, +\infty) \tag{95}$$

- Funzione tende a (-) infinito:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \tag{96}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\, \exists\, \delta(M) > 0 \,|\, \begin{cases} x \in D \\ |x - x_0| < \delta(M) \\ x \neq x_0 \end{cases} \implies |f(x)| < -M \tag{97}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\, \exists\, \delta(M) > 0 \,|\, x \in \Big((D \backslash \{x_0\}) \cap \big(x_0 - \delta(M), x_0 + \delta(M)\big) \Big) \implies f(x) \in (-\infty, M) \tag{98}$$

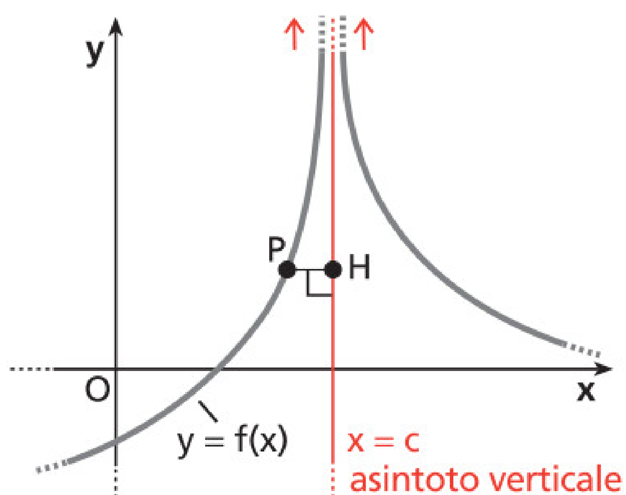


Figura 28: Asintoto verticale

9.2.2 Asintoto orizzontale

Il grafico della funzione si confonde con la semiretta orizzontale (asintoto).

- Dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ non è superiormente limitato e x_0 a (+) infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \tag{99}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{R} \mid \begin{cases} x \in D \\ x > N(\varepsilon) \end{cases} \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{100}$$

- Dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ non è inferiormente limitato e x_0 tende a (-) infinito:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \tag{101}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{R} \mid \begin{cases} x \in D \\ x < -N(\varepsilon) \end{cases} \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{102}$$

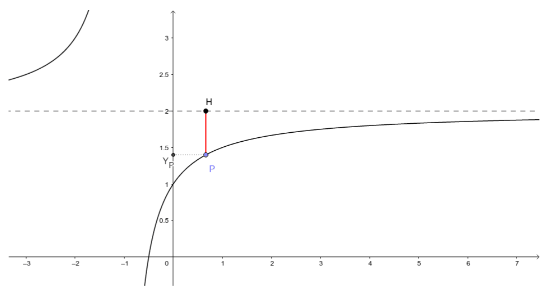


Figura 29: Asintoto orizzontale

9.2.3 Asintoto obliquo

Definition 9.4 (Asintoto obliquo)**.** *Considero una generica retta* $y = mx + q \quad , \quad m \neq 0$ *, viene definito asintoto obliquo se e solo se per* x *che tende a più o meno infinito (*$x \to \pm\infty$*) succede che* $f(x) - (mx + q) \to 0$ *.*

Geometricamnete corrisponde alla distanza tra punto appartenente al grafico e il punto sulla retta $\frac{1}{\infty}$

Condizione necessaria affinchè esista l'asintoto obliquo (devono essere vere entrambe):

- La funzione e la sua proiezione sull'asse x deve essere dello stesso grado per x che tende a infinito:

$$\frac{f(x)}{x} \to m \in \mathbf{R} \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{103}$$

- Se la prima condizione è verificata, allora devo controllare anche che:

$$f(x) - mx \to q \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{104}$$

Definizione formali dell'asintoto:

- Dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ non è superiormente limitato, x_0 tende verso (+) infinito e la funzione tende verso (+) infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \tag{105}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\ \exists\, N(M) \in \mathbf{R} \mid \begin{cases} x \in D \\ x > N(M) \end{cases} \implies |f(x)| > M \tag{106}$$

- Dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ non è inferiormente limitato, x_0 tende verso (+) infinito e la funzione tende verso (-) infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \tag{107}$$

$$\forall\, M \in \mathbf{R},\ \exists\, N(M) \in \mathbf{R} \mid \begin{cases} x \in D \\ x < -N(M) \end{cases} \implies |f(x)| > M \tag{108}$$

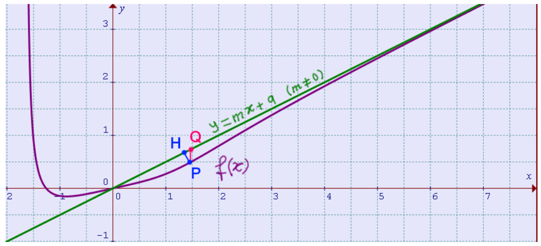


Figura 30: Asintoto obliquo

9.3 Esercizi

9.3.1 Continuità

Verificare la continuità delle seguenti funzioni:

1. Es1 (funzione costante):
   Considero $c \in \mathbf{R}, s f: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad , \quad f(c) = c0$, sia $x_0 \in \mathbf{R}:$

$$\begin{cases} \varepsilon > |f(x) - fg(x_0)| = |c - c| = 0 \\ \forall\, \delta > o, x \in (x:0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases} \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \implies \lim_{x \to x_0} c = c \tag{109}$$

   Si procede a ritroso: sappoendo che sia continua la funzione, allora la funzione è intrappolata in un intervallo (modulo della distanza$< \varepsilon$).

2. Es2 (funzione identità):
   Considero una funzione $f: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad , \quad f(x) = x$, sia $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon > |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \implies scelgo\, \delta(\varepsilon) := \varepsilon \quad cosi \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \tag{110}$$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon \tag{111}$$

3. Es3 (funzione quadrato):
   Considero una funzione $f: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad , \quad f(x) := x^2 \quad , \quad x_0 = 2:$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = f(2) = 2^2 = 4 \tag{112}$$

   Considero un $\varepsilon > 0:$

$$\varepsilon > |f(x) - f(2)| = x^2 - 2^2 = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = \underbrace{|x-2|}_{\to 0} \cdot \underbrace{|x+2|}_{\to 4} \tag{113}$$

   Possiamo limitare l'intervallo $x \in (1,3)$ che sono gli interi che racchiudono il punto x_0 al verso quale tende la x, se:

$$\varepsilon > |x-2| \cdot |3^2 - 2^2| \quad cioe \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \tag{114}$$

   Si ha che:

$$\varepsilon > 5|x-2| > |x-2| \cdot |x+2| = |x^2 - 4| = |f(x) - f(2)| \tag{115}$$

   Quindi scelgo come soglia $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5}$

9.3.2 Limiti con definizione

1. Es1 (asintoto verticale):
   Considero il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \tag{116}$$

   Procedendo a ritroso posso supperre che eesista un M tale che:

$$M < f(x) = \frac{1}{|x|} \implies |x| < \frac{1}{M} \implies |x - 0| < \frac{1}{M} \tag{117}$$

Scelgo $\delta(M) = \frac{1}{M}$, quindi :

$$|x - 0| < \delta(M) \implies M = \frac{1}{|x|} = f(x) \tag{118}$$

2. Es2 (asintoto orizzontale):
Considero il seguente limite ($l = 0$):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{119}$$

Quindi posso dire che esiste un:

$$\varepsilon > |f(x) - l| = |\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{x} \iff |x| < \frac{1}{\varepsilon} \implies |x - 0| < \frac{1}{\varepsilon} \tag{120}$$

Scelgo un $\delta(\varepsilon)$:

$$\delta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \quad \implies \quad |x - 0| < \delta(\varepsilon) \implies |x| < \frac{1}{\varepsilon} \implies \varepsilon < \frac{1}{|x|} \tag{121}$$

È evidente quanto sia complicato, di conseguenze è utile introdurre le proprietà dei limiti.

9.4 Teoremi delle funzioni

9.4.1 Proprietà dei limiti

Le dimostrazioni sono simili a quelle scritte nelle successioni: link alle dimostrazini (6.3).

1. Unicità limite:

$$se \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(c) = l \quad allora \quad unico \tag{122}$$

Dimostrazione. $0 \le |l_1 - l_2| = |\big(l_1 - f(x)\big) - \big(l_2 - f(x)\big)| = |l_1 - f(x) + f(c) - l_2| \le |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2|$ □

2. Intorno:

$$se \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbf{R} \implies x \in \Big(\big(x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)\big) \cap D \backslash \{x_0\}\Big) \tag{123}$$

Allora f è localmente limitato vicino (nell'intrno) di x_0 (punto escluso).

3. Somma:

$$\lim_{x\to x_0} \Big(f(x) + g(x)\Big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{124}$$

Limite della somma è pari alla somma dei limiti.

4. Prodotto:

$$\lim_{x\to x_0} \Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{125}$$

Limite del prodotto è pari al prodotto dei limiti.

5. Quoziente:

$$\lim_{x\to x_0} \Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \tag{126}$$

Limite del quoziente è pari al quoziente dei limiti.

6. Permanenza del segno:

(a) Versione 1:

$$\begin{cases} 0 \leq f(x) \, \forall \, x \in D \\ l := \lim_{x \to x_0} f(x) \end{cases} \implies l \geq 0 \tag{127}$$

Se una funzione è positiva in tutto il suo dominio, allora il limite della funzione in qualsisi punto (anche all'infinito) sarà positiva (e viceversa con negativo).

(b) Versione 2:

$$Se \lim_{x \to x_0} =: l > 0 \quad , \quad x \in \big((x_0 + \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)\big) \quad \implies \quad f(x) \in \big(l - \varepsilon, l + \varepsilon\big) \tag{128}$$

Se il limite della funzione in x_0 è di valore l strettamente positivo, allora il valore di $f(x)$ è intrappolato in un intervallo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

7. Monotonia:

(a) Versione 1:

$$Se \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad , \quad x \in \big((x_0 + \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)\big) \tag{129}$$

$$Allora \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x) \leq \lim_{x \to x_0} h(x) \tag{130}$$

Se una funzione ha volore maggio re di un'altra nell'intorno di x_0, allora il limite della funzione resterà maggiore di quell'altra con $x \to x_0$.

(b) Versione 2 (Teorema dei carabinieri/ del confronto):
Sapendo che vale la proprietà del quoziente:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \implies f(x) - l \leq g(x) - l \leq h(x) - l \tag{131}$$

Data una funzione g(x), posso trovare due funzioni che fungono da barriere che stringono i valori della mia funzione fino a collasseare su un punto, in modo da trovare il valore di un particolare limite confrontando il limiti delle due funzioni che la racchiudono.

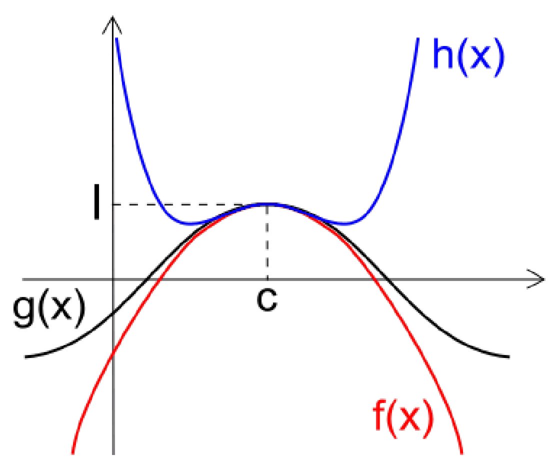


Figura 31: Teorema del confronto / dei carabinieri

9.4.2 Limiti di funzione composta

Considero $D(f) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, $D(g) \xrightarrow{g} \mathbf{R}$, *Sia* $Im(f) \subseteq D(G) \implies$ allora ha senso:

$$g \circ f : \quad D(f) \xrightarrow{g \circ f} \mathbf{R} \quad , \quad (g \circ f) := g\big(f(x)\big) \tag{132}$$

Supponiamo che $x_0 \in D(f)'$ sia punto di accumulazione, allora:

$$\exists\, y_0 := f(x) \quad , \quad \exists\, l := \begin{cases} \lim f(x) \\ y = y_0 \end{cases} \implies \exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l \tag{133}$$

Dimostrazione. Considero $|g(f(x)) - l| \implies \lim_{x \to x_0} f(y) = l$:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, (y - y_0) < \delta(\varepsilon) \quad \implies \quad \varepsilon > |\underbrace{g(y)}_{\lim f(x)} - l\,| \tag{134}$$

Scelgo $\varepsilon' := \delta(\varepsilon)\, \exists\, \delta'(\varepsilon') > 0 \,\Big|\, |x - x_0| < \delta'(\varepsilon)$

Di conseguenza si ha che $|f(x) - y_0| > \varepsilon' := \delta(\varepsilon)$

Quindi se $|f(x) - x_0| < \varepsilon' \implies \varepsilon > |g\big(f(x)\big)|$ □

9.4.3 Continuità della funzione inversa

Considero una funzione $f(a, b) \to \mathbf{R}$ che è iniettiva e continua in $x_0 \subset (a, b)$:
Possiamo considerare la funzione inversa $f^{-1} : Im(f)$:

$$\begin{cases} f^{-1}(\big(f(x)\big) = x \\ f\big(f^{-1}(y)\big) = y \end{cases} \implies f^{-}1 \ \textit{continua in}\ y_0 := f(x_0 \tag{135}$$

Siccome è continua, la funzione non è composta da tratti (funzione connessa), si può tracciare il grafico senza alzare la mano dal foglio. In caso di funzioni a tratti con punti di discontinuità, si possono chiamare funzione disconnesse.

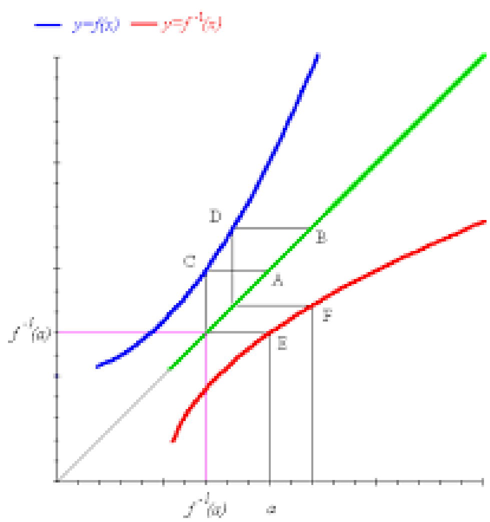


Figura 32: Grafico di una funzione inversa continua

Theorem 9.1. *Considerata una funzione continua $f(x)$, se esiste la funzione suia funzione inversa $f^{-}1(x)$, allora anch'essa è una funzione continua.*

La dimostrazione è data dal fatto che la funzione inversa è data dalla funzione identità, che di fatto è la simmetria rispetto alla retta $y = x$.

9.4.4 Proprietà della funzione continua

Considero una funzione $f:\ D \to C \quad , \quad d \subseteq \mathbf{R} \quad , \quad C := \{\text{insieme delle funzioni continue } \ \forall\, x \in D\}$

1. Somma:

$$f, g \in C(D) \implies (f+g) \in C(D) \tag{136}$$

2. Prodotto:

$$f, g \in C(D) \implies (f \cdot g) \in C(D) \tag{137}$$

3. Quoziente:

$$f, g \in C(D) \implies \Big(\frac{f}{g}\Big) \in C(D) \quad , \quad g \neq 0 \tag{138}$$

4. Inversa:

$$f:\ (a,b) \to (c,d) \quad , \quad f \in C(D) \implies f^{-1} \in C(D) \quad , \quad g \neq 0 \implies \ allora\ \ f^{-1} \in C\big(c,d\big)\big) \tag{139}$$

5. Composta:

$$f \in C\big(D(f)\big) \quad , \quad g \in C\big(D(g)\big) \quad , \quad Im(f) \subseteq D(g) \implies \ allora\ \ (f \circ g) \in C\big(D(f)\big) \tag{140}$$

6. Potenza ennesima:

$$f:\ D \to C \quad , \quad f_n(x) = x^n \in C(\mathbf{R}) \quad \forall\, x \in D,\ n \geq 0 \tag{141}$$

Dimostrazione per induzione della continuità della potenza ennesima. :

Calcolo $P(n_0)$ della funzione $f_n(x) = x^n$ nel caso di $x_0 = 0, 1, 2, 3$:

Costante: $\quad f_0(x) = c \quad \implies f_0 \in C(\mathbf{R})\, \forall\, x \in \mathbf{R}$

Identità: $\quad f_1(x) = x \quad \implies f_1 \in C(\mathbf{R})\, \forall\, x \in \mathbf{R}$

Quadrato: $\quad f_2(x) = x^2 = x \cdot x \quad \implies f_2 \in C(\mathbf{R})\, \forall\, x \in \mathbf{R}$ in quato prodotto di due funzioni continue come verificato nel punto precedente (x proprietà)

Possiamo supporre come vera $P(n)$, allora cerchiamo di dimostrare $P(n+1)$:

$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = \underbrace{x^n}_{\in\, c} \cdot \underbrace{x^1}_{\in\, c}$ in quanto $f_n(x)$ è continua x ipotesi (supposizione) e $f_1(x)$ è continua come verificato precedentemente.

Di conseguenza è verificata $F_{n+1} \in \mathbf{R}$ (continua) $\implies f_n(x) \in c(\mathbf{R})\, \forall\, n \geq 0$ per il principio di induzione.

□

7. Continuità dei polinomi:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} \Big(c_n\, x^n = \underbrace{c_0}_{\text{const}} + \underbrace{c_1\, x^1}_{f_1\, \in\, C} + \underbrace{c_2\, x^2}_{f_2\, \in\, C} + .. + \underbrace{c_n\, x^n}_{f_n\, \in\, C} \Big) \tag{142}$$

Siccome è una sommatoria fra funzioni continue come abbiamo dimostrato precedentemente con il metodo di induzione, allora il polinomio $P(x)$ è anch'esso continuo $\implies P(x) \in C8\mathbf{R})$

8. Continuità di funzioni razionali:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad d(R) := \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\} \tag{143}$$

$$Con\ q, p\ polinomo \quad , \quad P, Q \in C(\mathbf{R}) \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{p}{q} \tag{144}$$

   Ciò è valido grazie alla proprietà che afferma che la funzione quiziente di due funzioni continue è anch'essa continua.

9. Continuità della funzione seno:
   Non spiegato.

9.4.5 Limiti notevoli

.

Limiti Notevoli: Tabella

funzioni goniometriche	
$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{x} = 0$	$\lim_{x \to 0} \frac{arcsen\ x}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \to 0} \frac{arctg\ x}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ mx}{sen\ nx} = \frac{m}{n}$	$\lim_{x \to 1} \frac{(arc\, cos\, x)^2}{1 - x} = 2$
funzioni esponenziali e logaritmiche	
$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \to 0} \frac{log_a (1 + x)}{x} = log_a\, e$	$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1 + x)}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln\, a$	$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^k - 1}{x} = k$	$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \qquad (a > 1)$
$\lim_{x \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + a^x} = \begin{cases} 1 & se\ a < 1 \\ \frac{1}{2} & se\ a = 1 \\ 0 & se\ a > 1 \end{cases}$

v.2 www.matematika.it

Figura 33: Limiti notevoli

9.5 Asintotici

9.5.1 Definizione e proprietà

Definition 9.5 (Asintotici)**.** *Siano f, g due funzioni definite e non nulle in un intorno $I(x_0)\backslash\{x_0\}$ con $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora si diche che f è asintotica a g se e solo se:*

$$f(x) \sim g(x) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad (x \to x_0) \tag{145}$$

Se due funzioni sono asintotiche, allorqa godono di certe proprietà:

1. $\sim$ è una relazione di equivalenza
2. $f(x) \sim g(x) \implies \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ oppure non esistono entrambi i limiti (es: seno e coseno).
3. Ci sono funzioni con lo stesso limite ma non asintotiche.
4. Se $f(x) \sim f_1(x)$ e $g(x) \sim g_1(x)$, allora anche il loro prodotto, quoziente ed elevamento ad un finito sono asintotici. NON valgono prorpietà come la somma, elevamento a funzione o prorità distibutiva a meno di ipotesi più stringenti

9.5.2 Asintotici notevoli

.

Tabella degli infinitesimi equivalenti

$$\sin(\alpha x) \sim \alpha x \quad \text{per } x \to 0$$

$$\tan(\alpha x) \sim \alpha x \quad \text{per } x \to 0$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\ln(1 + x) \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

$$\arcsin(x) \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

$$\arctan(x) \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

Figura 34: Asintotici notevoli

9.5.3 o piccolo e gerarchia degli infiniti

Definition 9.6 (o-piccolo)**.** *Data $f, g : 8a, b) \to \mathbf{R}$, si dice che f è $o -$ piccolo di g per $x \to x_0$ se:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \implies \quad f(x) = o\big(g(x)\big) \tag{146}$$

Definition 9.7 (Gerarchia degli infiniti)**.** *da cui derivano*

1. *Con $x \to x_0$, se $f(x), g(x) \to 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, si dice che g è infinitesimo di ordine superiore rispetto a f.*

2. *Con* $x \to x_0$, *se* $|f(x)|, |g(x)| \to +\infty$, $\frac{g(x)}{f(x)} \to 0 \iff \frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$, *si dice che* f *è infinito di ordine superiore rispetto a* f.

:

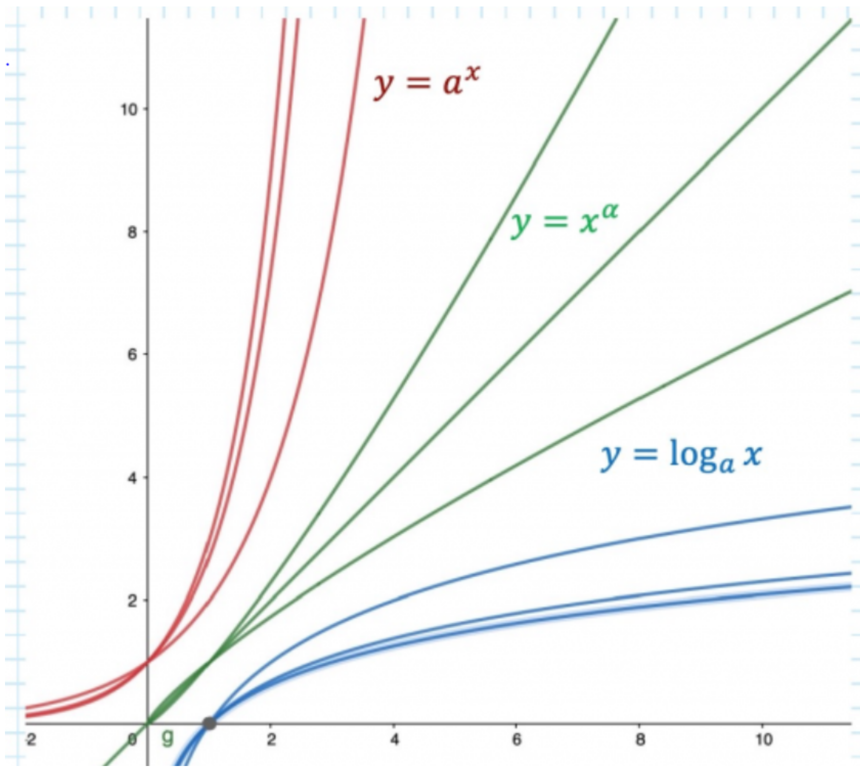


Figura 35: Gerarchia degli infiniti

9.6 Teoremi delle funzioni continue

9.6.1 Teorema di Weistrass

9.6.2 Teorema degli Zeri

9.6.3 Corollario dei valori intermedi

PROPRIETA' DELLE FUNZIONI CONTINUE.

FABIO CIPRIANI

1. Proprieta' fondamentali delle funzioni continue

Dimostriamo qui di seguito tre proprieta' fondamentali delle funzioni continue.

Theorem 1.1. *(Weierstrass: esistenza di estremi globali)*
Sia $f \in C([a,b])$ una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Esistono allora il massimo e minimo globali di f su $[a,b]$. Piu' precisamente:

$$\exists\, x_m, x_M \in [a,b] \qquad \text{tale che} \qquad x \in [a,b] \qquad \Rightarrow \qquad f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)\,.$$

In altre parole, $M := f(x_M)$ e' il valore massimo e $m := f(x_m)$ il valore minimo di f su $[a,b]$.

Proof. Ci limiteremo a provare l'esistenza del massimo. Sia $M := \sup \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ l'estremo superiore dell'immagine della funzione. Per le proprieta' dell'estremo superiore, esiste una successione $\{y_n\} \subset \mathrm{Im}(f)$ tale che $\lim_n y_n = M$. Sia quindi $\{x_n\} \subset [a,b]$ una successione tale che $f(x_n) = y_n$ per la quale, evidentemente, si ha

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n y_n = M\,.$$

Se per un certo n si ha $y_n = M$ allora $M \in \mathrm{Im}(f)$ e' un valore massimo per la funzione (e $x_n \in [a,b]$ e' il punto di massimo). Se invece $y_n \neq M$ per ogni n, allora la successione $\{x_n\}$ e' un insieme limitato e infinito e, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, ammette almeno un punto di accumulazione che denotiamo con $x_M \in [a,b]$. Esistera' quindi almeno una sotto-successione $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ convergente a x_M: $\lim_k x_{n_k} = x_M$. Poiche' f e' continua

$$M = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_M) \in \mathbb{R}.$$

Questo dimostra che $M := \sup \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{R}$ e' finito e che appartiene a all'imagine $\mathrm{Im}(f)$: M e' quindi un valore massimo di $\mathrm{Im}(f)$ (cioe' di f), assunto da f nel punto $x_M \in [a,b]$ (punto di massimo). $\square$

Theorem 1.2. *(Proprieta' degli zeri di funzioni continue)*
Sia data una funzione continua $f \in C([a,b])$ sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Se

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

(cioe' f assume valori di segno opposto agli estremi $[a,b]$) allora

$$\exists\ x_0 \in (a,b) \qquad \text{tale che} \qquad f(x_0) = 0\,.$$

Proof. Per comodita' di notazione poniamo $a_0 := a$ e $b_0 := b$. Sia $c := \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio di $[a_0, b_0]$. Se $f(c) = 0$ abbiamo trovato il punto $x_0 := c$ dove f si annulla. Altrimenti, tra $[a_0, c]$ e $[c, b_0]$, denotiamo con $[a_1, b_1]$ quello ai cui estremi f assume segno opposto. Iterando questo procedimento (dicotomia) otteniamo una successione decrescente di intervalli

$$\dots \subset [a_{n+1}\,, b_{n+1}] \subset [a_n\,, b_n] \dots \subset [a_1\,, b_1] \subset [a_0\,, b_0]$$

tali che per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0\,. \tag{1.1}$$

Poiche', per costruzione, la successione $\{a_n\}$ e' crescente e superiormente limitata da b_0

$$\dots a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_0\,,$$

la successione $\{b_n\}$ e', per costruzione, decrescente e inferiormente limitata da a_0

$$a_0 \leq \dots\dots b_{n+1} \leq b_n \leq \dots$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0\,,$$

per il Teorema del Limite delle Successioni Monotone Limitate

$$\exists\ x_0 = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n \in \mathbb{R}\,.$$

Passando al limite nella (1.1), per il Teorema della permanenza del segno e poiche' f e' continua in x_0 si ha

$$f(x_0)^2 = f(x_0) \cdot f(x_0) = \Big(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\Big) \cdot \Big(\lim_{n\to\infty} f(b_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$$

e quindi che $f(x_0) = 0$. ☐

Theorem 1.3. *(Proprieta' dei valori intermedi e immagine di una funzione continua)*
Sia data una funzione continua $f \in C([a,b])$ sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e siano

$$M := \max_{[a,b]} f\,, \qquad\qquad m := \min_{[a,b]} f$$

i suoi valori massimo e minimo su $[a,b]$. Allora per ogni $\lambda \in (m, M)$

$$\exists\, x_\lambda \in [a,b] \qquad \text{tale che} \qquad f(x_\lambda) = \lambda\,.$$

In particolare l'immagine di una funzione continua f su di un intervallo chiuso $[a,b]$ e' l'intervallo chiuso $[m, M]$ compreso tra il valore minimo e massimo assoluti:

$$\mathrm{Im}\,(f) := f([a,b]) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a,b]\} = [m, M]\,.$$

Proof. Siano x_m un punto di minimo e x_M un punto di massimo di f su $[a,b]$. Possiamo limitarci al caso $x_m < x_M$. La conclusione del teorema discende allora applicando il Teorema degli Zeri alla funzione continua $g \in C([x_m, x_M])$ definita da $g(x) := f(x) - \lambda$ sull'intervallo chiuso $[x_m, x_M]$. ☐

Example 1.4. Mostrare che l'equazione $e^x = 1 + 2x$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $(1,3)$.
Svolgimento. Consideriamo la funzione $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x := e^x - 1 - 2x)$. La funzione e' continua in quanto composta di funzioni continue (esponenziale, polinomi): $f \in C([1,3])$. Poiche' $f(1) = e - 3 < 0$ e $f(3) = e^3 - 7 > 2^3 - 7 = 1 > 0$, il Teorema degli zeri implica che esiste $x_0 \in (1,3)$ tale che $f(x_0) = 0$ e quindi che $e^{x_0} = 1 + 2x_0$.

Example 1.5. Mostrare che l'equazione $x^3 + 12 = 3x^2 + 4x$ ha ha esattamente tre soluzioni in $\mathbb{R}$.
Svolgimento. Poiche' le soluzioni coincidono con gli zeri del polinomio di terzo grado $f(x) := x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, il loro numero non puo' superare tre. Notiamo che f, in quanto polinomio, e' una funzione continua su $\mathbb{R}$. Poiche'

$$f(-3) = -30 < 0 \ , \qquad f(0) = +12 > 0 \ , \qquad f(+\frac{5}{2}) = -\frac{9}{8} < 0 \ , \qquad f(+5) = +42 > 0\,,$$

applicando ripetutamente il Teorema degli zeri alla funzione f sugli intervalli $[-3,0]$, $[0,+\frac{5}{2}]$, $[+\frac{5}{2},+5]$ otteniamo l'esistenza di tre zeri $x_1 \in [-3,0]$, $x_2 \in [0,+\frac{5}{2}]$, $x_3 \in [+\frac{5}{2},5]$.

10 Calcolo differenziale

Il calcolo differenziale di Leibniz-Newton risolve il problema di approssimare funzioni complicate con funzioni semplici del tipo $f(x) = mx + q$, quindi polinomi di ordine inferiore al primo.

È utile anche per approssimare l'andamento dei grafici in dei determinati punti precisi.

10.1 definizione e teoremi

10.1.1 Definizione di derivata

Definition 10.1 (Derivata di una funzine)**.** *Considero una funzione $f(a,b) \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a,b)$ diremo che f è derivabile in x_0 se:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} \right) \in \mathbf{R} \tag{147}$$

Questo limite del rapporto incrementale prende il nome di derivata prima nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

Il rapporto di oscillazione definito in un intervallo specifico corrisponde al $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \Delta X \to 0$

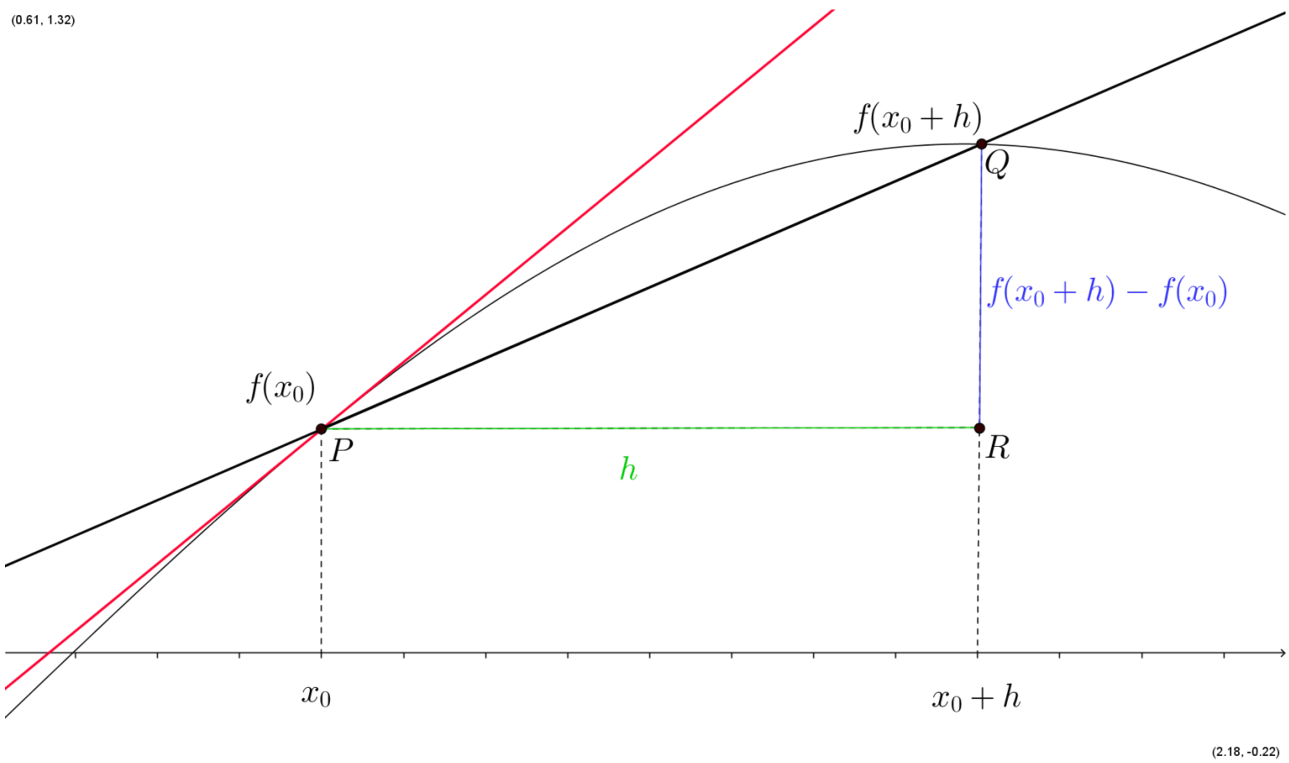


Figura 36: Significato geometrico di derivata

Nel caso limite dove $x = x_0$ il rapporto incrementale assume il valore della tangente dell'angolo formato dalla retta tangente alla curva in x_0 e l'asse x.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} \right) = \tan(\theta_x) \in \mathbf{R} \tag{148}$$

Questo valore limite è il coefficiente angolare della retta tangete alla curva $G(f)$, la tangente si può esprimere nella forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad , \quad y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{149}$$

In risposta al problema analitico:

Lemma 10.1. *Se $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$, allora (R è funzione resto o errore) esiste $R : (a,b) \to \mathbf{R}$ tale che:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x) \quad \forall\, x \in (a,b) \tag{150}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0 \tag{151}$$

Ciò significa che la differenza fra la funzione complessa e la sua approssimazione tende a zero più velocemente rispetto a che il punto x tende verso x_0.
Da un punto di vista geometrico il Resto o errore è la differenza fra $f(x)$ e la sua approssimazione lineare.

Dimostrazione del Lemma. :
Definiamo $R(x) := f(x) - [f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)]$, allora:

- L'equazione 1 del Lemma (150) è verificata.

- Dimostrazione per l'equazione 2 del Lemma (151):

Considero $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ ∎

10.1.2 Continuità delle funzioni derivabili

Theorem 10.2 (Continuità delle funzioni derivabili)**.** *Se una funzione è derivabile, allora sicuramente è anche continua (condizione necessaria).*

$$\begin{cases} f : (a,b) \to \mathbf{R} \quad , \quad x_0 \in (a,b) \\ f \text{ derivabile in } x_0 \end{cases} \implies f \text{ è continua in } x_0 \tag{152}$$

Dimostrazione della continuità delle funzioni derivabili. :
$\lim_{x\to x_0}\Big(f(x) - f(x_0)\Big) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{(f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \cdot (x - x_0) = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \cdot \Big(\lim_{x\to x_0}(x - x_0)\Big) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$

∎

10.1.3 Calcolo derivate con proprietà

Derivabilità dei polinomi di diverso grado:
Considero la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad , \quad f(x), x \in \mathbf{R} \quad , \quad fix\, x_0 \in \mathbf{R}$

- Costante: $f(x) = c$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} 0 = 0 \tag{153}$$

- Identità: $f(x) = x$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1 \tag{154}$$

- Parabola: $f(x) = x^2$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} x + x_0 = x_0 + x_0 = 2x_0 \tag{155}$$

- Seno: $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$

  Dimostrazione. Appiamo che nel primo e secondo quadrante $\sin x \leq x \leq \tan x \implies$

  Se considero il valore assoluto $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \implies$ l'inversa è $\frac{1}{\sin x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\tan x}$

  Per il teorema dei carabinieri: $1 = \lim_{x\to x_0} 1 \leq \lim_{x\to x_0} |\frac{x}{\sin x}| \leq \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\cos x} = 1$

  Siccome è composta da due funzini dispari, essa è pari e per simmetria posso togliere il valore assoluto

  $\implies \lim_{x\to x_0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ∎

- Coseno: $\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

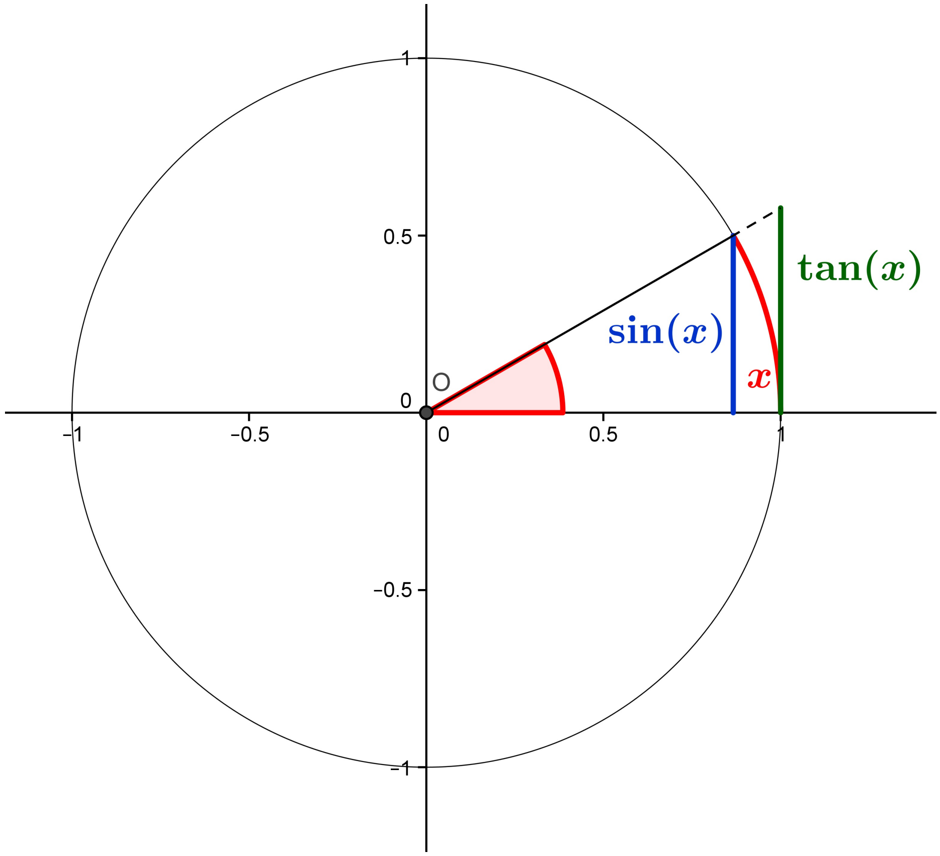


Figura 37: Dimostrazione geometrica di $f'(\frac{\sin x}{x})$

Dimostrazione. :
$\lim_{x\to x_0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to x_0} (\frac{\sin}{x})^2 \cdot \frac{1}{1+1cosx} = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{\sin}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} \frac{1}{1+\cos x}\right) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ □

- Seno in 0: $\lim_{x\to x_0} \sin(x) = 1$
  Infatti la tangente del seno tendendo a zero è la bisettrice del primo quadrante.

  Dimostrazione. $f'(0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$ □

- Seno e Coseno 1: $\sin'(x) = \cos x$
  $\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\ \cos(h)+\cos(x)\ \sin(h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)(\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}) = \lim_{h\to 0} \sin(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot h + \cos(x) = \cos(x) \implies \sin'(x) = \cos(x)$

- Seno e Coseno 2: $\cos'(x) = -\sin x$
  Dimostrazione analoga alla precedente.

Regole del calcolo delle derivate:

1. Linearità:

Theorem 10.3 (Linearità)**.** *La combinazione lineare di funzioni derivabile è una funzione derivabile.*

$$(a\, f + b\, g)'(x) = a\, f'(x) + b\, g'(x) \quad , \quad a, b \in \mathbf{R} \tag{156}$$

Dimostrazione. $\lim_{h\to 0} \frac{(a\, f(x+h)+b\, g(x+h)-(a\, f(x)+b\, g(x))}{h} = a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\ f(x)}{h} + b \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = a \cdot f'(x) + b\, g'(x)$ □

2. Regola di Leibniz:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{157}$$

Dimostrazione. $\lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = (\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h})(\lim_{h\to 0} g(x+h)) + f(x)\cdot(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ □

3. Derivata di frazione (quoziente):

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x)^2} \quad , \quad g(x) \neq 0 \tag{158}$$

4. Derivata della funione composta:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{159}$$

Dimostrazione. $\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)-g(f(x))}{h} = \big(\frac{g(f(h+h)-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\big)\cdot\big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\big) = ***$

Poichè f è continua in x, allora $z = f(x+h) \quad y = f(x)$ (sappiamo che x tende a y per h che tende a zero)

$*** = \frac{g(z)-g(y)}{z-y} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \Longrightarrow \quad g'(xy) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ □

5. Derivata della funzione inversa:

$$\big(f^{-1}(y)\big) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} \qquad se\ \exists\, f'\big(f^{-1}(y)\big) \tag{160}$$

$$\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \big(f(y)\big) = 1 \tag{161}$$

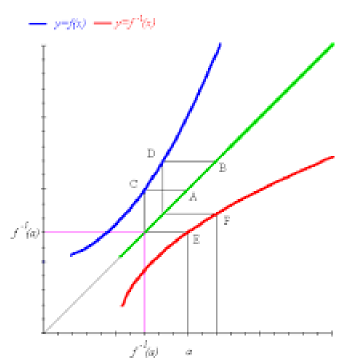


Figura 38: Derivata di funzione inversa

6. Derivata di potenze (regola generale):

$$f_n(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \qquad \forall\, n \geq 0 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \tag{162}$$

Dimostrazione per induzione. :

$n = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f_n'(x) = 0$ già verificato in precedenza

Supponiamo che per $\quad f_(x) = x^n \quad sia \quad f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$, allora calcoliamo:

$f_{(n+1)}(x) = (f_n \cdot f_1)'(x) =$ Regola di Leibniz $= f_n'(x) \cdot f_1(x) = n \cdot x^n + x^n = (n+1) \cdot x^n$
Quindi $P(n+1)$ è vera e di conseguenza per induzione la formula è verificata per ogni numero naturale.

La stessa dimostrazione prova che vale anche per i numeri negativi ($\forall\, x \in \mathbf{Z}$). □

7. Derivata di polinomi:
   Considero $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + .. + cx^2 + dx^1 + e$, vale la formuala:

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot x^k\Big)' = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k \cdot x^{k-1}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n+1} c_{k+1} \cdot (k+1) \cdot x^k\Big) \tag{163}$$

10.1.4 Derivate fondamentali

8. Derivate fondamentali (funzioni elementari):

derivate delle funzioni elementari	
$D\, k = 0$ dove k è una costante	$D\, senx = cosx$
$D\, x^n = n\, x^{n-1}$	$D\, cosx = -\, senx$
$D\, \frac{1}{x^n} = Dx^{-n} = -\, n\, x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$D\, tgx = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
$D \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$D\, cotgx = -\frac{1}{sen^2 x} = -1 - cotg^2 x$
$D\, \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\, arcsenx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D\, log_a\, x = \frac{1}{x} log_a\, e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{lna}$	$D\, arccosx = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D \ln x = \frac{1}{x}$	$D\, arctgx = \frac{1}{1+x^2}$
$D\, a^x = a^x\, ln\, a = a^x \cdot \frac{1}{log_a\, e}$	$D\, arccotgx = -\frac{1}{1+x^2}$
$D\, e^x = e^x$	$D\, \lvert x \rvert = \frac{x}{\lvert x \rvert} = \frac{\lvert x \rvert}{x}$

Figura 39: Derivata fondamentali

10.2 Teoremi per lo studio di funzioni

10.2.1 Lemma di Fermat

Theorem 10.4 (Lemma di Fermat)**.** *Considero una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a, b)$ è un punto di esteremo per la funzione (massimo 0 minimo), se la funzione è derivabile in x_0, allora la sua derivata vale zero*

Geometricamente significa che la tangente in quel determinato punto è parallela all'asse x e siamo in corrispondenza di un punto stazionario (o punto critico se si tratta di problemi di termoodinamica).

Dimostrazione del Teorema di Fermat (solo nel caso di massimo). :
Sia $x_0 \in (a, b)$ il massimo di f nell'intervallo (a, b) tale che per ogni punto nell'intervallo generico vale:

$$f(x_M) \geq f(x)$$

(A) Consideriamo il caso in cui $x > x_M$, si ha che:

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \leq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_M}{x - x_M} \leq 0$$

Siccome il limite destro e sinistro coincidono:

$$\implies \quad f'(x) = \lim_{x \to x_M} \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \leq 0$$

(B) Consideriamo il caso in cui $x < x_M$, si ha che:

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \geq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\implies \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_M}{x - x_M} \geq 0$$

Siccome il limite destro e sinistro coincidono

$$\implies \quad f'(x) = \lim_{x \to x_M} \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \geq 0$$

Dalle equazioni ottenute da A e B si ha che:

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases} \implies f'(x) = 0 \quad \textit{punto stazionario}$$

Quindi una funzione ha un numero finito di punti stazionari che possono essere di massimo, minimo o flesso.

$\square$

Corollary 10.4.1 (Corollario del Lemma di Fermat)**.** *:*
Se $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, i suoi punti di estremo (massimo e minimo) sono da cercarsi nell'unione $A \cup B$ dove A, B sono insiemi finiti:

- $A = \{x \in (a, b) \mid \begin{cases} \exists\, f'(x) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \}$ *insieme dei punti critici*
- $B = \{x \in (a, b) \mid \nexists f'(x)\}$ *insieme dei punti singolari*

Ciò significa che massimi e minimi (anche se punti di non derivabilità) si hanno qaundo la derivata prima si annulla o non è definita.
Alcuni esempi:

- Funzione modulo $f(x) := |x| \implies$ in zero non esiste la derivata perchè limite destro è diverso dal sinistro, quindi è un punto singolare e quindi sono in presenza di un massimo (in questo caso).
- Funzione quadrato $f(x) := x^2 \implies$ in zero si annulla la derivata prima e sono in oresenza di un minimo.
- Funzione cubo $f(x) := x^3 \implies$ in zero sia A che B sono vuoti infatti non si ha ne massimo ne minimo, è presente un flesso a tangente orizzonatale.

Theorem 10.5 (Teorema di Lagrange)**.** *Se $f \in C([a, b])$ è derivabile in (a, b) (estremi esclusi perchè deve essere derivabile sia nell'intorno destro che sinistro) , allora:*

$$\exists\, c \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{164}$$

Il teorema di Lagrange afferma che quando una funzione ad una variabile è continua e derivabile in un intervallo compatto (chiuso e limitato), allora ammette almeno un punto in cui la derivata prima è pari al rapporto incrementale che c'è tra i punti estremi dell'intervallo.
È importante sottolineare che il punto c, detto punto di Lagrange, non è necessariamente unico.

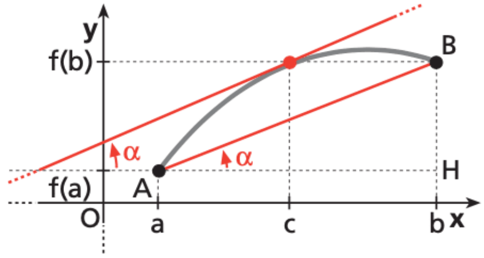


Figura 40: Teorema di Lagrange

Dimostrazione del teorema di Lagrange. :

1) Consideriamo una funzione $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ tale che:

$$g(x) := f(a) + \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a)$$

Osserviamo che g è un polinomio di grado $gr(g) \leq 1$, di conseguenza il suo grafico è una retta.

2) Per costruzione (g: retta passante per a e b):

$$g(a) = f(a) \qquad , \qquad g(b) = f(b)$$

Quindi g condivide con f sia a che b. In altre parole g è la retta passante per $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$.

3) La retta ha per coefficente angolare:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4) $g \in C(\mathbf{R})$ è derivabile in $\mathbf{R}$, quindi:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

5) Consideriamo la funzione $\quad h := f - g \quad$ su l'intervallo $[a, b]$. La funzine h è continua in tutto l'intervallo estremi inclusi e derivabile nell'intervallo estremi esclusi in quanto differenza fra funzioni continue.

Per il Teorema di Weistrass (insieme limitato e infinito, quindi esiste punto di accumulazione) esiste un punto $x_m, x_M \in [a, b]$ che è estremo globale:

6A) Consideriamo il caso in cui gli estremi di $[a, b]$ coincidono con x_m, x_M.

Poichè:

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0 \qquad e \qquad h(b) = f(b) - g(b) = 0$$

per ipotesi è definizione di retta.

Si ha che:

$$h(x) = 0\, \forall\, x \in [a, b] \implies 0 = h(x) = f(x) - g(x) \implies f(x) = g(x)$$

Quindi:

$$f'(x) = g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \Longrightarrow \qquad Teorema\, verificato$$

6B) Invece se almeno uno tra x_m, x_M sia strettamente incluso in $[a, b]$, quindi:

$$(x_m \vee x_M) \in (a, b)$$

Supponiamo sia $x_m \in (a, b)$, applicando il Lemma di Fermat ottengo che:

$$0 = h'(x_M) = f'(x_M) - g'(x_M)$$

Quindi:

$$f'(x_M) = g'(x_M) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi il teorema verificato $\forall\, c \in (a, b)$

$\square$

Caso particolare del Teorema di Lagrange, il teorema di Rolle:

Theorem 10.6 (Teorema di Rolle)**.** *:*
Considerata una funzione tale che $f(A) = f(b)$, allora $\exists\, c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \tag{165}$$

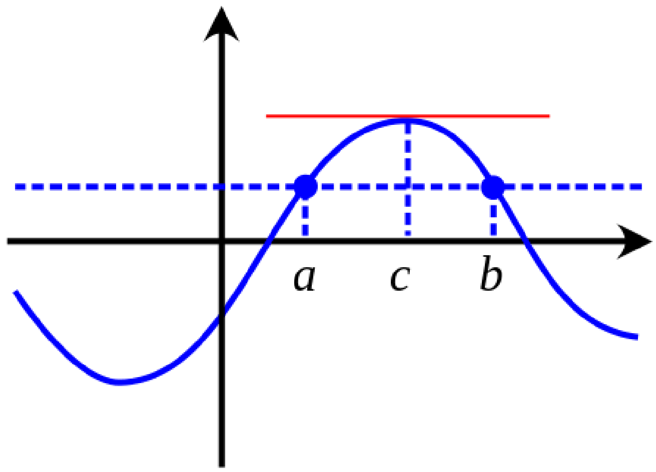


Figura 41: Teorema di Rolle

Theorem 10.7 (Test della monotonia)**.** *:*
Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in (a, b) , allora:

1. *f crescente $\iff f'(x) > 0\, \forall\, x \in (a, b)$*
2. *f decrescente $\iff f'(x) < 0\, \forall\, x \in (a, b)$*
3. *f stazionaria $\iff f'(x) = 0\, \forall\, x \in (a, b)$*

Dimostrazione del punto 1, funzione crescente. Considero:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \qquad se \quad a < x < y < b$$

Per il teorema sella permanenza del segno:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \forall\, c \in (a, b)$$

Viceversa, supponiamo che $\quad f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad$.
Consideriamo i punti $\quad a < x < y < b$, per il teorema di Lagrange applicato a f sull'intervallo $[a, b]$ segue che:

$$\exists\, c \in (x, y) \mid 0 \leq f'(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq f(y) \quad \forall\, x, y \in (a, b) \quad , \quad x < y$$

Questo significa che f è crescente. Analogamente si dimostra anche la decrescenza.

$\square$

In generale non vale il test della monotonia se la funzione nell'intervallo non è continua.

Corollary 10.7.1 (Corollario della caratterizzazione delle funzioni costanti)**.** *:*
Considero $f(a,b) \to \mathbf{R}$ è derivabile, allora la funzione f è costante, quindi la sua derivata prima $f'(x) = 0 \forall x \in (a,b)$. Viceversa se $f'(x) \neq 0 \, \forall \, x \in (a,b)$, allora per il test della monotonia f è sia crescente che decrescente in senso lato, quindi è costante.

Corollary 10.7.2. *Se $f : D \to \mathbf{R}$ con D unione di intervalli e f derivabile in D, allora $f'(x) = 0 \, \forall \, x \in D$ se e solo se f è localmente costante (costante nell'intervallo o nel caso limite in un punto).*

10.2.2 Punti di non derivabilità

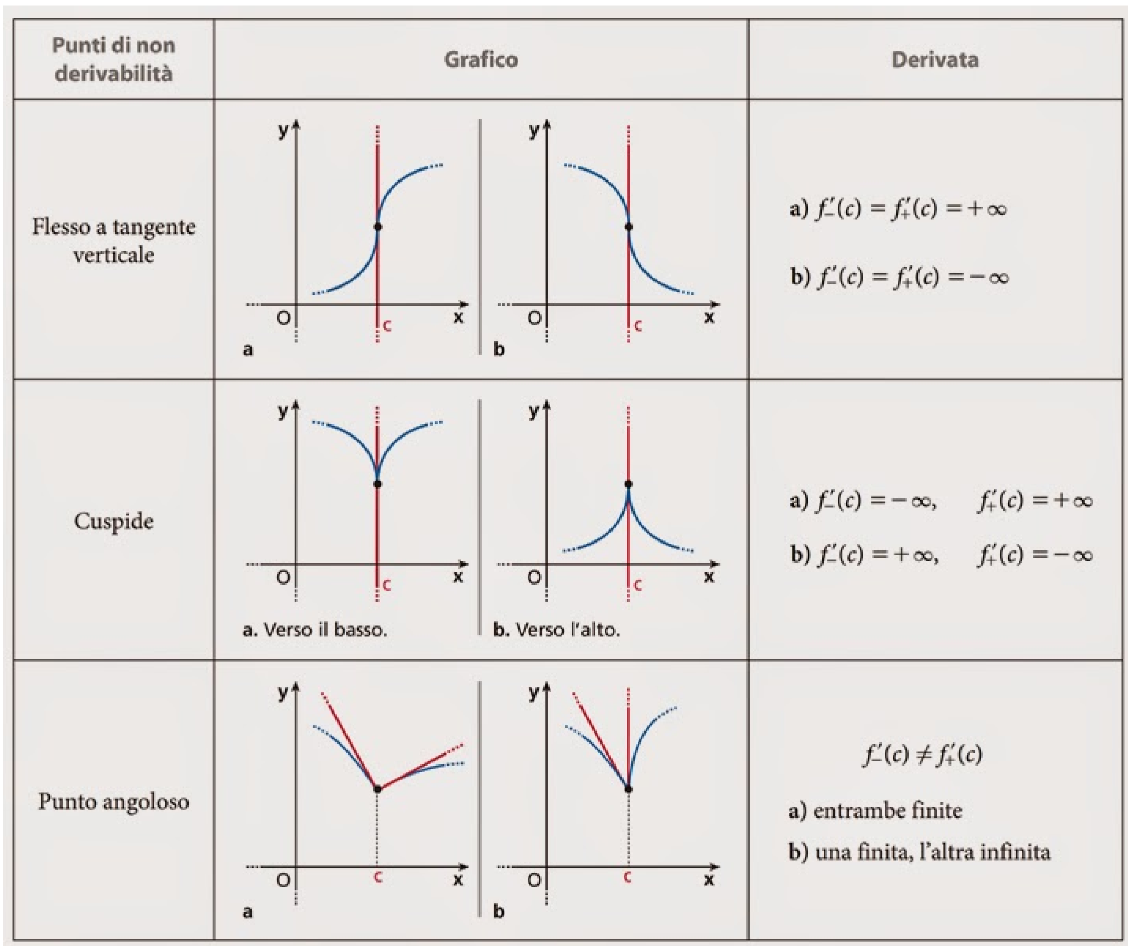


Figura 42: Punti di non derivabilità

.

Anche detti punti particolari dove non è definita la derivata prima:

1. Punti di discontinuità eliminabili:
   Considerata $f : (a, x_0) \cup (x_0, b)$ continua, x_0 è definito punto di discontinuità eliminabile se $\exists l := \lim_{x \to x_=} f(x)$ poichè esiste una estensione continua di f in (a, b):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \quad , \quad x \in (a, x_0) \cup (x_0, b) \\ l \quad , \quad x = x_0 \end{cases} \tag{166}$$

Considerata $f : (a, x_0) \cup (x_0, b)$ continua, x_0 è definito punto di discontinuità eliminabile se $\exists l := \lim_{x \to x_=} f(x)$ poichè esiste una estensione continua di f in (a, b):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \quad , \quad x \in (a, x_0) \cup (x_0, b) \\ l \quad , \quad x = x_0 \end{cases} \tag{167}$$

2. Punti angolosi:
   È punto angoloso quando il limite destro e sinistro della derivata esistono ma non coincidono (almeno una finita):

$$\exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{168}$$

3. Flessi verticali:
   È flesso a tangente verticale quando il limite destro e sinistro della tangente sono entrambi o $+\infty$ o $-\infty$:

$$\lim_{x \to x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad \vee \quad \lim_{x \to x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \tag{169}$$

4. Cuspidi:
   I limiti della derivata devono tendere a infinito e devono essere discordi:

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \\ \\ \lim_{x \to x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty \end{cases} \tag{170}$$

Theorem 10.8 (Teorema del criteorio di derivabilità)**.** *:*
Sia $f(a, b) \to \mathbf{R} \quad , \quad x_0 \in (a, b) \quad , \quad f$ derivabile in $(a, b) \backslash \{x_0\}$:

$$Se \quad \lim_{x \to x_0 -} f'(x) = \lim_{x \to x_0 +} f'(x) \in \mathbf{R} \tag{171}$$

Allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$. La funzione può essere definita derivabile e continua in x_0.

Dimostrazione del criterio di derivabilità. :
Sia $x \in (a, b)$, per il Teorema di Lagrange $\quad \exists c(x)$ tra x e x_0 tale che $\quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$ ($c :=$ punto di Lagrange)

Quindi abbiamo che $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f'\big(c(x)\big) = * * *$

Poichè $x_0 < c(x) < x$ così $\lim_{x \to x_0^+} c(x) = x_0$ e quindi per il teorema del limite di funzione composta

$* * * = f'\big(\lim_{x \to x_0^+} c(x)\big) = l$

Analogamente si dimostra che $\quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$

$\implies$ quindi $\quad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbf{R} \quad \implies \exists f'(x_0) = l+$

□

10.2.3 Concavità e convessità

Definition 10.2 (Funzione convessa)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile in (a,b), essa si definisce convessa se l suo grafuico sta al di sopra di tutte le sue rette tangenti:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall\, x \in (a, b) \tag{172}$$

Definition 10.3 (Funzione concava)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile in (a,b), essa si definisce concava se l suo grafuico sta al di sotto di tutte le sue rette tangenti:*

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall\, x \in (a, b) \tag{173}$$

Theorem 10.9 (Derivata seconda e concavità)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile 2-volte, allora:*

1. *f è convessa* $\Longleftarrow f^2(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$

2. *f è cancava* $\Longleftarrow f^2(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$

Dimostrazione di (1) per funzione convessa. :
Applicando il teorema di Taylor-Lagrange all'ordine $n = 1$, si ha che esiste c tra x e x_0:

$$f(x) = T^f_{1,x_0}(x) + \frac{f^2(x)}{2!}(x - x_0)^2 \geq \Big(f^2(c) \geq 0\Big) \geq T^f_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall\, x \in (a,b)$$ □

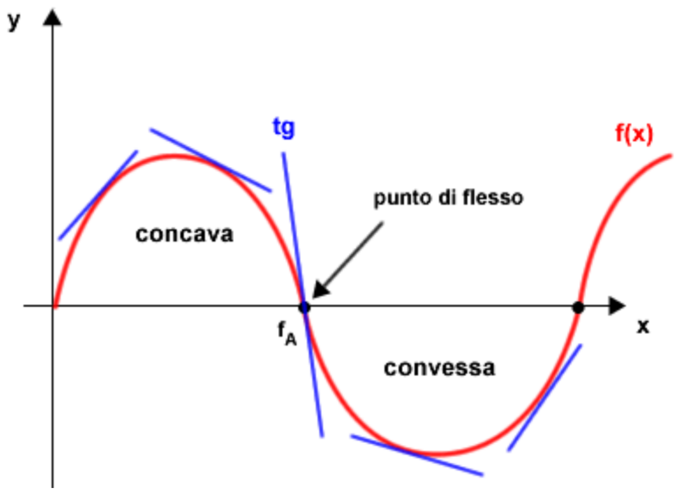


Figura 43: Funzione concava e convessa

Definition 10.4 (Flessi obliqui)**.** *I punti dove cambia la concavità di f, ovvero dove cambia di segno la derivata seconda $f^2(x)$, sono detti flessi obliqui.*

10.2.4 Funzione esponenziale

LA FUNZIONE ESPONENZIALE.

FABIO CIPRIANI

1. La funzione esponenziale: costruzione e proprieta'.

I polinomi e le funzioni razionali sono costruite usando le operazioni algebriche dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Le funzioni trigonometriche sono definite attraverso relazioni fondamentali della geometria Euclidea.

La funzione esponenziale (e la sua inversa funzione logaritmo) e' invece costruita usando la completezza dell'insieme dei numeri reali e le sue conseguenze quali le proprieta' del Limite di successioni e funzioni a valori reali.

Sulla semiretta $[0, +\infty)$ consideriamo i polinomi

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad x \in [0, +\infty).$$

Per ogni $x \geq 0$ fissato, la successione di numeri reali $\{s_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ e' crescente poiche'

$$s_{n+1}(x) - s_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0.$$

Mostreremo ora che la successione e' superiormente limitata ed otterremo cosi' la sua convergenza applicando il Teorema di Convergenza delle successioni Monotone e Limitate.
Per $x \geq 0$ fissato scegliamo un numero naturale $m \in \mathbb{N}$ tale che $2x < m$. Per $n \geq m$ abbiamo

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} = s_{m-1}(x) + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
&= s_{m-1}(x) + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k(k-1)\cdots m \cdot (m-1)!} \\
&\leq s_{m-1}(x) + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{m^{k-m} \cdot (m-1)!} \\
&= s_{m-1}(x) + \frac{x^m}{(m-1)!} \sum_{k=m}^{n} \frac{x^{k-m}}{m^{k-m}} \\
&= s_{m-1}(x) + \frac{x^m}{(m-1)!} \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{x}{m}\right)^{k-m} \qquad (1.1) \\
&= s_{m-1}(x) + \frac{x^m}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{n-m} \left(\frac{x}{m}\right)^{k} \\
&= s_{m-1}(x) + \frac{x^m}{(m-1)!} \frac{1-(x/m)^{n-m+1}}{1-(x/m)} \\
&\leq s_{m-1}(x) + \frac{x^m}{(m-1)!} \frac{1}{1-(x/m)} \\
&\leq s_{m-1}(x) + 2\frac{x^m}{(m-1)!} < +\infty\,.
\end{aligned}$$

Poiche' il membro di destra non dipende da n, ne deduciamo che la successione $\{s_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ e' anche superiormente limitata. Per ogni $x \geq 0$ fissato, esiste quindi il limite

$$s(x) := \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \in [0, +\infty)$$

che definisce una funzione $s : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Poiche' $s_n(x) \geq s_1(x) = 1 + x \geq 1$ per ogni $n \geq 1$ e $x \geq 0$, per la Proprieta' di Monotonia del Limite, si ha che la funzione s assume valori strettamente positivi: in particolare

$$s(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x) \geq \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \qquad x \geq 0.$$

Possiamo allora estendere la funzione al semiasse negativo $s : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ ponendo

$$s(x) := \frac{1}{s(-x)} \qquad x < 0$$

ottenendo cosi' una funzione $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ detta *esponenziale* definita sui numeri reali. Notiamo che

$$s(0) = \lim_{n\to+\infty} s_n(0) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

Il valore $s(1) \in \mathbb{R}$ e' detto *numero di Nepero* ed e' denotato con la lettera

$$e := s(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in (2, +\infty).$$

Scegliendo nella formula (1.1) $m = 2$ e $x = 1$ si ha che $e \in (2, 3)$.

1.1. **Equazione funzionale della funzione esponenziale.** Dimostriamo l'equazione funzionale (o legge delle potenze)

$$s(x)s(y) = s(x+y) \qquad x, y \in \mathbb{R}\,. \tag{1.2}$$

Nell'identita'

$$s_n(x)s_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} = \sum_{k,j=0}^{n} \frac{x^k y^j}{k!j!}, \tag{1.3}$$

introducendo il nuovo indice $m := j + k = 0, \cdots, 2n$, operando la sostituzione $j = m - k \geq 0$ e utilizzando la formula del **binomio di Newton**, per $x, y \geq 0$ otteniamo l'identita'

$$\begin{aligned} s_n(x)s_n(y) &= \sum_{m=0}^{2n} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k y^{m-k}}{k!(m-k)!} \\ &= \sum_{m=0}^{2n} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(j-k)!} x^k \cdot y^{m-k} \\ &= \sum_{m=0}^{2n} \frac{1}{m!} \cdot (x+y)^m \\ &= s_{2n}(x+y) \end{aligned} \tag{1.4}$$

da cui, per le **proprieta' dei limiti di successioni**, abbiamo

$$s(x)s(y) = \Big(\lim_n s_n(x)\Big) \cdot \Big(\lim_n s_n(y)\Big) = \lim_n s_n(x)s_n(y) = \lim_n s_{2n}(x+y) = s(x+y) \qquad x, y \geq 0.$$

Se $x, y < 0$ abbiamo

$$s(x)s(y) = \frac{1}{s(-x)s(-y)} = \frac{1}{s(-x-y)} = \frac{1}{s(-(x+y))} = s(x+y).$$

Infine se $x < 0$ e $y \geq 0$ e $y + x \geq 0$, abbiamo $-x \geq 0$ e

$$s(y)s(x) = s(y+x-x)s(x) = s(y+x)s(-x)s(x) = s(y+x)s(x)^{-1}s(x) = s(y+x).$$

Se $x < 0$ e $y \geq 0$ ma $y + x \leq 0$, abbiamo $-x \geq 0$, $-y \leq 0$, $-x - y \geq 0$ ed infine

$$s(y+x)^{-1} = s(-(y+x)) = s(-x-y) = s(-x)s(-y) = s(x)^{-1}s(y)^{-1}.$$

L'equazione funzionale (1.2) giustifica la seguente notazione per la funzione esponenziale:

$$s(x) =: e^x \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Infatti, in tale notazione l'equazione funzionale assume la forma della legge delle potenze dell'aritmetica:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

1.2. **Monotonia della funzione esponenziale.** Se $0 < x < y$ abbiamo $x^k < y^k$ per $k = 0, \cdots, n$ e quindi $s_n(x) < s_n(y)$. Per la **proprieta' di monotonia dei limiti di successioni** abbiamo $s(x) \leq s(y)$. In piu' se $x \leq y$ e $s(x) = s(y)$ allora

$$1 = s(y)s(x)^{-1} = s(y)s(-x) = s(y-x) \geq 1 + (y-x)$$

per cui $0 \leq y - x \leq 0$ e quindi $y = x$. Quindi la funzione s e' strettamente monotona crescente su $[0, +\infty)$. Poiche' per $x < 0$ si ha, per definizione, $s(x) = s(-x)^{-1}$, abbiamo che s e' strettamente crescente anche su $(0, +\infty)$. Poiche' $s(x) \geq 1$ per $x \geq 0$ e che quindi $s(x) \leq 1$ per $x \leq 0$, abbiamo che la funzione esponenziale e' strettamente crescente su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$.

1.3. **Continuita' della funzione esponenziale.** Per $0 \leq x \leq 1$ abbiamo

$$0 \leq e^x - e^0 = \lim_n s_n(x) - 1 = \lim_n (s(x) - 1) = \lim_n \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1\Big) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$= x \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{(k+1)!} \leq x \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = xe^x \leq xe$$

da cui $0 \leq \lim_{x\to 0^+}(e^x - e^0) \leq \lim_{x\to 0^+} ex = 0$ e quindi $\lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$. La funzione esponenziale e' quindi continua da destra in $x = 0$. D'altra parte poiche'

$$\lim_{x\to 0^-} e^x = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{\lim_{y\to 0^+} e^y} = \frac{1}{1} = 1$$

la funzione e' anche continua da sinistra in $x = 0$ ed e' quindi continua in $x = 0$. Da cio' risulta anche che per $x \geq 0$ fissato, si ha

$$\lim_{y\to x} e^y = \lim_{y\to x} e^{y-x+x} = \lim_{y\to x} e^x e^{y-x} = e^x \lim_{y\to x} e^{y-x} = e^x \lim_{h\to 0} e^h = e^x$$

e che quindi la funzione e' continua in ogni punto di $[0, +\infty)$. Poiche' su $(-\infty, 0)$ la funzione esponenziale e' composta di funzioni continue

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} \qquad x \leq 0$$

essa risulta continua anche su $(-\infty, 0)$ per il **Teorema di Continuita' della Funzione Composta**.

1.4. **Limiti agli estremi del dominio.** Poiche' per $x \geq 0$ si ha $e^x = s(x) \geq s_1(x) = 1 + x$, otteniamo che

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

ed anche

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{\lim_{x\to-\infty} e^{-x}} = \frac{1}{\lim_{y\to+\infty} e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0^+\,.$$

1.5. **Immagine della funzione esponenziale.** Poiche' la funzione esponenziale e' strettamente crescente, il minimo ed il massimo valore che essa assume su un intervallo $[x,y]\subset\mathbb{R}$ sono rispettivamente e^x e e^y. Per il **Teorema dei Valori Intermedi**, l'immagine della funzione esponenziale su $[x,y]$ e' l'intervallo $[e^x,e^y]$. Poiche' $\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+$ e $\lim_{y\to+\infty}e^y=+\infty$ abbiamo che l'immagine su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ e' la semiretta aperta

$$\mathrm{Im}\,(s)=(0,+\infty).$$

1.6. **Funzione Logaritmo.** Essendo la funzione esponenziale strettamente crescente, essa risulta invertibile. La funzione inversa e' detta *logaritmo (in base e)* e denotata con il simbolo ln. Il suo dominio coincide con l'immagine della funzione esponenziale

$$D(\ln)=(0,+\infty),\qquad e^{\ln y}=y,\qquad \ln e^x=x,\qquad x\in\mathbb{R}\,,\qquad y\in(0,+\infty).$$

Per il **Teorema di Continuita' della Funzione Inversa**, abbiamo che la funzione logaritmo e' continua in tutti i punti del suo dominio

$$\ln\in C((0,+\infty)).$$

1.7. **Limite notevole della funzione esponenziale.** Dimostriamo il seguente limite notevole della funzione esponenziale

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Poiche' $1+x\le e^x$ per $x\ge0$, abbiamo che

$$1\le\frac{1+x}{x}\le\frac{e^x-1}{x}\qquad x\ge0.$$

D'altra parte abbiamo gia' visto che se $0\le x\le1$ si ha $e^x-1\le xe^x$. Poiche' la funzione esponenziale e' continua in $x=0$, abbiamo

$$1\le\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}\le\lim_{x\to0^+}e^x=e^0=1$$

per cui $\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$. Unendo questo risultato alla continuita' della funzione esponenziale in $x=0$ otteniamo

$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0^-}e^x\frac{e^{-x}-1}{-x}=\lim_{y\to0^+}e^{-y}\frac{e^y-1}{y}=\Big(\lim_{y\to0^+}e^{-y}\Big)\Big(\lim_{y\to0^+}\frac{e^y-1}{y}\Big)=1\cdot1=1$$

e quindi $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

1.8. **Limite notevole della funzione logaritmo.** Dimostriamo il seguente limite notevole

$$\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1.$$

Sostituendo $x=\ln(1+y)$ abbiamo $y=e^x-1$ e che, per la continuita' della funzione logaritmo, $x\to0$ quando $y\to0$. Quindi

$$\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1.$$

1.9. **Derivata della funzione esponenziale.** Denotiamo con $s:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ la funzione esponenziale

$$s(x):=e^x\qquad x\in\mathbb{R}$$

e calcoliamo la sua derivata in un punto $x\in\mathbb{R}$ del suo dominio usando il limite notevole dell'esponenziale:

$$s'(x)=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0}e^x\frac{e^h-1}{h}=e^x\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\,.$$

1.10. **Derivata della funzione logaritmo.** Calcoliamo la derivata della funzione logaritmo in un punto $y\in(0,+\infty)$ del suo dominio, usando il limite notevole del logaritmo:

$$\ln'(y)=\lim_{h\to0}\frac{\ln(y+h)-\ln y}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(\frac{y+h}{y})}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{y}\frac{\ln(1+h/y)}{h/y}=\frac{1}{y}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{y}\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}=\frac{1}{y}\,.$$

10.2.5 Teorema di De L'Hopital

Theorem 10.10 (Teorema di De L'Hopital)**.** *:*
Sia $f, g(a,b) \to \mathbf{R}$ derivabile e $g \neq 0$ tale che:

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) \\ \exists \frac{\lim_{x\to x_0^+} f'(x)}{\lim_{x\to x_0^+} g'(x)} \end{cases} \implies allora \quad \frac{\lim_{x\to x_0^+} f'(x)}{\lim_{x\to x_0^+} g'(x)} = l \tag{174}$$

Dimostrazione del Teorema di De L'Hopital. :
Definiamo $f(a) = g(a) = 0$ estendibile in maniera continua all'intervallo $[a, b)$ e fissiamo $x \in [a, b)$, quindi abbiamo $f, g \in C([a, x])$ e in più derivabili in (a, x) poichè derivabili in $[a, b)$ per ipotesi.

Allora f, g sono derivabili in (a, b) e continue in $x = a$.
Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $\quad h : [a, x] \to \mathbf{R}$ definita come:

$$h(y) := f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x) \quad \forall\, y \in [a, x]$$

Sappiamo che esiste:

$$\exists\, y(x) \in (a, x) \mid \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'\big(g(x)\big)$$

che sta a indicare che il punto di lagrange dipende da x, allora $\qquad \implies h'\big(g(x)\big) = 0$

Devo trovare $h'(y)$, dove x è fissato:

$$0 = h'\big(g(x)\big) = f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x) \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'\big(y(x)\big)}{g'\big(y(x)\big)} \qquad \text{(intorno del punto)}$$

Si ha che:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'\big(y(x)\big)}{g'\big(y(x)\big)} = ***$$

Poichè $\quad a < y(x) < x \quad$ si ha che:

$$\lim_{x\to a^+} y(x) < a^+$$

Quindi per il teorema del limite della funzione composta;

$$*** = \lim_{y\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l$$

□

10.2.6 Derivate di ordine n

Definition 10.5. *Se $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ è $(n-1)$volte derivabile in $x_0 \in (a', b') \subset (a, b)$ e la derivata di ordine $(n-1)$ $f^{n-1}(x)$ è a sua volta derivabile in x_0, diremo che f è $n-$volte derivabile e:*

$$f^n(x) = \big(f^{n-1}\big)'(x) \quad con \quad n \geq 1 \tag{175}$$

10.2.7 Seno e coseno iperbolico

- Seno iperbolico:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad\qquad D[\sinh x] = \begin{cases} \sinh x & , \quad n\ pari \\ \cosh x & , \quad n\ dispari \end{cases} \tag{176}$$

- Coseno iperbolico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad\qquad D^n[\cosh x] = \begin{cases} \sinh x & , \quad n\ dispari \\ \cosh x & , \quad n\ pari \end{cases} \tag{177}$$

- Tangente iperbolica:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \tag{178}$$

- Vale la relazione utile negli integrali:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{179}$$

- Comportamento asintotico $\quad x \to 0$:

$$\sinh(x) \sim x$$
$$\cosh(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$
$$\tanh(x) \sim x$$

- L'inversa del seno iperbolico è:

$$\sinh^{-1}(x) = \text{settsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \tag{180}$$

- L'inversa del coseno iperbolico è:

$$\cosh^{-1}(x) = \text{settCosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \tag{181}$$

Dimostrazione per inversa del seno iperbolico. :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-t}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2x = e^x - \frac{1}{e^x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{(e^t)^2 - 2x\,e^t - 1}{e^t} = 0$$
$$e^t_{1/2} = x \pm \sqrt{x^2+1} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \log\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (\textit{no negativo per log})$$

□

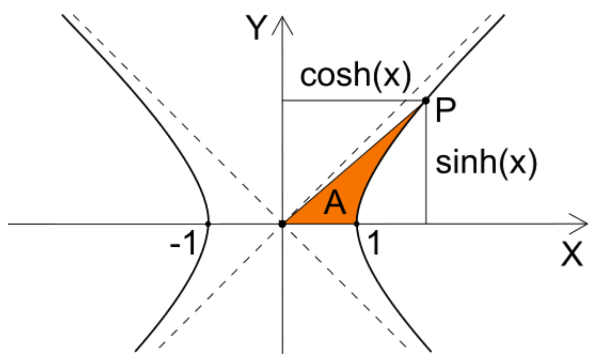


Figura 44: Seno e coseno iperbolico

10.3 Teorema di Taylor

10.3.1 Teorema di Taylor con resto di Peano

Theorem 10.11 (Teorema di Taylor con resto di Peano)**.** *:*
Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ derivabile n-volte con $(n \geq 1)$ in $x_0 \in (a,b)$. Definiamo il suo polinomio di Taylor di ordine n in x_0 (con $x \in \mathbf{R}$) come:

$$T^f_{n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f^2(x_0)(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{182}$$

Allora esiste la funzione resto di ordine n in x_0:

$$R^f_{n,x_0}(x) : (a,b) \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + R^f_{n,x_0}(x) \qquad \textit{con } x \in (a,b) \tag{183}$$

E il resto è infinitesimo di ordine maggiore di n per $x \geq x_0$ (raffinamento del lemma delle derivate con il resto):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T^f_{n,x_0}(x) - R^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \tag{184}$$

Quindi $R^f_{n,x_0}(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ per $x \to x_0$:

$$f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + o\big((x-x_0)^n\big) \quad \textit{per } x \to x_0 \tag{185}$$

Dimostrazione del Teorema di Taylor con resto di Peano. :

Definiamo $R^f_{n,x_0}(x)$ come differenza tra $f(x)$ e $T^f_{n,x_0}(x)$:

$$R^f_{n,x_0}(x) = f(x) - R^f_{n,x_0}(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$$

Con De l'Hopital:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = dH = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \big(T^f_{n,x_0}\big)'(x)}{n \cdot (x - x_=)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(x)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\Big)'}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

Applichiamo il teorema di De L'hopital per $(n-1)$volte quindi i coefficienti di grado minore di $(n-1)$ si azzerano:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{n-1} - \Big(f^{n-1}(x_0) + f^n(x_0)(x-x_0)\Big)}{n(n-1)(n-2)\cdot 2(x-x_0)^1} = \Big[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^n(x_0)\Big]\frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \to x_0} = \frac{1}{n!} \cdot \Big\{ f^n(x_0) - f^n(x_0) \Big\} = 0$$

$\square$

10.3.2 Teorema di Taylor con resto di Lagrange

Theorem 10.12 (Dimostrazione del Teorema di Taylor con resto di Lagrange)**.** *:*
Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ $(n+1)$-volte derivabile in (a,b):

1. *Se fissato $x \in (a,b)$, allora esiste c tra x e x_0 $\big(|x-x_0| < |x-x_0|\big)$ (se $n=0$ è il Teorema di Lagrange):*

$$f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} \quad \forall\, c \in (a,b) \tag{186}$$

2. *Se con $x \in (a,b)$ e $M_n := Sup\big(\big|f^{(n)}(x)\big|\big) < +\infty$, allora:*

$$\big|f(x) - T^f_{n,x_0}(x)\big| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)} \quad \forall\, x \in (a,b) \tag{187}$$

Osserviamo che il rapporto $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)} \to 0$ nella maggior parte dei casi perchè a denominatore c'è un fattoriale.

10.3.3 Formula di Stirling

Formula di Stirling che approssima l'andamento del fattoriale verso $+\infty$:

$$n! \sim \sqrt{2\pi \cdot n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \qquad \textit{con } n \to +\infty \tag{188}$$

10.3.4 Sviluppi di Mclaurin

10.3.5 Applicazioni di taylor

- Studio dei limiti non immediati che non si risolvono tramite limiti notevoli e asintotici
- Grafico locale di una funzione:
  1. trovare la tangente in x_0

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{arctanh} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \\
&\quad + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

$$
\text{con} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\dots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}
$$

Figura 45: Sviluppi notevoli di Taylor-Mclaurin

2. fare $f(x) - T_1(x) = val + o(x) \quad , \quad val \neq 0$
3. studiare il segno della differenza

- trovare derivate n-esime di funzioni:
  1. trovare sviluppo di Taylor fino a n
  2. siccome il coefficiente della potenza ennesima del polinomio di taylor è $\quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
  3. si pone $\quad a_n =$ termine dello sviluppo
- Stima numerica con taylor fino a certa precisione

11 Calcolo integrale

11.1 Definizioni di integrale

11.1.1 Significato geometrico

L'integrale serve per calcolare l'area di una figuara non elementare (non riconducibili a rettangoli).
L'integrale rappresenta il valore dell'area sottesa dal grafico della funzione in un dato intervallo.

11.1.2 Esempio con parabola

Consideriamo la funzione parabole $f(x) = x^2$ nell'intervallo $I = [0, 1]$, abbiamo che $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \in [0, 1], y \in [0, x^2]\}$
Suddiavidiamo l'intervallo $I = [0, 1]$ in intervalli I_k con $n \geq 1$:

$$I = \bigcup_{k=0}^{n-1} I_k \quad , \quad I_k := \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big] \tag{189}$$

Osserviamo che $K = 0, 1, ..n-1$, $\frac{k}{n}$ rappresenta la posizione sull'asse delle ascisse e $\frac{1}{n} = |I_k|$ rappresenta la lungezza di una singola partizione.

- Approssimiamo A_f con l'unione di rettangoli R_k:

$$\tilde{R_n} := \bigcup_{k=0}^{n-1} \quad con \quad R_k := I_k \times \Big[0, f\big(\frac{k}{n}\big)\Big] = \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big] \times \Big[0, \big(\frac{k}{n}\big)^2\Big] \tag{190}$$

$$Area\ di\ \tilde{R_n} = |\tilde{R_n}| = \sum_{k=0}^{n-1} |R_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |I_k| \cdot \Big|\Big[0, f\big(f\big(\frac{k}{n}\big)\Big]\Big| = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\big(\frac{k}{n}\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{K=1}^{n-1} k^2 \tag{191}$$

- Approssimiamo A_f per eccesso:

$$\tilde{Q_n} := \bigcup_{k=1}^{n-1} Q_k \quad , \quad Q_k := I_k \times \Big[0, f\big(\frac{k+1}{n}\big)\Big] \tag{192}$$

$$Area\ di\ \tilde{Q_n} = |\tilde{Q_n}| = \sum_{k=0}^{n-1} |R_n| == \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\big(\frac{k+1}{n}\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\Big(\frac{k+1}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{K=1}^{n-1} k^2 \tag{193}$$

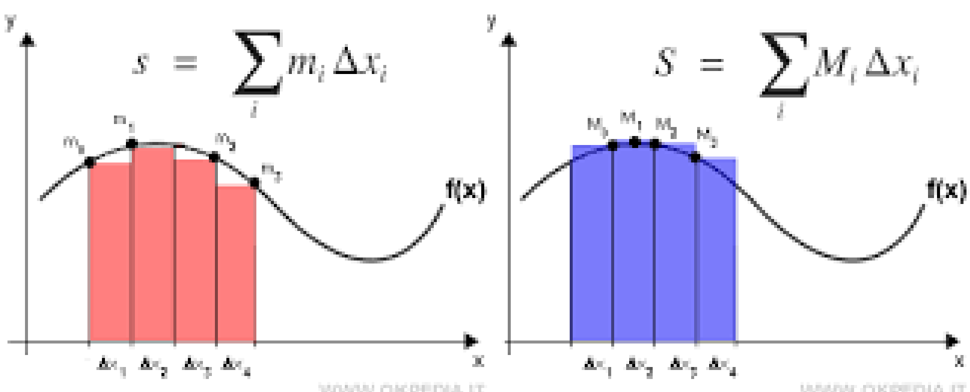


Figura 46: Approssimazione per difetto ed eccesso dell'area di una curva

Utilizzando una formula (dimostrabile per induzione):

$$\sum_{k=1}^{n} K^2 = \frac{n(n+1(2n+1)}{6} \quad , \quad con\ n \geq 1 \tag{194}$$

Otteniamo:

- Per difetto:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\tilde{R_n}\right|= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)(n)\big(2(n-1)+1\big)}{6} \sim \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^3}{3n^3}\Big)= \frac{1}{3} \tag{195}$$

- Per eccesso:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\tilde{R_n}\right|= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)(n)(2n+1)}{6} \sim \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^3}{3n^3}\Big)= \frac{1}{3} \tag{196}$$

Per confronto otteniamo che $\Big|A_f\Big|= \frac{1}{3}$

11.1.3 Partizione di intervalli

Definition 11.1 (Partizione di intervallo)**.** *Sia $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$ (limitato), una partizione $P := \{I_k\}_{k=1}^n$ è una famiglia finita di intervalli I_k tutti contenuti $\big(I_k \subset I\big)$ tali che $I = \bigcup_{k=1}^n$ con $n \neq j$ contiene al più un punto.*

Ciò significa che I_k e I_j o sono disgiunti o si "toccano" solo in un punto (l'estremo della partizione).
Notazione: la lungezza della partizione I_k si indica con $\big|I_k\big| = \big|[x_k, x_{k+1}]\big|= x_{k+1} - x_k$
L'insieme delle partizioni possibili di un dato insieme si indica con $\mathcal{P} := \{$insieme di tutte le partizioni di I$\}$

11.1.4 Integrale inferiore e superiore

Iniziamo a definire somme inferiori e superiori:

- Somme inferiori:

  Definition 11.2 (Somme inferiori)**.** *Sia $[a,b] \to \mathbf{R}$ limitata, sia $P = \{I_k\}_{k=1}^n \in \mathcal{P}(I)$, la somma inferiore è definita come l'area del più piccolo rettangolo sotto a $G(f)$ su I_k:*

$$s(f,P) := \sum_{k=1}^{n}|I_k|\cdot\begin{pmatrix}Inf(f)\\ I_k\end{pmatrix} \tag{197}$$

- Somme superiori:

  Definition 11.3 (Somme superiori)**.** *Sia $[a,b] \to \mathbf{R}$ limitata, sia $P = \{I_k\}_{k=1}^n \in \mathcal{P}(I)$, la somma superiore è:*

$$S(f,P) := \sum_{k=1}^{n}|I_k|\cdot\begin{pmatrix}Sup(f)\\ I_k\end{pmatrix} \tag{198}$$

Ovviamente si deduce che:

$$s(f,P) \leq S(f,P) \quad\implies\quad -\infty < s(f,P) \leq S(f,P) < +\infty \tag{199}$$

Definition 11.4 (Integrale inferiore e superiore di f in I)**.** *:*

- *Integrale inferiore: migliore approssimazione per difetto dall'alto*

$$\underline{I}(f) := Sup\Big\{s(f,P) \mid P \in \mathcal{P}(I)\Big\} \tag{200}$$

- *Integrale superiore: migliore approssimazione per eccesso dal basso*

$$\bar{I}(f) := Inf\Big\{S(f,P) \mid P \in \mathcal{P}(I)\Big\} \tag{201}$$

E $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$

11.1.5 Integrale di Reimann

Definition 11.5 (Integrale di Reimann). *Se l'integrale inferiore coincide con quello superiore, ovvero $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$, allora si dice che f è integrabile (secondo Reimann) su I e il valore è detto integrale di f si I. Si scrive:*

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f = \int_a^b f(x)\,dx = \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \tag{202}$$

Ed è l'area $|A_f|$ del sottogrfico A_f di f su $I = [a, b]$

Ad esempio non è integrabile la funzione di Dirichlet che assume valore 0 se l'argomento è razionale, altrimenti se è irrazionale 1:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad x \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \implies x\,razionale \\ 1 \quad , \quad x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}^c \implies x\,non\,razionale \end{cases} \tag{203}$$

Si ha che:

- $s(f, P) = 0 \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(I) \implies \underline{I}(f) = 0$
- $S(f, P) = 1 \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(I) \implies \bar{I}(f) = 1$

Quindi si ha $\quad 0 = \underline{I}(f) \neq \bar{I}(f) = 1 \implies$ la funzione non è integrabile.

11.2 Teoremi relativi agli integrali

11.2.1 1° teorema fondamentale del calcolo integrale

Theorem 11.1 (1° teorema fondamentale del calcolo integrale). *:*
Se $f \in C\big([a, b]\big)$ è cobntinua, allora è integrabile su $[a, b]$ (quindi l'area del grafico ha un senso).
La notazione per le funzioni integrabili è:

$$\mathcal{R}\big([a, b]\big) := \big\{insieme\ di\ tutte\ le\ f\ integrabili\ su\ [a, b]\big\} \tag{204}$$

Definition 11.6 (primitiva di una funzione). *Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ data una funzione $F : (a, b) \to \mathbf{R}$ è detta primitiva di f se:*

- *F è derivabile*
- *$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a, b)$*

Due funzioni primitive F, G di f, rispettivamente $F' = f \quad , \quad G' = f$ differiscono di una costane su $[a, b]$ che è $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0 \quad \implies \quad F - G$ è costante su $[a, b]$. Si dice che sono curve parallele o coincidenti se la distanza è zero.
Abbiamo visto l'integrale definito come diferenza fra funzione in $F(b) - F(a)$, per indicare una famiglia di primitive si usa la notazione:

$$\int f(x)\,dx = g(x) + k \tag{205}$$

Dimostrazione del 1° teorema fondamentale del calcolo integrale. :
Per ogni partizione:

$$P = \big\{I_k\big\}_{k=1}^{n} \quad , \quad I_k = \big[x_k, x_k + 1\big] \qquad con \quad x_0 = a \quad , \quad x_n = b$$

Abbiamo:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \big[F(x_k) - F(x_{k-1})\big] = ***$$

Questa sommatoria rappresenta una somma telescopica (si semplificano tutti i termini tranne il primo e l'ultimo). Applicando il teorema di Lagrange a F su $[x_k, x_k + 1]$ (controllo e sono rispettate tutte le ipotesi del T. di Lagrange):

$$\implies \exists\, y_k \in (x_{k-1}, x_k) \,\Big|\, \frac{F(x_k) - F(X_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(y_k) = f(y_k)$$

Cioè:

$$F'(y_k) - F(x_{k-1}) = f(y_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = |I_k| \cdot f(y_k) \qquad con \quad |I_K| \quad lunghezza$$

Sostituiamo in $***$ e si ottiene:

$$*** = \sum_{k=1}^{n} |I_k| f(y_k)$$

Poichè:

$$y_k \in (x_{k-1}, x_k) \implies \quad Inf(f) \le f(y_k) \le Sup(f) \qquad nell'intervallino \quad I_k$$

Quindi passando alla sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| \binom{Inf(f)}{I_k} \le \sum_{k=1}^{n} |I_k| \cdot f(y_k) \le \sum_{k=1}^{k} \cdot \binom{Sup(f)}{I_k}$$

Che corrisponde a:

$$s(f, P) \le F(b) - F(a) \le S(f, P) \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(I)$$

Passando a Inf e Sup:

$$Sup\{s(f, P) \,|\, P \in \mathcal{P}(I)\} \le F(b) - F(a) \le Inf\{S(f, P) \,|\, P \in \mathcal{P}(I)\}$$

Quindi:

$$\underline{I}(f) \le F(b) - F(a) \le \bar{I}(f)$$

Poichè per ipotesi f è integrabile :

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$$

si ha che:

$$F(b) = F(a) = \underline{I}(f) \le F(b) - F(a) \le \bar{I}(f) = \int_a^b f(x)\, dx \tag{206}$$

□

11.2.2 Proprietà e interpretazione dell'integrale

Proprietà del calcolo integrale:

1. Linearità:
   Sia $a, b \in \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$ e:

$$\int_I \Big(a \cdot f + b \cdot g\Big) = a \cdot \int_I f + b \cdot \int_I g \qquad \implies \qquad f, g \in \mathcal{R}\big(I\big)$$

2. Positività:

$$\begin{cases} f \in \mathcal{R}(I) \\ f \ge 0 \end{cases} \qquad \implies \qquad \int_I f \ge 0$$

3. Monotonia:

$$\begin{cases} f, g \in \mathcal{R}(I) \\ f \le g \end{cases} \qquad \implies \qquad \int_I f \le \int_I g$$

4. Annullamento:

$$\begin{cases} f \in C\big(\big) \subset \mathcal{R}\big([a, b]\big) \\ f \ge 0 \\ \int_I f = 0 \end{cases} \qquad \implies \qquad \int_I f \ge 0 \quad su\,[a, b]$$

5. Addittività:
   Rispetto all'intervallo di integrazione

$$\begin{cases} a < b < c \\ f \in \big(\mathcal{R}[a,b] \cap \mathcal{R}[b,c]\big) \end{cases} \implies f \in \mathcal{R}\big([a,c]\big) \qquad e \qquad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

6. Orientazione:

$$\int_a^b f := -\int_b^a f \qquad \forall\, a, b$$

Interpretazione dell'integrale:

- Integrale della velocità istantanea è lo spostamento
- Il valore assoluto dell'integrale della velocità istantanea è la sistanza percorsa
- Probabilità della particellla di trovarsi in una data area

11.2.3 Integrazione per parti

Metodo per semplificare gli integrali: integrazione per parti

Theorem 11.2 (integrazione per parti)**.** *:*
Sia $f, g \in C\big([a,b]\big)$ *e* $f', g' \in C\big([a,b]\big)$ *, allora:*

$$\int_a^b f' \cdot g = \big[f \cdot g\big]_a^b - \int_a^b f \cdot g'$$

Piccolo tip per scegliere chi integrare e chi derivare (metodo LINATE):

L(log) - I(trigonometriche inverse) - N(num) - A(polinomio algebrico) - T(trigonometriche) - E(exp)

Dimostrazione dell'integrazione per parti. :
Partendo dalla regola di Leibniz di derivazione di Leibniz si ricava la formula di integrazione oer parti.

$$\big(f \cdot g\big) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Si integrano entrambi i membri dell'equazione di Leibniz:

$$\int_a^b \big(f \cdot g\big)' = \int_a^b \big(f' \cdot g + f \cdot g'\big) = \int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g'$$

Poichè $(f \cdot g)$ è primitiva di $(f \cdot g)'$, per il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale $\quad *** = \big[f \cdot g\big]_a^b$

□

11.2.4 Integrazione per sostituzione

Metodo per semplificare gli integrali: sostituzione

Theorem 11.3 (Integrazione per sostituzione)**.** *:*
Sia $f \in C\big([a,b]\big) \subset \mathcal{R}$, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ *derivabile,* $\varphi' \in C\big([a,b]\big)$ *strettamente monotona e crescente. Fissato* $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, *allora vale la seguente proprietà:*

$$\int_a^b f(y)\, dy = \int_c^d f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \cdot d(x) \tag{207}$$

Dimostrazione dell'integrazione per sostituzione. :
Sia $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ primitiva di F , così per il 1° Teorema del calcolo integrale:

$$\int_a^b f(y)\_dy = F(b) - F(a)$$

Sia $G := F \circ \varphi : [c, d] \to \mathbf{R}$ per il teorema della funzione composta:

$$G' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' \quad cioe' \quad G'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi' = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'$$

Quindi G' è una primitiva di $(f \circ g) \cdot \varphi'$, di conseguenza per il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_c^d f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx = G(d) - G(c) = F\big(\varphi(d)\big) - F\big(\varphi(x)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f = \int_a^b f(y)\, dy$$

$\square$

Esercizi di esempio di integrali risolvibili per sostituzione:

1. Bisogna valutare il polinomio che crea problemi, se è nella forma:
   - Differenza di quadrati:
     (a) $\sqrt{a^2 - x^2}$ sostituire $x = a \cdot \sin(x)$
     (b) $\sqrt{x^2 - a^2}$ sostituire $x = a \cdot \cosh(x)$
   - Somma di quadrati: $\sqrt{a^2 + x^2}$ Sostituire $t = \sinh(x) = \frac{e^x + x^{-x}}{2}$ nell'integrale:

     $$\int \sqrt{1 + x^2} = \int \sqrt{1 + \sinh^2(t)} \cdot \cosh(t)\, dt = \int \cosh^2(t)\, dt = \ldots$$

     Poi per tornare nella variabile x devo trovare l'inversa uso $\sinh(x)^{-1} = \log\big(x + \sqrt{x^2 + 1}\big)$

2. Ricordarsi le formule di duplicazione e bisezione per integrare funzioni gognometriche

3. Sostituire $\tan(x/2) = t$ (formule parametriche) nell'integrale:

   $$\int \frac{dx}{4\sin(x) + 3\cos(x)} =$$

   Ricordo che le formule parametriche sono:

   $$\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \qquad , \qquad \cos(x) = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \tag{208}$$

4. Per gli integrali definiti risolti per sotituzione, ricrdarsi di aggiornare l'intervallo di integrazione

5. Ogni funzione si può riscrivere come una somma di una funzione pari e una funzione dispari:

   $$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{209}$$

   Quindi l'integrale simmetrico fra a e $-a$ (con p_1, p_2 pari e d dispari):

   $$\int_{-a}^{+a} \frac{p_1(x)}{1 + p_2(x)^{d(x)}}\, dx = \int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{+a} \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx + \underbrace{\int_{-a}^{+a} \frac{f(x) - f(-x)}{2} dx}_{\text{dispari } = 0}$$

   $$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1(x)}{1 + p_1(x)^{d(X)}} + \frac{p_1(x)}{1 + p_1(x)^{-d(X)}}\right) = \frac{p_1(x)}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{-a}^{+a} \frac{p_1(x)}{2} dx$$

6. Per le funzioni razionalia potenze razionali di polinomi del tipo $ax + b \quad (a \neq 0)$, si può scomporre:

   $$ax + b = t^q \qquad con \quad q = mcm\big(\text{esponenti del polinomio}\big)$$

11.2.5 Integrali di funzioni razionali fratte

Si distinguono due casi in base al grado del numeratore e denominatore della funzione fratta:

- Se il numeratore è di grado maggiore o uguale al denominatore:
  1. Si fa il rapporto fra i polinomi (vedi: 4)
  2. Si riscrive la frazione come $\int \frac{D(x)\cdot(P(x)+R(X)}{D}$ dove $D(x)$ è il divisore della divisione fra polinomi, $P(x)$ è il risultato della divisione e $R(x)$ è il resto della divisione
  3. Poi si risolve l'integrae scomponendolo in diversi integrali

- Se il numeratore è di grado inferiore al numeratore è tosta e si distinguono 3 casi in base al grado del denominatore:
  - Se il $\Delta(D) > 0$:
    1. Considero l'integrale:
    $$\int \frac{x-1}{x^2+5x+6}dx$$
    2. Posso riscrivere la frazione come:
    $$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx+3B}{(x+3)(x+2)} \implies \begin{cases} coeff(x) = A+B = 1 & \implies A = 1 \\ termine\,noto = 2A+3B = -1 & \implies B \end{cases}$$
    3. Riscrivo l'integrale come:
    $$\int \frac{A}{x+3}dx + \int \frac{B}{x+2}$$
    4. Poi lo risolvo normalmente, notare che potrebbe anche essere che si debba ricorrere all'uso di $Ax+b$ per rappresentare il numeratore relativo al denominatore di terzo grado.

  - Se il $\Delta(D) = 0$:
    1. Considero l'integrale:
    $$\int \frac{x+5}{(x+3)^2}dx$$
    2. Posso riscrivere la frazione come:
    $$\frac{x+5}{(x+3)^2}dx = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{(x+3)} \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \end{cases}$$
    3. Riscrivo l'integrale come:
    $$\int \frac{A}{(x+3)^2}dx + \int \frac{B}{x+3}dx$$
  - Se il $\Delta(D) < 0$:
    1. Devo cercare di ricordurmi al caso:
    $$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}dx \implies formula\ generale: \quad \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+n^2}dx = \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n} + k$$
    2. Ad esempio:
    $$\int \frac{1}{x^2-6x+10}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2+1} = \arctan(x-3)+k$$

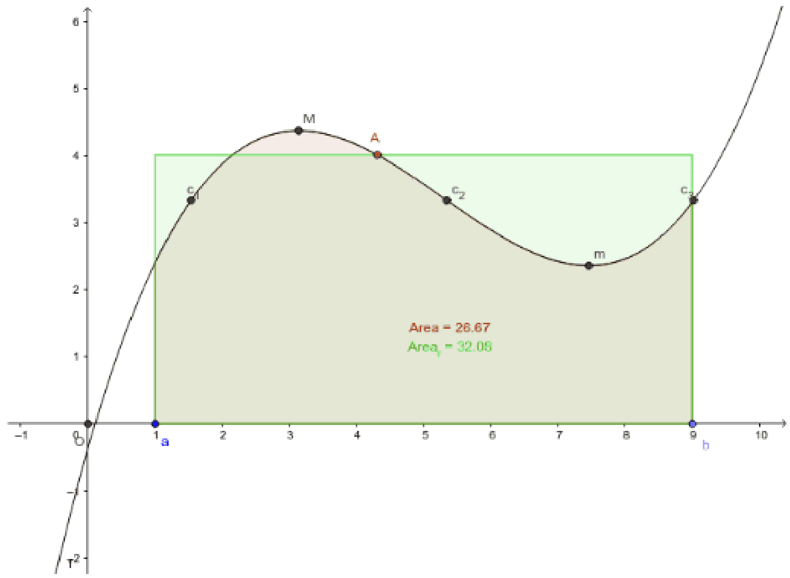


Figura 47: teorema della media

11.2.6 Teorema della Media

Theorem 11.4 (teorema della media). *:*
Sia $f \in C\big([a,b]\big) \subset \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ *allora:*

$$\exists\, x_0 \in [a,b] \,\Big|\, \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(x_0) \quad cioe' \quad \int_a^b f = f(x_0)\cdot(b-a) \tag{210}$$

Dimostrazione del teorema della media. :
Per il teorema di Weistrass, f assume estremi assoluti su $[a,b]$. Denotiamo con $m = min(f) \quad , \quad M = max(f) \quad \Longrightarrow$ $m \leq f(x) \leq M$.
Per la monotonia:

$$m(b-a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq M = M(b-a)$$

Per il teorema dei valori intermedi:

$$\Longrightarrow \;\exists\, x_0 \in [a,b] \,\Big|\, \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(x_0)$$

□

11.2.7 2° teorema del calcolo integrale

Theorem 11.5 (2° teorema del calcolo integrale). *:*
Sia $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ *e definiamo la funzione integrale* F *su* $[a,b]$*:*

$$F : [a,b] \to \mathbf{R} \qquad F(x) := \int_a^x f = \int_a^x f(y)\, dy \tag{211}$$

Allora:

1. *se* f *è limitata allora* F *è continua*
2. *se* f *è continua allora* F *è derivabile in* (a,b) *e:*

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad x \in (a,b)$$

Quindi la funzione integrale F *è primitiva della funzione integrale* f*:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f = f(x) \quad , \quad x \in (a,b)$$

Dimostrazione del 2° teorema fondamenmtale del calcolo integrale. :
- Punto 1: se f è limitata allora F è continua
Se f è limitata $\implies$ esiste M tale che:

$$|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Quindi:

$$\big|F(x{+}h){-}F(x)\big| = *** = \Big|\int_a^{x+h} f - \int_a^{x+h} f\Big| = additti vita' = \Big|\int_x^{x+h} f\Big| \leq proprieta' \leq \int_x^{x+h} |f| \leq \int_x^{x+h} M = M{\cdot}|h|$$

Passando al limite di h che tende a 0:

$$M \cdot |h| \to 0 \quad , \quad h \to 0 \quad \implies \quad \lim_{h\to 0} \big|F(x+h) - F(x)\big| = 0 \quad cioe' \quad \lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)$$

Quindi F è continua per ogni $x \in [a,b]$

- Punto 2: se f è continua allora F è derivabile in (a,b) e $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$
La media dell'integrale di f sull'intervallo di lunghezza h è:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = *** = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} = t.\, media = f\big(y(h)\big)$$

Questo per il teorema della media selezionando un opportuno $y(h)$
Tra x e $x+h$:

$$\big|y(h) - x\big| \leq \big|(x+h) - x\big| = |h| \quad \implies \quad \lim_{h\to 0} y(h) = x$$

E poichè è continua in x, allora:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x =}{h} = \lim_{h\to 0} f\big(y(h)\big) = \int \Big(\lim_{h\to 0}\big(y(h)\big)\Big) = f(x)$$

Quindi in un singolo punto l'incremento dell'area sottesa dal grafico è pari al limite dell'integrale su un intrevallo che tende a zero, che è il valore dellìa funzione stessa.

□

Una conseguenza del 2° teorema fondamentale del calcolo integrale è che il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale può essere espresso come:

$$\int_a^x F' = F(x)F(a) \quad cioe' \quad F(x) = F(a) + \int_a^x F'$$

11.3 Integrali su intervalli particolari

11.3.1 Integrabilità di funzioni con salti

Theorem 11.6 (Integrabilità di funzioni con salti)**.** *:*
Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua solo al più un numero finito di salti, allora è integrabile:

$$f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$$

Dimostrazione. :
Se $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ sono punti di salto, allora $f \in C\big([x_k, x_{k+1}\big)$, $k = 1, \ldots, n-1$

$\implies f \in \mathcal{R}\big([x_k, x_{k+1}\big)$ e per l'addittività:

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f$$

□

11.3.2 Integrale di funzioni su insiemi non limitati

Definition 11.7 (Integrale di funzioni su insimi non limitati)**.** *:*
Sia data una funzione $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$, *allora* f *è integrabile su* $[a, +\infty]$ *se:*

- $\forall\, b > a$ *, si ha:* $\big|f\big| \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$
- $\exists \lim_{b\to+\infty} \int_a^b |f|$ *(il limite essiste ed è finito, quindi converge)*

$\Longrightarrow$ *allora* $\exists \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f$

f si dice integrabile su una semiretta e il suo integrale è definito da:

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f \tag{212}$$

Nella risoluzione degli esercizi bisogna integrare e considerare i diversi casi, ovvero se la funzione diverge, converge e in che modo si comporta avvicinandosi all'eventuale asintoto orizzonatle.

Esercizio di esempio: calcolo di un integrale su un insieme non limitato:

1. Considero l'integrale della funzione $f(x)$ dipendnente da α :

$$I_\alpha := \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \qquad , \quad \alpha > 0$$

2. Sia $b > 1$ e $_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, allora:

$$\int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \alpha = 1 & \Longrightarrow \quad [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 \\ \alpha \neq 1 & \Longrightarrow \quad \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^b = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \end{cases}$$

3. Passando al limite si ottiene:

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \alpha = 1 & \Longrightarrow \quad \lim_{b\to+\infty}\big(\ln(b)\big) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathit{diverge} \\ \alpha < 1 & \Longrightarrow \quad \text{tende a } +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathit{diverge} \\ \alpha > 1 & \Longrightarrow \quad \frac{1}{\alpha-1} > 0 \end{cases}$$

4. Quindi la funzione converge, e quindi è integrabile se e solo se:

$$\Longrightarrow \quad f_\alpha \in \mathcal{R}\Big([1, +\infty]\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1 \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

11.3.3 Integrali di funzioni non limitate

Definition 11.8 (Integrali di funzioni non limitate)**.** *:*
Sia $f : (a, b] \to \mathbf{R}$ *è integrabile su* $(a, b]$ *se:*

- $\forall\, \varepsilon > 0 \quad |f| \in \mathcal{R}\big([a + \varepsilon, b]\big)$
- $\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b |f|$

Allora l'integrale è definito come:

$$\int_a^b f := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f \tag{213}$$

Nella risoluzione degli esercizi bisogna integrare e considerare i diversi casi, ovvero se la funzione diverge, converge e in che modo si comporta avvicinandosi all'eventuale asintoto verticale.

Esercizio di esempio: calcolo di un integrale di una funzione non limitata:

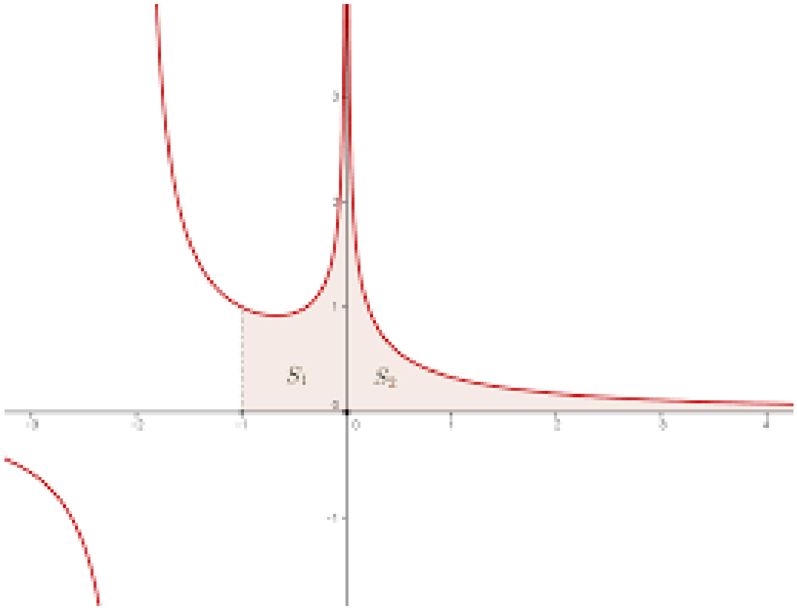


Figura 48: Integrali impropri

1. Considero l'integrale della funzione $f_\beta(x)$ dipendente da β:

$$J_\beta := \int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx \quad \beta > 0$$

2. Otteniamo i due casi:

$$\int_\varepsilon^1 x^{-\beta}\, dx = \begin{cases} \beta = 1 & \Longrightarrow \quad [\ln(x)]_\varepsilon^1 = \ln 1 - \ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) \\ \beta \neq 1 & \Longrightarrow \quad \left[\frac{x^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta} \end{cases}$$

3. Passando al limite:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\beta}\, dx = \begin{cases} \beta = 1 & \Longrightarrow \quad +\infty \quad \Longrightarrow \quad diverge \\ \beta > 1 & \Longrightarrow \quad +\infty \quad \Longrightarrow \quad diverge \\ \beta < 1 & \Longrightarrow \quad \frac{1}{1-\beta} \quad \Longrightarrow \quad ?? \end{cases}$$

4. Di condeguenza:

$$\Longrightarrow \qquad f_\beta \in \mathcal{R}\Big([0,1]\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \beta < 1 \qquad e \qquad \int_0^1 x^{-\beta}\, dx = \frac{1}{1-\beta}$$

11.3.4 Area delimitata da funzioni

Per calcolare l'area delimitata dei grafici di $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ vale:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \qquad se \qquad f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in [a, b] \tag{214}$$

Questa formula vale indipendentemente dal segno asunto dalle due funzioni a patto che vengano rispettate le ipotesi.

Se su $[a, b]$ la posizione reciproca di f, g varia (ad esempio come nella figura (49) la formula è:

$$\int_a^c |f(x) - g(x)|\, dx \qquad \forall\, x \in [a, c] \tag{215}$$

Si scompone l'integrale calcolandolo nell'intervallo $[a, b]$ e $[b, c]$ dove $(b = x_B)$ è l'ascissa di $\quad B = (x_B, y_B) = f \cap g$

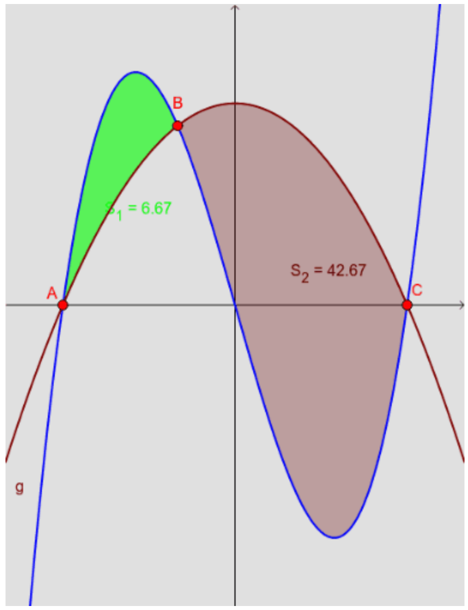


Figura 49: Area fra funzioni

11.4 Funzione integrale

11.4.1 Definizione della funzione integrale

Definition 11.9 (Funzione integrale)**.** *:*
Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $fix. F_{_0} : D(F_{x_0}) \to \mathbf{R}$ *:*

$$F_{x_0}(x) := \int_{x_0}^{x} f(j)\, dy \qquad x \in D\{F_{x_0}\} \tag{216}$$

$D(F_{x_0}) :=$ è il più grande intervallo (chiuso o aperto) in cui f (intervallo contenente x_0).
In generale, il domionio $D(F_{x_0})$ cambia con x_0.

Notiamo che per il 2° Teorema fondamentale del calcolo integrale:

- f limitata $\implies$ F_{x_0} è continua
- f continua $\implies$ F_{x_0} è derivabile

Quindi:

$$F'_{x_0}(x) = f(x)$$

Cioè f_{x_0} è primitiva della funzione f.

11.4.2 Dominio della funzione integrale (esercizi)

In pratica per trovare il dominio di una funzione integrale bisogna:

1. Trovare il dominio e in punti di discontinuità della funzione
2. Considero l'integrale $F_{x_0} = \int_{x_0}^{x} f(y)\, dy$
3. Trovo gli asintotici di f nei punti di discontinuità
4. Valuto se la funzione è integrabile in quei punti (teoria: 11.3)
5. Parto dal punto x_0 e controllo a destra e sinistra fin che è integrabile e trovo il dominio della funzione integrale

11.4.3 Derivata di integrale composto

Theorem 11.7 (Derivata di integrale composto)**.** *:*
Considero la funzione integrale:

$$F(x) := \int_a^{f(x)} g(t)\,dt$$

Se:

$$F(x) := \int_a^{x} g(t)\,dt \quad \implies \quad G(x) = F\big(f(x)\big)$$

La derivata è:

$$G'(x) = F'\big(f(x)\big) \cdot f(x) = g\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \tag{217}$$

11.4.4 Itegrali notevoli fondamentali

$\int 0 \cdot dx = c$	
$\int dx = x + c$	$\int k \cdot f(x) = k \cdot \int f(x)dx$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c$
$\int sinx\, dx = -\cos x + c$	$\int \mathrm{sen}\, f(x) \cdot f'(x)dx = -\cos f(x) + c$
$\int \cos x\, dx = \mathrm{sen}\, x + c$	$\int \cos f(x) \cdot f'(x)dx = \mathrm{sen}\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tg\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x} dx = -ctgx + c$	$\int \frac{f'(x)}{\mathrm{sen}^2 f(x)} dx = -ctg\, f(x) + c$

Figura 50: Tabella integrali fondamentali

12 Serie numeriche

12.1 Definizioni e proprietà

Motivazione dela necessita delle serie:
Consideriamo un intervallo $[0,1]$ e lo dividiamo ripetutamente e teniamo l'intervallo destra che otteniamo dalla suddivisione.
A rigor di logica la somma $\sum_{n=0}^{\infty} |I_n|$ di tutte le parti in cui è stato suddiviso l'intervallo dovrebbe ritornare l'intervallo iniziale $[0,1]$. Dobbiamo provare che sia verificata questa uguaglianza fra la somma degli intervallini e l'intervallo iniziale.

12.1.1 Definizione di serie numerica

Definition 12.1 (Serie numerica)**.** *:*
Sia data una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{R}$.
Definiamo la successione s_N *delle somme parziali:*

$$s_N := \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad \Longrightarrow \qquad N \geq 0 \qquad \{s_n\}_{N=0}^{\infty} \subset \mathbf{R}$$

Si dice che la somma della serie è (tecnicamente se non ammette limite non è appropriata la seguente scrittura):

$$\lim_{N\to+\infty} s_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_N =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{218}$$

Notiamo come la somma della serie coincide con l'integrale se la serie è definitivamente positiva:

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$

12.1.2 Carattere della serie

1. Serie convergente:
   se la successione $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ ammette limite finito, si dice che la serie definita dai $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge
2. Serie divergente:
   se la successione $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $\pm\infty$, si dice che la serie definita dai $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverge
3. Serie indeterminata:
   se la succesione $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ non ammette limite si dice che la serie è indeterminata

12.1.3 Proprietà delle serie

Osservazione sul carattere della serie:

Theorem 12.1. *Il carattere di una serie (convergente - divergente - indeterminata) non viene alterato se si trascurano un numero finito di termini, ovvero la serie* $\sum_{n=n_0}^{\infty}$ *ha la stesso carattere di* $\sum_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$

Dimostrazione.

$$\sum_{n} = 0^N a_n = \sum_{n=n_0+k}^{N} a_n + \sum_{n=n_0}^{n_0+k-1}$$

L'ultimo termine è indipendente da N e, se eliminato, non fa variare il carattere della serie.

□

Proprità della serie:

1. Linearità:

$$\sum_n \big(\alpha\, a_n + \beta\, b_n\big) = \alpha \sum_n a_n + \beta \sum_n b_n \qquad , \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

Se due serie sopra convergono, allora anche la terza converge.
Inoltre se $\sum_n a_n$ converge e $\sum_n b_n$ non converge, allora $\sum_n \big(\alpha\, a_n + \beta\, b_n\big)$ non converge.

2. Confronto:
Se $0 \le a_n \le b_n \quad \forall\, n$, allora:

   (a) se $\sum_n b_n$ converge, anche $\sum_n a_n$ converge a:

   $$\sum_n a_n \le \sum_n b_n$$

   (b) se $\sum_n a_n$ diverge a $\pm\infty$, allora anche la serie $\sum_n b_n$ diverge a $\pm\infty$ poichè le somme parziali sono sempre maggiori.

3. Confronto asintotico:
Sia $0 \le a_n \quad , \quad 0 \le b_n \quad , \quad a_n \sim b_n$ *per* $n \to +\infty$. Allora:

   (a) $\sum_n a_n$ converge $\iff$ $\sum_n b_n$ converge

   (b) $\sum_n a_n$ diverge $\iff$ $\sum_n b_n$ diverge

   Dimostrazione. :
   Siccome $a_n \sim b_n \implies \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1 \implies$:

   $$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \ge N \mid |\frac{a_n}{b_n} - 1| < \varepsilon \implies -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - 1 < +\varepsilon \implies$$

   $$\implies 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon \implies (1-\varepsilon)\cdot b_n < a_n < (1+\varepsilon)\cdot b_n \qquad , \quad n \ge N$$

   Per il criterio del confronto (Teorema dei carabinieri) si conclude la dimostrazione □

4. Condizione necessaria per la convergenza:
La condizione necessaria affinchè la serie $\sum_n a_n$ converga è:

   $$\lim_n a_n = 0$$

   Quindi se $\lim_n a_n \neq 0$, allora la serie sicuramente non converge.

   Dimostrazione. :
   Considero $a_N = s_N - s_{N-1} \implies$ se la serie converge si ha che $\exists\, \lim_n s_N = \lim_N s_{N-1}$
   Quindi si ha che:

   $$\lim_N a_n = \lim_N \big(s_N - s_{N-1}\big) = \Big(\lim_N s_N\Big) - \Big(\lim_N s_{N-1}\Big) = 0 \quad (infinitesimo)$$

   □

12.2 Teoremi delle serie

12.2.1 Teorema del confronto integrale

Theorem 12.2 (Teorema del confronto integrale)**.** *:*
Sia data una serie $\sum_n a_n$ a termini positivi e una funzione $f : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ integrabile edecrescente.
Se $a_n \sim f(n)$ per $n \to +\infty$, allora $\sum_n a_n$ converge

Dimostrazione del teorema del confronto integrale. :
Se $\quad x \in [n_1, n+1] \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(x+1) \quad$ per la monotonia (ipotesi)

Siccome è per ipotesi integrabile:

$$+\infty > \int_0^\infty f(x)\,dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)$$

Quindi la serie $\quad \sum_n f(n+1) \quad$ è convergente

Poichè $\quad a_n \sim f(n) \quad$ anche $\quad \sum_n a_n \quad$ è convergente

□

12.2.2 Criterio della radice

Theorem 12.3 (Teorema, criterio della radice)**.** *:*
Sia $0 \leq a_n$ (non negativo) e supponiamo che:

$$\exists\, l := \lim_n \sqrt[n]{a_n}$$

1. *se $0 \leq l < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge*
2. *se $l > 1$ la serie $\sum_n a_n$ diverge*
3. *(se $l = 1$ non si può dedurre nulla sul carattere della serie e ci si deve ricondurre a casi notevoli)*

Dimostrazione del criterio della radice. :
Dall'ipotesi segue che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \geq N \implies |\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$$

Se $0 < \varepsilon < l \quad \Longrightarrow \quad l - \varepsilon > 1 \quad$ e posso elevare alla n:

$$(l-\varepsilon)^n < a_n < (l+\varepsilon)^n \qquad , \quad n \geq N$$

Cioè stiamo confrontando la serie di regione $(l - \varepsilon)$ e $(l - \varepsilon)$:

1. se $l < 1 \quad , \quad$ scegliendo $\quad \varepsilon \mid l + \varepsilon > 1$:

$$\sum_{n \geq N} (l+\varepsilon)^n \quad \textit{converge}$$

   e per il teorema del confronto anche:

$$\sum_n a_n \quad \textit{converge}$$

2. se $l > 1 \quad , \quad$ scegliendo $\quad \varepsilon \mid l - \varepsilon > 1$:

$$\sum_{n \geq N} \left(l-\varepsilon\right)^n \quad \textit{diverge}$$

   e per il teorema del confronto anche:

$$\sum_n a_n \quad \textit{diverge}$$

□

12.2.3 Criterio del rapporto

Theorem 12.4 (Teorema, criterio del rapporto)**.** *:*
Sia $0 \leq a_n$ *(non negativo) e supponiamo che:*

$$\exists\, l := \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$$

Allora:

1. *se* $0 \leq l < 1$ *la serie* $\sum_n a_n$ *converge*
2. *se* $l > 1$ *la serie* $\sum_n a_n$ *diverge*
3. *(se* $l = 1$ *non si può dedurre nulla sul carattere della serie e ci si deve ricondurre a casi notevoli)*

Dimostrazione del criterio del rapporto. :
Dall'ipotesi segue che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \geq N \implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon \qquad \implies \qquad l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

Se $0 < \varepsilon < l \quad \implies \quad l - \varepsilon > 1$ e posso elevare alla n:

$$(l - \varepsilon) \cdot a_n < a_{n+1} < (l + \varepsilon) \cdot a_n \qquad , \quad n \geq N$$

Cioè stiamo confrontando la serie di regione $(l - \varepsilon)$ e $(l - \varepsilon)$:

1. se $l < 1$, scegliendo $0 < \varepsilon \mid l + \varepsilon < 1$ si ha:

   $$a_{n+1} < (l + \varepsilon) \cdot a_n < (l + \varepsilon)(l + \varepsilon) \cdot a_{n+1} < \cdots < (l + \varepsilon)^{n+1} \cdot a_n$$

   Quindi stiamo confrontando la serie con un'altra serie $\sum_{n \geq N} (l+\varepsilon)^n)$ geometrica convergente e per il criterio del confronto $\sum a_n$ è convergente.

2. se $l > 1$, scegliendo $\varepsilon > 0 \mid (l - \varepsilon) > 1$ si ha:

   $$a_{n+1} > (l + \varepsilon) \cdot a_n > (l + \varepsilon)(l + \varepsilon) \cdot a_{n+1} > \cdots > (l + \varepsilon)^{n+1} \cdot a_n$$

   e per il teorema del confronto anche: $\sum_n a_n$ *diverge*

□

12.2.4 Teorema della convergenza assoluta

Stiamo considerando il caso di una serie a segno variabile.

Definition 12.2 (Convergenza assoluta)**.** *:*
La serie $\sum_n a_n$ *è assolutamente convergente se la serie* $\sum_n |a_n|$ *converge:*

$$\sum_n |a_n| < +\infty \quad (\in \mathbf{R})$$

Theorem 12.5 (Convergenza assoluta $\implies$ converge semplicemente)**.** *:*
Se $\sum_n a_n$ *converge assolutamente, allora converge semplicemnete a:*

$$\left|\sum_n a_n\right| \leq \sum_n |a_n|$$

Dimostrazione del Teorema della convergenza assoluta. :
Considero la serie parziale dei termini positivi e qualli dei termini negativi separatamente:

$$s_N^+ := \sum_{n=0}^{N} a_n \geq 0 \qquad con\ a_n \geq 0 \qquad , \qquad s_N^- := \sum_{n=0}^{N} (-a_n) \geq 0 \qquad con\ a_n < 0$$

Tale che $\quad s_N = s_N^+ - s_N^-$

Considero la serie dei termini positivi:

$$s_N^+ = \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad (\in \mathbf{R})$$

Questo perchè la serie $\quad \sum a_n \quad$ converge assolutamente, cioè $\quad \sum_N |a_n| < +\infty$
Essendo $\quad \{s_N^+\}_{N\geq 0} \quad$ monotona crescente e superiormente limitata, allora per il criterio di convergenza delle successioni monotone limitate esiste:

$$\exists\, s^+ := \lim_{N\to+\infty} s_N^+ \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Analogamente per s_N^-:

$$s_N^- = \sum_{n=0}^{N} (-a_n) \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad (\in \mathbf{R})$$

Quindi per il criterio di convergenza delle successioni monotone limitate esiste:

$$\exists\, s^- := \lim_{N\to+\infty} s_N^- \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Per le proprietà dei limiti:

$$\exists \lim_{N\to+\infty} s_N = \lim_{N\to+\infty} (s_N^+ - s_N^-) = \lim_{N\to+\infty} (s_N^) - \lim_{N\to+\infty} (s_N^-) = s^+ - s^- \in \mathbf{R}$$

Non si hanno informazioni specifiche ne sul valore specifico, ne sul segno (positivo o negativo), ma solo sul fatto che è limitato.

$\square$

12.2.5 Criterio di Leibniz

Theorem 12.6 (Teorema di Leibniz)**.** *:*
Consideriamo la serie $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad$ *dove:*

1. *La serie ha termini di segno alterno:* $\quad a_n \geq 0$
2. *Condizione necessaria per la convergenza della serie* $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
3. *È definitivamente decrescente:* $\quad \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \quad$ *che significa:*

$$\exists\, n_0 \geq 0 \,|\, n \geq n_0 \quad \implies \quad a_n \geq a_{n+1}$$

Allora la serie $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad$ *converge semplicemente:*

$$\exists\, s := \lim_{N\to+\infty} s_N = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \in \mathbf{R} \tag{219}$$

Inoltre:

$$s_{2N} \geq s \geq s_{2N+1} \quad , \quad N \geq 0$$

Con:

- $\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty} \quad$ *decrescente*
- $\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty} \quad$ *crescente*

In più il resto si scrive:

$$R_N := \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \textit{è una serie convergente tale che} \quad |R_N| \leq a_n \quad \forall\, N \geq 0 \tag{220}$$

Dimostrazione del Teorema di Leibniz. :
Poichè:

$$\lim_n |(-1)^n a_n| < \lim_n |a_n| = 0 \quad (Hp\, 2)$$

La condizione necessaria per la convergenza è verificata.
Studiamo le somme paerziali pari e dispari:
- Pari:

$$s_0 = a_0 \geq 0$$

$$s_2 = \underbrace{a_0}_{s_0} - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = s_0 + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{\geq 0\, x\, Hp\, 3} \geq s_0$$

$$s_4 = \underbrace{a_0 - a_1 + a_2}_{s_2} - a_3 + a_4 = s_2 + \underbrace{a_4 - a_3}_{\geq 0\, x\, Hp\, 3} \geq s_2$$

Si deduce che la successione dei termini pari è decrescente:

$$\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty} \qquad \textit{decrescente}$$

- Dispari:

$$s_1 = a_0 - a_1 \geq 0$$

$$s_3 = \underbrace{a_0 - a_1}_{s_1} + a_2 - a_3 + = s_1 + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0\, x\, Hp\, 3} \geq s_1$$

Si deduce che la successione dei termini pari è decrescente:

$$\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty} \qquad \textit{decrescente}$$

Si forma quindi la seguente serie di disegualianze:

$$s_1 < s_3 < \cdots < s_{2N+1} = s_{2N} + a_{2N+1} \leq s_{2N} \leq \cdots \leq s_2 \leq s_0$$

Quindi le successioni $\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty}$ e $\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty}$ sono monotone e limitate, quindi per il teorema della convergenza delle successioni monotone limitate:

$$\exists \lim_{N \to +\infty} s_{2N} \qquad , \qquad \exists \lim_{N \to +\infty} s_{N+1}$$

Inoltre:

$$\lim_N \Big(s_{2N+1} - s_{2N} \Big) = \lim_N \Big(-a_{2N+1} \Big) = 0 \quad x\, Hp\, 2$$

Di conseguenza:

$$\Longrightarrow \qquad \underbrace{\lim_N (s_{2N})}_{= s} = \underbrace{\lim_N s_{2N'}}_{= s} =: s \in \mathbf{R}$$

Ciò significa che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_{pari}(\varepsilon) \geq 0 \,|\, (2N) \geq M_{pari}(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |s_{2N} - s| < \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_{dispari}(\varepsilon) \geq 0 \,|\, (2N+1) \geq M_{dispari}(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |s_{2N+1} - s| < \varepsilon$$

Definendo il massimo:

$$M(\varepsilon) := Max\Big(M_{pari}(\varepsilon), M_{dispari}(\varepsilon) \Big)$$

Si ha che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon) \geq 0 \,\Big|\, N \geq M(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |s_N - s| < \varepsilon \qquad cioe' \quad \exists \lim_N s_N = s$$

In particolare:

$$s_{2N+1} \le s \le s_{2N} \qquad con \quad s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Abbiamo che:

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n = \underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n\Big)}_{=s} - \underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n\Big)}_{=s_{N-1}} = s - s_{N-1}$$

Passando al limite:

$$\lim_N R_N = \lim_N \big(s - s_{N-1}\big) = s - \lim_N \big(s_{N-1}\big) = s - s = 0$$

Usando $\quad s_{2N+1} \le s \le s_{2N}$:

$$s_{2N-1} \underbrace{\le}_{\text{A}} s \underbrace{\le}_{\text{B}} s_{2N} \qquad \Longrightarrow \qquad s_{2N+1} \underbrace{\le}_{\text{C}} s \le s_{2N}$$

Sfruttando queste disugualianze si ottiene:

$$0 \underbrace{\le}_{\text{A}} s - s_{2N-1} \underbrace{\le}_{\text{B}} s_{2N} - s_{2N-1} = a_{2N}$$

$$0 \underbrace{\le}_{\text{A}} s_{2N} - s \underbrace{\le}_{\text{B}} s_{2N} - s_{2N+1} = a_{2N+1}$$

In ogni caso:

$$|s_N - s| \le a_N$$

E sia per N pari che dispari:

$$|R_N| < a_{N-1} \quad \forall\, N \ge 0$$

$\square$

12.3 Serie di Taylor

12.3.1 Definizione di serie con esponenziale

Definition 12.3 (Serie di Taylor)**.** *:*
Sia f la funzione appartenente allo spazio delle funzioni deribabili un numero arbitrario di volte:

$$f \in C^{\infty}\Big((a,b)\Big) =: \{spazio\ funzioni\ derivabili\ \infty\ volte\} \qquad , \qquad con\ x : 0 \in (a,b)$$

Considero la serie di taylor di f in x_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)}_{***} = \lim_{n\to+\infty} T^f_{x_0,N}(x)$$

**** Sono i polinomi di Taylor di ordine $N \ge 0$.*
Per quali $x \in (a,b)$ la serie di Taylor converge? Per quali è la somma?
Usando il Teorema di Taylor cojn il resto di Lagrange abbiamo:

$$f(x) = T_N(x) + R_N(x) \qquad , \qquad R_N(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} \quad , \quad N \ge 0$$

Dove $\quad !c - x_0| < |x - x_0|$
Definendo:

$$M_N := Sup\big|f^n(x)\big| \qquad con\ x \in (a,b) \quad su\ ha \quad \underbrace{M_N < +\infty}_{finito}$$

Quindi si trova:

$$\big|f(x) - T_N(x)\big| = \big|R_N(x)\big| \leq \frac{M_{N+1}}{(N+1)!}(b-a)^{N+1}z$$

Quindi otteniamo qualcosa di uniforme rispetto a x nell'intervallo $[a,b]$ (non dipendente da x).
Quindi se il resto R_N converge a zero uniformemente, ovvero:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{M_{N+1}}{(N+1)}(b-a)^{N+1} = 0$$

La serie di Taylor converge e la sua somma è prorpio $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$$

La condizione di convergenza uniforme a zero del resto è verificata se:

$$M_N \leq K^N \qquad \textit{per qualche} \quad k \geq 0$$

12.3.2 Serie di Taylor

Qui sono elencate le principali serie di Taylor:

- Serie di Taylor dell'esponenziale:
  1. Considero la funzione esponenziale:
  $$f(x) = e^x \qquad \Longrightarrow \qquad f^n(x) = e^x \qquad \textit{con} \quad n \geq 0 \quad , \quad x \in \mathbf{R}$$
  2. Sappiamo che:
  $$\forall\,(a,b) \subset \mathbf{R} \qquad M_N := Sup\big(f^n(x)\big) = 1 \quad \forall\, N \geq 0 \,|\, x \in (a,b)$$
  3. Quindi abbiamo definito l'esponenziale come:
  $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

- Serie di Taylor del seno e coseno:
  - Considero la funzione seno:
  $$f(x) = \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \textit{con} \quad x \in \mathbf{R}$$
  - Considero la funzione coseno:
  $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- Serie di Taylor del logaritmo:
  1. Considero la funzione logaritmo:
  $$\log(1+x) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = (1+x^{-1}) \qquad , \qquad f^n = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-1} \quad n \geq 1$$
  2. Per ogni valore assunto da x nell'intervallo:
  $$\forall\, x \in (a,b) \qquad : \quad M_N \leq (N-1)!\,(1+a)^{-N}$$
  3. Quindi il logaritmo sarà:
  $$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{x^n}{n}\right) \qquad , \quad x > -1$$

12.3.3 Formula di Eulero

Formula di Eulero, forma esponenziale di un numero complesso:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta \qquad , \quad \theta \in \mathbf{R} \tag{221}$$

Dimostrazione della formula di eulero. :
Considero:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad , \quad z \in \mathbf{C}$$

Il limite della differenza è il modulo (modulo come $\quad |z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \quad$) di: :

$$\lim_{N\to+\infty} \left| e^z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = 0$$

Sostituiamo $\quad z = i\theta \quad , \quad \theta \in \mathbf{R}$:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!}}_{\text{termine pari}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{termine dispari}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}}_{\text{Serie Taylor } \cos(\theta)} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{Serie Taylor } \sin(\theta)} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$$

□

12.4 Esercizi sulle serie

Trucchetti da ricordare per gli esercizi:

- Ricordarsi che oltre ai metodi basati su teoremi, si può razionalizzare se ci sono delle radici e poi usare i teoremi.
- Ricordare la formula di Sterling per scomporre l'esponenziale.

12.4.1 Esempi di serie

- Serie convergente:
  1. Considero la serie di mengoli:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad n \geq 1$$
  2. Trovo la successione delle somme:
  $$s_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = 1 - \frac{1}{N+!}$$
  3. Passo al limite:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} s_n = \lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1$$
  4. Siccome il limite esiste ed è finito $\quad \Longrightarrow \quad$ serie converge
- Serie divergente:
  1. Analogamente si vede come nel punto 3 il limite esiste e non è finito, quindi sarà $\pm\infty$
  2. Una serie divergente è:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n} \right)$$
- Serie indeterminata:

1. Considero la serie:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \implies a_n = (-1)^n \quad , \quad n \geq 0$$
2. Trovo la successione delle somme;
$$s_N := \sum_{n=0}^{N}(-1)^n = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^N = \begin{cases} 0 & , \quad N\ dispari \\ -1 & , \quad N\ pari \end{cases}$$
3. Siccome non esiste il limite la serie è indeterminata:
$$\nexists \lim_{N\to+\infty} s_n \implies \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \quad indeterminata$$

12.4.2 Serie particolari

- Serie geometrica (metodo classico):

1. Considero la serie geometrica;
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + \cdots + q^n \qquad q \geq 0$$
2. Se $q = 1$ allora diverge, infatti:
$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1 = +\infty$$
3. Se $q \neq 1$ allora:
$$s_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$
4. Passando al limite:
$$\lim_{N\to+\infty} s_N = \lim_{N\to+\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \begin{cases} +\infty & , \quad q > 1 \\ \frac{1}{1-q} & , \quad 0 \leq q < 1 \end{cases}$$

- Serie armonica (per confronto):

1. Considero la serie armonica:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
2. $A - n := \frac{1}{n} \to 0$ $\quad per\ n \to +\infty \quad \implies$ la condizione necessaria per la convergentìza è verificata
3. Considero la funzione $\quad f(x) = \log(1 + x) \quad , \quad x > -1$
4. La derivata prima è: $\quad f'(x) = \log(1 + x)^{-1} \quad , \quad f'(0) = 1$ quindi la tangente in $x = 0$ è $\quad y = x$
5. La derivata seconda è:$f''(x) = -(1-x)^{-2} < 0 \quad \implies$ è concava quindi il grafico sta sotto la tangente:
$$\ln(1 + x) \leq x \quad \forall\, x > -1 \qquad \implies \qquad \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \leq \frac{1}{n} \quad \forall\, n \geq 1$$
6. Ma sappiamo anche che:
$$\ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) \leq \frac{1}{n} \qquad \implies \qquad \ln(n + 1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

7. Passando alla somma della successione:

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \underbrace{\ln(N+1)}_{\to +\infty} - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}_{??}$$

8. Quindi $\sum_{n=1}^{N}$ converge per confronto

- Serie con confronto asintotico:
  1. Considero la serie:
  $$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[n]{e} - 1}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = \left(e^{1/n} - 1\right)\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$
  2. Siccome la serie asintotica converge, anche la serie considerata è convergente

- Serie con confronto integrale:
  1. Considero la serie:
  $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \qquad , \qquad \alpha \in (0, 2)$$
  2. Nel caso $\alpha = 1$ abbiamo il caso limite della serie armonica che converge (esercizio precedente)
  3. Considero $f(x) = \frac{1}{n^\alpha}$ è integrabile a $+\infty$ per $\alpha > 1$
  4. Quindi si ha che $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ è convergente per $\{\alpha > 1\} \cup \{\alpha = 1\} = \{\alpha \geq 1\}$

- Serie esponenziale con :
  1. Sia $x \geq 0$ fissato:
  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = \frac{x^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0 = l \qquad (n \to +\infty)$$
  2. Vediamo che dopo aver applicato il criterio del rapporto la serie evidentemente converge
  3. Applicando Taylor con resto di Lagrange:
  $$e^x = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall\, x \geq 0$$

- Serie con Criterio di Leibniz:
  1. Considero la serie a segno alterno:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{n - 1n^2 + 1}_{a_n}$$
  2. Controllo le ipotesi del teorema:
     (a) Serie a segno alterno: $a_n \geq 0$
     (b) Definitivamente decrescente: $a_{n+1} \leq a_n$ (o con disequazione o con studio di funzione)
     (c) Siccome sono tutte verificate si può applicare il teorema di Leibniz $\Longrightarrow$ la serie converge semplicemente
     (d) Discuto la convergenza assoluta: noto che il comportamento asintotico è quello della serie armonica $\Longrightarrow$ quindi per il criterio del confronto non è convergente.
     (e) Ricordarsi che se si riesce a scomporre la serie in un numero finito di serie convergenti e una sola divergente si può dire che è divergente con dimostrazione per assurdo con il criterio di linearità.

13 Teoria per l'esame

1. **Formule di de Moivre per il prodotto di numeri complessi (dimostrazione).**

   Prodotto tra numeri complessi nella notazione gognometrica:

   Theorem 13.1. *Prima formula di De Moivre:*
   Considero due numeri complessi $z_k = \rho_k\big(\cos(\theta_k) + i\ \sin(\theta_k)\big) \quad , \quad k = 1, 2$*:*

   $$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)\big) \tag{222}$$

   - Considero $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1) \in \mathbf{C}$
   - Considero $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2) \in \mathbf{C}$
   - $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = passaggi[i^2 = -1] = \rho_1 \cdot \rho_2\Big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\ \sin(\theta_1+\theta_2)\Big)$
   - $\begin{cases} \rho_1 \cdot \rho_2 = |z_1 \cdot z_2| \quad \text{prodotto dei moduli è il modulo del prodotto} \\ Arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = Arg(\theta_1) + Arg(\theta_2) \quad \text{Argomento del prodotto è la somma dell'argomento dei fattori} \end{cases}$

2. **Formule di de Moivre per le radici n-esime di un numero complesso (dimostrazione).**

   Theorem 13.2. *Seconda formula di De Moivre:*
   Considero un numero $w \in \mathbf{C}/\{0\}$ *e* $n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$*, allora l'equazione...:*

   $$z^n = w \tag{223}$$

   ...ha esattamente n-soluzioni $z_0, z_1, .., z_{n-1} \in \mathbf{C}$*, ovvero...:*

   $$\sqrt[n]{z_k} = z_k^{\frac{1}{n}} = w \quad \forall\, k = 0, 1, .., n-1 \tag{224}$$

   ...che sono date da (se $z = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ *):*

   $$z_k = \rho^n\big(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)\big) \tag{225}$$

   di conseguenza abbiamo che:

   $$\begin{cases} Arg(z_k) = \theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \\ |z_k| = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}} \quad , \quad k = 0, 1, .., k-1 \end{cases} \tag{226}$$

   Dimostrazione seconda fomrula di De Moivre (67):

   - verifichiamo le z_k siano radici (soluzioni) dell'equazione utilizzando la 1° formula di De Moivre (67)

     Dimostrazione. :

     $$z_k^n = \Big(\sqrt[n]{\rho}\big(\cos\theta_k + i\ \sin\theta_k\big)\Big)^n = (\sqrt[n]{\rho})^n\big(\cos(n\theta_k) + i\ \sin(n\theta_k)\big) =$$

     $$= \rho\Big(\cos(\theta + 2k\pi) + i\ \sin(\theta + 2k\pi)\Big) = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta) = w \implies \forall\, k = 0, 1, .., n-1$$

     Sono radici distinte (in questo caso particolare coincidenti) □

   - Verifichiamo che non ci siano radici oltre alle z_k:

     Dimostrazione. :
     Supponiamo che esista $\quad z = v(cos\alpha + i\ \sin\alpha) \quad$ che sia soluzione di $\quad z^n = w$
     Il numero complesso z ha modulo $\quad |z| = v > 0 \quad$ e angolo $\quad Arg(z) = \alpha)$
     Allora:

     $$\Big(v\ (\cos\alpha + i\ \sin\alpha\Big)^n = \rho\ (\cos\theta + i\ \sin\theta)$$

Che corrisponde a

$$v^n \Big(\cos(n\,\alpha) + i\,\sin(n\,\alpha)\Big) = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) \implies v^n = \rho \implies v = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}$$

Di conseguenza:

$$n\,\alpha = \theta + 2k\pi \implies \alpha = Arg(z) = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad , \quad k \in \mathbf{Z}$$

k è sovrabbonadate perchè per $k > n-1$ si aggiunge un angolo giro, quindi non si creano nuove soluzioni

$$\implies 0 \leq k \leq n-1$$

Si arriva alla formula:

$$Arg(z_k) = \theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

□

3. **Continuità delle funzioni derivabili (dimostrazione).**

Theorem 13.3 (Continuità delle funzioni derivabili)**.** *Se una funzione è derivabile, allora sicuramente è anche continua (condizione necessaria).*

$$\begin{cases} f : (a,b) \to \mathbf{R} \quad , \quad x_0 \in (a,b) \\ f \text{ derivabile in } x_0 \end{cases} \implies f \text{ è continua in } x_0 \tag{227}$$

Dimostrazione della continuità delle funzioni derivabili. :

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) - f(x_0)\Big) = \lim_{x \to x_0} \Big(\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}\Big) \cdot (x - x_0) =$$

$$= \Big(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\Big) \cdot \Big(\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\Big) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

□

4. **Lemma di Fermat (dimostrazione).**

Theorem 13.4 (Lemma di Fermat)**.** *Considero una funzione* $f : (a, b) \to \mathbf{R} \quad , \quad x_0 \in (a, b)$ *è un punto di esteremo per la funzione (massimo 0 minimo), se la funzione è derivabile in* x_0*, allora la sua derivata vale zero*

Geometricamente significa che la tangente in quel determinato punto è parallela all'asse x e siamo in corrispondenza di un punto stazionario (o punto critico se si tratta di problemi di termoodinamica).

Dimostrazione del Teorema di Fermat (solo nel caso di massimo). :
Sia $x_0 \in (a, b)$ il massimo di f nell'intervallo (a, b) tale che per ogni punto nell'intervallo generico vale:

$$f(x_M) \geq f(x)$$

(A) Consideriamo il caso in cui $x > x_M$, si ha che:

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \leq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_M}{x - x_M} \leq 0$$

Siccome il limite destro e sinistro coincidono:

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = \lim_{x \to x_M} \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \leq 0$$

(B) Consideriamo il caso in cui $x < x_M$, si ha che:

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \geq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_M}{x - x_M} \geq 0$$

Siccome il limite destro e sinistro coincidono

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = \lim_{x \to x_M} \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \geq 0$$

Dalle equazioni ottenute da A e B si ha che:

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = 0 \quad \textit{punto stazionario}$$

Quindi una funzione ha un numero finito di punti stazionari che possono essere di massimo, minimo o flesso.

□

5. **Teorema di Lagrange (dimostrazione).**

Theorem 13.5 (Teorema di Lagrange)**.** *Se $f \in C([a,b])$ è derivabile in (a,b) (estremi esclusi perchè deve essere derivabile sia nell'intorno destro che sinistro) , allora:*

$$\exists\, c \in (a,b) \mid \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \tag{228}$$

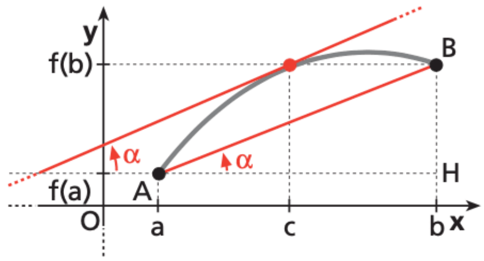


Figura 51: Teorema di Lagrange

Il teorema di Lagrange afferma che quando una funzione ad una variabile è continua e derivabile in un intervallo compatto (chiuso e limitato), allora ammette almeno un punto in cui la derivata prima è pari al rapporto incrementale che c'è tra i punti estremi dell'intervallo.
È importante sottolineare che il punto c, detto punto di Lagrange, non è necessariamente unico.

Dimostrazione del teorema di Lagrange. :

1) Consideriamo una funzione $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ tale che:

$$g(x) := f(a) + \Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big)(x-a)$$

Osserviamo che g è un polinomio di grado $gr(g) \leq 1$, di conseguenza il suo grafico è una retta.

2) Per costruzione (g: retta passante per a e b):

$$g(a) = f(a) \qquad , \qquad g(b) = f(b)$$

Quindi g condivide con f sia a che b. In altre parole g è la retta passante per $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$.

3) La retta ha per coefficente angolare:

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

4) $g \in C(\mathbf{R})$ è derivabile in $\mathbf{R}$, quindi:

$$g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

5) Consideriamo la funzione $h := f - g$ su l'intervallo $[a,b]$. La funzine h è continua in tutto l'intervallo estremi inclusi e derivabile nell'intervallo estremi esclusi in quanto differenza fra funzioni continue.

Per il Teorema di Weistrass (insieme limitato e infinito, quindi esiste punto di accumulazione) esiste un punto $x_m, x_M \in [a,b]$ che è estremo globale:

6A) Consideriamo il caso in cui gli estremi di $[a,b]$ coincidono con x_m, x_M di $h(x)$.

Poichè:

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0 \qquad e \qquad h(b) = f(b) - g(b) = 0$$

per ipotesi è definizione di retta.

Si ha che:

$$h(x) = 0\; \forall\, x \in [a,b] \implies 0 = h(x) = f(x) - g(x) \implies f(x) = g(x)$$

Quindi:

$$f'(x) = g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \Longrightarrow \qquad Teorema\, verificato$$

6B) Invece se almeno uno tra x_m, x_M sia strettamente incluso in $[a, b]$, quindi:

$$(x_m \vee x_M) \in (a, b)$$

Supponiamo sia $x_m \in (a, b)$, applicando il Lemma di Fermat ottengo che:

$$0 = h'(x_M) = f'(x_M) - g'(x_M)$$

Quindi:

$$f'(x_M) = g'(x_M) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi il teorema verificato $\forall\, c \in (a, b)$

□

Caso particolare del Teorema di Lagrange, il teorema di Rolle:

Theorem 13.6 (Teorema di Rolle)**.** *:*
Considerata una funzione tale che $f(A) = f(b)$, allora $\exists\, c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \tag{229}$$

6. **Teorema sulla caratterizzazione delle funzioni monotone (dimostrazione).**

Theorem 13.7 (Test della monotonia)**.** *:*
Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in (a, b) , allora:

(a) f *crescente* $\Longleftrightarrow f'(x) > 0\, \forall\, x \in (a, b)$

(b) f *decrescente* $\Longleftrightarrow f'(x) < 0\, \forall\, x \in (a, b)$

(c) f *stazionaria* $\Longleftrightarrow f'(x) = 0\, \forall\, x \in (a, b)$

Dimostrazione del punto 1, funzione crescente. Considero:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \qquad se \quad a < x < y < b$$

Per il teorema sella permanenza del segno:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \forall\, c \in (a, b)$$

Viceversa, supponiamo che $\quad f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad$.
Consideriamo i punti $\quad a < x < y < b$, per il teorema di Lagrange applicato a f sull'intervallo $[a, b]$ segue che:

$$\exists\, c \in (x, y) \mid 0 \leq f'(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq f(y) \quad \forall\, x, y \in (a, b) \quad , \quad x < y$$

Questo significa che f è crescente. Analogamente si dimostra anche la decrescenza.

□

In generale non vale il test della monotonia se la funzione nell'intervallo non è continua.

Corollary 13.7.1 (Corollario della caratterizzazione delle funzioni costanti)**.** *:*
Considero $f(a,b) \to \mathbf{R}$ *è derivabile, allora la funzione f è costante, quindi la sua derivata prima* $f'(x) = 0 \ \forall \ x \in (a,b)$.

Viceversa se $f'(x) \neq 0 \, \forall \, x \in (a,b)$ *, allora per il test della monotonia f è sia crescente che decrescente in senso lato, quindi è costante.*

Corollary 13.7.2. *Se* $f : D \to \mathbf{R}$ *con D unione di intervalli e f derivabile in D, allora* $f'(x) = 0 \, \forall \, x \in D$ *se e solo se f è localmente costante (costante nell'intervallo o nel caso limite in un punto).*

7. **Teorema di de l'Hospital (dimostrazione).**

Theorem 13.8 (Teorema di De L'Hopital)**.** *:*
Sia $f, g(a,b) \to \mathbf{R}$ *derivabile e* $g \neq 0$ *tale che:*

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) \\ \exists \, \frac{\lim_{x \to x_0^+} f'(x)}{\lim_{x \to x_0^+} g'(x)} \end{cases} \implies \textit{allora} \quad \frac{\lim_{x \to x_0^+} f'(x)}{\lim_{x \to x_0^+} g'(x)} = l \tag{230}$$

Dimostrazione del Teorema di De L'Hopital. :
Definiamo $f(a) = g(a) = 0$ estendibile in maniera continua all'intervallo $[a,b)$ e fissiamo $x \in [a,b)$, quindi abbiamo $f, g \in C([a,x])$ e in più derivabili in (a,x) poichè derivabili in $[a,b)$ per ipotesi.

Allora f, g sono derivabili in (a,b) e continue in $x = a$.
Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $h : [a,x] \to \mathbf{R}$ definita come:

$$h(y) := f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x) \quad \forall \, y \in [a,x]$$

Sappiamo che esiste:

$$\exists \, y(x) \in (a,x) \mid \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'\big(g(x)\big)$$

che sta a indicare che il punto di lagrange dipende da x, allora $\implies h'\big(g(x)\big) = 0$

Devo trovare $h'(y)$, dove x è fissato:

$$0 = h'\big(g(x)\big) = f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x) \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'\big(y(x)\big)}{g'\big(y(x)\big)} \qquad \text{(intorno del punto)}$$

Si ha che:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'\big(y(x)\big)}{g'\big(y(x)\big)} = ***$$

Poichè $a < y(x) < x$ si ha che:

$$\lim_{x \to a^+} y(x) < a^+$$

Quindi per il teorema del limite della funzione composta;

$$*** = \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l$$

$\square$

8. **Formula di Taylor con il resto secondo Peano (dimostrazione).**

Theorem 13.9 (Teorema di Taylor con resto di Peano)**.** *:*
Sia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ derivabile n-volte con $(n\geq 1)$ in $x_0\in(a,b)$. Definiamo il suo polinomio di Taylor di ordine n in x_0 (con $x\in\mathbf{R}$) come:

$$T^f_{n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f^2(x_0)(x-x_0)^2+...+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (231)$$

Allora esiste la funzione resto di ordine n in x_0:

$$R^f_{n,x_0}(x):(a,b)\to\mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad f(x)=T^f_{n,x_0}(x)+R^f_{n,x_0}(x) \qquad \textit{con } x\in(a,b) \quad (232)$$

E il resto è infinitesimo di ordine maggiore di n per $x\geq x_0$ (raffinamento del lemma delle derivate con il resto):

$$\lim_{x\to x_0}\frac{T^f_{n,x_0}(x)-R^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0 \quad (233)$$

Quindi $R^f_{n,x_0}(x)=o\big((x-x_0)^n\big)$ per $x\to x_0$:

$$f(x)=T^f_{n,x_0}(x)+o\big((x-x_0)^n\big) \quad \textit{per } x\to x_0 \quad (234)$$

Dimostrazione del Teorema di Taylor con resto di Peano. :

Definiamo $R^f_{n,x_0}(x)$ come differenza tra $f(x)$ e $T^f_{n,x_0}(x)$:

$$R^f_{n,x_0}(x)=f(x)-R^f_{n,x_0}(x) \quad \forall\, x\in(a,b)$$

Con De l'Hopital:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=dH=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\big(T^f_{n,x_0}\big)'(x)}{n\cdot(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\Big)'}{n(x-x_0)^{n-1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k(k-1)!}\cdot k(x-x_0)^k\Big)}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$

Applichiamo il teorema di De L'hopital per $(n-1)$volte quindi i coefficienti di grado minore di $(n-1)$ si azzerano:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{n-1}(x)-\Big(f^{n-1}(x_0)+f^n(x_0)(x-x_0)\Big)}{n(n-1)(n-2)\cdot 2(x-x_0)^1}=\frac{1}{n!}\cdot\lim_{x\to x_0}\Big[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^n(x_0)\Big]=\frac{1}{n!}\cdot\Big\{f^n(x_0)-f^n(x_0)\Big\}=0$$

□

9. **Primo Teorema Fondamentale del Calcolo (dimostrazione).**

Theorem 13.10 (1° teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *:*
Se $f \in C\big([a,b]\big)$ è cobntinua, allora è integrabile su $[a,b]$ (quindi l'area del grafico ha un senso).
La notazione per le funzioni integrabili è:

$$\mathcal{R}\big([a,b]\big) := \big\{\textit{insieme di tutte le } f \textit{ integrabili su } [a,b]\big\} \tag{235}$$

Definition 13.1 (primitiva di una funzione)**.** *Sia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ data una funzione $F:(a,b)\to\mathbf{R}$ è detta primitiva di f se:*

- *F è derivabile*
- *$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$*

Due funzioni primitive F, G di f, rispettivamente $F' = f \quad , \quad G' = f$ differiscono di una costane su $[a,b]$ che è $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0 \quad \Longrightarrow \quad F - G$ è costante su $[a,b]$. Si dice che sono curve parallele o coincidenti se la distanza è zero.
Abbiamo visto l'integrale definito come diferenza fra funzione in $F(b) - F(a)$, per indicare una famiglia di primitive si usa la notazione:

$$\int f(x)\,dx = g(x) + k \tag{236}$$

Dimostrazione del 1° teorema fondamentale del calcolo integrale. :
Per ogni partizione:

$$P = \big\{I_k\big\}_{k=1}^{n} \quad , \quad I_k = \big[x_k, x_k + 1\big] \qquad con \quad x_0 = a \quad , \quad x_n = b$$

Abbiamo:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n}\big[F(x_k) - F(x_{k-1})\big] = ***$$

Questa sommatoria rappresenta una somma telescopica (si semplificano tutti i termini tranne il primo e l'ultimo).
Applicando il teorema di Lagrange a F su $\quad [x_k, x_k + 1\big]$ (controllo e sono rispettate tutte le ipotesi del T. di Lagrange):

$$\Longrightarrow \quad \exists\, y_k \in (x_{k-1}, x_k) \,\Big|\, \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(y_k) = f(y_k)$$

Cioè:

$$F'(y_k) - F(x_{k-1}) = f(y_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = |I_k|\cdot f(y_k) \qquad con \quad |I_K| \quad lunghezza$$

Sostituiamo in $\quad *** \quad$ e si ottiene:

$$*** = \sum_{k=1}^{n} |I_k| f(y_k)$$

Poichè:

$$y_k \in (x_{k-1}, x_k) \implies \quad Inf(f) \le f(y_k) \le Sup(f) \qquad nell'intervallino \quad I_k$$

Quindi passando alla sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| \binom{Inf(f)}{I_k} \le \sum_{k=1}^{n} |I_k|\cdot f(y_k) \le \sum_{k=1}^{k} \cdot \binom{Sup(f)}{I_k}$$

Che corrisponde a:

$$s(f,P) \le F(b) - F(a) \le S(f,P) \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(I)$$

Passando a Inf e Sup:

$$Sup\{s(f,P) \mid P \in \mathcal{P}(I)\} \le F(b) - F(a) \le Inf\{S(f,P) \mid P \in \mathcal{P}(I)\}$$

Quindi:

$$\underline{I}(f) \leq F(b) - F(a) \leq \bar{I}(f)$$

Poichè per ipotesi f è integrabile :

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$$

si ha che:

$$F(b) - F(a) = \underline{I}(f) = \bar{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{237}$$

□

10. **Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo (dimostrazione).**

Theorem 13.11 (2° teorema del calcolo integrale)**.** *:*
Sia $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ *e definiamo la funzione integrale* F *su* $[a,b]$*:*

$$F : [a,b] \to \mathbf{R} \qquad F(x) := \int_a^x f = \int_a^x f(y)\,dy \tag{238}$$

(a) se f *è limitata allora* F *è continua*
(b) se f *è continua allora* F *è derivabile in* (a,b) *e:*

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad x \in (a,b)$$

Quindi la funzione integrale F *è primitiva della funzione integrale* f*:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f = f(x) \quad , \quad x \in (a,b)$$

Dimostrazione del 2° teorema fondamenmtale del calcolo integrale. :
- Punto 1: se f è limitata allora F è continua
Se f è limitata $\implies$ esiste M tale che:

$$|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Quindi:

$$\Big|F(x+h) - F(x)\Big| = *** = \Big|\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\Big| = additti vita' = \Big|\int_x^{x+h} f\Big| \leq propriet a' \leq \int_x^{x+h} |f| \leq \int_x^{x+h} M = M \cdot |h|$$

Passando al limite di h che tende a 0:

$$M \cdot |h| \to 0 \quad , \quad h \to 0 \quad \implies \quad \lim_{h\to 0}\Big|F(x+h) - F(x)\Big| = 0 \quad cioe' \quad \lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)$$

Quindi F è continua per ogni $x \in [a,b]$

- Punto 2: se f è continua allora F è derivabile in (a,b) e $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$
La media dell'integrale di f sull'intervallo di lunghezza h è:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = *** = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f = t.\,media = f\big(y(h)\big)$$

Questo per il teorema della media selezionando un opportuno $y(h)$
Tra x e $x+h$:

$$\Big|y(h) - x\Big| \leq \Big|(x+h) - x\Big| = |h| \quad \implies \quad \lim_{h\to 0} y(h) = x$$

E poichè è continua in x, allora:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f\big(y(h)\big) = \int\Big(\lim_{h\to 0}\big(y(h)\big)\Big) = f(x)$$

Quindi in un singolo punto l'incremento dell'area sottesa dal grafico è pari al limite dell'integrale su un intrevallo che tende a zero, che è il valore dellìa funzione stessa.

□

Una conseguenza del 2° teorema fondamentale del calcolo integrale è che il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale può essere espresso come:

$$\int_a^x F' = F(x)F(a) \quad cioe' \quad F(x) = F(a) + \int_a^x F'$$

11. **Teoremi di integrazione per parti (dimostrazione).**

Theorem 13.12 (integrazione per parti)**.** *:*
Sia $f, g \in C\big([a,b]\big)$ *e* $f', g' \in C\big([a,b]\big)$ *, allora:*

$$\int_a^b f' \cdot g = \big[f \cdot g\big]_a^b - \int_a^b f \cdot g'$$

Dimostrazione dell'integrazione per parti. :
Partendo dalla regola di Leibniz di derivazione di Leibniz si ricava la formula di integrazione oer parti.

$$\big(f \cdot g\big)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Si integrano entrambi i membri dell'equazione di Leibniz:

$$\int_a^b \big(f \cdot g\big)' = \int_a^b \big(f' \cdot g + f \cdot g'\big) = \int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g'$$

Poichè $(f \cdot g)$ è primitiva di $(f \cdot g)'$, per il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale $\quad *** = \big[f \cdot g\big]_a^b$

□

12. **Teoremi di integrazione per sostituzione (dimostrazione).**

Theorem 13.13 (Integrazione per sostituzione)**.** *:*
Sia $f \in C\big([a,b]\big) \subset \mathcal{R}$, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ *derivabile,* $\varphi' \in C\big([a,b]\big)$ *strettamente monotona e crescente. Fissato* $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, *allora vale la seguente proprietà:*

$$\int_a^b f(y)\, dy = \int_c^d f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \cdot d(x) \tag{239}$$

Dimostrazione dell'integrazione per sostituzione. :
Sia $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ primitiva di F , così per il 1° Teorema del calcolo integrale:

$$\int_a^b f(y)\_dy = F(b) - F(a)$$

Sia $\quad G := F \circ \varphi : [c,d] \to \mathbf{R} \quad$ per il teorema della funzione composta:

$$G' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' \quad cioe' \quad G'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi' = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'$$

Quindi G' è una primitiva di $(f \circ g) \cdot \varphi'$, di conseguenza per il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_c^d f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx = G(d) - G(c) = F\big(\varphi(d)\big) - F\big(\varphi(x)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f = \int_a^b f(y)\, dy$$

□

13. **Serie a termini positivi: Criterio della Radice (dimostrazione).**

Theorem 13.14 (Teorema, criterio della radice)**.** *:*
Sia $0 \leq a_n$ (non negativo) e supponiamo che:

$$\exists\, l := \lim_n \sqrt[n]{a_n}$$

(a) se $0 \leq l < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge
(b) se $l > 1$ la serie $\sum_n a_n$ diverge
(c) (se $l = 1$ non si può dedurre nulla sul carattere della serie e ci si deve ricondurre a casi notevoli)

Dimostrazione del criterio della radice. :
Dall'ipotesi segue che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \geq N \implies |\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon \qquad \implies \qquad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$$

Se $0 < \varepsilon < l \quad \implies \quad l - \varepsilon > 1$ e posso elevare alla n:

$$(l-\varepsilon)^n < a_n < (l+\varepsilon)^n \qquad , \quad n \geq N$$

Cioè stiamo confrontando la serie di regione $(l - \varepsilon)$ e $(l - \varepsilon)$:

(a) se $l < 1$, scegliendo $\varepsilon \mid l + \varepsilon < 1$:

$$\sum_{n \geq N} (l+\varepsilon)^n \quad converge$$

e per il teorema del confronto anche:

$$\sum_n a_n \quad converge$$

(b) se $l > 1$, scegliendo $\varepsilon \mid l - \varepsilon > 1$:

$$\sum_{n \geq N} \left(l-\varepsilon\right)^n \quad diverge$$

e per il teorema del confronto anche:

$$\sum_n a_n \quad diverge$$

□

14. **Serie a termini positivi: Criterio del Rapporto (dimostrazione).**

Theorem 13.15 (Teorema, criterio del rapporto)**.** *:*
Sia $0 \leq a_n$ (non negativo) e supponiamo che:

$$\exists\, l := \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$$

Allora:

(a) se $0 \leq l < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge
(b) se $l > 1$ la serie $\sum_n a_n$ diverge
(c) (se $l = 1$ non si può dedurre nulla sul carattere della serie e ci si deve ricondurre a casi notevoli)

Dimostrazione del criterio del rapporto. :
Dall'ipotesi segue che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \geq N \implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon \qquad \implies \qquad l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

Se $0 < \varepsilon < l \quad \implies \quad l - \varepsilon > 1$ e posso elevare alla n:

$$(l - \varepsilon) \cdot a_n < a_{n+1} < (l + \varepsilon) \cdot a_n \qquad , \quad n \geq N$$

Cioè stiamo confrontando la serie di regione $(l - \varepsilon)$ e $(l - \varepsilon)$:

(a) se $l < 1$, scegliendo $0 < \varepsilon \mid l + \varepsilon < 1$ si ha:

$$a_{n+1} < (l + \varepsilon) \cdot a_n < (l + \varepsilon)(l + \varepsilon) \cdot a_{n+1} < \cdots < (l + \varepsilon)^{n+1} \cdot a_n$$

Quindi stiamo confrontando la serie con un'altra serie $\sum_{n \geq N} (l + \varepsilon)^n)$ geometrica convergente e per il criterio del confronto $\sum a_n$ è convergente.

(b) se $l > 1$, scegliendo $\varepsilon > 0 \mid (l - \varepsilon) > 1$ si ha:

$$a_{n+1} > (l + \varepsilon) \cdot a_n > (l + \varepsilon)(l + \varepsilon) \cdot a_{n+1} > \cdots > (l + \varepsilon)^{n+1} \cdot a_n$$

e per il teorema del confronto anche: $\sum_n a_n$ *diverge*

□

15. **Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno (dimostrazione).**

Theorem 13.16 (Teorema di Leibniz)**.** *:*
Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *dove:*

(a) La serie ha termini di segno alterno: $a_n \geq 0$

(b) Condizione necessaria per la convergenza della serie $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

(c) È definitivamente decrescente: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *che significa:*

$$\exists\, n_0 \geq 0 \mid n \geq n_0 \qquad \implies \qquad a_n \geq a_{n+1}$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *converge semplicemente:*

$$\exists\, s := \lim_{N \to +\infty} s_N = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \in \mathbf{R} \tag{240}$$

Inoltre:

$$s_{2N} \geq s \geq s_{2N+1} \quad , \quad N \geq 0$$

Con:

- $\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty}$ *decrescente*
- $\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty}$ *crescente*

In più il resto si scrive:

$$R_N := \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \textit{è una serie convergente tale che} \quad |R_N| \leq a_n \quad \forall\, N \geq 0 \tag{241}$$

Dimostrazione del Teorema di Leibniz. :
Poichè:

$$\lim_n |(-1)^n a_n| < \lim_n |a_n| = 0 \quad (Hp\,2)$$

La condizione necessaria per la convergenza è verificata.
Studiamo le somme paerziali pari e dispari:

- Pari:

$$s_0 = a_0 \geq 0$$

$$s_2 = \underbrace{a_0}_{s_0} - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = s_0 + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{\geq 0 \; x \; Hp\,3} \geq s_0$$

$$s_4 = \underbrace{a_0 - a_1 + a_2}_{s_2} - a_3 + a_4 = s_2 + \underbrace{a_4 - a_3}_{\geq 0 \; x \; Hp\,3} \geq s_2$$

Si deduce che la successione dei termini pari è decrescente:

$$\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty} \qquad decrescente$$

- Dispari:

$$s_1 = a_0 - a_1 \geq 0$$

$$s_3 = \underbrace{a_0 - a_1}_{s_1} + a_2 - a_3 + = s_1 + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0 \; x \; Hp\,3} \geq s_1$$

Si deduce che la successione dei termini pari è decrescente:

$$\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty} \qquad decrescente$$

Si forma quindi la seguente serie di disegualianze:

$$s_1 < s_3 < \cdots < s_{2N+1} = s_{2N} + a_{2N+1} \leq s_{2N} \leq \cdots \leq s_2 \leq s_0$$

Quindi le successioni $\{s_{2N}\}_{N=0}^{\infty}$ e $\{s_{2N+1}\}_{N=0}^{\infty}$ sono monotone e limitate, quindi per il teorema della convergenza delle successioni monotone limitate:

$$\exists \lim_{N \to +\infty} s_{2N} \qquad , \qquad \exists \lim_{N \to +\infty} s_{N+1}$$

Inoltre:

$$\lim_N \Big(s_{2N+1} - s_{2N} \Big) = \lim_N \Big(-a_{2N+1} \Big) = 0 \quad x \; Hp\,2$$

Di conseguenza:

$$\Longrightarrow \qquad \underbrace{\lim_N \big(s_{2N} \big)}_{= s} = \underbrace{\lim_N s_{2N'}}_{= s} =: s \in \mathbf{R}$$

Ciò significa che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_{pari}(\varepsilon) \geq 0 \,|\, (2N) \geq M_{pari}(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |s_{2N} - s| < \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_{dispari}(\varepsilon) \geq 0 \,|\, (2N+1) \geq M_{dispari}(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |s_{2N+1} - s| < \varepsilon$$

Definendo il massimo:

$$M(\varepsilon) := Max\Big(M_{pari}(\varepsilon), M_{dispari}(\varepsilon) \Big)$$

Si ha che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon) \geq 0 \,\Big|\, N \geq M(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |s_N - s| < \varepsilon \qquad cioe' \quad \exists \lim_N s_N = s$$

In particolare:

$$s_{2N+1} \leq s \leq s_{2N} \qquad con \quad s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Abbiamo che:

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n a_n = \underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\Big)}_{=s} - \underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n a_n\Big)}_{=s_{N-1}} = s - s_{N-1}$$

Passando al limite:

$$\lim_N R_N = \lim_N \big(s - s_{N-1}\big) = s - \lim_N \big(s_{N-1}\big) = s - s = 0$$

Usando $\quad s_{2N+1} \le s \le s_{2N}$:

$$s_{2N-1} \underbrace{\le}_{\text{A}} s \underbrace{\le}_{\text{B}} s_{2N} \qquad \Longrightarrow \qquad s_{2N+1} \underbrace{\le}_{\text{C}} s \le s_{2N}$$

Sfruttando queste disugualianze si ottiene:

$$0 \underbrace{\le}_{\text{A}} s - s_{2N-1} \underbrace{\le}_{\text{B}} s_{2N} - s_{2N-1} = a_{2N}$$

$$0 \underbrace{\le}_{\text{A}} s_{2N} - s \underbrace{\le}_{\text{B}} s_{2N} - s_{2N+1} = a_{2N+1}$$

In ogni caso:

$$|s_N - s| \le a_N$$

E sia per N pari che dispari:

$$|R_N| < a_{N-1} \quad \forall\, N \ge 0$$

$\square$

16. **Criterio del confronto asintotico (dimostrazione).**
Confronto asintotico:
Sia $0 \le a_n \quad , \quad 0 \le b_n \quad , \quad a_n \sim b_n \; per \; n \to +\infty.$ Allora:
    (a) $\sum_n a_n$ converge $\iff$ $\sum_n b_n$ converge
    (b) $\sum_n a_n$ diverge $\iff$ $\sum_n b_n$ diverge

Dimostrazione. :
Siccome $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \Longrightarrow$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \mid n \ge N \mid |\frac{a_n}{b_n} - 1| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - 1 < +\varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad (1-\varepsilon)\cdot b_n < a_n < (1+\varepsilon)\cdot b_n \quad , \quad n \ge N$$

Per il criterio del confronto (Teorema dei carabinieri) si conclude la dimostrazione

$\square$

Riferimenti bibliografici