GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

Banfi Tommaso Felice

September 2022 - January 2023

Indice

Sommario

Sono uno studente di Ingegneria informatica al Politecnico di Milano. Questi sono gli appunti di Geometria e Algebra lineare, ovvero la branca della matematica che si occupa dello studio dei vettori, spazi vettoriali (o spazi lineari), trasformazioni lineari e sistemi di equazioni lineari. Gli spazi vettoriali sono un tema centrale nella matematica moderna; l'algebra lineare è usata ampiamente nell'algebra astratta, nella geometria e nell'analisi funzionale. L'algebra lineare ha inoltre una rappresentazione concreta nella geometria analitica.

L'algebra lineare è uno strumento centrale in molte aree della matematica e ha molte applicazioni pratiche. A volte si usa per approssimare i modelli non lineari, ad esempio nelle regressioni lineari, o nell'analisi dei piccoli segnali per i transistori.. L'esame di geometria e Algebra lineare del primo semestre (primo anno) è tenuto dal Professor Möseneder Frajria Pierluigi, viene erogato in italiano e vale 8 CFU.

1 Introduzione al Corso Geometria e Algebra lineare

1.1 Obiettivi dell'insegnamento

Coerentemente con gli obiettivi formativi del corso di studio previsti della scheda SUA-CdS, l'insegnamento ha il duplice obiettivo di fornire allo studente sia i principi fondamentali dell'algebra lineare, sia le applicazioni del metodo delle coordinate della geometria analitica.

Si propone lo studio dei vettori geometrici, delle matrici e delle operazioni relative. Viene sviluppata la teoria dei sistemi lineari. Si considerano la costruzione e lo studio degli spazi vettoriali e delle applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Si forniscono le nozioni e i concetti fondamentali riguardanti autovalori e autovettori. Si tratta il prodotto scalare euclideo. Si approfondisce il metodo delle coordinate cartesiane nel piano e nello spazio, anche attraverso il calcolo vettoriale, e con particolari applicazioni allo studio di problemi riguardanti rette, piani, coniche e quadriche.

1.2 Risultati di apprendimento attesi

Ci si attende che lo studente conosca gli elementi fondamentali dell'algebra lineare, con particolare riferimento ai seguenti:

- studio e risoluzione di sistemi lineari;
- studio di spazi e sottospazi vettoriali (dimensione, generatori, basi, basi ortonormali);
- studio delle applicazioni lineari tra spazi vettoriali;
- concetti di autovalore e autovettore, e relativa applicazione a problemi legati alla diagonalizzazione degli endomorfismi.

Ci si attende altresì la conoscenza del metodo delle coordinate cartesiane, con applicazioni particolari a:

- risoluzione di problemi riguardanti piani e rette nello spazio
- calcolo vettoriale nel piano e nello spazio;
- classificazione e studio di coniche e quadriche;

Il docente si attende una comprensione che non sia limitata al solo enunciato di definizioni e di risultati, e alla risoluzione di esercizi standard, ma sia anche critica, in grado di distinguere differenti tipologie di problemi e di soluzioni, attraverso scelte consapevoli e giustificazione dei procedimenti seguiti. Ci si aspettano inoltre un'esposizione ben argomentata della teoria e un'adeguata correttezza nei calcoli.

1.3 Argomenti trattati

1. MATRICI E VETTORI GEOMETRICI Vettori geometrici. Algebra delle matrici. Rango e metodo di Gauss. Matrice inversa e algoritmo di Gauss-Jordan. Determinante, interpretazione geometrica, operazioni su righe e colonne, teorema di Binet.

2. SISTEMI LINEARI Nozioni fondamentali. Forma matriciale di un sistema lineare. Teorema di Rouché-Capelli. Procedimenti di risoluzione di un sistema lineare. Sistemi lineari omogenei.

3. SPAZI VETTORIALI Assiomi di spazio vettoriale. Sottospazi. Indipendenza lineare, generatori, basi, dimensione. Spazio delle righe, delle colonne, e nucleo di una matrice. Teorema di nullità più rango. Coordinate di un vettore rispetto a una base. Forma parametrica e cartesiana di un sottospazio. Somma e intersezione di sottospazi.

4. APPLICAZIONI LINEARI Generalità, nucleo ed immagine. Applicazioni lineari iniettive, suriettive, isomorfismi. Composizione e applicazione inversa. Matrice rappresentativa di un'applicazione lineare. Matrice del cambio di base.

5. ENDOMORFISMI Autovalori e autovettori. Interpretazione geometrica. Polinomio caratteristico. Endomorfismi diagonalizzabili. Matrici simili. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Criteri di diagonalizzabilità.

6. SPAZI EUCLIDEI Prodotto scalare, norma, angolo e ortogonalità tra vettori. Prodotto scalare standard. Disuguaglianza di Schwarz, teorema di Carnot, disuguaglianza triangolare, teorema di Pitagora generalizzato. Basi ortogonali e ortonormali. Algoritmo di Gram-Schmidt. Complemento ortogonale. Proiezioni ortogonali. Isometrie e matrici ortogonali. Endomorfismi simmetrici e matrici simmetriche. Diagonalizzazione ortogonale e teorema spettrale. Forme quadratiche. Matrici congruenti. Segnatura, teorema di Sylvester, classificazione delle forme quadratiche.

7. COORDINATE CARTESIANE E GEOMETRIA ANALITICA LINEARE Sottospazi affini e giacitura. Parallelismo. Forma parametrica e cartesiana. Intersezione e distanza tra sottospazi affini. Punti, rette, piani nello spazio. Perpendicolarità tra rette e piani. Rette sghembe.

8. CONICHE E QUADRICHE Generalità. Equazione in forma matriciale. Classificazione metrica e affine di coniche e quadriche. Riduzione in forma canonica. Considerazioni geometriche: centro, asse, vertice, rette e piani di simmetria, quadriche di rotazione.

1.4 Prerequisiti

Si richiede che lo studente abbia una buona conoscenza degli argomenti di matematica trattati nella scuola secondaria di secondo grado, incluse le nozioni di base di teoria degli insiemi. In maniera particolare si richiede la capacità di saper lavorare con i polinomi, di applicare le principali formule di trigonometria, di risolvere semplici equazioni, di saper utilizzare i metodi della geometria analitica nel piano.

1.5 Modalità di valutazione

L'esame può essere superato iscrivendosi alle prove in itinere, oppure a uno degli appelli previsti dal calendario accademico. In occasione della seconda prova in itinere c'è la possibilità di ripetere o recuperare la prima prova in itinere; in tal caso, lo studente sosterrà una prova completa. L'esame è composto da una prova pratica, consistente di una Parte A con domande a risposta multipla ed una Parte B con esercizi a risposta aperta, ed una prova teorica. Per superare l'esame è necessario ottenere una valutazione positiva in entrambe le prove.

2 Vettori

12 Settembre 2022

2.1 Definizione e tipologie di vettori

- 2-vettori: coppie di numeri reali // $(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}$
- 3-vettori: triple di numeri reali // $(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}$
- 4-vettori: quadruple di numeri reali // $(x, y, a, b) \mid x, y, a, b \in \mathbb{R}$
- n-vettori: n-uple di numeri reali // $\underbrace{(x_{1,2}, ..., x_n)}_{\text{Dimensione: n}} \mid x_{1,2}, ..., x_n \in \mathbb{R}$

2.2 Operazioni con i vettori

- Somma: +

$$\underbrace{(x_1, x_2, ..., x_n)}_{\text{Vettore di lunghezza n}} + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \tag{1}$$

- Prodotto scalare: consideriamo un valore $t \in \mathbb{R}$ e un 2-vettore $(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$t \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (t \cdot x_1, t \cdot x_2, ..., t \cdot x_n) \tag{2}$$

2.3 Vettori particolari

- Vettore nullo $(0, 0, ..., 0)$ che sommato a qualsiasi vettore v, da come risultato v (elemento neutro). Il vettore nullo viene convenzionalmente scritto in questa forma: $\vec{0}$.
- Vettore opposto $v_1 = -v_2$, un vettore v sommato al suo opposto da il vettore nullo $v_1 + v_2 = \vec{0}$

2.4 Proprietà dei vettori

- Associativa: $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
- Coniugativa: $v_1 + v_2 = v_1 + v_2$
- Elemento neutro: $v + \vec{0} = v$ (non cambia il vettore)
- Vettore opposto: $v + (-v) = \vec{0}$
- Distributiva:
  1. scrittura compatta: $t \cdot (v_1 + v_2) = (t \cdot v_1, t \cdot v_2)$
  2. scrittura estesa: $(t_1 + t_2) \cdot t \cdot v + t_2 \cdot v$
- Associativa mista: $(t \cdot s) \cdot v = t \cdot (s \cdot v)$
- Legge di unità: $1 \cdot v = v$
- Altro: $v - w = v + (-w)$ (differenza è la somma dell'opposto)

3 Matrici

3.1 Definizione e tipologie di matrici

Definition 3.1 (Matrice)**.** *Una matrice $m \times n$ può essere vista come una tabella di numeri reali composta da n righe e m colonne. Una matrice è un vettore i cui elementi sono anch'essi vettori, quindi un vettore di vettori.*

$$matrice = (a, b, c) \tag{3}$$
$$a = (a_1, a_2, a_3) \tag{4}$$
$$b = (b_1, b_2, b_3) \tag{5}$$
$$c = (c_1, c_2, c_3) \tag{6}$$

Questo vettore di vettori può essere scritto in una forma compatta:

$$matrice = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

3.2 Matrici degeneri

- Vuota: 0×0
- Quadrata: $n \times n$
- N-vettore: $1 \times n$(matrice degenere)
- N-vettore colonna: $n \times 1$ (matrice degenere)
- Nulla: $a_{i,j} | a_{i.j} = 0 \forall i, j$ con $1 < i \leq n$ e $1 < j \leq m$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

- Identità: viene definita per le matrici quadrate $n \times n$, ha tutti gli 1 sulla digonale principlae ed il resto tutti 0, si indica con $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.3 Operazioni con le matrici

- Somma: è importante che le matrici abbiano le stesse dimensioni $m \times n$

$$(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) \tag{9}$$

- Prodotto per scalare: valgono le 8 proprietà degli n-vettori anche per le matrici $(m \times n)$

$$t \cdot (a_{i,j}) = (t \cdot a_{i,j}) \tag{10}$$

3.3.1 Prodotto riga x colonna

- Prodotto fra matrici:
  - Matrici conformabili: una matrice A$(m \times n)$ è conformabile ad una matrice B$(r \times s)$ se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B

$$(m \times n) \cdot (r \times s) = (c_{s,m}) \Leftrightarrow n = r \tag{11}$$

  - Prodotto riga per colonna: una volta stabilito che le matrici A e B sono conformabili,:

$$A \cdot B = C = (c_{i,j}) \tag{12}$$

$$C = \sum_{r=1}^{m} (a_{i,r}) \cdot (a_{i,j}) = a_{i,1} \cdot a_{1,j} + a_{i,2} \cdot a_{2,j} + ... + a_{i,m} \cdot a_{m,j} \tag{13}$$

  Possiamo notare che le dimensioni della matrice prodotto saranno il numero di colonne di A e il numero di righe di B.

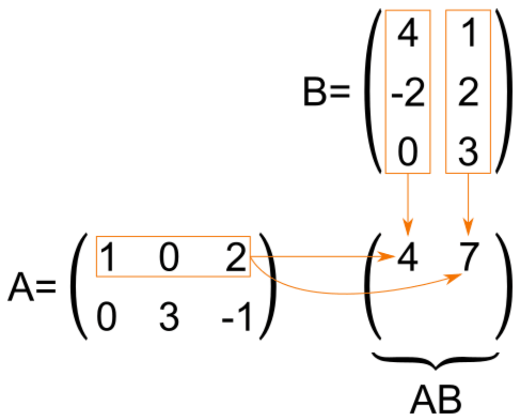

Figura 1: Prodotto tra matrici, metodo riga per colonna

Proprietà del prodotto fra matrici (metodo: riga per colonna)

- Associativa $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Distributiva: ci sono due punti perchè non gode della proprietà commutativa
  1. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  2. $(A \cdot B) + C = A \cdot C + B \cdot C$
- Associativa mista: $t \cdot (A \cdot B) = (t \cdot A) \cdot B = A \cdot (t \cdot B)$
- Proprietà speciale matrice identità $n \times m$ (A e B conformabili):

$$I_n \cdot A = A \tag{14}$$

$$A \cdot I_m = A \tag{15}$$

- Non vale la proprietà commutativa: $A \cdot B \neq B \cdot A$

3.4 Trasposta di matrice

3.4.1 Definizione di trasposta

Definition 3.2 (Trasposta)**.** *La trasposta della matrice A è la matrice che si ottiene scambiando righe e colonne e si indica con A^T.*

- La matrice si dice simmetrica quando $A = A^T$ (deve essere una matrice quandrata $n \times n$), un esempio è di matrice simmetrica: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice si dice antisimmetrica (o emisimmetrica) quando $A = -A^T$ (deve essere una matrice quandrata $n \times n$), un esempio è di matrice simmetrica: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(a_{i,j})^T = -(a_{i,j})a_{i,j} = -a_{i,j} \implies a_{i,j} = 0 \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

  Per questo motivo una matrice antisimmetrica è necessario che abbia la diagonale principale popolata solamente da 0.

3.4.2 Proprietà di una trasposta

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(s \cdot A)^T = s \cdot A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

3.5 Potenze di matrici quadrate

- Consideriamo una matrice quadrata $n \times n$ di ordine n, grazie alla proprietà associativa, la potenza ennesima della matrice viene definita:

$$A^n = \prod_{k=0}^{n} A^k = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n \tag{17}$$

- Viene posto $A^0 = 1$
- Valgono le proprietà classiche delle potenze:
  - $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$
  - $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$

3.6 Matrici invertibili

Definition 3.3 (invertibile)**.** *Una matrice viene definita invertibile se esiste una matrice quadrata B tale che* $A \cdot B = B \cdot A = 1$

$$\exists\, B_{n,n} \,\middle|\, A \cdot B = B \cdot A = 1 \tag{18}$$

- È necessario includere sia AB che BA perchè il prodotto riga per colonna non gode della proprietà commutativa.
- Se A è invertibile $\implies$ B è unica (dimostrazione: 3.6) e la si indica A^-1.

Unicità matrice inversa.

$$\begin{cases} (B \cdot A) \cdot (A \cdot B) = 1 \\ (B^1 \cdot A) \cdot (A \cdot B^1) = 1 \end{cases} \implies B^1 = B^1 \cdot 1 = B^1 \cdot (A \cdot B) = (B^1 \cdot A) \cdot B = 1 \cdot B = B \implies B = B^1 \tag{19}$$

□

Si può affermare che valgono le proprietà delle potenze anche con le potenze intere.
Per stabilire se una matrice è invertibile o meno si può dimostrare nel seguente metodo, anche se non poi utilizzeremo un metodo che si basa sul determinante della matrice:

- Matrice invertibile:

Invertibile (metodo 1). Consideriamo una matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Troviamo la matrice $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \implies A^2 = I$

$\implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ quindi devono essere vere entrambe $A \cdot A^{-1} = I \quad , \quad A \cdot A = A^2 = I$

$\implies A^{-1} \cdot A = I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I$

$\implies A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I$

$\implies A \cdot A^{-1} = I$ □

Invertibile (metodo 2). Consideriamo una matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Troviamo la matrice $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \implies A^2 = I$

$A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \implies A^{-1} \cdot A \cdot A = A^{-1} \implies I \cdot I = A^{-1} \cdot A = A^{-1}$

Di conseguenza se $A^2 = I$ e A^2 è invertibile, allora $\implies A = A^{-1}$

Ora troviamo la matrice $A^3 = A^2 \cdot A^{-1} = A$
$\implies$ arriviamo alla conclusione che:
- $A^{2n} = I$
- $A^{2n+1} = A$ □

- Matrice non invertibile:

  Non invertibile. Consideriamo una matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Troviamo la matrice $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Troviamo la matrice $A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

  $\implies \quad A^3 = 0 \quad , \quad \implies$ non può esistere la matrice inversa perchè $A^2 \neq 0$

  Supponiamo che esista una matrice inversa A^{-1} della matrice A, allora:

  \- $A^{-1} \cdot A^3 = 0$ perchè $A^3 = 0$

  \- $A^{-1} \cdot A^3 = (A^{-1} \cdot A) \cdot A^2 = I \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $\implies$ riusulterebbe assurdo □

3.7 Sottomatrici e Minori

Definition 3.4. *Viene definita sottomatrice di $A(m \times n)$ una matrice ottenuta togliendo alcune righe e colonne dalla matrice A (la amtrice non deve essere necessariamente quadrata).*

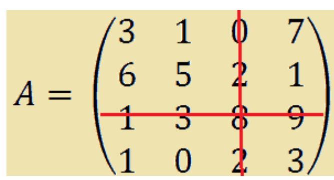

Figura 2: Sottomatrice di una matrice quadrata A di dimensioni 4×4

- Se la sottomatrice è quadrata di ordine m, allora la si chiama *minore* di ordine m.
- Il minore complementare M_1 dell'elemento a_1 è il minore che si ottiene togliendo ad A la i-esima riga a la j-esima colonna.

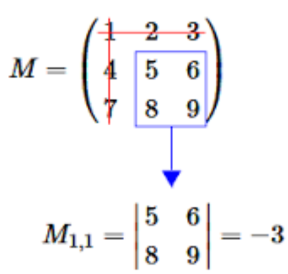

Figura 3: Minore di una matrice quadrata A di dimensioni 4×4

- La formula del complemento algebrico di A è:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot (M_{ij}) \tag{20}$$

Procedimento per applicazione della formula:

$$M_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \implies A_{i,j} = (-1)^{2+3} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot [(1 \cdot -1) - (2 \cdot 0)] = (-1) \cdot (-3) = 3 \tag{21}$$

3.8 Determinante

3.8.1 Definizione operativa determinante

Definiremo operativamente il determinante di una matrice in base all'ordine della matrice stessa:

- Se $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ è matrice quadrata di ordine 1: $det \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = a$
- Se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è matrice quadrata di ordine 2: $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot b - c \cdot b$
  (è la differenza fra il prodotto della digonale secondaria e il prodotto della diagonale primaria).
- Se $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ è matrice quadrata di ordine 3, secondo la Regola di Sarrus il determinante viene calcolato sommando i prodotti delle diagonali discendenti meno la somma dei prodotti sulle diagonali ascendeti (nella matrice trasformata nella figura 4).

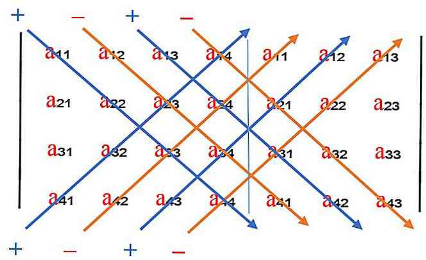

Figura 4: Regola di Sarrus per calcolo del determinante (matrici 3×3)

3.8.2 Sviluppo di Laplace

- Se le matrici sono di ordine superiore a 3, allora si utilizza lo Sviluppo di Laplace.

Definition 3.5 (Sviluppo di Laplace)**.** *Lo Sviluppo di Laplace è una formula ricorsiva che riscrive il determinante di una matrice quadrata di ordine n calcolando il determinante della matrice di ordine $n-1$. Utilizzare la formula generale non è conveniente perchè è difficile da dimostrare e si dovrebbero svolgere molti calcoli su parecchi termini. La formula dello Sviluppo di Laplace è la seguente:*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{(ij)}) \tag{22}$$

Il determinante $det(A_{(ij)})$ si calcola con la Regola di Sarrus sulla sottomatrice 3×3 della matrice iniziale, in questo caso si elimina la colonna della cella che si sta considerando nella sommatoria e la seconda riga (si può anche tenere fissa una colonna). Esempio di procedimento (scelgo la riga 2 perchè ha molti 0):

$$D_1 = det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot (-1) = -5 \tag{23}$$

$$D_2 = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0 \tag{24}$$

$$D_{tot} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ [2] & [0] & [1] & [0] \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot D_1 + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot D_? + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot D_2 + 0 \cdot (-1)^{2+4} \cdot D_? = \tag{25}$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot (-5) + 0 + 1 \cdot (-1) \cdot (0) + 0 = 10 \tag{26}$$

3.8.3 Proprietà base del determinante

Le prorpietà base su cui si fondano le proprietà che ci permettono di trovare il determinante di una matrice sono:

- Alternanza: se A_1 si ottiene da A_0 scambiando 2 righe tra di loro, allora $det(A_1) = -det(A_0)$
- Multilinearità:
  - Caso 1: se A_1 si ottiene da A_0 moltiplicando una riga per uno scalare t, allora $det(A_1) = t \cdot det(A_0)$
  - Caso 2: se la i-esima riga di A è la somma di 2 vettori v e w, allora

    $det(A) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(1,0,1) & + & w(0,1,0) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = det(A_v) + det(A_w)$

    dove $(A_v) = det \begin{pmatrix} v(1 & 0 & 1) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $(A_w) = \begin{pmatrix} w(0 & 1 & 0) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
  - Caso 3: si possono sommare (anche moltiplicando per un fattore) delle righe di una matrice e il determinante resta uguale:
    $II\, riga\, finale = a \cdot (II\, riga\, iniziale) + b \cdot (II\, riga\, iniziale)$

3.8.4 Conseguenze proprietà del determinante

- Normalizzazione: $det(I) = 1$

  Normalizzazione. Applichiamo la formula 22 dello Sviluppo di Laplace alla matrice $I_3 = \begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Calcoliamo il determinante considerando la prima riga:
  $det(I_3) = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \; det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 + 0 = +(1 \cdot 1) - (0 \cdot 0) = +1$

  Applichiamo la formula 22 dello Sviluppo di Laplace alla matrice $I_4 = \begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] & [0] \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Calcoliamo il determinante considerando la prima riga:
  $det(I_4) = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \underbrace{det(I_3)}_{=1} = +1$

  Applichiamo la formula 22 dello Sviluppo di Laplace alla matrice $I_4 = \begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] & [0] \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Calcoliamo il determinante considerando la prima riga:
  $det(I_4) = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \underbrace{det(I_3)}_{=1} = +1$

  Applichiamo la formula 22 dello Sviluppo di Laplace alla matrice I_5

  Calcoliamo il determinante considerando la prima riga:
  $det(I_5) = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \underbrace{det(I_4)}_{=1} = +1$

  Attraverso il principio di induzione possiamo dimostrare che la regola è valida per ogni matrice identità quadrata $I_{n \times n}$ (formula ricosiva), secondo la formula:

  $$det(I_n) = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \underbrace{det(I_{n-1})}_{=1} = +1 \tag{27}$$

  □

- Simmetria: $det(A) = det(A^T)$
- Formula di Bindet: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- non esiste proprietà associativa, non vale $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$

3.8.5 Calcolo matrice inversa (determinante)

1. Controllo invertibilità:
   come conseguenza della formula di Formula di Bindet, se A è invertibile allora il determinante:

   $$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

   Condizione matrice inversa. :
   $A \cdot A^{-1} = I \quad \Longrightarrow \quad det(A \cdot A^{-1}) = det(I) = 1$

   $det(A \cdot A^{-1}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad det(A) \neq 0$

   $\Longrightarrow \quad det(A) \neq 0$ è condizione necessaria e sufficente per stabilire se una matrice è invertibile:

   $$A \text{ invertibile} \iff det(A) \neq 0 \tag{28}$$

   Inoltre possiamo vedere la corrisponeza fra la formula 29 e 18 della matrice inversa. □

2. Calcolo matrice inversa: data:
   - matrice quadrata $A_{n \times n}$
   - matrice C $\mid A_{i,j} = C_{i,j}$
   - aggiunto classico $agg(A) = agg(A) \cdot A = (detA) \cdot I$

   $$\Longrightarrow \quad se\, det(A) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot agg(A) \tag{29}$$

3. Procedimento in un esercizio (matrice quadrata): verificare se A è invertibile.
   Consideriamo una matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Calcoliamo con la Regola di Sarrius (4) il determinante $det(A) = -1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ matrice invertibile

   Troviamo la matrice $C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   Con $A_{r,c} = (-1)^{r+c} \cdot det(matrice - r - c)$ Ad esempio per $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$

   Calcoliamo la trasposta $C^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = agg(A)$

   Secondo la formula della matrice inversa (29) la matrice inversa si calcola:

   $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot agg(A) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Per verificare che sia corretto: $A_n \cdot A_n = I_n$ e in questo caso si otterrebbe I_3

Nel caso di matrici quadrate di ordine 2 sappiamo che:

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(a \cdot c - b \cdot d)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{30}$$

3.8.6 Calcolo matrice inversa (algoritmo di Gauss Jordan)

Per calcolare l'inversa di una matrice si può applicare l'algoritmo di Gauss Jordan:

1. Consideriamo una matrice $A_{3\times3}$ e scriviamo una matrice composta da: $(A \mid I_3)$
2. Svolgiamo operazioni lineari di riga per arrivare alla forma: $(I_3 \mid A^{-1})$
3. Nel caso in cui la matrice non fosse invertibile non riusciremo a scrivere la matrice in tale forma ($det(A) = 0$), altrimenti troviamo la matrice inversa.

3.8.7 Matrici particolari

Ci sono delle matrici particolari che hanno dei metodi alternativi per il calcolo dell'inversa:

- Matrice a blocchi:

  Definition 3.6. *Una matrice A viene definita "a blocchi" quando si presenta nella forma:*

  $$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ dove } A, A_1, A_2 \text{ sono matrici quadrate} \tag{31}$$

  Per il determinante delle matrici a blocchi vale la regola:

  $$det(A) = det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot det \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{Laplace (22)}} det(A_1) \cdot det(A_2) \tag{32}$$

  L'inversa di una matrice a blocchi si ottiene invertendo le singole matrici interne:

  $$A^{-1} = \begin{pmatrix} (A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (A_2)^{-1} \end{pmatrix} infatti \begin{pmatrix} (A_1) & 0 \\ 0 & (A_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (A_2)^{-1} \end{pmatrix} = I \tag{33}$$

- Diagonale principale: determinante si calcola come il prodotto degli elementi della diagonale principale $det(A_n) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{\dots} \cdot a_{nn}$

  – Matrice diagonale: $\begin{pmatrix} [a_1] & 0 & 0 \\ 0 & [a_2] & 0 \\ 0 & 0 & [a_3] \end{pmatrix}$

  – Matrice triangolare superiore destra: $\begin{pmatrix} [a_1] & a_2 & a_3 \\ 0 & [a_4] & a_5 \\ 0 & 0 & [a_6] \end{pmatrix}$

  – matrice triangolare inferiore sinista: $\begin{pmatrix} [a_1] & 0 & 0 \\ a_2 & [a_3] & 0 \\ a_4 & a_5 & [a_6] \end{pmatrix}$

- Diagonale secondaria: il determinante si calcola con la formula: $det(A_n) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{\dots} \cdot a_{nn} \cdot (-1)^{\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)}$

  – Matrice triangolare inferiore destra: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & [a_1] \\ 0 & [a_2] & a_3 \\ [a_4] & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$

– matrice triangolare superiore sinista: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & [a_3] \\ a_4 & [a_5] & 0 \\ [a_6] & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.9 Rango

3.9.1 Definizione e Teoremi

Definizioni:

- Spazio nullo:

  Definition 3.7. *Lo spazio nullo di una matrice A è $Sol(A,\vec{0})$ e lo si inidica con $N(A)$ perché è il nucleo di una trasformazione lineare (colonne senza pivot).*

- Immagine:

  Definition 3.8. *L'immagine di una matrice è lo spazio colonna della matrice e lo si indica con $R(A)$, $R()$ perché deriva dall'inglese "range".*

- Nullità:

  Definition 3.9. *La dimensione dello spazio nullo $N(A)$ è detta nullità di A e si indica con $null(A)$ (numero colonne senza pivot), quindi:*

$$null(A) = dim\big(N(A)\big)= dim\big(Sol(A,\vec{0})\big) \tag{34}$$

- Rango:

  Definition 3.10. *La dimensione dello spazio colonna $R(A)$ è detta rango di A e la indichiamo con $rk(A)$ (numero colonne con pivot), quindi se A di dimensione $n \times m$:*

$$rk(A) = dimR(A) = dim\big(L(A^1, A^2, .., A^m)\big) \tag{35}$$

  IL rango $rk(A)$ è sempre minore del numero di righe (n) $rk(A) \leq n$, e sempre minore del numero di colonne (m) $rk(A) \leq m$.

Teoremi:

- Teorema del rango:

  Theorem 3.1 (Teorema del rango)**.** *Il rango di una matrice A è uguale al rango della matrice trasposta, in simboli:*

$$rk(A) = rk(A^T) \tag{36}$$

  (Infatti il numero di colonne della matrice (A) è pari al numero di righe della matrice A trasposta (A^T).)

  Dimostrazione. :
  Supponiamo che A è $n \times m$ e sia $r = rk(A)$:
  - Possiamo estrarre dalle colonne di A una base per ottenere lo spazio colonna di A.
  - Sia B la matrice che ha per colonne gli elementi di questa base estratta.

  $\Longrightarrow$ allora abbiamo che ogni colonna di A è una combinazione lineare delle colonne di B
  - Ora consideriamo la matrice C tale che $A = B \cdot C$ quindi vale anche $A^T = C^T \cdot B^T$
  $\Longrightarrow$ Anche le colonne di A^T sono combinazioni lineari di C^T $\Longrightarrow$ lo spazio colonna di A^T è incluso nello spazio colonna di C^T, in simboli:

$$R(A^T) \subseteq R(C^T)$$

  $\Longrightarrow rk(A^T) \subseteq rk(C^T)$

  - C essendo di dimensioni $r \times m$ ha rango:

$$rk(C^T) \leq r \implies rk(A^T) \leq r = R(A)$$

Abbiamo dimostrato che $rk(A^T) \leq rk(A)$.
Ora consideriamo $A_0^T = (A^T)^T$ e $A_0 = A^T$, otteniamo che:

$$rk\big((A^T)^T\big) \leq rk(A^T)$$

Mettiamo a sistema le due condizioni:

$$\begin{cases} rk(A^T) \leq rk(A) \\ rk\big((A^T)^T\big) \leq rk(A^T) \end{cases} \approx \begin{cases} rk(A^T) \leq rk(A) \\ rk(A) \leq rk(A^T) \end{cases} \implies rk(A) = rk(A^T)$$

□

Corollary 3.1.1 (Conseguenze del teorema del rango)**.** *In un matrice A:*

- *la dimensione dello spazio colonna è pari al rango* $R(A) = rk(A)$
- *Il massimo numero di colonne linearmente indipendenti è* $rk(A)$
- *La dimensione dello spazio riga è* $rk(A)$
- *Il massimo numero di righe linearmente indipendenti è* $rk(A)$
- *Il rango di* A *di dimensioni* $n \times m$ *è* $rk(A) \leq min(n, m)$
- *Il rango massimo di* A *è* $rk(A) = min(n, m)$

3.9.2 Determinante e Rango

Theorem 3.2. *Sia A una matrice quadrata di ordine n, allora il rango di A è uguale alla dimensione della matrice se e solo se il determinante è diverso da zero:*

$$rk(A)_n = n \iff det(A) \neq 0 \tag{37}$$

In particolare $v_1, v_2, .., v_n$ in $\mathbf{R}^n$ formano una base di $\mathbf{R}^n$ se e solo se il determinante della matrice che ha per righe (o per colonne) i vettori dati è diverso da zero.

Dimostrazione ($\implies$ *):* $T_A n$ *suriettiva* $\implies rk(A) = n.$:
Essendo T_A suriettiva:

$$\implies Im(T_A) = \mathbf{R}^n \implies R(A) = \mathbf{R}^n \implies dim(R(A) = n \implies rk(A) = n$$

□

Dimostrazione ($\impliedby$ *):* $rk(A) = n \implies T_A n$ *suriettiva.* :

$$dim(Im(T_A)) = dim(\mathbf{R}^n) \implies Im(T_A) \subseteq R^n$$

Per un corollario del teorema della base (sia V uno spazio di dimensione finita, se $v_1, v_2, .., v_k$ sono linearmente indipendenti in V, allora $k \leq dim(V)$):

$$\implies Im(T_A) = \mathbf{R}^n \implies T_A \quad suriettiva$$

□

Riassumendo, se A è una matrice quadrata di ordine n allora sono equivalenti:

- $det(A)$ è diverso da zero
- A è invertibile
- $rk(A) = n$
- Le righe di A formano una base di $\mathbf{R}^n$
- Le colonne di A formano una base di $\mathbf{R}^n$

3.9.3 Calcolo del rango (MEG - minori orlati)

Metodi per calcolare il rango di una matrice:

- Metodo di eliminazione di Gauss: si usa per le matrici numeriche
  1. siccome il rango di una matrice A è la dimensione dello spazio riga, per calcolare il rango basta
  2. ridurre a gradini la matrice
  3. il numero di pivot della matrice è il rango

- Metodo dei determinanti minori: non si usa perchè è molto lungo
- Metodo dei determinanti minori orlati (Metodo di Kronecker): si usa per le matrici paramentriche

Metodo dei determinanti minori orlati:
Ricordiamo che un minore di ordine r di A è una sottomatrice quadrata di A di ordine r.

Theorem 3.3. *Sia A una matrice $n \times m$, il rango di A è uguale al massimo r per cui esiste un minore M di ordine r il cui determinante è diverso da zero.*

Ciò significa che il rango di A è il massimo ordine di un determinate minore non nullo.
Questo metodo è poco pratico perchè trovato il massimo minore di una matrice $A_{n\times m}$ (elimino righe o colonne fino a che non è quadrata) con determinante diverso da zero, e trovato un minore di ordine $max(n, m) - k$ con determinante diverso da zero, poi deo controllare che tutti i minori di ordine $max(n, m) - k + 1$ siano uguali a zero.

Dimostrazione del metodo dei determinanti minori. :
Sia A una matrice nxm di rango r e sia s il massimo ordine di un determinate minore non nullo.
Siccome A ha r righe linearmente indipendenti allora esiste un minore di ordine r con determinante diverso da zero: basta prendere le r righe linearmente indipendenti, queste formano una matrice rxm che ha rango r e quindi ha r colonne linearmente indipendenti. Queste r colonne formano un minore di ordine r che ha determinante diverso da zero. Quindi $r \leq s$

Viceversa se M è un minore di ordine s con determinante non nullo allora esistono s righe di A linearmente indipendenti: basta prendere le righe di A che abbiamo scelto per formare il minore. Queste sono indipendenti perché la matrice formata da queste righe ha s colonne linearmente indipendenti (quelle del minore M) e quindi le sue s righe sono indipendenti. Quindi $s \leq r$

Di conseguenza $\begin{cases} r \leq s \\ s \leq r \end{cases} \implies s = r$

□

Metodo dei minori orlati // Metodo di Kronecker:

Definition 3.11. *Se A è una matrice $n \times m$ e M è un minore di A di ordine r, un minore orlato di M è un minore di A di ordine $r + 1$ che si ottiene aggiungendo a M una riga ed una colonna.*

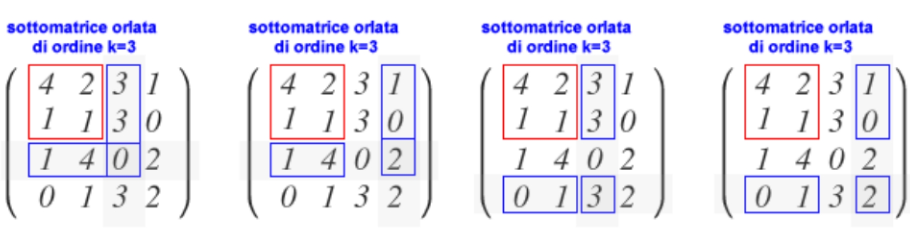

Figura 5: Minore orlato di una matrice

Theorem 3.4 (Metodo di Kronecker per il calcolo del rango (metodo degli orlati))**.** *Sia A una matrice $n \times m$. Se M è un minore di A di ordine rtale che $det(M) \neq 0$ e ogni minore orlato di M ha determinante nullo allora il rango di A è r.*

Speigazione procedimento con esercizio:

1. Individuiamo un minore con determinante diverso da zero
2. Calcoliamo ora i determinanti di tutti i minori orlati di M
3. Se tutti i minori orlati di M hanno determinante nullo il rango della matrice è l'ordine di M
4. Nel caso il minore non abbiama i corrispondenti minori orlati perchè, ad esempio, la matrice A considerata ha ordine $(n \times m)$ e il minore ha ordine n, non essendoci minori orlati non bisogna fare questo controllo.

3.10 Matrici diagonalizzabili

3.10.1 Matrici simili e digonali

Definition 3.12 (Matrici simili). *:*
due matrici quadrate A e B si dicono simili se esiste una matrice invertibile M tale che:

$$M^{-1}AM = B \tag{38}$$

Definition 3.13 (Matrice diagonale). *:*
Una matrice a si definisce diagonale se è quadrata e si presenta nella forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{..} & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad \forall\, a \in \mathbf{R} \tag{39}$$

3.10.2 Definizione di matrice diagonalizzabile

Definition 3.14 (Matrice diagonalizzabile). *Una matrice A si dice diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale. Ciò significa che deve esistere una matrice M invertibile (M detta matrice modale) tale che:*

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{..} & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \tag{40}$$

Esempio di matrice diagonalizzabile: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile perchè, cosiderato $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Esempio di matrice non diagonalizzabile: $C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ perchè cercando l'iversa che rispetti la definizione si arriverebbe all'ssurdo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.10.3 Autovalori e autovettori

Servono per risolvere problemi di diagonalizzazione.

Definition 3.15 (Autovalore). *Sia A una matrice quadrata diordine n, si dice che un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore per A se esiste un vettore $v \in \mathbf{R}$ non nullo tale che $A \cdot v = \lambda \cdot v$*

Deve essere non nullo perchè $A \cdot \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0} \,\forall\, \lambda \in \mathbf{R}$

Definition 3.16 (Autovettore). *Se $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di una matrice A allora un vettore v non nullo tale che $A \cdot v = \lambda \cdot v$ viene chiamato autovettore di A relativo all'autovalore λ.*
Viceversa se v è autovettore di A e allora viene chiamato autovalore di A relativo all'autovettore v.

Esercizio di esempio:

1. Considero la matrice 2×2: $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Gli autovalori di A sono 1 e -1 e gli autovettori sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Infatti $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad$ e $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Theorem 3.5 (Criterio di digonazzibalità)**.** *:*
Una matrice A quadrata di ordine n è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori.

Dimostrazione del criterio di diagonalizzazione. :
Indichiamo con $diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$ la matrice diagonale: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Dimostrazione ($\Longrightarrow$):

Se A è diagonalizzabile allora esiste una base di autovettori: $A \cdot M = M \cdot diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
Se $M^1, .., M^n$ sono le colonne di M, allora $A \cdot M = (AM^1, .., AM^n) = M \cdot diag(\lambda_1, .., \lambda_n) = diag(\lambda_1 M^1, .., \lambda_n M^n)$
Quindi $A \cdot M^i = \lambda_i \cdot M^i$, ovvero $M!, .., M^n$ sono autovettori. Siccome M è invertibile, essi formano una base di $\mathbf{R}^n$. Abbiamo quindi trovato una base di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di A. Quindi le colonne sono diverse da zero perchè altrimenti non sarebbe invertibile.

Dimostrazione ($\Longleftarrow$):
Rovesciando l'argomento si verifica che se esiste una base di autovettori allora la matrice è diagonalizzabile.
Abbiamo che $\{M^1, ..M^n\}$ è la base di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di A, sia $M = (M^1, .., M^n)$, allora M è invertibile perchè le sue colonne formano una base:

$$A \cdot M^\lambda = \lambda_1 \cdot M^i \implies A \cdot M = (\lambda_1 M^1, .., \lambda_n M^n) = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A \cdot M = M \cdot diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$$

Moltiplicando per l'inversa si ha: $\quad M^{-1} \cdot A \cdot M = M^{-1} \cdot M \cdot diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$
$\Longrightarrow \quad A = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$

□

Osserviamo che:

- La dimostrazione del teorema ci dice che la matrice modale è la matrice che ha per colonne gli elementi di una base di autovettori di A, mentre la matrice diagonale simile ad A è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori di A.

- Per diagonalizzare una matrice A ci basta quindi trovare gli autovalori di A e una base formata da autovettori.

Calcolo degli autovalori: polinomio caratteristico della matrice.

Definition 3.17 (Polinomio caratteristico)**.** *:*
Sia A una matrice quadrata di ordine n. La funzione di una variabile reale $\;p(t) = det(A - tI)\;$ è un polinomio di grado n che è chiamato polinomio caratteristico di A. Lo si indica con $p_A(t)$.

Esercizio di esempio nel trovare autovalori e polinomio caratteristico:

- Considero la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Polinomio caratteristico: $\quad p_a(t) = det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = det \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t) = t^2 - 3t + 2$

- Osserviamo che ma trice è 2×2 quindi ha massimo 2 autovalori (polinomio caratteristico di 2° grado).
- Gli autovalori sono le soluzioni di $t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$, quindi sono 1 e 2.

Theorem 3.6 (Determinante, polinomio caratteristico e autovalori)**.** *:*
Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A, cioè è autovalore di A se e solo se:

$$p_a(\lambda) = 0$$

Dimostrazione del teorema. :
Considerato un autovalore λ, allora $\Longleftrightarrow$:
- esiste v non nullo tale che $Av = \lambda v$
- esiste v non nullo tale che:

$$Av - \lambda v = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad Av - \lambda I v = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad (AI\lambda)v = \vec{0}$$

- esiste v non nullo tale che $(A - I\lambda)v = \vec{0}$
- il sistema $(A - \lambda I)X = \vec{0}$ ha una soluzione non nulla se e solo se:

$$\Longleftrightarrow det(A - \lambda I) = p_a(\lambda) = 0$$

□

Osserviamo che una matrice quadrata di ordine n ha al più n autovalori, infatti il polinomio caratteristico ha al più n radici essendo un polinomio di grado n (potrebbe averne anche meno, è definito solo il massimo).

Calcolo degli autovettori:
Considerato λ un autovalore di A, allora gli autovettori relativi a λ sono le soluzioni non nulle del sistema lineare:

$$AX = \lambda X \Longleftrightarrow (A - \lambda I)X = \vec{0} \tag{41}$$

Quindi, se c'è un autovalore, gli autovettori sono infiniti.

Definition 3.18 (Autospazio)**.** *L'insieme delle soluzioni del sistema lineare $(A - \lambda I)X = \vec{0}$ è detto autospazio relativo all'autovalore λ.*
L'autospazio è l'insieme di tutti gli autovettori λ relativi a λ unito con $\{\vec{0}\}$ (l'autospazio si può indicare come $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, .., \mathbf{R}^n$)

La dimensione dell'autospazio viene chiamata la molteplicità geometrica dell'autovalore λ e la si indica con $m_g(\lambda)$:

$$m_g(\lambda) = dim\Big(Sol\big(A - \lambda I, \vec{0}\big)\Big) = dim\Big(N\big(A - \lambda\big)\Big) = null\big(A - \lambda I\big) = n - rk\big(A - \lambda I\big) \tag{42}$$

Si nota subito che l'autospazio è un sottospazio.

Calcolo di una **base dell'autospazio** come base dello spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo.
Esercizio di esempio:

1. Calcolare la molteplicità geometrica di ogni autovalore e una base di ogni autospazio di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Trovare gli autovalori della matrice che sono gli zeri del polinomio caratteristico (determinante della amtrice meno λI). Si trova che gli autovalori sono $\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -1$
3. La moltiplicità geometrica di λ_1 è:

$$m_g(\lambda_1) = 3 - rk\,(A - \lambda_1 I) = 3 - rk \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

4. La moltiplicità geometrica di λ_2 è:

$$m_g(\lambda_2) = 3 - rk(A - \lambda_2 I) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

5. L'autospazio relativo a λ_1 è l'insieme delle soluzioni di $(A - \lambda_1 I)X = \vec{0}$, cioè:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6. Analogamente si calcola l'autospazio relativo a $\lambda_2 = -1$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3.10.4 Criteri di diagonlizzazione

Calcolo di una **base di autovettori**: Ritorniamo al problema di scegliere tra infiniti autovettori una base di $\mathbf{R}^n$. Per risolverlo ci serve ancora un teoremino:

Lemma 3.7 (Lemma del'indipendenza lineare degli autovettori)**.** *:*
Sia A una matrice quadrata. Siano $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ autovalori distinti di A. Se v_i è autovettore relativo a λ_i , allora i vettori $v_1, .., v_r$ sono linearmente indipendenti. (Che corrisponde ad affermare che autovettori relativi a autovalori distinti sono linearmente indipendenti).

Dimostrazione del lemma in un caso particolare. :
- Dimostriamo il lemma solo nel caso $r = 2$.
- Siano v_1 e v_2 autovettori relativi agli autovalori λ_1, λ_2.
Stiamo assumendo che $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Supponiamo che:

$$x\, v_1 + y\, v_2 = \vec{0}$$

E verifichiamo che $x = y = 0$
- Da $xv_1 + yv_2 = \vec{0}$ otteniamo che:

$$\lambda_1 x v_1 + \lambda_1 y v_2 = \vec{0}, A x v_1 + A y v_2 = \vec{0} \Leftrightarrow x \lambda_1 v_1 + y \lambda_2 v_2 = \vec{0}$$

Sottraendo le due equazioni si trova

$$y(\lambda_2 - \lambda_1)\, v_2 = \vec{0}$$

- Siccome $\lambda_1 \neq \lambda_2$, abbiamo che $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Siccome v_2 è un autovettore, abbiamo che $v_2 \neq \vec{0}$ Dall'equazione:

$$y(\lambda_2 - \lambda_1)\, v_2 = \vec{0}$$

concludiamo che y = 0.
Dall'equazione $xv_1 + yv_2 = \vec{0}$ otteniamo $xv_1 = \vec{0}$.
Siccome v_1 è un autovettore, abbiamo che $v_1 \neq \vec{0}$, quindi x = 0.
Quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

□

Come conseguenza diretta del lemma precedente, si ottiene il corollario "Primo criterio di diagonalizzabilità":

Corollary 3.7.1 (Primo criterio di diagonalizzabilità)**.** *:*
Se una matrice A quadrata di ordine n ha n autovalori distinti allora la matrice è diagonalizzabile.

Dimostrazione del primo criterio di digonazzibalità. :
gli n autovettori $v_1, .., v_n$ relativi agli n autovalori distinti sono indipendenti in $\mathbf{R}^n$ e quindi sono una base.

□

Theorem 3.8 (Teorema di Ruffini)**.** *:*
Se $p(t)$ è un polinomio e $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_r$ sono tutte le sue radici distinte allora:

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{m1} \cdots (t - \lambda_r)^{mr}\, q(t) \tag{43}$$

con $m_i \geq 1$ e $q(t)$ un polinomio senza radici. L'esponente m_i è detto la molteplicità della radice λ_1.

Cosa succede se gli autovalori non sono distinti: molteplicità algebrica

Corollary 3.8.1 (Molteplicità algebrica)**.** *Se A è una matrice quadrata di ordine n e $\lambda_1, .., \lambda_r$ sono i suoi autovalori distinti, allora $\lambda_1, .., \lambda_r$ sono le radici di $p_A(t)$, quindi:*

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{m1} \cdots (t - \lambda_r)^{mr}\, q(t)$$

con $q(t)$ un polinomio senza radici. L'esponente m_i è detto molteplicità algebrica di λ_i e lo si indica con $m_a(\lambda_i)$.

Osservazioni e conclusioni:

- Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, quindi due matrici simili hanno gli stessi autovalori con la stessa molteplicità algebrica.

  Dimostrazione. :
  Supponiamo A, B simili, allora $B = M^{-1}AM$ con M invertibile.

  $P_b(t) = det(B - tI) = det(M^{-1}AM - tI) = ***$ Sapendo che $M^{-1}IM = M^{-1}M = I$

  $*** = det(M^{-1}AM - tM^{-1}IM) = det(M^{-1}(A - tI)M) =$

  $= det(M^{-1} \cdot det(A - tI) \cdot det(M) = \frac{1}{det(M)} \cdot det(A - tI) \cdot det(M) = det(A - tI) = P - A(t)$ □

- Molteplicità geometrica e molteplicità algebrica

  Definition 3.19 (Molteplicità algebrica)**.** *La molteplicità algebrica di un autovalore la molteplicità dell'autovalore λ come radice del polinomio caratteristico.*

  Definition 3.20 (Molteplicità geometrica)**.** *La molteplicità geometrica di un autovalore è la dimensione del corrispondente autospazio, ossia la dimensione dello spazio degli autovettori relativi all'autovalore.*

  Theorem 3.9 (rapporto fra molteplicità geometrica e algebrica)**.**

  $$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \tag{44}$$

  Dimostrazione. :
  La molteplicità geometrica è la dimensione dell'autospazio relativo a λ, ovvero $m = g(\lambda) = dim(\mathbf{R}^n)$

  Considero l'autospazio relativo a λ, ovvero $N(A - \lambda I)$ e completo B_λ a base di $\mathbf{R}^n$ con $B = \{v_1, .., v_m, v_m + 1, .., v_n\}$

  Ottengo la amtrice formata dai vettori-colonna di B: $M = (v_1 \,..\, v_m \; v_m + 1 \,..\, v_n)$

  Moltiplico per A e ottengo: $AM = (Av_1\; Av_2 \;...\; Av_m \; Av_{m+1} \;..\; Av_n\;) = ***$

Sapendo che $v_1,..,v_n$ sono basi dell'autospazio (autovettori), quindi $A \cdot v_1$, si ottiene $\lambda \cdot v_1$

$$***= \left(\lambda v_1\ \lambda v_2\ ...\ \lambda v_m\ \ \sum_{j=1}^{n} c_{j\ m+1} v_j\ \ \dots\ \ \sum_{j=1}^{n} c_{j\ n} v_j bigl\right) = M \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots 0 & c_{1\ m+1} \\ 0 & \lambda & \vdots & c_{2\ m+1} \\ \vdots & \vdots & \lambda & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_{n\ m+1} \end{pmatrix}$$

M è invertibile infatti le sue colonne sono una base di $\mathbf{R}^n$

Moltiplicando per M^{-1} si ottiene $M^{-1}AM$ che forma una matrice simile, quindi con stesso polinomio caratteristico:

$$P_A(t) = det \begin{pmatrix} \lambda - t & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda - t & \dots & *** \\ 0 & 0 & \lambda - t & \\ & & & \\ & 0 & & C(t) \\ & & & \end{pmatrix} = (\lambda - t)^m \cdot det\big(C(t)\big) = P_A(t) \quad \Longrightarrow \quad m_g \leq m_a(\lambda)$$

□

Definizioni:

Definition 3.21 (Autovalore semplice)**.** *Un autovalore si dice semplice se* $m_a(\lambda) = 1$

Definition 3.22 (Autovalore regolare)**.** *Un autovalore si dice regolare se* $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$

Un autovalore semplice è anche regolare.

Dimostrazione. :
Se λ è autovalore semplice, allora:

$$m_a(\lambda) = 1$$

Quindi

$$m_g(\lambda) \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad m_g(\lambda) = dim(\mathbf{R}^n) \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad m_g(\lambda) = 1 = m_a(\lambda)$$

□

Theorem 3.10 (Secondo criterio di diagonalizzazione)**.** *:*
Una matrice quadrata A di ordine n è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche è n e ogni autovalore è regolare.

Quindi significa che per ogni autovalore ci sono abbstanza autovettori. Il polinomio caratteristico si fattorizza solo in fattori lineari ($q(t)$ è costante), quindi polinimio ha n radici contando le molteplicità.

Il secondo criterio di diagonalizzazione è necessario e sufficente.

Dimostrazione del secondo criterio di diagonalizzazione. :
Dimostriamo solo che se vale il secondo criterio allora A è diagonalizzabile.
Siano $\lambda_1,..,\lambda_r$ gli autovalori distinti di A. Sia B_i una base dell'autospazio relativo a λ_1. Sia B l'unione delle basi B_i, ricordiamo che:

$$\#B_i = dim(\mathbf{R}^n_{\lambda i} = m_g(\lambda_i)$$

Chiaramente B ha:

$$m_g(\lambda_1) + .. + m_g(\lambda_r) = m_a(\lambda_1) + .. + m_a(\lambda_r) = n\, elementi$$

Sappiamo per ipotesi che:

$$m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) \quad \forall\, \lambda_i$$

Basta verificare che B è indipendente, in quanto formata da autovettori $\Longrightarrow$ B è base.

Gli elementi che stanno in B_i distinte sono indipendenti (per Lemma dell'indipendenza lineare degli autovettori). Elementi che stanno nella stessa B_i sono indipendenti, quindi gli elementi di B sono indipendenti. Siccome B ha n elementi indipendenti è una base di formata da autovettori di A. In simboli:

$$m_i = m_g(\lambda_i) \qquad \text{Base di } \mathbf{R}^n_{\lambda i} \quad B = \{v_{i1}, .., v_{imi}\}$$

$$B = \{v_{11}, .., v_{1m1}, v21, ..v_{2m2}, ..., v_{ri}, .., v_{rmr}\}$$

La combinazione lineare deve avere come unica soluzione il vettore $\vec{0}$ per essere linearmente indipendente:

$$\underbrace{x_1 v_{11}, .., x_1 v_{1m1}}_{w_1} + \underbrace{..........}_{w_2} + \underbrace{x_{r1} v_{ri}, .., x_{r1} v_{rmr}}_{w_r} = \vec{0} \quad \implies \quad w_1 + w_2 + ... + w_r = \vec{0}$$

Sappiamo che $w_i \in \mathbf{R}^n_{\lambda_i}$ quindi stanno negli autospazi, quindi o sono zero o sono autovettori. Ma non possono essere autovettori perchè sarebbe una combinazione lineare di autovettori relativi ad autovalori distinti che è ha i coefficienti diversi da zero (sono tutti 1 i coefficienti). Questo è assurdo perchè sono indiependenti.
Se w_i sono autovettori $\quad w_1 + w_2 + ... + w_r = \vec{0} \quad$ è combinazione lineare di autovettori indipendenti con coefficienti non nulli (applicazione del Lemma).

Questo implica che $w_i = 0$ per ogni i di conseguenza:$w_i = \vec{0} = x_{i1} v_{i1} + ... + x_{imi} \cdot v_{imi}$
Quindi $\{v_{i1}, ..., v_{imi}\}$ è indipendente $\implies$ $x_{ij} = 0$ $\implies$ B è indipendente.

□

Osservazione sulla dimostrazione:

1. La dimostrazione del secondo criterio descrive anche un modo per calcolare una base di autovettori una volta verificato che A è diagonalizzabile.
2. Basta calcolare una base di ogni autospazio e metterle insieme.
3. La matrice modale M sarà la matrice che ha i vettori in questa base come colonne
4. La matrice diagonale D sarà la matrice che ha i rispettivi autovalori sulla diagonale

Esercizio di esempio: verificare se una matrice è diagonalizzabile (risultato: non diagonalizzabile)

1. Considero la matrice $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Calcolo il polinomio caratteristico $\quad p_A(t) = det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2$
3. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e si trova in molteplicità algebrica 2.
4. La molteplicità geometrica è $\quad m_g(\lambda_1) = m_g(0) = 2 - rk(A) = null \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. Siccome $\lambda_1 = 0$ non è regolare la matrice non è diagonalizzabile.

Esercizio di esempio: verificare se una matrice è diagonalizzabile (risultato: diagonalizzabile), trova la matrice modale.

1. Considero la matrice $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Calcolo il polinomio caratteristico $\quad p_A(t) = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2(2-t)^1$
3. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplcità algebrica rispettivamente 2 e 1, quindi $\quad m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) = 2 + 1 = 3$

4. Quindi la prima condizione del criterio di diagonalizzabilità è soddisfatta
5. Le molteplicità geometriche sono:

$$m_g(\lambda_1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$
$$m_g(\lambda_2) = 3 - rk \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

6. Abbiamo che $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1), m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2)$ e quindi anche la seconda condizione del secondo criterio di diagonalizzabilità è soddisfatta
7. La matrice è quindi diagonalizzabile.
8. Trovo la amtrice modale calcolando la base di ogni autospazio.
9. Autospazio relativo a λ_1 è l'insieme delle soluzioni $N(A) = Sol(A|\vec{0})$ del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

10. Troviamo che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e una base dell'autospazio di λ_1 è: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4 Sistemi lineari

4.1 Definizione

Definition 4.1. *Considero un sistema di m equazioni in n incognite:*

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \quad ... \quad + \quad ... \quad + \quad ... \quad + \quad ... = ... \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} \tag{45}$$

- La matrice a_{ij} prende il nome di matrice coefficienti: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1..} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{2..} & A_{2n} \\ A_{...} & A_{...} & A_{...} & A_{..n} \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{12} & A_{mn} \end{pmatrix}$
- Il vettore-colonna $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_{...} \\ b_m \end{pmatrix}$ prende il nome di vettore dei termini noti
- Il vettore-colonna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{...} \\ x_m \end{pmatrix}$ prende il nome di vettore delle incognite (o variabili)

4.2 Soluzione di sistemi lineari

4.2.1 Matrice completa di un sistema

Abbiamo capito che un sistema lineare di m equazioni in n incognite si può scrivere anche sotto forma di prodotto riga per colonna fra la matrice dei coefficienti di dimensioni $(m \times n)$ e il vettore-colonna delle incognite (X) che è pari al vettore-colonna dei termini noti (b):

$$A_{m \times n} \cdot X = b \tag{46}$$

La matrice completa del sistema è $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \implies (a, b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$

I sistemi possono essere di fue tipologie:

- Sistemi omogenei:
  Se il vettore dei termini noti è nullo $(b = \vec{0})$ e:
  1. x_1, x_2 sono soluzioni del sistema, allora anche $x_1 + x_2$ è soluzione.

     Dimostrazione. $A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ □

  2. x_0 è soluzione del sistema, allora anche $t \cdot x_0$ è soluzione.

     Dimostrazione. $A \cdot (t \cdot x_2) = t \cdot A \cdot x_0 = t \cdot \vec{0} = \vec{0}$ □

  Definition 4.2 (Soluzione di un sistema)**.** *è un vettore m-colonna X che soddisfa l'equazione* $A \cdot X = b$

- Sistemi non omogenei:
  Per indicare una soluzione si utilizza la notazione $sol(A, b)$, dato un sistema $A \cdot X = b$
  Supponiamo $A \cdot X = b$ abbia soluzioni e fissiamo la soluzione particolare x_{part}. allora tutte le soluzioni del sistema sono date da $x_{part} + y$ al variare di y in $sol(A, \vec{0})$; in simboli $sol(A, b) = x_{part} + \underbrace{sol(A, \vec{0})}_{\text{sist. omogeneo associato}}$.

Dimostrazione. :
Se y è in $sol(A,b)$ allora:

$$A \cdot (x_{part} + y) = A \cdot x_{part} + A \cdot y = b + \vec{0} = b$$

Se x' è in $sol(A,b)$ allora sia

$$y = x' - x_{part} \quad cosicche' \quad x' = x_{part} + y$$

Di conseguenza si ha che

$$A \cdot y = A \cdot (x' - x_{part} = Ax' - Ax_{part} = b - b = \vec{o}$$
$$\implies \quad x' = x_{part} + y$$

Con:

$$y \in sol(A, \vec{0})$$

□

Ad esempio, se consideriamo il sistema $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ di soluzioni $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies$ ogni soluzione si scrive come $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y$ dove y è soluzione del sistema omogeneo associato $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$, quindi $y \in (0)$

Il metodo risolutivo ad eliminazione di Gauss-Jordan dei sistemi di equazioni si basa sulle operazioni elementari di riga delle matrici.

4.2.2 Sistema a gradini

Definition 4.3 (Matrice a gradini)**.** *Una matrice si dice a gradini se il pivot di ogni riga è in una colonna successiva a quella del pivot della riga precedente, con pivot si intende il primo elemento non nullo di una riga della matrice.*

Definition 4.4 (Sistema a gradini)**.** *Un sistema viene definito a gradini se la sua matrice completa è a gradini.*

$$\text{matrice a gradini} = \begin{pmatrix} [1] & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & [2] & 1 \\ 0 & 0 & 0 & [-1] \end{pmatrix} \quad , \quad \text{non a gradini } = \begin{pmatrix} [1] & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & [2] & 1 \\ 0 & [3] & 0 & [-1] \end{pmatrix}$$

Le variabili della matrice che sono pivot vengono chiamate variabili vincolate, mentre le altre sono variabili libere.

È importante sottolineare che una matrice è sempre riconducibile ad una matrice equivalente nella forma a gradini (la matrice nulla è già a gradini).

Per ridurre ua matrice nella forma a gradini esiste un procedimento algoritmico, quindi replicabile da una macchina:

1. Porto in alto la riga con dei valori a sinistra,
2. Sommo sottraggo e moltiplico per scalare righe secondo le regole delle operazioni fra righe in modo da eliminare valori della prima colonna,
3. togliere prima colonna e prima riga e ripetere il loop dell'algoritmo dal passaggio 2, fino ad arrivare ad avere la matrice a scalini (sottomatrice di zeri o matrice di un singolo valore).

Possiamo osservare che ci sono tre casi:

- Se il numero di pivot è pari al numero di incognite (non ci sono variabili libere e tutte sono vincolate), allora il sistema ha una ed una sola soluzione.
- Se sono presenti tutti zeri nell'ultima riga tranne nell'ultima casella della riga, allora il sistema non ha soluzioni.
- $\begin{cases} \text{Esiste almeno una colonna senza pivot} \\ \text{Non ci sono righe con tutti gli zeri a sinistra e numeri nell'ultima casella} \end{cases} \implies$ ha infinte soluzioni.

Infine per risolvere il sistema si deve riscevere il sistema con le variabili vincolate in funzione di quelle libere in modo da trovare le soluzioni x particolari e le soluzioni y del sistema omogeneo associato.

Esercizio di esempio dell'applicazione del metodo risolutivo di Gauss Jordan:

1. Dato il sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 0 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 0 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ e la corrispondete matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & \mid & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & \mid & 0 \end{pmatrix}$

2. Si applicano le seguenti operazioni elementari di riga: $III \to 2III - I$, $II \to \frac{2}{3}II - I$, $III \to II$, $III \to 3III - I$ e si ottine la matrice a gradini

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$, var. vincolate: x_1, x_2 // var. libere: x_3, x_4

4. Riscriviamo nella forma: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, [x_3 = t, x_4 = q] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}t - \frac{1}{5}q \\ \\ -\frac{3}{5}t + \frac{2}{5}q \\ t \\ q \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \\ +\frac{2}{5}q \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.3 Numero di soluzioni di un sistema

4.3.1 Con MEG e combinazione lineare

Diremo che un sistema lineare $AX = b$ ha ∞^k soluzioni se ha almeno una soluzione e $dim(Sol(A, 0)) = k$ Se un sistema $AX = b$ ha soluzione, allora le soluzioni sono $X_{part} + Sol(A, 0)$. Se il sistema ha ∞^k soluzioni allora tutte le soluzioni si possono scrivere come $X_{part} + t_1X_1 + t_2X_2 + .. + tkXk$ dove $\{X1, X2, .., Xk\}$ è una base di $Sol(A, 0)$.

Se il sistema AX=b ha soluzioni, allora l'espressione $X = X_{part} + t_1X_1 + t_2X_2 + .. + tkXk$ che descrive tutte le soluzioni in termini di k parametri viene chiamata soluzione generale del sistema, quindi dire che il sistema ha soluzioni vuol dire che ci sono k parametri nella soluzione generale.

4.3.2 Teorema di Rouchè-Capelli

Theorem 4.1 (Teorema di Rouchè-Capelli). *Sia A una matrice $n \times m$ e si consideri il sistema lineare di n equazioni e m incognite $AX = b$. Il sistema ha soluzione se e solo se*

$$rk(A) = rk(A, b)$$

(quindi se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa).

In tal caso il sistema ha ∞^{m-r} soluzioni, dove $r = rk(A) = rk(A, b)$ e m è il numero di incognite (numero colonne della matrice omogenea $n \times m$).

Osserviamo che, in generale, v è combinazione lineare di $v_1, .., v_k$ se e solo se $L(v_1, .., v_k) = L(v_1, .., v_k, v)$

Dimostrazione dell'osservazione. :
- Dimostrazione ($\implies$): v è combinazione lineare di $v_1, .., v_k \impliedby L(v_1, .., v_k) = L(v_1, .., v_k, v)$
Se v è combinazione lineare di $v_1, .., v_k$, allora $L(v_1, .., v_k) \leq L(v_1, .., v_k, v)$ è sempre vera
Quindi $v \in L(v_1, .., v_k)$ con $v_1, .., v_k \in L(v_1, .., v_k) \implies \{v_1, .., v_k, v\} \in L(v_1, .., v_k)$
Di conseguenza $L(v_1, .., v_k, v) \leq L(v_1, .., v_k) \implies L(v_1, .., v_k, v) = L(v_1, .., v_k)$

- Dimostrazione ($\impliedby$): se $L(v_1, .., v_k) = L(v_1, .., v_k, v)$, allora v è combinazione lineare di $v_1, .., v_k$
Sappiamo che $v \in L(v_1, .., v_k) \implies v$ è combinazione lineare di $v_1, .., v_k$.

$\square$

Dimostrazione del teorema di Rouchè-Capelli. :
- Parte 1:

Il sistema ha soluzione se e solo se:

$$\iff \exists\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \textit{tale che} \quad AX = b \implies x_1A^1 + .. + x_mA^m = b$$

Che corrisponde a dire che hanno lo stesso spazio colonna:

$$L(A^1, .., A^m, b) = L(A^1, .., A^m \iff R(A) = R(A, b)$$

$R(A) = R(A, b) \iff rk(A) = rk(A, b)$ infatti:

. + ($\implies$) Se due matrici hanno lo stesso spazio colonna, allora hanno lo stesso rango in quanto il rango è la dimensione dello pazio colonna.

. + ($\impliedby$) Per il teorema della base se due matrici hanno:

$$\begin{cases} dim(R(A)) = dim(R(A, b)) \\ R(A) \subseteq R(A, b) \end{cases} \implies r(A) = R(A, b)$$

- Parte 2:

Resta solo da dimostrare che se $r = rk(A) = rk(A, b)$ allora il sistema ha ∞^{m-r} soluzioni, ma questo segue dal Teorema nullità più rango (Teorema 6.3):

$$dim(Sol(A, 0) = null(A) = m - rk(A) = m - r$$

□

4.3.3 Metodo di Cramer

Definition 4.5 (Sistema crameriano)**.** *Un sistema di n equazioni e n incognite è detto crameriano. Se un sistema crameriano $AX = b$ è tale che $det(A) \neq 0$, allora ha un'unica soluzione.*

Theorem 4.2 (Teorema di Cramer)**.** *Sia A una matrice quadrata di ordine n, allora il sistema crameriano $AX = b$ ha un'unica soluzione se e solo se $det(A) \neq 0$.*

Dimostrazione del Teorema di Cramer. :

È presente una sola soluzione del sistema se e solo se:

$$\iff \infty^0 \textit{ soluzioni} \implies n_A - rk(A) = 0 \implies r = n \implies det(A) \neq 0$$

□

È importante sottolineare che ll Teorema di Cramer non dice che se $det(A) = 0$ allora il sistema non ha soluzione, dice solo che se $det(A) = 0$ e il sistema ha soluzione allora la soluzione non è unica.
Quindi se $det(A) = 0$, allora il sistema non ha soluzioni o ne ha più di una.

Procedimento del metodo di Cramer:

1. Consideriamo il sistema crameriano $AX = b$ tale che $det(A) \neq 0$
2. Considero il vettore-colonna (che corrisponde a X vettore delle variabili) $S \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$
3. Allora l'unica soluzione si calcola con:
$$s_i = \frac{det\big(A(i, b)\big)}{det\big(A\big)}$$
Dove $A(i, b)$ è la matrice che si ottiene sosttuendo alla i-esima colonna di A il vettore b.

4. Quindi nel caso di s_1 di una matrice 3×3 la formula sarà: $\quad s_1 = \frac{det\big(A(b, A^2, A^3)\big)}{det\big(A\big)}$

Dimostrazione del Metodo di Cramer. :
Considero S il vettore colonna dell'unica soluzione di un sistema lineare $AX = b$:

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

Posso dire che

$$AS = b \implies s_1 A^1 + s_1 A^1 + .. + s_n A^n = b$$

Siccome:

$$A = (A^1, A^2, .., A^n) \implies A(i, b) = (A^1, A^2, .., b^i, .., A^n) = (A^1, .., s_1 A^1 + s_2 A^2, .., s_n A^n, .., A^n)$$

$$det\big(A(i,b)\big) = det(A^1, A^2, .., b^i, .., A^n) = (A^1, .., s_1 A^1 + s_2 A^2, .., s_n A^n, .., A^n) = prop.\ multilinearita\ determ. =$$

$$= s_1 \cdot det(A^1, .., A^i, .., A^n) + s_2 \cdot det(A^1, .., A^i, .., A^n) + .. + s_n \cdot (A^1, .., A^i, .., A^n) = ***$$

L'unico elemento che non si annulla è l'i-esimo elemento:

$$*** = 0 + 0 + s_i \cdot det(A) + 0 + 0 = s_i \cdot det(A) \qquad \implies \qquad s_i = \frac{det\big(A(i,b)\big)}{det\big(A\big)}$$

□

5 Spazi vettoriali

5.1 Vettori fisici

Definition 5.1. *I vettori fisici (es: forza, velocità) sono quantità caratterizzate da:*

- *Grandezza numerica detta intensità, modulo o norma (lunghezza del vettore)*
- *Direzione (retta passante per due punti del vettore)*
- *Verso (quale semiretta orientata considerare)*

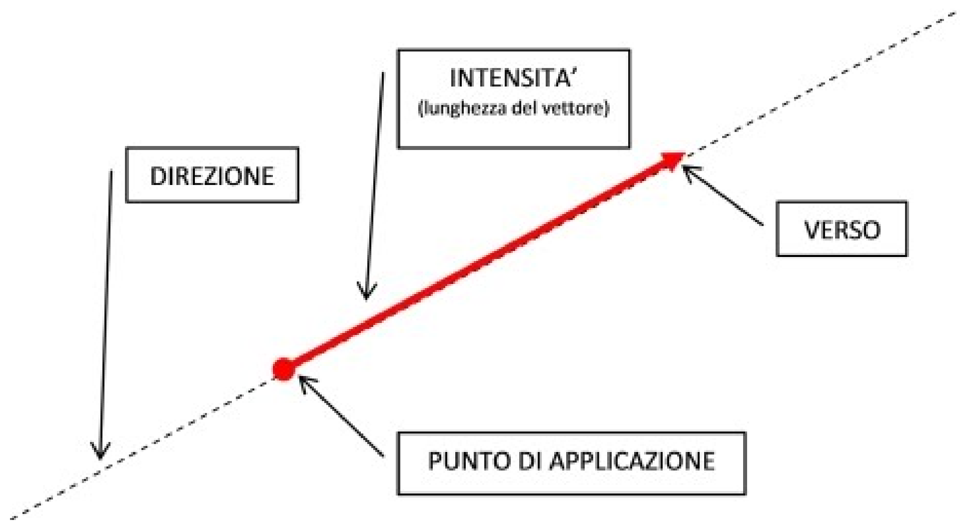

Figura 6: Definizione di vettore

Esistono dei vettori particolari come:

- Vettore nullo: $\vec{0}$
- Versore: $\vec{1}$

Definition 5.2 (Vettore libero)**.** *Un vettore libero nel piano (o nello spazio) è la classe di equipollenza di un segmento orientato, che corrisponde all'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti ad un segmento dato.*

Operazioni tra vettori:

- Legge di Galileo: afferma che i vettori possono essere sommati (tenendo conto delle direzioni e versi). $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ (si può usare anche la regola del parallelogramma perchè i vettori liberi sono idipendenti dal punto di applicazione).
- Prodotto scalare: i vettori possono essere moltiplicati per uno scalare (tenendo conto del cambio di verso se lo scalare $t<0$). $t\cdot\vec{a}=(\overrightarrow{t\cdot a})$

Proprietà dei vettori:

- Proprietà associativa: $(v+w)+u=v+(w+u)$
- Proprietà commutativa: $v+w=w+v$
- Esistenza elemento neutro: $v+0=v$
- Esistenza opposto: $v+(-1)v=0$
- Proprietà distributiva: $t(v+w)=tv+tw$
- Proprietà distributiva: $(t+s)v=tv+sv$
- Proprietà associativa mista: $(ts)v=t(sv)$
- Legge di unità: $1v=v$

5.2 Spazi vettoriali

5.2.1 Sistemi di assi cartesiani

Definition 5.3. *Dare un sistema di assi cartesiani nel piano equivale a fissare un punto* $O(0,0)$ *e due vettori liberi* $\vec{OU_1}$ $\vec{OU_2}$, *per convenzione* $\vec{i}$ *e* $\vec{j}$ *(versori) vengono asssegnati alle direszioni rispettivamente dell'asse* x *e* y *e sono vettori unitari (lunghezza 1) perpendicolari tra loro.*

Un sistema di assi cartesiani si individuano: $S = \big(0; (i,j)\big)$

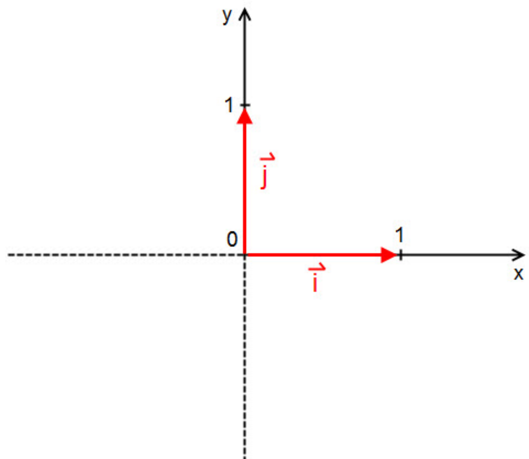

Figura 7: Piano cartesiano

5.2.2 Coordinate di vettori

Vettori nel piano:

Se v è un vettore allora possiamo scrivere $v = \vec{OA}$ e la coppia (x,y) delle coordinate di P è detta 2-vettore delle coordinate di v:

$$v = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{47}$$

Infatti $\vec{OP_x} = x \cdot \vec{i} \quad , \quad \vec{OP_y} = y \cdot \vec{j}$ che, per la regola del parallelogramma, equivale a $\vec{OP_x} + \vec{OP_y} = v$

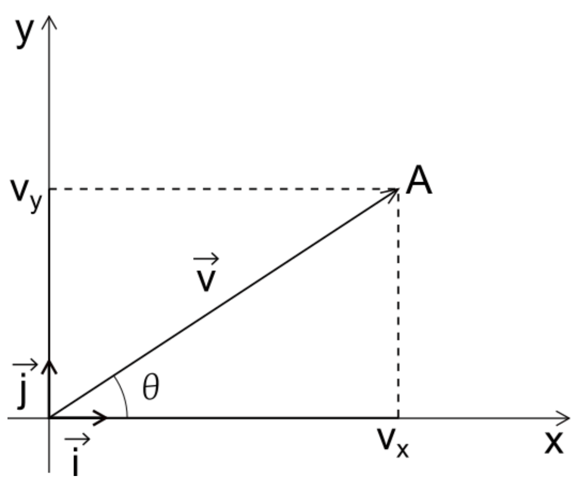

Figura 8: Le componenti i e j di un vettore

Si possono svolgere delle operazioni fra le componenti di vettori:

- Somma algebrica: se (x_1, y_1) è il 2-vettore delle coordinate di v_1 e (x_2, y_2) è il 2-vettore delle coordinate di v_2, allora il 2-vettore delle coordinate di $v_1 + v_2$ è $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Dimostrazione somma algebrica fra vettori. $v_1 + v_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$ □

- Prodotto per scalare: se (x,y) è il 2-vettore delle coordinate di v, allora $(t \cdot x, t \cdot y)$ è il 2-vettore delle coordinate di $t \cdot v$.

Osservazioni sulle operazioni fra 2-vettori, siano a il 2-vettore delle coordinate del vettore libero v e b il 2-vettore delle coordinate del vettore libero w:

- Il 2-vettore delle coordinate di $v + w$ è $a + b$.
- Il 2-vettore delle coordinate di tv è ta.

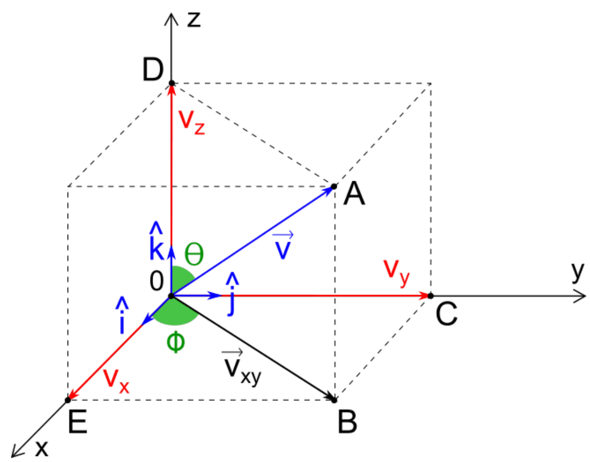

Figura 9: Le componenti i, j e k di un vettore nello spazio

Vettori nello spazio:

- Si hanno 3 versori: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
- Oò 3-vettore delle coordinate di $v = \vec{OP}$ è la tripla (x, y, z) delle coordiante di A
- Si ha che: $v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Per i 3-vettori valgono le stesse prorpietà dei 2-vettori

Osservazioni sulle operazioni fra 3-vettori, siano a il 3-vettore delle coordinate del vettore libero v e b il 3-vettore delle coordinate del vettore libero w:

- Il 3-vettore delle coordinate di $v + w$ è $a + b$.
- Il 3-vettore delle coordinate di $t \cdot v$ è $t \cdot a$.

5.2.3 Definizione di spazio vettoriale di Peano

Definition 5.4 (Spazio vettoriale)**.** *Uno spazio vettoriale è un insieme V su cui è definita:*

- *un'operazione di somma che associa a due elementi v, w di un elemento $v + w$ di V*
- *un'operazione di prodotto per uno scalare che associa ad un numero t e ad un elemento v di V un elemento $t \cdot v$ semore appartenente a V.*
- *Queste due operazioni devono inoltre verificare le seguenti proprietà:*
  1. *Proprietà associativa:* $(v + w) + u = v + (w + u)$
  2. *Proprietà commutativa:* $v + w = w + v$
  3. *Esistenza elemento neutro:* $v + 0 = v$
  4. *Esistenza opposto:* $v + (-1)v = 0$

5. *Proprietà distributiva:* $t(v+w) = tv + tw$
6. *Proprietà distributiva:* $(t+s)v = tv + sv$
7. *Proprietà associativa mista:* $(ts)v = t(sv)$
8. *Legge di unità:* $1v = v$

Esempi di spazio vettoriale:

- L'insieme dei vettori liberi nel piano o nello spazio.
- L'insieme di tutti gli n-vettori (che di solito si indica con **R**")
- L'insieme delle matrici $n \times m$ (che di solito si indica con $M(n \times m, \mathbf{R})$ o $\mathbf{R}^{n \times m}$)
- L'insieme dei polinomi (che di solito si indica con $\mathbf{R}[X]$)
- L'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a n (che di solito si indica con $\mathbf{R}_n[X]$)

5.3 Sottospazio vettoriale

5.3.1 Definizioni ed esempi

Definition 5.5. *Un sottospazio di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme non vuoto W di V tale che:*

- *Se v,w sono in W allora v+w è in W (chiuso rispetto alla somma).*
- *Se v è in W e t è un numero allora tv è in W (chiuso rispetto al prodotto per scalare).*

Osservazioni importanti sul sottospazio:

- se V è uno spazio vettoriale allora V è un sottospazio di se stesso e $\{\vec{0}\}$ è un sottospazio di V.
- se $AX = \vec{0}$ è un sistema omogeneo di n equazioni e m incognite, allora l'insieme delle soluzioni $Sol(A, 0)$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^m$ (Legge di sovrapposizione).
- Il vettore $\vec{0}$ appartiene ad ogni sottospazio, quindi se in un insieme W non c'è 0 allora W non può essere un sottospazio.
- Se W è un sottospazio, allora non è vuoto. Se W è un sottospazio esiste almeno un $w \in W$ e, siccome è chiuso per il prodotto, $-1(w) = w \implies w + (-w) \in W \implies (1-1)w \in W \implies 0 \vec{\in} W$. È importante sottolineare che sistemi di matrici non omogenee non sono sottospazi perchè non includono $\vec{0}$.
- Se W è un sottospazio di V, allora, con la somma e il prodotto per uno scalare indotte da V, W è uno spazio vettoriale.
- Ogni proprietà che vale per gli spzi vettoriali vale anche per tutti i sottospazi.

Esercizi - stabilire se insieme è sottospazio:

- Esercizio 1: elemento nullo
  1. Considero lo spazio vettoriale $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, y - 2z = 0,\ x + t + 1 = 0\}$
  2. Controllo se è incluso l'elemento nullo in $\mathbf{R}^4$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y - 2z = 0 \\ x + t + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = 0\ \forall \\ 0 = 1\ \nexists \end{cases} \implies \not\mathbf{O}$
  3. Quindi: $0 \notin \mathbf{R}^4 \implies$ A non è sottospazio di $\mathbf{R}^4$.
- Esercizio 2: combinazione lineare

1. Considero lo spazio vettoriale $B = \{(q, 5q, 3q+s) \mid q, s \in \mathbf{R}\}$
2. L'elemento generico $b \in B$ è $\quad b = \begin{pmatrix} q \\ 5q \\ 3q+s \end{pmatrix} = q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Che si può scrivere come $\quad B = span\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big)$
4. Span indica il fatto che B è combinazione lineare delle due matrici-colonna ed è sottospazio vettoriale perchè lo spazio generato è per definizione spazio vettoriale.

- Esercizio 3: non chiuso rispetto a somma o prodotto scalare
  1. Considero lo spazio vettoriale $C = \{(k, q, s) \mid k, q, s \in \mathbf{R}\}$
  2. Controllo se è incluso l'elemento nullo in $\mathbf{R}^3$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \in C \iff k = q = s = 0$
  3. $c = \begin{pmatrix} k \\ q \\ s \end{pmatrix} \quad , \quad k, q, s \in \mathbf{N}$ l'elemento nullo appartiene a $\mathbf{R}^3$ quindi è ok
  4. Se considero $\alpha = \sqrt{2} \in \mathbf{R} \to \alpha \cdot c = \alpha \begin{pmatrix} k \\ q \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha k \\ \alpha q \\ \alpha s \end{pmatrix} \implies$ non è composto da elmenti appartenenti a $\mathbf{N}$
  5. Di conseguenza non è un sottospazio vettoriale.

- Esercizio 4: insieme delle soluzioni
  1. consiedero lo spazio vettoriale $D = \{p + q + r + s = 0\} \implies$ è l'insieme delle soluzioni in $\mathbf{R}^3$
  2. La teoria garantisce che lo spazio vettoriale delle soluzioni è sottospazio dello spazio vettoriale del sistema di equazioni lineari.

- Esercizio 5: Dimostriamo attraverso un esempio che il sottoinsieme di $\mathbf{R}^{2\times 2}$ (sottoinsieme delle matrici di ordine 2) non è sottospazio.

  Definition 5.6 (Matrice idempotente)**.** *si definisce idempotente quando vale la condizione $A^2 = A$.*

  1. Consideriamo le matrici $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  2. Calcoliamo E^2 e F^2 e troviamo che A, B sono matrici idempotenti
  3. Calcoliamo la matrice $G = E + F$ e facciamo G^2
  4. Troviamo che $G^2 \neq G \implies$ la matrice somma di due matrici idempotenti non è anch'essa idempotente.

5.3.2 Combinazioni e dipendenza lineare

Definition 5.7. *In uno spazio vettoriale, si dice che il vettore v è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, ..., v_k$ se:*

$$v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + ... + a_k \cdot v_k \tag{48}$$

con $a_1, a_2, ..., a_k$ numero reali (coeffcienti della combinazione lineare).

Procedimento per valutare se vettore è combinazione lineare di altri vettori dati:

1. Dato il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ stabilire se è combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Se è combinazione lineare, allora vale l'equazione: $x_1 \cdot V_1 + x_2 \cdot V_2 = 0 \implies x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$

3. Sistema: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ 5x_1 - x_2 = 3 \\ 4x_1 + \frac{x_2}{2} = 5 \end{cases} \implies$ matrice: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & | & 1 \\ 5 & -1 & | & 3 \\ 4 & \frac{1}{2} & | & 5 \end{pmatrix} \implies$ riduzione a scalini: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & | & 1 \\ 5 & \frac{2}{3} & | & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

4. Variabili vincolate: x_1, x_2 // variabili libere: nessuna $\implies$ sistema ridotto: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ \frac{2}{3}x_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

5. Scriviamo il sistema nella forma: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. Nel caso in cui il vettore non fosse combinazione lineare, avremmo trovato un sistema senza soluzioni (matrice con utlima riga con tutti zeri tranne l'elemento del vettore-colonna dei termini noti b diverso da zero)

Possiamo ora definire cosa intendiamo con *dipendenza lineare*:

Definition 5.8 (Vettori linearmente dipendenti e indipendenti)**.** *I vettori $v_1, v_2, .., v_k$ si dicono linearmente dipendenti se esiste una combinazione lineare di $v_1, v_2, .., v_k$ con coefficienti non tutti nulli uguale a $\vec{0}$.*

In parole povere, n vettori sono indipendenti se vale: $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_k \cdot v_k = \vec{0}$, quindi la combinazione lineare deve essere verificata dal vettore nullo, ovvero quello che ha tutti i coefficienti $a_1, a_2, .., a_k = 0$.

- I vettori I vettori $v_1, v_2, .., v_k$ si dicono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti.
- Si dice anche che l'insieme $v_1, v_2, .., v_k$ è linearmente dipendente o indipendente se $v_1, v_2, .., v_k$ sono dipendenti o indipendenti.
- Il vettore nullo, pe convenzione, viene considerato linearmente indipendente.

Ora vediamo due esempi pratici di esercizio:

1. Considera i vettori $(1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, 1, -1)$, sono linearmente dipendenti infatti esiste la terna a, b, c tale per cui $a(1, 0, 1) - b(1, 1, 1) + c(-1, 1, -1) = (0, 0, 0)$. I numeri che soddisfano l'equazione data dalla combinazione lineare dei tre vettori sono $a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2} \implies$ linearmente dipendenti.

2. Considera i vettori i vettori $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$, se cerchiamo la combinazione lineare che dei tre vettori: $a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0)$ e la poniamo uguale a $= (0, 0, 0)$ in modo da rispettare la definione, otteniamo il sistema lineare: $(a, a, a) + (b, b, 0) + (c, 0, 0) = (0, 0, 0)$ che corrisponde al sistema:
$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b + 0 = 0 \\ a + 0 + 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \implies$ coefficienti $a = b = c = 0$, quindi è linearmente indipendente.

Osservazionei interessanti:

- Due vettori v e w sono linearmente dipendenti se e solo se uno è un multiplo dell'altro.

  Dimostrazione. Se consideriamo l'implicazione diretta:
  $a_1 \cdot v + a_2 \cdot w = \vec{0} \implies a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0$
  Quindi se $a_1 \neq 0 \implies v = \frac{a_2}{a_1} \cdot w$
  Altrimenti se $a_2 \neq 0 \implies w = -\frac{a_1}{a_2} \cdot v$

  Se consideriamo l'implicazione opposta:
  $v = t \cdot w \implies v - t \cdot w = \vec{0}$ (sono linearmente dipendenti) infatti ripettano la regola:
  $a_1 \cdot v + a_2 \cdot w = 0 \quad \vec{}, \quad$ dove $a_1 = 1$ e $a_2 = -t$
  Analogamente vale per $w = t \cdot v$ dove $a_1 = -t$ e $a_2 = 1$

  $\square$

- Tre vettori v, w, u sono linearmente dipendenti se e solo se uno è combinazione degli altri due.

- In generale n vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno è combinazione lineare degli altri.

  Dimostrazione. $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_i \cdot v_i = \vec{0} \quad , \quad \text{con } a_i \neq 0$
  $\implies v_i = \frac{a_1}{a_i} \cdot v_1 - \frac{a_2}{a_i} \cdot v_1 - .. - \frac{a_n}{a_i} \cdot v_n$ □

5.3.3 Spazio e insiemi generati

L'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, v_2, .., v_k$ viene chiamato lo spazio generato da $v_1, v_2, .., v_k$ e lo si indica con:

1. Forma 1:
$$L(v_1, v_2, .., v_k) \tag{49}$$

2. Forma 2:
$$< v_1, v_2, .., v_k > \tag{50}$$

3. Forma 3:
$$span(v_1, v_2, .., v_k) \tag{51}$$

Per convenzione le combinazioni lineari dell'insieme vuoto è il vettore nullo: $L(\varnothing) = \{\vec{0}\}$. Lo spazio generato da $v_1, v_2, .., v_n$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^n$, infatti:

- non è vuoto: $\vec{0} \in L(v_1, v_2, .., v_n) = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_n \cdot v_n$
- è chiuso rispetto alla somma: se $v, W \in L(v_1, v_2, .., v_n) \implies$ allora anche $(v + w) \in L$ che corrisponde a $(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_n \cdot v_n) + (b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + .. + b_n \cdot v_n) = (a_1 + b_1) \cdot v_1 + (a_2 + b_2) \cdot v_2 + .. + (a_n + b_n) \cdot v_n$
- è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare: se $v \in L(v_1, v_2, .., v_n) \implies$ allora anche $t \cdot v \in L$ che corrisponde $t \cdot (a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_n \cdot v_n) = (t \cdot a_1) \cdot v_1 + (t \cdot a_2) \cdot v_2 + .. + (t \cdot a_n) \cdot v_n$

Caratterizzazione dello spazio generato:
Lo spazio generato da $v_1, v_2, .., v_k$ è il più piccolo sottospazio che contiene $v_1, v_2, .., v_k$ nel senso che:

- $L(v_1, v_2, .., v_k)$ contiene $v_1, v_2, .., v_k$
- Se W è un sottospazio che contiene $v_1, v_2, .., v_k$ allora $L(v_1, v_2, .., v_k)$ è contenuto in W.

Insiemi di generatori:

Definition 5.9. *Diremo che* $\{v_1, v_2, .., v_k\}$ *è un insieme di generatori per lo spazio* V *se* $L(v_1, v_2, .., v_k) = V$

In questo caso diremo anche che V è generato da $v_1, v_2, .., v_k$ o che $v_1, v_2, .., v_k$ generano V.

Esercizio di esempio, verificare se $\mathbf{R}^3$ è generato da una data tripletta di 3-vettori:

1. Considero i vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$
2. La combianzione linare dei tre vettori genera $\mathbf{R}^3 = L\big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big) \iff$ se e solo se ogni $v \in \mathbf{R}^3$ è combinazione lineare di $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$
3. Allora $v = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$

5.4 Base di spazio vettoriale

5.4.1 Definizione, esempi e teoremi

Per essere definita base di spazio vettoriale deve rispettere le seguenti condizioni:

- Insieme di generatori: uno spazio vettoriale V si dice finitamente generato se esiste un insieme finito $v_1, v_2, .., v_k$ di vettori che generano V.
- Linearmente indipendente: una base di uno spazio vettoriale V finitamente generato è un insieme $\{v_1, v_2, .., v_k\}$ di generatori di V linearmente indipendente.

Esercizio di esempio, verificare se una tripletta di 3-vettori è la base di $\mathbf{R}^3$:

1. Bisogna verificare le due condizioni, ovvero se è un insieme di generatori ed è linearmente indipendente.
2. È insieme di generatori perchè è la combinazione lineare di 3 3-vettori.
3. Linearmente indipendente? Considero la combinazione lineare $a_1(1,0,0), a_2(0,1,0), a_3(0,0,1) = (0,0,0)$
4. $(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0) \iff a_1 = a_2 = a_3 = 0 \implies$ sono linearmente indipendenti.
5. Siccome entrambe le condizioni sono verificate $\implies$ è la base dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$.

Theorem 5.1 (Teorema della base)**.** *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, allora:*

- *Esistenza di una base: V ha una base e tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.*
- *Completamento a base: ogni insieme linearmente indipendente in V è contenuto in una base di V. (l'insieme dei generatori può essere completato aggiungendo altri vettori fino a formare una base)*
- *Estrazione di una base: ogni insieme di generatori di V contiene una base. (se abbiamo un insieme di generatori, possiamo togliere dei vettori dall'insieme fino a formare la base)*

Conseguenze del teorema della base (teorema 5.1):

1. **Corollary 5.1.1** (Coneguenze del teorema della base I)**.** *:*
   Sia V uno spazio di dimensione finita, se W è un sottospazio di V allora anche W è di dimensione finita e $\dim(W) \leq \dim(V)$ *(Dimostrazione omessa).*

   Quindi in generale $\mathbf{R}^n$ (spazio n-dimensionale) $\subset \mathbf{R}^{..} \subset \mathbf{R}^3$ (spazio 3-dimensionale) $\subset \mathbf{R}^2$ (piano) $\subset \mathbf{R}^1$ (retta) $\subset \mathbf{R}^0$ (origine) e così via.

2. **Corollary 5.1.2** (Coneguenze del teorema della base II)**.** *:*
   Sia V uno spazio di dimensione finita, se W è un sottospazio di V e $dim(W) = dim(V)$ *, allora* $W = V$*.*

   Dimostrazione. sia $n = dim(V) = dim(W)$. Sia $\{w_1, w_2, .., w_n\}$ una base di W. Siccome $w_1, w_2, .., w_n$ è linearmente indipendente allora, per il Teorema della base, è contenuto in una base di B di V. Siccome B ha n elementi, abbiamo che $B = \{w_1, w_2, .., w_n\}$. In particolare $W = L(w_1, w_2, .., w_n) = V$. □

3. **Corollary 5.1.3** (Coneguenze del teorema della base III)**.** *:*
   Sia V uno spazio di dimensione finita, se $v_1, v_2, .., v_k$ *sono linearmente indipendenti in V, allora* $k \leq dim(V)$

   Dimostrazione. siccome $v_1, v_2, .., v_k$ sono linearmente indipendenti, per il Teorema della base, sono contenuti in una base B di V. Quindi $k \leq$ numero di elementi di $B = dim(V)$. □

4.

Corollary 5.1.4 (Coneguenze del teorema della base IV)**.** *:*
Sia V uno spazio di dimensione finita, se $v_1, v_2, .., v_k$ generano V allora $dim(V) \leq k$

Dimostrazione. siccome $v_1, v_2, .., v_k$ generano V, allora, per il Teorema della base, $\{v_1, v_2, .., v_k\}$ contiene una base B di V. Quindi $k \geq$ numero di elementi di $B = dim(V)$ □

5.

Corollary 5.1.5 (Coneguenze del teorema della base V)**.** *:*
Sia V uno spazio di dimensione finita, se $v_1, v_2, .., v_n$ sono linearmente indipendenti e $\dim(V) = n$ *allora $\{v_1, v_2, .., v_k\}$ è una base di V.*

Dimostrazione. Siccome $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ è linearmente indipendente allora, per il teorema della base, è contenuto in una base B di V.
Siccome B ha n elementi, ne segue che $B = v_1, v_2, .., v_n$. □

6.

Corollary 5.1.6 (Coneguenze del teorema della base VI)**.** *:*
Sia V uno spazio di dimensione finita, se $v_1, v_2, .., v_k$ generano V e $dim(V) = k$ allora $\{v_1, v_2, .., v_k\}$ è una base di V.

Dimostrazione. Siccome $\{v_1, v_2, .., v_k\}$ genera V, per il teorema della base, contiene una base B di V. Siccome B ha k elementi, ne segue che $B = \{v_1, v_2, .., v_k\}$.

□

Il metodo dei perni è un metodo per verificare se un insieme di vettori è l'insieme dei generatori di $\mathbf{R}^n$ ed estrarre i vettori per comporre una base, definiremo questo metodo operativamente con un esercizio. Metodo dei Perni:

1. Verificare se $\{1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 2), (1, 0, 0, -1), (1, 0, -1, 0)\}$ contiene una base di $\mathbf{R}^4$ e in tal caso calcolarla.
2. l'insieme dato contiene una base di se e solo se è un insieme di generatori per $\mathbf{R}^4$.
3. Per verificare se è un insieme di generatori calcoliamo il rango della trasponsta della matrice che ha come righe i vettori dell'insieme (corrisponde alla amtrice che ha i vettori come colonne).
4. Calcolare la matrice ridotta a gradini.
5. La base sarà composta dai vettori originali nella posizione dei vettori della matrice ridotta a gradini che contengono i pivot
6. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}^T \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} [1] & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & [1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & [-2] & 1 \end{pmatrix} \implies rk(A) = 4$
7. Base è l'insieme di generatori togliendo il vettori corrispondente alla colonna senza pivot: $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

5.4.2 Dimensione di spazio vettoriale

Se V è uno spazio finitamente generato il teorema della base dice che tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

Definition 5.10 (Dimensione di spazio vettoriale)**.** *il numero di elementi di una qualsiasi base di uno spazio V è chiamato dimensione di V e lo si indica con il simbolo* $\dim(V)$*.*

Come calcolare la dimesione di basi:

- $\dim(\mathbf{R}^2) = 2$ si verifica che $\{(1, 0), (0, 1)\}$ è base.

- $\dim(\mathbf{R}^3) = 3$ si può prendere come esepio la solita tripletta di 3-vettori.
- $\dim(\vec{0}) = 0$ perchè $\vec{0}$ è linearmente indipendente per convenzione ($\emptyset$ è una base di $\{\vec{0}\}$ infatti la combinazione lineare $L(\emptyset) = \{\vec{0}\}$).
- In generale se consideriamo un vettore $e_i = (0, 0, .., 1_i, .., 0) \in \mathbf{R}^n$, e sia $C^n = \{e_1, e_2, .., e_n\}$, allora C^n è una base di $\mathbf{R}^n$, detta base canonica ($\dim(\mathbf{R}^n) = n$)
- $dim\Big(L\big((1,1,0),(1,2,-1)\big)\Big) = 2$ perchè combinazione lineare di 2 3-vettori: per verificare che sia base bisogna assicurarasi che insia l'insieme generatore e che sia linearmente indipendnete (se si interpreta il risultato da un punto di vista geometrico si vede che stiamo trattando un piano, quindi in 2 dimensioni)
- $dimM_{ij}(n \times m, R) = n \cdot m$ con $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, infatti il sistema è linermente indipendnete ed è genratore di M.
- $dim\big(\{(x,y) \mid 2x - y = 0\}\big) = dim\Big(L(1,2)\Big) = 1$ si verifica rapidamente che è linerarmente indipendente e che sia un insieme di generatori $\implies$ è una base
- $\mathbf{R}[x]$ ha dimensione indefinita infatti:

  Dimostrazione. Per il principio di identità dei polinomi, l'insieme è linearmente indipendente per ogni n. Se $\mathbf{R}[x]$ fosse di dimensione finita e $dim\mathbf{R}[x] = k$, allora, per il teorema della base sarebbe contenuto in una base e quindi per ogni n. Assurdo.
  Se $P(x) = 0 \implies a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + .. + a_n \cdot x^n = \vec{0} \implies a_0 = a_1 = .. = a_m = 0 \implies$ è indipendente $\forall\, n$, ma se $\mathbf{R}$ fosse finito, allora esisterebbe un $k = dim\mathbf{R}[x]$

  $\square$

1. Esercizio 1, calcolare base di uno spazio $\mathbf{R}^{2\times 2}$:
   - Se considero $\mathbf{R}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$
   - Per verificare che sia base deve essere sia insieme di generatori che linearmente indipendente.
   - L'insieme di matrici: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
   - La combinazione lineare di 4 matrici: $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies$ linear. indipendente

2. Esercizio 2, verificare se insieme è base di $\mathbf{R}^2$:
   - Considero l'insieme $\{(1,2),(2,1)\}$
   - Verifico che sia linearmente indipendente: $a(1,2)+b(2,1) = (0,0) \implies \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \implies$ riduco a gradini la matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
   - Verifico che l'insieme sia generatore: $(x,y) \in \mathbf{R} \quad , \quad (x,y) = a(1,2) + b(2,1) = (a + 2b, 2a + b) \implies \begin{cases} a + 2b = x \\ 2a + b = y \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 2 & 1 & | & y \end{pmatrix} \implies$ riduco a gradini la matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & -3 & | & y - 2x \end{pmatrix} \implies$
     $\implies$ il sistema ha soluzioni quindi ogni vettore (x,y) è combinazione lineare dei due vettori generatori.
   - di conseguenza l'insieme è base.

3. Esercizio 3, verificare se insieme è base di $\mathbf{R}^2$:
   - Considero l'insieme $\{(1,2),(2,1)\}$

- È linearearmente dipendente come verificato nell'esercizio precedente (es. 2).
- Per il corollario (5.1.6) del teorema della base $\dim(\mathbf{R}^2) = 2$
- Di conseguenza è base

5.4.3 Spazio riga e spazio colonna

Definition 5.11. *Se A è una matrice $n \times m$ indichiamo con $A_1, A_2, .., A_n$ le righe di A e con $A^1, A^2, .., A^m$ le colonne di A.*

- *Lo spazio riga di A è lo spazio generato dalle righe di A*
- *Lo spazio colonna è lo spazio generato dalle colonne di A*

Quindi lo spazio riga è $L(A_1, A_2, .., A_n)$ e viene indicato con i pedici, mentre e lo spazio colonna è $L(A^1, A^2, .., A^m)$ e viene indicato con gli apici.

Se A è una matrice di dimensioni $m \times n$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, allora:

$$A \cdot X = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A^i \tag{52}$$

Dimostrazione. Se consideriamo i-esimo vettore-colonna dei coefficienti $X = \begin{pmatrix} 0_0 \\ 0_{..} \\ 1_i \\ 0_{..} \\ 0_n \end{pmatrix}$

Osserviamo che $A \cdot e_i = A^i$ (si annullano tutte le righe tranne la i-esima):

$$AX = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i A^i \tag{53}$$

Che significa: $\qquad A_{ei} = (A^1 \cdot A^2 \cdot A^i \cdot A^n) \cdot \begin{pmatrix} 0_0 \\ 0_{..} \\ 1_i \\ 0_{..} \\ 0_n \end{pmatrix} = A_i$

□

Calcolo di una base dello spazio con metodo di eliminazione di Gauss:
Questo metodo si basa sul fatto che se si applicano delle operazioni elementari di riga allora lo spazio riga non cambia: $A \approx A'$.
È importante sottolineare che ciò vale solo per le righe e non per le colonne.

Per essere vero dobbiamo dimostrarlo per tutte e tre le operazioni elementari fra righe:

- Per quanto riguarda lo scambio di righe e il prodotto scalare è abbastanza scontato che siano equivalenti.
- Dimostrazione per la somma fra righe:

  Dimostrazione. $\mathrm{t}_1\ \mathrm{A}_1 + \mathrm{t}_2\ \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{t_i}\,(\mathrm{A}_i + \mathrm{sA_j}) + \ldots + \mathrm{t}_n\ \mathrm{A}_n =$
  $= \mathrm{t}_1\ \mathrm{A}_1 + \mathrm{t}_2\ \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{t_i A}_i + \ldots + (\mathrm{t}_j + \mathrm{t}_i\ \mathrm{S})\,\mathrm{A}_j + \ldots + \mathrm{t}_n\ \mathrm{A}_n$
  $\Longrightarrow \quad spazio.riga(A') \subseteq spazio.riga(A)$

  $\mathrm{t}_1\ \mathrm{A}_1 + \mathrm{t}_2\ \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{t_i A}_i + \ldots + \mathrm{t}_n\ \mathrm{A}_n =$
  $= \mathrm{t}_1\ \mathrm{A}_1 + \mathrm{t}_2\ \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{t}_i\,(\ \mathrm{A}_i + \mathrm{sA}_j) + \ldots + (\mathrm{t}_j - \mathrm{t}_i\ \mathrm{S})\,\mathrm{A}_j + \ldots + \mathrm{t}_n\ \mathrm{A}_n$
  $\Longrightarrow spazio.riga(A) \subseteq spazio.riga(A')$
  $\Longrightarrow spazio.riga(A) = spazio.riga(A')$

  □

Il metodo di eliminazione si basa su fatto che Se ad una matrice A si applicano le operazioni elementari di riga allora lo spazio riga non cambia. Viene riodotta a gradini la matrice, quindi se B è una riduzione a gradini di A allora lo spazio riga di B è uguale allo spazio riga di A. Quindi se so calcolare una base dello spazio riga di B ho una base dello spazio riga di A.

Theorem 5.2. *Se una matrice B è a gradini allora le sue righe non nulle sono linearmente indipendenti e quindi sono una base del suo spazio riga.*

Dimostrazione. :
Considero B, una matrice a gradini che in questo caso ha 3 righe non nulle con $p_1, p_2, .., p_k$ pivot della matrice:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & p_1 & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & p_2 & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & p_k & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Per verificare se le righe non nulle sono indipendenti bisogna verificare se il sistema $C \cdot X = \vec{0}$ ha solo la soluzione $\vec{0}$, dove C è la matrice che ha per colonne le righe non nulle di B, quindi il sistema da risolvere è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & \vdots & & \vdots \\ & p_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & p_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \leftrightarrow \begin{cases} p_1 x_1 = 0 \\ p_2 x_2 = 0 \\ \vdots \\ p_k x_k = 0 \end{cases} \tag{55}$$

L'unica soluzione è avere il vettore-colonna delle variabili pari a zero
$\Longrightarrow$ $dim\big(spazio - riga(A)\big)$= numero di righe non nulle di B, quindi al numero di pivot della matrice.
$\Longrightarrow$ righe non nulle di B sono una base dello spazio riga di A.

$\square$

Esercizi con applicazione del metodo di eliminazione di Gauss:

1. Es1:
   Considero una matrice B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} matrice\ senza\ righe\ nulle \tag{56}$$

   Controllo se se sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

Le righe non nulle di A sono indipendenti:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\\1&-2&0\\1&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}0=0\\x=0\\x=0\\x-2y=0\\x+y=0\\x+y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\\x-2y=0\\x+y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}\implies \textit{indipendente} \tag{58}$$

2. Es2:
Calcolare una base e la dimensione dello spazio generato da $(1,1,2,2),(2,0,4,2),(1,-1,2,0),(0,2,0,2)$:
Considero la matrice dei vettori: $\begin{pmatrix}1&1&2&2\\2&0&4&2\\1&-1&2&0\\0&2&0&2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&-2&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ Di conseguenza è una della tante basi, infatti è spazio generato dall'insieme di vettori $\{(1,1,2,2),(0.-2.0.-2)\}\implies dim(4-vettori)=2$ (conseguenza del teorema della base in quanto linearmente indipendenti)

3. Es3:
Se consideriamo $(0,0,2,2,-1,1),(1,1,2,1,1,1),(1,1,4,3,0,2)$ linearmente indipendeti e troviamo lo spazio generato, ci accorgiamo che nella matrice a gradinbi ci sono 2 pivot, quindi non possono essere indipenndeti altrimenti la dimensione dello spazio generato sarebbe 3: $\implies$ linearmente dipendenti.

4. Es4:
Considero i vettori $(1,2,2,2),(1,0,1,1),(1,2,3,0),(-1,1,1,1)$, sono linearmenti indipendenti infatti la dimensione dello spazio generato è 4 (numero di pivot nella matrice ridotta) e i vettori sono 4.

5. Es5: Verificare se $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,-1)\}$ è base di $\mathbf{R}^4$: no perchè vettore forma matrice con 3 pivot.

6. Es6: Verificare se esiste una base di $\mathbf{R}^4$ che contiene (1,1,1,0),(1,1,2,1) e in tal caso calcolarla.
Esiste una base che contiene l'insieme dato se e solo se l'insieme è linearmente indipendente.
Scrivo matrice di vettorie riduco a gradini, trovo 2 pivot quindi è indipendente.
Quindi esiste una abse che contiene quei 2 vettori ed è: $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$
Ho aggiunto i vettori canonici $e_i=(0,..,1_i,..,0)$ che completano al matrice a gradini.
In questo modo ho ottenuto una base per completamento.

7. Es6:
Verificare se $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,2),(1,0,0,-1),(1,0,-1,0)\}$ contiene una base di $\mathbf{R}^4$ e in tal caso calcolarla.
L'insieme dato contiene una base di $\mathbf{R}^4$ se e solo se è un insieme di generatori per $\mathbf{R}^4$.
Per verificare se è un insieme di generatori calcoliamo la dimensione dello spazio generato e troviamo che la matrice ridotta a gradini ha la 4 riga impossibile $\implies$ delezione del vettore $(1,0,0,-1)$ in posizione 4 ed otteniamo la base di $\mathbf{R}^4$.

5.4.4 Somma e intersezione di sottospazi

- Somma:
Se U, W sono sottospazi di una spazio V allora lo spazio somma $U+W$ è un sottospazio:

$$U+W=\{u+w \mid u\in U, w\in W\} \tag{59}$$

Dimostrazione. Per verificare cbe è sottospazio bisogna assicurarsi che sia incluso l'elemento neutro (A), che sia chiuso rispetto alla somma (B) e al prodotto per uno scalalare (C).

(A): $U+W\neq\varnothing$ perchè se $\vec{0}\in U\ \wedge\ \vec{0}\in W\implies\vec{0}+\vec{0}\in(U+W)$

(B): $\quad v_1, v_2 \in (U+W) \implies v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W}$

$$\implies \begin{cases} v_1 = u_1 + u_2 \in U \\ v_2 = w_1 + w_2 \in W \end{cases} \quad \implies v_1 + v_2 \in U + W$$

(C): $\quad t \in \mathbf{R} \quad , \quad v \in (U+W) \quad , \quad v = u + w :$

$$t \cdot v = t\,(u+w) = \underbrace{t \cdot u}_{\in U} + \underbrace{t \cdot w}_{\in W} \implies t \cdot v \in (U+W)$$

Siccome vengono rispettate sia A, B che C possiamo affermare che l'appartenenza ad un insieme è chiusa rispetto alla somma.

□

- Intersezione:
  Se U, W sono sottospazi di una spazio V allora lo spazio intersezione $U \cap W$ è un sottospazio:

$$U \cap W = \{v \,\big|\, v \in U, v \in W\} \tag{60}$$

Dimostrazione. Per verificare cbe è sottospazio bisogna assicurarsi che sia incluso l'elemento neutro (A), che sia chiuso rispetto alla somma (B) e al prodotto per uno scalalare (C).

(A): $\quad U \cap W \neq \varnothing$ perchè entrambi gli insiemi contengono lo zero

(B): $\quad v_1, v_2 \in (U \cap W) \implies (v_1, v_2 \in U) \wedge (v_1, v_2 \in W) \implies (v_1 + v_2) \in U \cap W$ infatti $\begin{cases} v_1 + v_2 \in U \\ v_1 + v_2 \in W \end{cases}$

(C): $\quad t \in \mathbf{R} \quad , \quad v \in (U \cap W) \quad , \quad v \in U \quad , \quad v \in W \ :$

$$\implies t \cdot v \in U \quad \wedge \quad t \cdot v \in W \quad \implies t \cdot v \in (U \cap W)$$

$\implies$ Siccome vengono rispettate sia A, B che C possiamo affermare che l'appartenenza ad un insieme è chiusa rispetto all'intersezione.

□

5.4.5 Formula di Grasmmann - somma diretta - proiezione

Vale la seguente formula, detta formula di Grassmann:

$$\dim(U+W) + \dim U \cap W = \dim U + \dim W \tag{61}$$

Definition 5.12 (Somma diretta)**.** *:*
Si dice che uno spazio V è somma diretta di due sottospazi U;W se:

- $V = U + W$
- $U \cap W = \{\vec{0}\}$

La notazione della somma diretta fra U e W è : $\quad V = U \oplus W$

In termini semplici, un insieme è somma diretta di due insiemei se essi sommati danno il primo insieme e hanno solamente in comune lo zero.

Definition 5.13 (Complemento di sottospazio)**.** *:*
Se U è un sottospazio di uno spazio V, un complemento di U è un sottospazio W tale che $V = U \oplus W$

Qui stiamo considerando un insieme che è complemeterare rispetto ad un insieme più grande e non ha nessun punto in comune al di fuori dello zero.

Ad esempio se considero due insiemi $U = \{(x,y) \mid x = y\}$ e $W = \{(x,y) \mid x = -y\}$ che rispettivamente rappresentano le bisettrice del primo e del seondo qudrante.
È evidente che W sia complemento si U in $\mathbf{R}^2 \implies$ possiamo scrivere $\mathbf{R}^2 = U \oplus W$, infatti:

1. Intersezione è zero: le rette si intersecano nell'origine
2. Chiuso rispetto alla somma: se sommo due punti appartenneti alle due rette resto sempre in $\mathbf{R}^2$
3. Chiuso rispetto al prodotto per scalare: se moltiplico per uno scalare un punto del piano $\mathbf{R}^2$ apparterrà sempre al piano $\mathbf{R}^2$, per dimostrarlo sbasta fare la combianzione lineare fra due punti come $(1,1) \in \{x = y\}$ e $(-1,1) \in \{x = -y\}$ che è $L\big((1,1),(-1,1)\big)$. trovo la matrice e la riduco a gradini, visto che ha 2 pivot è base di $\mathbf{R}^2$.

Dimostazione del fatto che $V = U \oplus W$ ha senso se e solo se ogni vettore v di V può essere decomposto in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U \quad , \quad w \in W$:

Dimostrazione diretta. :
Supponimo vero che $V = U \oplus W$, allora $v = U + W \wedge V \cap W = \{\vec{0}\}$

Se $v \in V \implies v = u + w \quad , \quad u \in U \quad , \quad w \in W$

Se per assurdo $v = u' + w' = u + w'$, allora $\underbrace{u' - u}_{\in U} = \underbrace{w - w'}_{\in W}$

$\implies u - u' \in U \cap W = \{\vec{0}\} \implies u - u' = \vec{0} \implies \vec{u} = \vec{u'}$

$\implies u + w = u' + w' = u + w' \implies w = w'$ □

Dimostrazione inversa. :
Viceversa se $v \in V$ e si può scrivere unicamente come $(u + w)$, allora:

Siccome ogni vettori di V può essere decomposto come $u + w$è chiaro che $V = U + W$

Se $v \in (U \cap W) \implies \begin{cases} v = u \in U \\ v = w \in W \end{cases} \implies u - w = v - v = \vec{0}$

Quindi l'unico punto di iterserzione è lo zero, di conseguenza è definta la somma diretta $V = U \oplus W$.

□

Definition 5.14 (Proiezione)**.** *:*
Sia $V = U \oplus W$ *allora, dato* $v \in V$*, possiamo scrivere in modo unico* $v = u + w$ *con* $u \in U$ *e* $v \in V$ *.*
Il vettore u è detto la proiezione di v su U relativa alla somma diretta $V = U \oplus W$ *(la proiezione dipende sia da U che da W).*

5.4.6 Problemi ed esercizi

Affrontiamo ora il problema di calcolare una base dello spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo, ovvero una base di N(A) (che sono le colonne senza pivot di una matrice).
Ricordiamoci il Teorema Nullità + Rango (teorema 6.3) secondo cui: $null(A) + rk(A) = num.colonne$

Esercizio con spiegazione del procedimento:

1. Considero la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e calcolo un abse di $N(A)$

2. Risolvo $N(A) = Sol(A, \vec{0})$, quindi risolvo $A \cdot X = \vec{0}$, ovvero:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} [1] & 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & [-2] & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = - - 2x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$

3. scrivo la combinazione lineare delle soluzioni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. L'insieme genereatore di $N(A)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ quindi $N(A) = span\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

5. Possiamo notare che il numero di vettori generatori è pari al numero di nullità (dimensione di N(A)) , questo perchè il numero di variabili libere per il teorema nulltà + rango (6.3) può essere vista come la differenza fra il numero di variabili (numero colonne) e il numero di varibili vincolate (rango di A, numero di pivot).

6 Funzioni

6.1 Trasformazioni

6.1.1 Tipologie di funzioni

Vedere la sezione 'grafici/tipologie-di-funzioni'del pdf di Analisi I dove sono spiegati i concetti di funzione suriettiva, iniettiva e biunivoca.
Informazioni generali sulle funzioni che ci servono per analizzare le trasformazioni lineari:

- Funzione composta:

  Definition 6.1 (funzione composta)**.** *Data una funzione $f : A \to B$ e una funzione $g : B \to C$, la funzione $c = g \circ f$ è definita come $c : A \to C$ e corrisponde a $g\big(f(x)\big)$*

- Funzione invertibile:

  Definition 6.2 (funzione invertibile)**.** *Una funzione $f : A \to B$ viene definita invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$.*
  Se una funzione è invertibile, la funzione imversa si indica con f^{-1}

  Theorem 6.1 (Invertibilità)**.** *Una funzione è invertibile se e solo se è biiettiva.*

6.1.2 Trasformazioni lineari

Definition 6.3 (Trasformazione lineare)**.** *Dati due spai vettoriali v e W, una trasformazione lineare da V in W è una funzione $f : A \to B$ tale che dati $v_1, v_2 \in V$ e $t \in \mathbf{R}$:*

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
- $f(t \cdot v_1) = t \cdot f(v_1)$

Le trasformazioni lineari si indicano con la lettera maiuscola (T, S, R, ecc).
Osserviamo che una trasformazione lineare $T : V \to W$ conserva il vettore nullo, ovvero $T(\vec{0}) = T(\vec{0} + \vec{0}) = T(\vec{0}) + T(\vec{0}) = \vec{0}$. Questo può essere usato per vedere se una trasformazione non è lineare.
È importante sottolineare che le trasformazioni lineari sono delle funzioni, mentre le matrici sono una sorta di tabelle, quindi sono elementi di dìnatura differente.

Esempi di trasformazioni non lineari:

- $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \quad , \quad T(x, y, z) = (x + 1, y, z)$ non è una trasformazione lineare infatti $T(\vec{0}) = (1, 0, 0) \neq 0$
- $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \quad , \quad T(x, y) = (x^2 + y^2, x, y)$ non è lineare infatti $T((1, 1) + (1, 0)) = T((2, 1)) = (5, 2, 1)$ non è uguale a $T((1, 1)) + T((1, 0)) = (2, 1, 1) + (1, 1, 0) = (3, 2, 1)$ (problema con la somma).

Esempio generale di trasformaizione lineare: data una matrice A di dimensioni $n \times m$ è trasformazione lineare la funzione definita ponendo:

$$T_A : \mathbf{R}^m \to m\mathbf{R}^n \quad , \quad T_A(X) = A \cdot X \tag{62}$$

Dimostrazione linearità di una trasformazione. Per essere lineare deve trasformare lo zero in zero e devono valere le proprietà della somma e del prodotto.

Zero: $T_A(\vec{0}) = A \cdot \{\vec{0}\} = \vec{0}$

Somma: $T_A(x_1 + X2) = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = T_A(x_1) + T_A(x_2)$ Prodotto: $T_A(t \cdot x)A(t \cdot x) = t \cdot (A \cdot x) = t \cdot T_A(x)$

□

Esempio di trasformazione lineare (si svolge il prodotto riga per colonna fra A e X):

- Se considero la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies T_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad , \quad infatti\, T_A\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$
- Considero la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies T_B\Bigg(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Bigg) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + z \end{pmatrix}$

6.1.3 Da matrice a trasformazione lineare e viceversa

- Da matrice a trasformazione lineare:
  Consideriamo una trasformazione lineare $T : \mathbf{R}^m \to m\mathbf{R}^n$ e la matrice A compista dai vettori colonna canonici tali che $v_i = T(e_i) = T\begin{pmatrix}0\\0\\1_i\\0\\0\end{pmatrix}$, $A_{n\times m} = (v_1, v_2, ..., v_m)$ Abbiamo che $T = T_A$, infatti:

$$T(X) = T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_m\end{pmatrix} = T\Big(\sum_{i=1}^{m}(x_i \cdot e_i)\Big) = \text{perchè lineare} = \sum_{i=1}^{m}\Big(x_1 \cdot T(e_i)\Big) = \sum_{i=1}^{m}(x_i \cdot v_i) \sum_{i=1}^{m}(x_i \cdot \underbrace{A^3}_{\text{coln A}}) = AX \quad (63)$$

- Da trasformazione lineare a matrice:
  Considero le seguenti trasformazioni:

  1. Esempio 1:

$$T\Big(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} \quad , \quad T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \implies e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad (64)$$

$$T(e_1) = T(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad T(e_2) = T(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \implies A = \Big(T(e_1), T(e_2)\Big) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \quad (65)$$

  2. Esempio 2:

$$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 \quad , \quad T\Big(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix}x+z\\y+z\end{pmatrix} \quad (66)$$

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \implies T_{e1} = T\Big(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix}x+z\\y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad (67)$$

$$T_{e1} = T\Big(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix}x+z\\y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad T_{e1} = T\Big(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix}x+z\\y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad (68)$$

$$\implies A = \Big((T_{e1}), (T_{e2}), (T_{e3})\Big) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad (69)$$

6.1.4 Nucleo e Immagine

Definition 6.4 (Nucleo)**.** *In una trasformazione lineare i vettori del codominio sono i trasformati del dominio. Se $T : V \to W$ è una trasformazione lineare, allora è chiamato nucleo di T l'insieme:*

$$Ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = \vec{0}\} \quad (70)$$

Definition 6.5. *L'insieme immagine di una trasformazione lineare T è:*

$$Im(T) = \{w \in W \mid \exists\, v \in V \mid w = T(v)\} \quad (71)$$

Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $T : V \to W$ sono sottospazi vettoriali rispettivamente di V e di W.

Dimostrazione sottospoazio (nucleo). Per verificare che $Ker(T)$ è sottospazio di V dobbiamo vedere che:

- È non vuoto (zero): $T(\vec{0}) = \vec{0}$ perchè ogni trasformazione lineare trasforma zero in zero, quindi $\vec{0} \in Ker(T)$

- Chiuso rispetto alla somma: se due vettori v e w stanno in $Ker(T)$, allora nel nucleo $T(v+w) = T(v)+T(w) = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$ perchè qualsiasi trasformata del nucleo resta zero.

- Chiuso rispetto al prodotto per scalare: se un vettori v sta in $Ker(T)$, allora nel nucleo $T(t\cdot w) = t\cdot T(w) = t\cdot\vec{0} = \vec{0}$ perchè qualsiasi trasformata del nucleo resta zero.

□

Dimostrazione sottospoazio (immagine). Per verificare che $Im(T)$ è sottospazio di W dobbiamo vedere che:

- È non vuoto (zero): $\vec{0} \in W$ perchè ogni trasformazione lineare trasforma zero in zero, quindi $T(\vec{0}) = \vec{0} \in Im(T)$

- Chiuso rispetto alla somma: se due vettori v e w stanno in $Ker(T)$, allora nel nucleo perchè qualsiasi trasformata del nucleo resta zero, se si sommano due immagini che provengono dal nuclo si avrà sempre $\vec{0} \in W$.

- Chiuso rispetto al prodotto per scalare: se un vettori v sta in $Ker(T)$, allora nel perchè qualsiasi trasformata del nucleo resta zero moltiplicata per uno scalare resta $\vec{0} \in Im(T)$.

□

Conseguenze delle definizioni:

- Il nucleo di T_A è lo spazio colonna nullo di A: $Ker(T_A) = N(A)$
- $\implies dim\big(Ker(T_A)\big) = null(A)$
- L'immmagine di T_A è lo spazio colonna di A: $Im(T_A) = R(A)$
- $\implies dim\big(Im(T_A)\big) = rk(A)$
- verfichiamo che $Ker(T_A) = N(A)$:

  Dimostrazione. Se guendo la definizione $Ker(T_A) = \{v \mid T_A(v) = \vec{0}\} = \{v \mid A \cdot v = \vec{0} = N(A)$ □

- verfichiamo che $Im(T_A) = R(A)$:

  Dimostrazione. Considero $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \implies Im(T_A) = \{T_A(v) \mid v \in \mathbf{R}^m\} = \{A \cdot v \mid v \in \mathbf{R}^m\} =$
  $\{A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, .., x_m \in \mathbf{R}\} = \Big\{\sum_i (x_i \cdot A^i \mid x_1, x_2, .., x_m \in \mathbf{R})\Big\} = R(A)$ infatti la trasformazione essendo il prodotto $A \cdot v$ è pari allo spazio generato (span) dalle colonne $(A^1, A^2, .., A^m)$.

  □

Osservazioni:

- T è iniettiva se e solo se il nucleo è nullo, quindi: $iniettiva \iff Ker(T) = \{\vec{0}\}$
- T è suriettiva se e solo se l'immagine è uguale al codominio, quindi: $suriettiva \iff Im(T) = W$
- Verifichiamo che *iniettiva* $\iff Ker(T) = \{\vec{0}\}$:

  Dimostrazione ($\implies$): iniettiva $\implies Ker(T) = \{\vec{0}\}$. :
  $T(v) = \vec{0}$, $T(\vec{0}) = \vec{0} \implies T(v) = T(\vec{0})$
  Siccome T è iniettiva: $v = \vec{0} \implies Ker(T) = \{\vec{0}\}$ □

  Dimostrazione ($\impliedby$): $Ker(T) = \{\vec{0}\} \implies iniettiva$. :
  Assumendo che $Ker(T) = \{\vec{0}\} \implies T(v) = T(w)$, se è iniettiva allora $v = w$
  Infatti $T(v) - T(w) = 0$, siccome T è lineare $\implies T(v) - T(w) = T(v - w) = \vec{0}$
  Quindi sappiamo che $\begin{cases} (v - w) \in Ker(T) \\ Ker(T) = \vec{0} \text{ per ipotesi} \end{cases} \implies v - w = \vec{0} \implies v = w \implies$ è iniettiva. □

- Verifichiamo che *suriettiva* $\iff Im(T) = W$

Dimostrazione ($\Longrightarrow$)*: suriettiva* $\Longrightarrow Im(T) = W$. :
Se $w \in W \implies \exists\, v \in V \,\big|\, T(v) = w \implies w \in Im(T) \implies$ w è sottospazio di $Im(T)$
Allo stesso tempo $Im(T) \subseteq W \implies W = Im(T)$ □

Dimostrazione ($\Longleftarrow$)*:* $Im(T) = W \implies$ *sueriettiva.* :
Se $w \in W \implies w \in Im(T) \implies \exists\, v \in V \,\big|\, T(v \in D) = w \implies$ è suriettiva

□

6.1.5 Teorema della Dimensione

Theorem 6.2 (Teorema della dimesnione)**.** *:*
Se $T : V \to W$ è una trasformazione lineare tra due spazi vettoriali e V è di dimensione finita, allora:

- *$Im(T)$ è di dimensione finita*
- *$dimV = dimKerT + dimImT$*

Dimostrazione del teorema della Dimensione. :

Si sceglie una base $\{v_1, .., v_k\}$ di $Ker(T)$, si completa questa base ad una base di V.

Devo dimostrare che $\{T(v_{k+1}), .., T(v_n)\}$ è una base di $Im(T)$, quindi se lineamente indipendente.

Linearmente indipendente:

$$x_1T(v_{k+1}) + x_2T(v_{k+2}) + .. + x_{n-k}T(v_n) = \vec{0}$$

Allora siccome è una trasformazione lineare diventa:

$$T\Big(x_1\, v_{k+1} + x_2\, v_{k+2} + .. + x_{n-k}\, v_n\Big) = \vec{0}$$

Quindi siccome la trasformazione di zero è zero (deve stare in Ker(T)):

$$x_1\, v_{k+1} + x_2\, v_{k+2} + .. + x_{n-k}\, v_n = \vec{0} \implies \in Ker(T)$$

Di conseguenza:

$$x_1\, v_{k+1} + x_2\, v_{k+2} + .. + x_{n-k}\, v_n = y_1\, v_{k+1} + y_2\, y_{k+2} + .. + y_{n-k}\, v_n$$

Portando dall'altra parte:

$$x_1\, v_{k+1} + x_2\, v_{k+2} + .. + x_{n-k}\, v_n - y_1\, v_{k+1} - y_2\, y_{k+2} - .. - y_{n-k}\, v_n = \vec{0}$$

Siccome $\{v_1, v_2, .., v_k, v_{k+1}, .., v_n\}$ è base di V per ipotesi, allora sono vettori linearmente indipendenti che si annullano con:

$$x_1 = x_2 = .. = x_{n-k} = y_1 = y_2 = .. = y_{n-k} = 0$$

E posso scrivere vi come combinazione lineare dei vettori della base.

Se $T(v) \in Im(T)$ allora considero:

$v = x_1v_{k+1}+x_2v_{k+2}+..+x_{n-k}v_n+y_1v_{k+1}+y_2y_{k+2}+..+y_{n-k}v_n \implies$ trasf. lineare: $T(v) = x_1T(v_{k+1})+x_2T(v_{k+2})+..+x_{n-k}T(v_n)+$

Siccome $T(v_1) = T(v_k) = \vec{0}$ tolgo i vettori dipendenti dalla y:

$$\implies T(v) = span\Big(T(v_k + 1), .., T(v_n)\Big)$$

Siccome il vettore è insieme generatore ed è linearmente indipendente è una base di $Im(T)$:

$$\{(T(v_k + 1), .., T(v_n)\}$$

Di conseguenza vale:

$$dim\big(Im(T)\big) = n - k = dim(V) - dim\big(Ker(T)\big)$$

Che corrisponde a:

$$dim(V) = dim\big(Ker(T)\big) + dim\big(Im(T)\big)$$

□

Corollari e conseguenze del Teorema della dimensione:

0. Teorema di nullità + rango:

Theorem 6.3 (Teorema di nullità + rango)**.** *Considerata una matrice A di dimensioni $n \times m$ (n: righe, m: colonne):*

$$null(A) + rk(A) = m \tag{72}$$

Il teorema è un caso speciale di un teorema più generale detto teorema della dimensione e si ricava nel seguente modo:

Dimostrazione. Per il Teorema della Dimensione vale: $dim\big(Ker(T)\big) + dim\big(Im(T)\big) = dim(\mathbf{R}^m)$

Siccome $dim\big(Im(T_A)\big) = rk(A)$, $dim\big(ker(T_A)\big) = null(A)$, $dim(\mathbf{R}^m) = m$

Otteniamo che $m = null(A) + rk(A)$

□

Esercizio, calcolare rango e nullità della matrice A con il teorema della nullità + rango:

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} [1] & 1 & 2 & 2 \\ 0 & [-2] & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies rk(A) = 2 \quad m = 4 \implies null(A) = m - rk(A) = 2$$

1. Conseguenza del teorema della dimensione I:

Corollary 6.3.1. *Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e $T : V \to W$ una trasformazione lineare, allora:*

(a) Se T è iniettiva allora $dim(V) \leq dim(W)$

(b) Se T è suriettiva allora $dim(V) \geq dim(W)$

Dimostrazione del punto a. :
Per thrm dimensione $dim(V) = dim\big(Ker(T)\big) + dim\big(Im(T)\big)$, siccome T è iniettiva $\iff Ker(T) = \{\vec{0}\}$
Allora: $dim(V) = dim\big(Ker(T)\big) = dim\big(Ker(T)\big) + dim(W) \geq dim(W)$

□

Dimostrazione del punto b. :
T è suriettiva $\iff Im(T) = W$ infatti nin ci può essere una trasformazione lineare suriettava $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

□

2. Conseguenza del teorema della dimensione II:

Corollary 6.3.2. *Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e $T : V \to W$ una trasformazione lineare, allora se T è suriettiva allora $dim(V) \geq dim(W)$*

Dimostrazione ($\implies$): suriettiva $\implies dim(V) \geq dim(W)$. : Supponiamo $T(A)$ invertibile
Allora $dim(V) = \underbrace{dim\big(Ker(T)\big)}_{=0} + dim\big(Im(T)\big) = dim\big(Im(T)\big) \implies dim(W) = dim(V)$

$Tm(T) \in W$ (suriettiva) $\wedge$ $dim\big(Im(T)\big) = dim(W) \implies Im(T) = W$ □

Dimostrazione ($\Longleftarrow$): $dim(V) \geq dim(W) \implies$ sueriettiva. :
Ovvia.

□

3. Conseguenza del teorema della dimensione III:

   Corollary 6.3.3. *Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e $T : V \to W$ una trasformazione lineare, allora se $dim(V) = dim(W)$ allora T è iniettiva se e solo se è biiettiva.*

4. Conseguenza del teorema della dimensione IV:

   Corollary 6.3.4. *Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e $T : V \to W$ una trasformazione lineare, allora se $dim(V) = dim(W)$ allora T è suriettiva se e solo se è biiettiva.*

5. Conseguenza del teorema della dimensione V:

   Corollary 6.3.5. *Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e $T : V \to W$ una trasformazione lineare, allora se $dim(V) = dim(W)$ allora T è iniettiva se e solo se è biiettiva.*

   Dimostrazione. :

   $$\begin{cases} dim(V) \leq dim(W) & \text{condizione iniettività} \\ dim(V) \geq dim(W) & \text{condizione suriettività} \end{cases} \implies dim(V) = dim(W)$$

   □

6.1.6 Composta di trasformazioni lineari

Definition 6.6. *Se $T : V \to W$, $S : W \to U$ sono trasformazioni lineari, allora $(S \circ T) : V \to U$ è una trasformazione lineare.*

$$S \circ T(v) = S\big(T(v)\big) \tag{73}$$

Dimostrazione. :
Per essere una trasformazione lineare deve essere chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare:

- Somma: $S \circ T(v_+ v_2) = \text{def. composta} = S\big(T(v_1 + v_2)\big) = \text{prop. trasf. lineare} =$

$= S(T(v_1 + T(v_2)) = s(T(v_1)) + s(T(v_2) = (s \circ T)(v_1) + (S \circ T)(v_2)$

- Prodotto per scalare: $(S \circ T)(t \cdot v) = S(T(t \cdot v)) = St \cdot T(v)) = t \cdot \big((S \circ T)(v)\big)$

□

Composizione di due funzioni (trasformazioni) lineari:
Considero la funzione T_A , $A_{n\times m}$ e T_B , $B_{m\times k}$:

$$T_A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n \quad , \quad T_B : \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}^m \quad \implies \quad T_A \circ T_B = \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n \tag{74}$$

Si nota come $T_{A\cdot B}$ corrisponda alla trasformazione lineare:
$T_A \circ T_B(x \in \mathbf{R}^k) = T_A(T_B(x)) = T_(B \cdot x) = A \cdot B \cdot x = T_{AB}(x) \implies \quad T_{AB} = T_A \circ T_B$

6.1.7 Inversa di trasformazione lineare

Definition 6.7. *Se$T : V \to W$ è una trasformazione lineare biiettiva (quindi invertibile) allora $T^{-1} : W \to V$ è lineare.*

Significa che per essere invertibile una matrice A di dimensioni $n \times m$ deve essere quadrata, quindi $n = m$.
Inoltre vale anche $T^{-1} = T_{a^{-1}}$, $A \cdot B = B \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

Per verificare se l'inversa sia una trasformazione lineare bisogna dimostrare che essa sia chiusa rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare.

Dimostrazione. :
Considero la trasformazione $(T_A)^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \quad , \quad T_B := (T_A)^{-1}$

Considero la trasfromazione (lineare) identità $I_{\mathbf{R}^n} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \quad , \quad T_C = I_{\mathbf{R}^n}$

Trovo che $I_{\mathbf{R}^n}(x) = T_C(X) = C \cdot X$

Siccome $I_{\mathbf{R}^n}(x) = X = I \cdot X \quad \Longrightarrow \quad C \cdot X = I \cdot X = C = I_n$

Quindi è dimostrato che $T_B = (T_A)^{-1}$

$\square$

7 Pre-geometria

7.1 Basi, coordinate e isomorfismi

7.1.1 Problema generale

Sappiamo calcolare la dimensione e una base di sottospazi quando siamo in $\mathbf{R}^n$.
Come si risolve questo tipo di problemi in uno spazio vettoriale qualsiasi?
Problema di esempio: Sia $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e sia:

$$V = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$$

- Verificare che V è un sottospazio di $\mathbf{R}_2[x]$
- Calcolare una base e la dimensione di V

7.1.2 Isomorfismi

Definition 7.1 (Isomorfismi)**.** *:*
Siano V e W spazi vettoriali. Un isomorfismo da V in W è una trasformazione lineare biiettiva:

$$T : V \to W$$

Osservazioni relative agli isomorfismi. Se $T : V \to W$ è un isomorfismo allora:

1. $v_1, v_2, .., v_k$ sono indipendenti in V se e solo se $T(v1), T(c2), .., T(ck)$ sono linearmente indipendenti in W.
2. $c1, c2, .., ck$ generano V se e solo se $T(c1), T(c2), .., T(ck)$ generano W.
3. $c1, c2, .., cn$ è una base di V se e solo se $T(c1), T(c2), .., T(cn)$ è una base di W.
4. U è sottospazio di V se e solo se $T(U)$ è sottospazio di W.

Dimostrazione del punto 1. :
- Implicazione diretta ($\Longrightarrow$):
Supponiamo $\quad v_1, v_2, .., v_k \quad$ linearmente indipendenti in V.
Considero una combinazione lineare dei trasformati e la pongo pari al vettore nullo:

$$x_1T(v_1) + ... + x_kT(v_k) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad T(x_1v_1 + ... + x_kv_k) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$$

Quindi $T(v_1), ..., T(v_2)$ sono indipendenti.

- Implicazione inversa ($\longleftarrow$):
Si dimostra analogamenti usando la trasfromazione T^{-1} .

□

7.1.3 Vettori e coordinate

Le coordinate di un vettore in una base:

- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\quad B = \{v_1, v_2, .., v_n\} \quad$ una base di V.
- Se v è un vettore in V allora è combinazione lineare degli elementi di B:

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n$$

- Il vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è detto vettore delle coordinate di v in B e lo indichiamo con $C_B(v)$.

Theorem 7.1 (Isomorfismo e coordinate)**.** *:*
Sia B una base di V e sia n la dimensione di V. Allora la funzione $\quad C_B : V \to \mathbf{R}^n \quad$ *è un isomorfismo.*

Le coordinate servono per trasformare i problemi in uno spazio vettoriale V qualsiasi in problemi in $\mathbf{R}^n$.
Esercizio di esempio:

1. Sia $V = \mathbf{R}_4[x]$ (polinomi di grado≤ 4) e sia $W = \{f(x) \in V \mid f(1) = 0\}$
2. Verificare che W è sottospazio di V
3. Sappiamo che $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ è una base di V. Usando le coordinate in B il problema diventa un problema in dove possiamo risolverlo con i metodi sviluppati finora.
4. Corrisponde a : $\quad W = \{t(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$
5. Troviamo che: $\quad C_B(W) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \right\}$
6. È un sottospazio di $\mathbf{R}^5$ infatti è lo spazio nullo $\quad N\Big((1, 1, 1, 1, 1)\Big) \quad \Longrightarrow \quad W$ è sottospazio.
7. Calcolare la dimensione e una base di W, quindi lavoro su $C_B(W) = N\Big((1, 1, 1, 1, 1)\Big)$.
8. Ottengo la matrice $\quad \Big(1, 1, 1, 1, 1\Big)$ che corrisponde al $N()$ del sistema omogeneo $\quad \Big\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$
9. $\Longrightarrow \Big\{x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
10. Allora: $\quad \dim\Big(C_B(W)\Big) = 4 \quad \Longrightarrow \quad dim(W) = 4$
11. La combinazione lineari in un vettore $\quad CL_B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = x_1v_1 + ... + x_nv_n$

$$C_B = \Big(CL_B\Big)^{-1} \qquad CL_B = L_B^{-1} \tag{75}$$

12. Quindi $B' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $C_B\Big(W\Big) \Longrightarrow B'' = CL_B\Big(B'\Big)$ è base di W.
13. $B'' = CL_B\Big(B'\Big) = \left\{ CL_B\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), CL_B\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), CL_B\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), CL_B\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right\} = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3, -1 + x^4\}$ infatti all'inizio abbiamo scelto il polinomio base di V: $\quad B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$
Fare il $CL_B()$ di un vettore significa moltiplicare i rispettivi elementi del vettore con quelli della base.

7.1.4 Trasformazioni lineari e coordinate

Theorem 7.2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e W uno spazio vettoriale di dimensione m. Siano B e B' basi rispettivamente di V e W. Data $T : V \to W$ una trasformazione lineare, esiste unica una matrice A di dimensionei $m \times n$ tale che:*

$$C_B\Big(T(V)\Big) = AC_B\Big(v\Big)$$

La matrice A è detta matrice rappresentativa della trasformazione lineare T nelle basi B e B' e si indica con:

$$M_B^B,(T)$$

Dimostrazione e calcolo della matrice rappresentativa. :
Data la trasformazione lineare $T : V \to W$ e le basi $B = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ di V e B' di W. Allora:

$$C_{B'}\big(T(v)\big) = M_{B'}^B\big(T\big)C_B\big(v\big) \tag{76}$$

In particolare la i-esima colonna di $M_B^B,\Big(T\Big)$ è:

$$M_B^B,\big(T\big)e_i = M_{B'}^B\big(T\big)C_B\big(v_i\big) = C_{B'}\big(T(v_i)\big) \tag{77}$$

$M_B^B,\Big(T\Big)$ è la matrice che ha per i-esima colonna il vettore delle coordinate in B' del i-esimo elemento di B.

□

Esercizio di esempio:

1. Sia $T : \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}^2$ la trasformazione lineare definita ponendo $T\big(f(x)\big) = \big(f(1), f(-1)\big)$
2. Fissiamo le basi $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbf{R}[x]$ e $C = \{e_1, e_2\}$ (base canonica) di $\mathbf{R}^2$. Per calcolare la amtrice rappresentativa di T facciamo:
$$T(1) = (1,1) \quad , \quad T(x) = (1,-1) \quad , \quad T(X^2) = (1,1) \quad , \quad T(x^3)(1,-1)$$
3. Che corrispndono a :
$$C_C\big((1,1)\big) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad , \quad C_C\big((1,-1)\big) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad , \quad C_C\big((1,1)\big) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad , \quad C_C\big((1,-1)\big) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad ,$$
4. Quindi la amtrice rappresenattiva è $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$
5. Controlliamo: $C_C\Big(T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\Big) = \begin{pmatrix}a_0 + a_1 + a_2 + a_3\\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \cdot C_B\big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\big)$

Mediante la matrice rappresentativa si possono tradurre problemi sulle trasformazioni lineari tra spazi qualsiasi in problemi sulle matrici e risolverli usando i metodi sviluppati finora.
Esercizio di esempio:

1. Sia $V = \mathbf{R}_4[x]$ (polinomi di grado≤ 4) e sia $W = \{f(x) \in V \mid f(1) = 0\}$
2. Calcolare la dimensione e una base di $Ker(T)$ e verificare se T è suriettiva
3. $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ è una base di $\mathbf{R}_3[x]$, $C = \{e_1, e_2\}$ è base di $\mathbf{R}^2$
4. $M_C^B(T) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \implies dim\big(Ker(T)\big) = null\big(M_C^B(T)\big) = 4 - rk = 4 - 2 = 2$
5. T è suriettiva perchè $dim\big(Im(T)\big) = rk\big(M_C^B(T)\big) = 2 = dim\big(\mathbf{R}^2\big)$

6. Calcolo di una base di $N\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \implies \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

7. Per trovare la base di $Ker(T) = CL_B\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) = \left\{ CL_B\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), CL_B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\} = ***$

8. Ricordando che $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ troviamo $*** = \{-1 + x^2, -x + x^3\}$

7.2 Cambio di base

7.2.1 Composizione di trasformazioni e identità

- Matrice della **composizione** di due trasformazioni lineari:
  Siano $T : V \to W$ e $S : W \to U$ due trasformazioni lineari.
  Fissiamo una base B di V una base B' di W e una base B'' di U. Allora:

  $$M^B_{B''}(S \circ T) = M^{B'}_{B''}(S) \cdot M^B_{B'}(T) \tag{78}$$

  È il prodotto riga per colonna delle due matrici.

  Dimostrazione. :

  $C_{B''}\Big((S \circ T)(v) = C_{B''}\Big(S(T(v))\Big) = M^{B'}_{B''}(S) \cdot C_{B'}(T(v)) = M^{B'}_{B''}(S) \cdot M^B_{B'}(T) \cdot L_B(v) =$

  $= C_B B''\Big((S \circ T)(v)\Big) = \begin{cases} M^{B'}_{B''}(S) \cdot M^B_{B'}(T) \cdot C_B(v) \\ \\ M^B_{B''}(S \circ T) \cdot C_B(v) \end{cases} \implies M^B_{B''}(S \circ T) \cdot C_B(v) = M^{B'}_{B''}(S) \cdot M^B_{B'}(T) \cdot C_B(v)$

  Di conseguenza $M^B_{B''}\Big(S \circ T\Big) = M^{B'}_{B''}(S) \cdot M^B_{B'}(T)$

  □

- Matrice dell'**identità**:
  Consideriamo l'identità $I : V \to V$, ovvero $I(v) = v$.
  Se B è una base di V allora $M^B_B(I) = I$
  Se B e B' sono basi di V allora $M^B_{B'}(I)$ è invertibile e:

  $$M^B_{B'}(I)^{-1} = M^{B'}_B(I) \tag{79}$$

- Matrice di **cambiamento di base**:
  Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano B e B' basi di V. Sia v un vettore in V e siano X e X' i vettori delle coordinate di v nelle basi B e B' rispettivamente. Allora:

  $$X' = M^B_{B'}(I)X$$

  Per questo motivo la matrice $M^B_{B'}(I)$ è detta matrice di cambiamento di base.

  Dimostrazione. :
  $X' = C_{B'}(v) = C_{B'}(I(v)) = M^B_{B'}(I) \cdot C : B(v) = M^B_{B'}(I) \cdot X$ □

  Osservazione sul cambiamento di base:
  La matrice di cambiamento di base da B a B' è la matrice che ha per colonne i vettori delle coordinate degli elementi di B nella base B'

Dimostrazione. :
Se $B = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ allora $M^B_{B'}(I)$ è la matrice che ha per i-esima colonna $C_{B'}(I(v_1)) = C_{B'}(v_i)$

$$M^B_{B'}(I)^i = C_{B'}(I8v_i)) = C_{B'}(v_i)$$

□

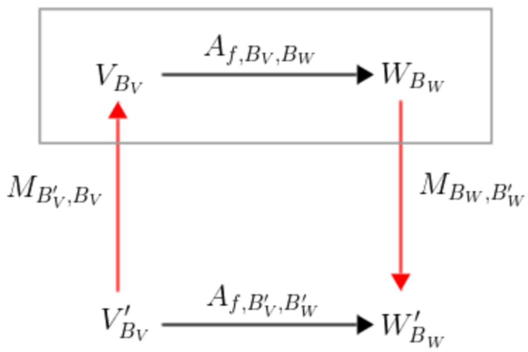

Figura 10: Cambio basi nelle trasformazioni lineari

Esercizio 1:

1. Sia $B = \{(1,1),(1,2)\}$. Verificare che B è una base di $\mathbf{R}^2$ e Calcolare $M^B_C(I)$ e $M^C_B(I)$.
2. Per vedere se è base: $det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow$ è base
3. $C_C\Big((1,1)\Big) = \binom{1}{1}$, $C_C\Big((1,2)\Big) = \binom{1}{2}$
4. $M^B_C(I) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
5. $M^C_B(I) = M^B_C(I)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$
6. Calcolare le coordinate di (x,y) nella base B.
7. $C_B\Big((x,y)\Big) = M^B_C(I)\cdot\binom{x}{y} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\binom{x}{y} = \binom{2x-y}{-x+y}$

7.2.2 Matrice rappresentativa e cambio base

Come cambia la matrice rappresentativa quando si cambianole basi.
Sia $T : V \to W$ una trasformazione lineare. Siano B, B_1 basi di V e B', B'_1 basi di W. Allora:

$$M^{B_1}_{B'_1}(T) = M^{B'}_{B'}(I)\cdot M^B_{B'}(T)\cdot M^{B_1}_B(I) \tag{80}$$

Dimostrazione. :

$$M^{B_1}_{B'_1}(T) = M^{B_1}_{B'_1}(I \circ T \circ I) = M^{B'}_{B'_1}(I)M^B_{B'}(T)M^{B_1}_B(I)$$

□

Nel caso particolare in cui la trasformazine è $T : V \to V$: Se $T : V \to V$ è una trasformazione lineare e B è una base di V allora la matrice $M_B^B\big(T\big)$ è detta matrice di T in B.

Cambio di Base: Se B e B' sono basi di V e è una trasformazione lineare:

$$M_{B'}^{B'}(T) = M_{B'}^{B}(I)M_B^B(T)M_B^{B'}(I) = M_B^{B'}(I)^{-1}M_B^B(T)M_B^{B'}(I)$$

Cioè, se A è la matrice di T nella base B, A' è la matrice di T nella base B' e M è la matrice di cambiamento di base da B' a B allora:

$$A' = M^{-1}AM$$

7.3 Trasformazioni lineari diagonalizzabili

1. Una trasformazione lineare $T : V \to V$ si dice diagonalizzabile se esiste un base B di V in cui la matrice $M_B^B\big(T\big)$ è diagonale
2. Una trasformazione lineare $T : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se, in una qualsiasi base B' di V, $M_{B'}^{B'}\big(T\big)$ è diagonalizzabile.

Dimostrazione del punto 2. :

a) Dimostrazione dell'implicazione inversa ($\Longleftarrow$):
Considero la trasformazione lieneare $T : V \to V$ diagonalizzabile, allora B' base qualsiasi di V.
Supponiamo $M_{B'}^{B'}\big(T\big)= A$ diagonalizzabile, allora esiste M tale che $M^{-1}AM = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n$
$\Longrightarrow$ le colonne di M formano una base di autovettori di A
Poniamo $B = \big\{CL_B(M')\big\} \subseteq V$ è una base $\quad \Longrightarrow \quad M_B^B\big(T\big)= M_{B'}^B\big(I\big)^{-1}\, M_{B'}^{B'}\big(T\big)\, M_{B'}^B\big(I\big)$
Quindi $\quad M_B^B\big(I\big)^i = C_{B'}\Big(CL_{B'}\big(M^i\big)\Big) = M^i \quad \Longrightarrow \quad M_{B'}^B\big(I\big)= M \quad \Longrightarrow M_B^B\big(T\big)= M^{-1}AM = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

b) Dimostrazione dell'implicazione diretta ($\Longrightarrow$):
Considero la trasformazione lieneare $T : V \to V$ diagonalizzabile e B' base qualsiasi di V.
Esiste una base B di V tale che $M_B^B\big(T\big)= diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
Allora $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [formula\ cambio\ base] = M_B^B\big(T\big)= M_{B'}^B\big(I\big)^{-1} \cdot M_{B'}^{B'}\big(T\big) \cdot M_{B'}^B\big(I\big)$
Sia $M = M_{B'}^B\big(I\big) \quad \Longrightarrow \quad diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = M^{--1} \cdot M_{B'}^{B'}\big(T\big) \cdot M \quad \Longrightarrow \quad M_{B'}^{B'}\big(T\big)$ è diagonlizzabile

□

7.4 Prodotto scalare

7.4.1 Distanza fra 2 punti nello spazio

- Norma di un vettore: è la lunghezza e si indica con $||v||$. Si trova grazie al teorema di Pitagora, ad esempio la nomra del vettore:
$$||v|| = ||x\vec{i} + y\vec{j}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
- Distanza fra 2 punti nel piano (2 dimensioni): è la norma del vettore dal primo al secondo punto:
$$d(P, Q) = ||\vec{PQ}|| = ||(x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j}|| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$
- Distanza fra 2 punti nello spazio (3 dimensioni):
$$d(P, Q) = ||\vec{PQ}|| = ||(x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}|| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

7.4.2 Prodotto scalare

Definition 7.2 (Prodotto scalare)**.** *:*
Dati due vettori v e w nel piano o nello spazio, il loro prodotto scalare è:

$$v \cdot w = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos(\theta) \tag{81}$$

Dove θ è l'angolo tra i due vettori.

Osservazioni e conseguenze:

- Due vettori v e w sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo: $v \perp w \Longleftrightarrow v \cdot w = 0$
- Norma del prodotto scalare: $||v|| = \sqrt{v \cdot v}$
- Distanza e prodotto scalare: $d(P,Q) = ||\vec{PQ}|| = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}}$

Notiamo che i vettori sottendono due angoli esplementari, definiamo angolo minore quello più piccolo fra i due.
Se l'angolo tra i due vettori è minimo si ricava la formula inversa:

$$\theta = \arccos\Big(\frac{v \cdot w}{||v||\,||w||}\Big) = \arccos\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2} \cdot \sqrt{x_1^2+y_2^2}}\right) \tag{82}$$

Espressione analitica del prodotto scalare:
Consideriamo due vettori $v = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $v = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, il propdotto scalare:

$$v \cdot w = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{83}$$

Dimostrazione. :
$(v \cdot w) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2(\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i} \cdot \vec{j} + y_1x_2(\vec{j} \cdot \vec{i} + y_1y_1(\vec{i} \cdot \vec{j} = ***$
Siccome $\vec{i}, \vec{j}$ sono i versori degli assi hanno $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$ e $\vec{i} \perp \vec{j}$, quindi il loro prodotto è nullo.
Di conseguenza riscriviamo: $*** = x_1x_2 \cdot ||\vec{i}|| + y_1y_2 \cdot ||\vec{j}|| = x_1x_2 + y_1y_2$
Analogamente si estende la dimostrazione a $\mathbf{R}^n$.

□

Definition 7.3 (Prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$)**.** *:*
Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una funzione che associa a ogni coppia di vettori v, w in V un numero reale $v \cdot w$ e tale che valgono le le proprietà di simmetria, bilinearità e positività.

Proprietà del prodotto scalare (proprietà definitorie):

1. Simmetria: $v \cdot w = w \cdot v$
2. Bilinearità: $(av + bw) \cdot u = av \cdot u + bw \cdot u$
3. Positività: $v \cdot v \geq 0$ da cui deriva che $v \cdot v = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

Definition 7.4 (Spazi euclidei)**.** *:*
uno spazio vettoriale su cui è stato definito un prodotto scalare viene detto spazio euclideo.

7.4.3 Disuguaglianza di Schwarz

Theorem 7.3 (Disuguaglianza di Schwarz)**.** *:*
Se v e w sono vettori in V allora vale la seguente disuguaglianza:

$$|v \cdot w| \leq ||v||\,||w|| \tag{84}$$

Dimostrazione della disuguaglianza di Schwarz. :
Considero la funzione $f(t) = ||v + tw||^2 \quad , \quad t \in \mathbf{R}$
Abbiamo che:

$$0 \leq f(t) = bilinearita' = (v + tw)(v + rw) = v1 \cdot v + 2\, v \cdot w\, t + w \cdot w\, t^2$$

Otteniamo una parabola che per la positività deve essere sempre positiva o al massimo nulla, analizzando il discriminante notiamo che la aprabola ha al massimo una soluzione, quindi $\Delta/4 \leq 0$ Il disciriminante:

$$\left(\frac{b}{2}\right) - a \cdot c \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad (v \cdot w)^2 - (v \cdot v)(w \cdot w) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad (v \cdot w)^2 \leq (v \cdot v)(w \cdot w)$$

Da cui si ottiene:

$$|v \cdot w| \leq ||v||\, ||w||$$

□

Come conseguenza della disuguaglianza di Schwarz, possiamo definire l'angolo minimo.

Definition 7.5 (Angolo minimo fra vettori)**.** *:*
Se v e w sono vettori non nulli in V allora $v \cdot w \leq ||v||\, ||w||$ *e quindi* $\frac{v \cdot w}{||v||\, ||w||} \leq 1$*. l'angolo minimo tra v e w è definito come:*

$$\theta = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{||v||\, ||w||}\right) \tag{85}$$

osservazioni e conseguenze: se v e w sono due vettori non nulli in uno spazio euclideo e è l'angolo minimo tra i due vettori allora:

$$v \cdot w = ||v||\, ||w|| \cos\theta$$

7.4.4 Disuguaglianza triangolare

Theorem 7.4 (Disuguaglianza triangolare)**.** *:*
Se v e w sono n-vettori allora vale la seguente disuguaglianza:

$$||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \tag{86}$$

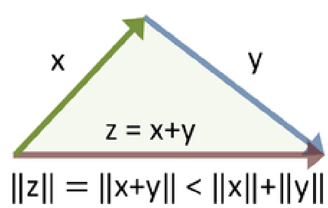

Figura 11: Disuguaglianza triangolare

Dimostrazione della disuaguaglianza triangolare. :
Grazie alla bilinearità, disufuaglianza di Schearz e simmetria si ottiene:

$$||v + w|| = (v + w) \cdot (v + w) = v \cdot v + 2\, v \cdot w + w \cdot w \leq v \cdot v + 2|v \cdot w| + w \cdot w \leq v \cdot v + 2||v||\, ||w|| + w \cdot w =$$

$$= ||v||^2 + 2||v||\, ||w|| + ||w||^2 = (||V|| + ||w||)^2 \quad radice\, quadrata \qquad ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$$

□

7.5 Proiezione

7.5.1 Proiezione ortogonale

Definition 7.6 (Proiezione ortogonale)**.** *:*
Dati due vettori liberi v e w nel piano o nello spazio la proiezione ortogonale di v lungo w è il vettore $p_w(v)$ rappresentato in figura:

.

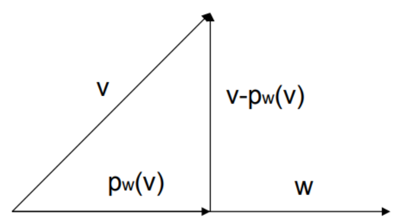

Figura 12: Proiezione ortogonale

Proprietà della proiezione ortogonale $p_w(v)$:

1. $\big(p_w(v)\big)$ ha la stessa direzione di w
2. $\big(v - p_w(v)\big)$ è ortogonale a w

Calcolo della proiezione ortogonale in ogni spazio euclideo: usiamo le due proprietà per calcolare una formula per la proiezione ortogonale:

1. $p_w(v) = tw$
2. $0 = \big(v - p_w(v)\big) \cdot w$

Di conseguenza:

$$v \cdot w - p_w(v) \cdot w = v \cdot w - tw \cdot w = 0$$

Risolvendo per t , si trova che $t = \frac{v \cdot w}{w \cdot w}$ e quindi:

$$p_w(v) = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w = \frac{v \cdot w}{||w||^2} w \tag{87}$$

Esercizio: calcolare la proiezione ortogonale di un vettore

1. Considero un vettore $v = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ lungo $w = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
2. $p_w(v) = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w = \frac{6}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

7.6 Basi ortogonali e ortonormali

Definition 7.7 (Insieme di vettori ortogonali)**.** *un insieme $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ in uno spazio euclideo V si dice ortogonale se $v_i \neq \vec{0}$ per ogni i e $v_i \cdot v_j = 0$ con $i \neq j$. In simboli:*

$$\begin{cases} v_i \neq \vec{0} & \forall\, i \\ v_i \cdot v_j = 0 \quad (v_1 \perp v_2) & \forall\, i \neq j \end{cases} \implies \textit{ortogonali}$$

Definition 7.8 (Insieme di vettori ortonormali)**.** *un insieme $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ in uno spazio euclideo V si dice ortogonale se è ortongonale e $||v_i|| = 1$ per ogni i (versore). In simboli:*

$$\begin{cases} v_i \neq \vec{0} & \forall\, i \\ v_i \cdot v_j = 0 \quad (v_1 \perp v_2) & \forall\, i \neq j \\ ||v_i|| = 1 & \forall\, i \end{cases} \implies \textit{ortonormali}$$

Dato un insieme ortogonale $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ si può costruire un insieme ortonormale $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$ ponendo:

$$w_i = \frac{v_i}{||v_i||}$$

Dimostrazione: insiemi ortogonali sono sempre linearmente indipendenti. :
Se $\quad x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_rv_r \quad$ allora $\quad (x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_rv_r) = 0 \cdot v_i = 0$

Quindi $\quad x_1(v_1 \cdot v_i) + x_2(v_2 \cdot v_i) + x_i(v_i \cdot v_i) + \cdots + x_r(v_r \cdot v_i) = 0$

Siccome il prodotto di vettori ortogonali, per definizione, è nullo ogni termine $\quad v_i \cdot v_j = 0$.
L'unico termine che sopravvive è $\quad v_i \cdot v_i \neq 0 \, \forall \, v_i$ in quanto per la proprietà definitoria di prodotto scalare, un prodotto fra un vettore e se stesso è nullo se e solo se il vettore è nulla, ma per ipotesi esso non è nullo.

□

Definition 7.9 (base ortogonale)**.** *:*
Sia $dim(v) = n$, essendo gli insiemi ortgonali sempre linearmente indipendenti sono basi di v.

Definition 7.10 (base ortonormale)**.** *:*
Sia $dim(v) = n$, essendo gli insiemi ortonormali sempre linearmente indipendenti sono basi di v.

Esempio di basi ortonormali (basi canoniche sono sempre ortonormali):

1. Considero i versori degli assi cartesiani nel piano: $\vec{i}, \vec{j}$
2. Siccome $\quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad$ sono ortogonali
3. Siccome $\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \end{cases} \quad \implies$ sono versori
4. Siccome sono sia ortogonali che hanno norma unitaria, allora i vettori formano una base ortonormale

7.6.1 Algoritmo di Gram-Schmid

C'è un metodo che a partire da una base qualsiasi di uno spazio calcola una base ortonormale. Questo metodo è un algoritmo ricorsivo detto processo ortonormalizzazione di Gram-Schmid. La formula generale è:

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} P_w j(v_i) \quad per \quad i = 2, ...n \tag{88}$$

1. Scegliere una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dello spazio v
2. $$u_1 = v_1$$
3. $$u_2 = v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{u_1 \cdot u_1} u_1$$
4. $$u_3 = v_3 - \frac{u_1 \cdot v_3}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{u_2 \cdot v_3}{u_2 \cdot u_2} u_2$$
5. $$u_n = v_n - \frac{u_1 \cdot v_n}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{u_2 \cdot v_n}{u_2 \cdot u_2} u_2 - \cdots - \frac{u_{n-1} \cdot v_n}{u_{n-1} \cdot u_{n-1}} u_{n-1}$$
6. L'insieme $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ è un insieme ortogonale.
7. Dividendo per il modulo si ottine una base ortonormale:
$$\left\{ \frac{u_1}{||u_1||}, \frac{u_2}{||u_2||}, \ldots, \frac{u_n}{||u_n||} \right\}$$

7.6.2 Matrice e spazio ortogonale

Definition 7.11 (Matrice ortonormale)**.** *:*
Una matrice quadrata si dice ortogonale se:

$$A^T = A^{-1} \quad \iff \quad A^T\, A = I \quad \iff \quad A\, A^T = I \tag{89}$$

Theorem 7.5. *Se v e w sono due vettori colonna allora* $\quad v \cdot w = v^T w.$
Quindi una matrice è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$.

Dimostrazione. :
- Parte 1:

Considero $\quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Il prodotto scalare tra i vettori corrisponde al prodotto riga per colonna fra il primo vettore e il secondo vettore trasposto:

$$v \cdot a = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = v^T w$$

- Parte 2:

Siccome $\quad A^T A = I \quad$ segue che:

$$I = \begin{pmatrix} (A^1)^T \\ \vdots \\ (A^n)^T \end{pmatrix} (A^1, \dots, A^n) = \big((A^i)^T A^j\big) = \big(A^i \cdot A^j\big)$$

Di conseguenza $\quad A^i \cdot A^j = 0 \quad$ se $i \neq j$ e $A^i \cdot A^1 = 1$
Questo significa che $\quad \{A^1, \dots, A^N\} \quad$ è una base ortonormale

□

Definition 7.12 (Spazio ortogonale di $R(A)$)**.** *Si ha che:*

$$R(A)^\perp = N(A^T) \tag{90}$$

Dimostrazione. :
Abbiamo che $\quad \{v \in \mathbf{R}^n \mid u \cdot v = 0 \quad \forall\, u \in R(A)\} = \{v \in \mathbf{R}^n \mid Az \cdot v = 0 \quad \forall\, z \in \mathbf{R}^m\} = ***$

Osserviamo che $(Az) \cdot v = (A \cdot z)^T \cdot v = (z^T A^T)v = z \cdot A^T v$

Quindi: $\quad *** = \{v \in \mathbf{R}^n \mid z \cdot A^T v = 0 \quad \forall\, z \in \mathbf{R}^m\} = \{v \in \mathbf{R}^n \mid A^T \cdot v = \vec{0}\} = N(A^T) = R(A)^\perp$

Di conseguenza: $\quad R(A)^\perp = \{v \in \mathbf{R}^n \mid A^T v = 0\} = N(A^T)$

□

Osservazione: $\quad$ se $U \subset \mathbf{R}^n \quad$ è dato mediante un insieme di generatori $\quad U = L(v_1, \dots, v_n) \quad$ allora $\quad U = R(A)$ dove A è la matrice che ha per colonne $v_1, \dots, v_k$, quindi:

$$U^\perp = N(U^T)$$

Cioè $U^\perp$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo che ha per matrice dei coefficienti la matrice che ha per righe i vettori $v_1, \dots, v_k$

7.6.3 B-espanzione di un vettore

Definition 7.13 (B-espanzione di un vettore)**.** *:*
Sia $B = \{q_1, \dots, q_n\}$ una base ortonormale di uno spazio euclideo V e v è un vettore, allora la B-espansione del vettore viene definita come:

$$v = (v \cdot q_1)q_1 + \cdots + (v \cdot q_n)q_n$$

Dimostrazione. :
Siccome B una base possimao scrivere:

$$v = x_1 q_1 + \cdots + x_i w_i + \cdots + x_n q_n$$

Quindi:

$$v \cdot q_i = (v = x_1 q_1 + \cdots + x_i w_i + \cdots + x_n q_n) \cdot q_i$$

L'unico termine che rimane è $x_i \, q_i \cdot q_i$ poichè gli altri sono prodotto di vettori scalare ortogonali.

□

7.6.4 Vettore delle coordinate e matrice di trasformazione lineare in base ortonormale

Definition 7.14 (Vettore delle coordinate in base ortonormale)**.** *:*
Sia $B = \{q_1, \dots, q_n\}$ una base ortonormale di uno spazio euclideo V, allora il vettore delle coordinate di v nella base B è:

$$C_B(V) = \begin{pmatrix} v \cdot q_1 \\ \vdots \\ v \cdot q_n \end{pmatrix} \tag{91}$$

Definition 7.15 (Matrice di trasformazione lineare in base ortonormale)**.** *:*
Se V è uno spazio euclideo e $T : V \to V$ è una trasformazione lineare, allora la matrice di T in una base ortonormale $B = \{q_1, \dots, q_n\}$ è data da:

$$M_B^B(T)^i = C_B\big(T(q_i)\big) = \begin{pmatrix} q_i \cdot T(q_j) \\ \vdots \\ q_n \cdot T(q_j) \end{pmatrix} \implies a_{ij} = q_i \cdot T(q_j) \tag{92}$$

7.6.5 Decomposizione ortogonale di un vettore

Theorem 7.6 (Decomposizione ortogonale)**.** *:*
Se U è un sottospazio di uno spazio euclideo V , allora $V = U \oplus U^\perp$ e questa viene definita decomposizione ortogonale di V rispetto a U.

Dimostrazione. :
Dobbiamo verificare che $V = U + U^\perp$.

Scegliamo una base ortonormale $B_U = \{q_1, \dots, q_r\}$ di U.

Completiamo la base B_U a una base B' di V.

Applicando Gram-Schmidt a B' si trova una base ortonormale $B = \{q_1, \dots, q_r, q_1', \dots, q_s'\}$ di V

La B-espansione di v ci darà:

$$v = \underbrace{(v \cdot q_1)q_1 + \cdots + (v \cdot q_r)q_r}_{u_v \in U} + \underbrace{(v \cdot q_1')q_1' + \cdots + (v \cdot q_s')q_s'}_{w_v \in U^\perp}$$

Defianiamo:

$$u_v = (v \cdot q_1)q_1 + \cdots + (v \cdot q_r)q_r \qquad w_v(v \cdot q_1')q_1' + \cdots + (v \cdot q_s')q_s'$$

Si vede chiaramente che $\quad v = u_v + w_v \quad$ e $\quad u_v \in U$. Inoltre si nota che $\quad q_i \cdot w_v = 0 \Longleftrightarrow i \leq r$

Se u è un qualsiasi elemento di U allora $\quad u = x_1 q_1 + \cdots + x_r q_r) \cdot w_v = x_1\, q_1 \cdot w_v + \cdots + x_r\, q_r \cdot w_v = 0$

Di conseguenza $\quad w_v \in U^{\perp} \quad$ e quindi $\quad V = U + U^{\perp}$

□

Conseguenza della decomposizione ortogonale: vale la formula:

$$U = \left(U^{\perp}\right)^{\perp} \qquad , \qquad dim\left(U^{\perp}\right) = n - dim\left(U\right) \tag{93}$$

Dimostrazione. :
La dimostrazione si basa sul Teorema della base:
- Per dimostrare che è sottospazio:

$$dim\left(U\right) + dim\left(U \perp\right) = dim\left(U + U^{\perp}\right) + dim\left(V \cap U^{\perp}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad dim\left(U^{\perp}\right) = n - dim\left(U\right)$$

- Per dimostrare che $U = \left(U^T\right)^T$:

$$dim\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = n - dim\left(U^{\perp}\right) = n - \Big(n - dim\left(U\right)\Big) = dim\left(U\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \left(U \perp\right)^{\perp} = U$$

Quindi:

$$V = U^{\perp} \oplus \left(U^T\right)^T \qquad \Longrightarrow \qquad V = U^{\perp} \oplus U$$

□

Esercizio per calcolare la base ortonormale:

1. Calcolare una base ortonormale di $N(A)$ e una base ortonormale di $N(A)^{\perp}$
2. Per calcolare una base ortonormale di $N(A)$ si trova una base di $N(A)$ e la si ortonormalizza con il metodo di gram schmidht
3. Per trovare una base ortonormale di $N(A)^{\perp}$ si sserva che:

$$N(A)^{\perp} = \left(R(A^T) \perp\right)^{\perp} = R(A^T)$$

Quindi basta ridurre a gradini la matrice e ortonormalizzare i vettori che formano una base dello spazio riga

7.6.6 Proiezione ortogonale

Se A è una matrice $n \times m$, allora:

$$\mathbf{R}^n = R(A) \oplus N(A^T) \qquad , \qquad \mathbf{R}^m = N(A) \oplus R(A^T) \tag{94}$$

Se U è un sottospazio di uno spazio euclideo, allora ogni $v \in V$ si decompone in modo unico come:

$$v = u_V + w_V \quad con \quad u_V \in U \quad , \quad w_V \in U^{\perp}$$

La trasformazione lineare $\quad p_U : V \to V$ definita ponendo $\quad P_U(v) = u_V$ è detta proiezione ortogonale su U.

Definition 7.16 (Proiezione ortogonale)**.** *:*
La proiezione ortogonale è la proiezione su U relativa alla decomposizione ortogonale $\quad V = U \oplus U^{\perp}$

7.6.7 Matrice di proiezione

Definition 7.17 (Matrice di proiezione)**.** *:*
La matrice P_U di p_U nella nase canonica è detta matrice di proiezione su U.

Se $B_U = \{q_1, \ldots, q_n\}$ è una base ortonormale id U, allora abbiamo visto che $\quad u_V = (v \cdot q_1)\, q_1 + \cdots + (v \cdot q_r)\, q_r$
Sia Q la matrice $\quad \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_r \end{pmatrix}$, allora, sfruttando il fatto che il prodotto scalre è uguale al prodotto riga per colonna col vettore trasposto:

$$P_U(v) = u_V = Q \begin{pmatrix} v \cdot q_1 \\ \vdots \\ v \cdot q_r \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} v^T \cdot q_1 \\ \vdots \\ v^T \cdot q_r \end{pmatrix} = Q(v^T\, Q)^T = QQ^T v$$

Quindi la matrice di proiezione su u è $P_U = QQ^T$

Condizioni necessarie ma non sufficienti per essere matrice di proiezione ortogonale:

- La matrice proiezione P_U è simmetrica:
$$P_U = QQ^T \quad \implies \quad P_U^T = (Q \cdot Q^T)^T = Q \cdot Q^T$$
- È idempotente, ovvero $\quad P_U^2 = P_U$:
$$P_U^2 = (QQ^T)(QQ^T) = [prop.\, prodotto] = QQ^T\, QQ^T = Q\, I\, Q^T = QQ^T = P_U$$
- Vale la relazione $\quad P_U^{\perp} = I - P_U$
- $u \in U \quad \iff \quad P_U(u) = u \quad$, quindi U è l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$
- $w \in U^{\perp} \quad \iff \quad P_U(w) = \vec{0} \quad$, quindi $U^{\perp}$ è l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 0$

In generale W è l'autospazio di P_W relativo all'autovalore 1 e $W^{\perp}$ è l'autospazio di $P_W^{\perp}$ relativo all'autovalore 0.

Come abbiamo visto le matrici di proiezione sono matrici simmetriche, e vale la seguente relazione per le matrici simmetriche (A matrice simmetrica):
$$(Av) \cdot w = v \cdot (Aw)$$
Questo si ottiene dalla relazione $\quad v \cdot w = v^T\, w$, da cui segue che se A è una matrice quadrata di ordine n, allora:

$$(Av) \cdot w = v \cdot (A^T w) \qquad infatti \qquad (Av) \cdot w = (Av)^T w = v^T a^T w = v \cdot (A^T w)$$

7.6.8 Autovettori ortogonali

Theorem 7.7. *:*
Se A è una matrice quadrata di ordine n simmetrica reale e v, w sono due autovettori di A relativi ad autovalori distinti, allora v e w sono ortogonali.

Dimostrazione. :
Consideriamo λ, μ gli autovalori relativi a v e w tali che $\quad Av = \lambda v$ e $\quad Aw = \mu w$
Quindi abbiamo che:
$$\lambda\, v \cdot w = \mu\, v \cdot w \quad \implies \quad (\lambda - \mu)\, v \cdot w = 0$$
Siccome gli autovalori sono distiti $\quad \lambda \neq \mu$, di conseguenza il prodotto scalare $\quad v \cdot w = 0$, che si ottiene solo se i vettori o sono perpendicolari o uno dei due è nullo. Siccome non possono essere nulli, $\implies \quad v \perp w \quad$ ortogonali

□

Metodo per calcolare una base di autovettori ortonormale:

1. Sia A una matrice simmetrica e siano $\lambda_, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori distinti di A.

2. Per ogni autovalore si calcola una base dell'autospazio e la si ortonormalizza mediante Gram-Schmidt, quindi si trova una base ortonormale B_i dell'autospazio relativo a λ_1.
3. Sia $\quad B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$. Se v è in B_i e w è in B_j con $i \neq j$, allora $v \cdot w = 0$.
4. Se v e w stanno tutti e due in B_i , allora $v \cdot w = 0$ perché B_i è ortogonale.
5. Quindi B è un insieme ortogonale.
6. Siccome A è diagonalizzabile B ha n elementi e quindi è una base ortonormale.

7.6.9 Matrice modale ortogonale

Una matrice se non è simmetrica, allora la base di autovalori sicuramente non è ortogonale.

Dimostrazione. :
Supponiamo che A sia una matrice tale che esista una base ortonormale formata da autovettori di A, quindi una matrice modale M di A è ortogonale, cioè:

$$M^T A\, M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per M e M^T:

$$M\, M^T A\, M\, M^T = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} M^T$$

Si ottiene:

$$I\, A\, I = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} M^T \qquad \Longrightarrow \qquad A = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} M^T$$

Da cui deriva:

$$A^T = \left(M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} M^T \right)^T = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} M^T = A$$

Quindi la matrice deve essere simmetrica

□

7.6.10 Teorema spettrale

Come abbiamo appena visto se una matrice ammette una base ortonormale di autovettori allora è simmetrica. In realtà vale anche il contrario.

Theorem 7.8 (Teorema spettrale, enunciato 1)**.** *:*
una matrice A reale quadrata di ordine n è simmetrica se e solo se esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di A. In particolare ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

Theorem 7.9 (Teorema spettrale, enunciato 2)**.** *:*
Sia A una matrice quadrata, allora esiste una matrice ortogonale M tale che:

$$M^{-1} A\, M = M^T A\, M$$

è diagonale se e solo se A è simmetrica

Esercizio: verificare se una matrice è diagonalizzabile e verificare se ammette una base ortonormale di autovettori:

1. la matrice è simmetrica quindi è diagonalizzabile e ammette una base ortonormale di autovettori.

7.7 Prodotto vettore

7.7.1 Definizione e proprietà del prodotto vettoriale

Definition 7.18 (Prodotto vettore)**.** *:*
Il prodotto vettorie di due vettori v e w nello spazio è il vettore $v \wedge w$ *:*

- *La norma è* $||v||\,||w||\sin\theta$ *dove* θ *è l'angolo minimo tra i due vettori*
- *LA direzione è quella ortogonale sia a v che a w*
- *Il verso è determinato dalla regola della mano destra;*
  1. *Pollice: primo vettore (v)*
  2. *Indice: secondo vettore (w)*
  3. *Palmo: prodotto vettore (* $v \wedge W$ *)*

proprietà del prodotto sclare:

1. Antisimmetria: $v \wedge w = -w \wedge v$
2. Omogneneità: $kv \wedge w = k(v \wedge w) \quad , \quad v \wedge kw = k(v \wedge w)$
3. Distributività:: $(v + w) \wedge u = v \wedge u + w \wedge u \quad , \quad v \wedge (w + u) = v \wedge w + v \wedge u$
4. Identità di Langrange: $||v \wedge w||^2 = ||v||^2||w||^2 - v \cdot w^2$

7.7.2 Basi orientate destrorse e sinistrorse

Definizioni delle basi:

- Nel piano:

  Definition 7.19 (Base orientata nel piano)**.** *:*
  La coppia $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ *di due versori nel piano è detta base orientata del piano.*

  Definition 7.20 (base orientata destrorsa e sinistrorsa nel piano)**.** *:*
  Una base orietata $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ *viene detta:*

  1. *Destrorsa se l'angolo minimo viene percorso in senso antiorario da* $\vec{i}$ *a* $\vec{j}$
  2. *Sinistrorsa se l'angolo minimo viene percorso in senso orario da* $\vec{i}$ *a* $\vec{j}$

- Nello spazio:

  Definition 7.21 (Base orientata nello spazio)**.** *:*
  La terna $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *di tre versori nello spazio è detta base orientata dello spazio.*

  Definition 7.22 (base orientata destrorsa e sinistrorsa nello spazio)**.** *:*
  Una base orietata $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *viene detta:*

  1. *Destrorsa se* $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$
  2. *Sinistrorsa se* $\vec{k} = \vec{j} \wedge \vec{i}$

7.7.3 Espressione analitica del prodotto vettore

Il risultatao evidentemente cambia in base all'orientamento della base:

- Se la base orientata $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è destrorsa:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \quad , \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \tag{95}$$

- Se la base orientata è sinistrorsa:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{k} \quad , \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j} \quad , \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{i} \tag{96}$$

L'espressione analitica del prodotto vettore tra:

$$v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad , \quad w = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

varia in base alll'orientamento della base:

- Se la base è destrorsa:
$$v \wedge w = (yz' - y'z)\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k} \tag{97}$$
- Se la base è sinistrorsa:
$$v \wedge w = (yz' - y'z)\vec{i} + (xz' - x'z)\vec{j} - (xy' - x'y)\vec{k} \tag{98}$$

Dimostrazione. :
La dimostrazione è semplice, infatti basta utilizzare i prodotti vettore fra gli assi e calcolare:

$$v \wedge w = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

□

Siccome la formula non è comoda da ricordare, si può imparare come determinate della seguente matrice 3×3:

- Se la base è destrorsa:
$$v \wedge w = det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} \tag{99}$$
- Se la base è sinistrorsa:
$$v \wedge w = -det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} \tag{100}$$

Dimostrazione. :
Si vene l'analogia svolgendo lo sviluppo di Lalace lungo la 1° riga.

□

Esercizio completo: Calcolare una base ortonormale di autovettori per la matrice:

1. Considero la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Calcolando il determinante, e trovando gli zeri del polinomio caratteristico vedo che gli autovalori sono $\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 1 \quad , \quad \lambda_3 = 3$
3. Calcoliamo una base di ogni autospazio:
   (a) Autospazio relativo a $\lambda_1 = 0$
      i. Pongo $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

ii. Risolvo per eliminazione e trovo che una base dell'autospazio è $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \implies \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right\}$

(b) Autospazio relativo a $\lambda_2 = 1$ è: $\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$

(c) Autospazio relativo a $\lambda_3 = 3$: siccome la matrice è simmetrica, sappiamo che il terzo autovettore deve essere ortogonale agli altri due quindi possiamo scegliere come autovettore il prodotto vettore degli autovettori trovati precedentemente, quindi:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

4. La base ortogonle di vettori ($B_\perp$) e la matrice modale (M_M) ortogonale sono:

$$B_\perp = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\right\} \implies M_M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

8 Geometria analitica

8.1 Retta

8.1.1 Vettore differenza

Definition 8.1 (vettore differenza)**.** *:*
Sia $\vec{P_1P_2}$ *il vettore libero rappresentato dal segmento* P_1P_2*.*
Il vettore differenza $\vec{PQ}$ *è:*

$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

Che ha norma $||\vec{P_1P_2}||$*:*

$$d(P_1, P_2) = ||\vec{P_1P_2}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

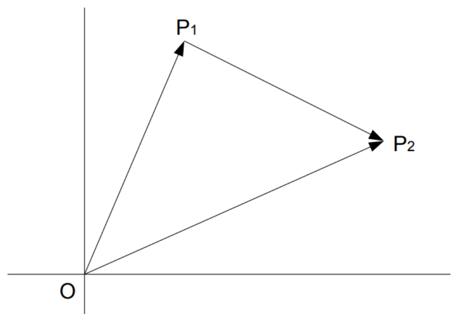

Figura 13: Differenza fra vettori

8.1.2 Forma vettoriale di una retta

Definition 8.2 (Punto + vettore)**.** *:*
Dato un punto P *e un vettore libero* v *si indica con* $P + v$ *il punto* Q *tale che:*

$$\vec{PQ} = \vec{v}$$

Se P *ha coordinate* (x_0, y_0, z_0) *e* $v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *, allora:*

$$P + \vec{v} = (x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)$$

Definition 8.3 (Forma vettoriale della retta)**.** *:*
Sia P_0 *un punto nel piano o nello spazio e fissiamo un vettore libero* v*.*
La retta r *che passa per* P_0 *e la cui direzione è determinata da* v *può essere descritta come l'insieme dei punti:*

$$P = P_0 + tv$$

L'equazione $P = P0 + tv$ *è detta forma vettoriale della retta* r*.* *Si noti che* $r = P_0 + L(v)$

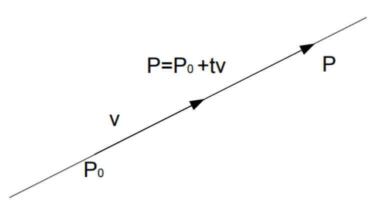

Figura 14: Forma vettoriale di una retta

In pratica si descrive la direzione della retta con un vettore libero e poi si pone il passaggio per un punto.

8.1.3 Equazione parametrica della retta

Esplicitando:

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad , \quad P = (x, y, z) \quad , \quad v = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

Sostituiamo nella forma vettoriale della retta e si ottiene:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}) = (x_0 + tl, y_0 + tm, z_0 + tn) = \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \tag{101}$$

Esercizio di esempio: scrivere l'equazioen parametrica di una retta nel piano:

1. Considero la retta $\quad 2x - y + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 2x + 1$
2. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = 1 + 2 \cdot t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$
3. Per fare il passaggio inverso da parametrica a cartesiana, basta risolvere il sistema con cui viene espressa la retta in forma parametrica.

8.1.4 Retta passante per due/tre punti

Nel piano la retta passante per due punti è una sola:
Dati due punti $\quad P_0 = (x_0, y_0) \quad$ e $\quad P = (x_1, y_1) \quad$ possiamo esprimere la retta come un vettore direzione che congiunge i due punti e un punto stesso:

$$r: \quad P = P_0 + t \cdot \vec{P_0 P_1} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}$$

Nello spazio si devono considerare tre vettori e un punto per descrivere una retta:

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

8.1.5 Forma nomale della retta

Definition 8.4. *Data una retta r sia n un vettore normale alla retta.*
Fissato un punto di passaggio $P_0 = (x_0, y_0)$ abbiamo che un punto P sta sulla retta se e solo se $\vec{P_0 P}$ è ortogonale a $\vec{n}$.
Otteniamo quindi l'equazione $\quad \vec{n} \cdot \vec{P_0 P} \quad$ che è detta forma normale della retta.

In simboli:

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} \qquad , \qquad \vec{n} \cdot \vec{P_0 P} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot \big((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}\big) = 0$$

L'equazione cartesiana quindi è:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad , \qquad ax + by \underbrace{-ax_0 - by_0}_{= -c} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad ax + by = c \tag{102}$$

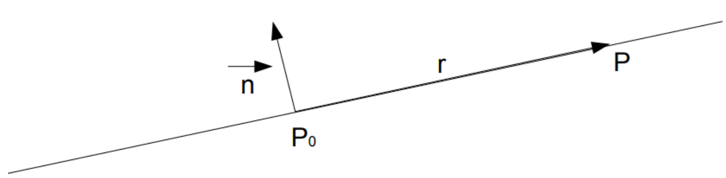

Figura 15: Forma nomale della retta

8.1.6 Equazione cartesiana di una retta nello spazio

Una retta può anche essere descritta come intersezione di due piani, quindi come insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \tag{103}$$

Con la condizione che il sistema abbia ∞^1 soluzioni, ovvero rappresenti una retta, imporre ciò significa trovare quando il rango è:

$$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \tag{104}$$

Per passare dall'equazione cartesiana a quella parametrica basta trovare lo spazio delle soluzioni del sistema.
Questo sistema è detto equazione cartesiana della retta nello spazio.
esercizio di esempio, calcolare l'equazione cartesiana della retta passante per $(1, 1, 1)$ e avente direzione $2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$:

1. Scrivo nella forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + = 1 \\ z = -2 \end{cases} \quad \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Riscrivo il sistema come:

$$\begin{cases} x = 3 + (-t) \\ y = 0 + (+t) \\ z = -2 + (0t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 - t \\ y = +t \\ z = -2 \end{cases}$$

8.2 Piano

8.2.1 Forma vettoriale di un piano nello spazio

Definition 8.5 (Forma vettoriale di un piano)**.** *:*
Fissiamo un punto P_0 sul piano α e due vettori v e w non paralleli per cui le rette passanti per P_0 aventi direzione v e w giacciono sul piano.

$$P \in \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad P = P_0 + t_1 \cdot v + t_2 \cdot w \tag{105}$$

Questa è detta forma vettoriale del piano e i vettori v e w sono detti direzioni del piano.
Di fatto abbiamo definito il piano come la combianzione lineare di due vettori applicati su un punto:

$$\alpha = P_0 + L(v, w) \qquad \Longrightarrow \qquad dim\big(L(v, w)\big) = 2$$

8.2.2 Equazione parametrica del piano nello spazio

Esplicitando:

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad , \quad P = (x, y, z) \quad , \quad v = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k} \quad , \quad w = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$$

Sostituiamo nella forma vettoriale della retta e si ottiene:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t_1 \cdot (l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}) + t_2 \cdot (l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}) = (x_0 + tl, y_0 + tm, z_0 + tn)$$

Quindi l'equazione parametrica del piano è:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1l_1 + t_2l_2 \\ y = y_0 + t_1m_1 + t_2m_2 \\ z = z_0 + t_1n_1 + t_2n_2 \end{cases} \tag{106}$$

Per verificare che effettivamente sia un piano, possiamo calcolare:

$$rk\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} = 2$$

8.2.3 Forma normale di un piano nello spazio

Fissiamo un punto P_0 appartenente al piano α e sia $\vec{n}$ un vettore normale al piano. Un punto P sta sul piano a se e solo se:

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \tag{107}$$

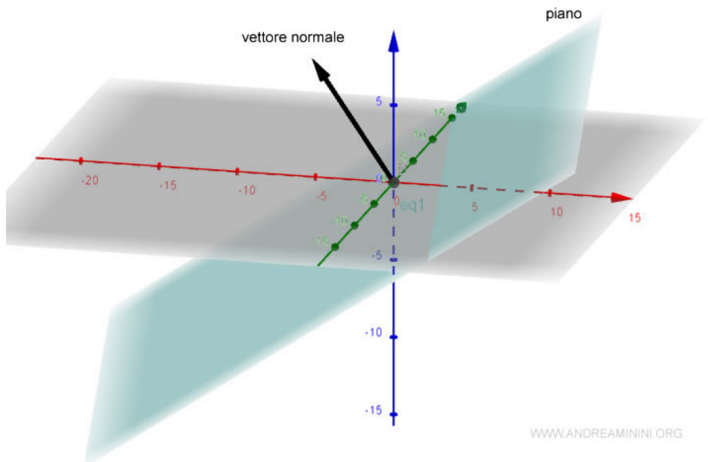

Figura 16: Forma normale di un piano nello spazio

8.2.4 Equazione cartesiana di un piano nello spazio

Se esplicitiamo $\quad P = (x, y, z) \quad$ e $\quad P_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad$ e $\quad \vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \quad$ allora la forma normale diventa:

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Se poniamo $\quad d = ax_0 + by_0 + cz_0 \quad$ troviamo l'equazione cartesuana del piano nello spazio:

$$ax + by + cz = d \tag{108}$$

Definition 8.6 (Parametri direttori)**.** *:*
I parametri direttori di un piano sono i coefficienti a, b, c dell'equazione cartesiana del piano, ovvero le componenti di un vettore normale al piano.

8.2.5 Piamo passante per tre punti non allineati

Dati tre punti non allineati (vettori associati ai punti sono linearmente indipendenti o si considera e vettori che congiungono i punti e si vedono se sono allineati):

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad P_1(x_1, y_1, z_1) \quad , \quad P_2(x_2, y_2, z_2)$$

Cerchiamoo di determinare l'equzione parametrica del piano passante per questi tre punti:

- Tramite equazione parametrica:
  1. Poniamo il passaggio per il punto $\quad P_0(x_0, y_0, z_0)$
  2. Come direzione del piano consideriamo $\quad \vec{P_0P_1} \quad , \quad \vec{P_0P_2}$
  3. L'equazione parametrica del piano è:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t_1(y_1 - y_0) + t_2(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + t_2(z_1 - z_0) \end{cases}$$

- Tramite equazione cartesiana:
  1. Il punto $P = (x, y, z) \in \alpha$ se e solo se il vettore $\vec{P_0P}$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{P_0P}$ e $\vec{P_0P_2}$
  2. Quindi significa trovare per quali valori:

$$det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

  3. Questa è l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti dati. In altro modo (che alla fine è lo stesso) si può risolvere il sistema crameriano dove si impone il passaggio per i tre punti e si trovano i parametri dell'equazione cartesiana generica del piano.
  4. In teoria avremmo dovuto verificare prima del calcolo dell'equazione che i tre punti non sono allineati, ma questo passaggio non serve perchè è già implicito nel calcolo dell'equazione. Questo porterebbe a un determinate che è nullo.

8.2.6 Fascio di piani

L'insieme dei piani passanti per una retta r è detto fascio di piani di centro r.
Se la retta ha equzione:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Allora un piano di equazione $ax + by + cz = d$ appartiene al fascio di piani di centro r se e solo se il sistema ha ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ ax + by + cz = d \end{cases}$$

Ne segue che:

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = 2$$

Da cui otteniamo: $(a, b, c, d) = \lambda(a_1, b_1, c_1, d_1) + \mu(a_2, b_2, c_2, d_2)$ quindi:

$$ax + by + cz - d = \lambda(a_1, b_1, c_1, d_1) + \mu(a_2, b_2, c_2, d_2) \tag{109}$$

Questa equazione è detta equazione del fascio di piani in quanto al variare di $(\lambda, \mu) \neq \vec{0}$ e descrive tutti i piani appartenenti al fascio.
Esercizio di esempio: calcolare l'equazione di un piano passante per la rett e un punto dato:

1. Consideroil punto $P = (1, 1, 1)$ e la retta:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

2. Il piano cercato appartiene al fascio di piani con centro r e quindi la sua equazione ha la forma:

$$\lambda(2x + y - z - 1) + \mu(x + y + 2z) = 0$$

3. Imponiamo il passaggio per $P = (1, 1, 1)$ e troviamo $\lambda + 4\mu = 0$
4. Ponendo (a caso basta che $\neq 0$) $\mu = 1$ si trova $\lambda = -4$, quindi il l'equazione del piano cercato è:

$$-7x - 3y + 6z = -4$$

8.3 Parallelismo

8.3.1 Giacitura spazi affini

Definition 8.7 (Spazio affine)**.** *:*
Le rette e i piani vengono anche chiamati spazi affini (per distinguerli dagli spazi vettoriali).

Come abbiamo visto gli spazi affini possono essere rappresentati in forma:

- Vettoriale (parametrica): con V uno sottospazio di dimensione 1 (se S è una retta) oppure 2 (se S è un piano)
- Cartesiana: come insieme delle soluzioni di un sistema $AX = b$

Definition 8.8 (Giacitura di uno spazio affine)**.** *:*
Se $S = P_0 + V$ *è uno spazio affine allora lo spazio* V *è chiamato la giacitura di* S*.*

Osservazione: se S è descritto mediante l'equazione cartesiana $AX = b$ allora la sua giacitura e' l'insieme delle soluzioni di $AX = 0$. Infatti sappiamo che l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = b$ è dato da:

$$Sol(A, b) = X_{part} + Sol\big(A, \vec{0}\big) \tag{110}$$

e quindi la giacitura di $Sol(A, b)$ è $Sol(A, \vec{0})$

Definition 8.9 (Dimensione di uno spazio affine)**.** *:*
La dimensione di uno spazio affine è la dimensione della sua giacitura:

- *Le rette sono gli spazi affini di dimensione uno*
- *I piani sono gli spazi affini di dimensione due*
- *La massima dimensione in* $\mathbf{R}^n$ *è* $(n - 1)$

8.3.2 Condizioni di parallelismo

Definition 8.10 (Spazi affini paralleli)**.** *:*
Due spazi affini in $\mathbf{R}^n$ *si dicono paralleli se la giacitura di uno è contenuta nella giacitura dell'altro.*

Ad esempio una retta $r = P + L(v)$ è parallela al piano $\alpha = Q + L(v_1, v_2)$ se e solo se:

$$r \,||\, \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad L(v) \subset L(v_1, v_2)$$

8.3.3 Due rette in 2 dimesnioni

Considero due rette r, s nel piano in forma vettoriale:

$$r = P + tv \qquad , \qquad s = Q + tu \qquad con \quad v = l\vec{i} + m\vec{j} \qquad , \qquad u = l'\vec{i} + m'\vec{j}$$

Che hanno equazione cartesiana:

$$r: \; ax + by = c \qquad , \qquad s: \; a'x + b'y = c'$$

Verificare che le rette sono parallele se e solo se:

$$r \,||\, s \quad \Longleftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} l & m \\ l' & m' \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \tag{111}$$

Dimostrazione. :
Nella **forma parametrica**, bisogna trovare quando la giacitura di r quella di s sono uguali. Questo vuol dire che e questo vuol dire che u è un multiplo di v (linearmente dipendenti), quindi:

$$rk\begin{pmatrix} l & m \\ l' & m' \end{pmatrix} < 2 \quad \Longrightarrow \quad det\begin{pmatrix} l & m \\ l' & m' \end{pmatrix} = 0$$

Viceversa se il determinante è ugule a zero, allora u, v sono linearmente dipendenti, quindi siccome sono non nulli, devono necessariamente essere uno multipo dell'altro:

$$L(u) = L(v)$$

Consideriamo ora il caso in cui r e s sono date mediante **equazione cartesiana**.
Sia V la giacitura di r e sia W la giacitura di s.
V è l'insieme delle soluzioni di $ax + by = 0$ e W è l'insieme delle soluzioni di $a'x + b'y = 0$.
L'intersezione $V \cap W$ è data dall'insieme delle soluzioni di :

$$\begin{cases} ax + by = 0 & (V) \\ a'x + b'y = 0 & (W) \end{cases}$$

Se $V = W$, allora $V \cap W = V$. Ne segue che il sistema deve avere ∞^1 soluzioni , che significa:

$$rk \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$$

Viceversa se il determinate è pari a zero, siccome sia (a, b) che (a', b') non sono nulli, allora:

$$rk \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad dim(V \cap W) = 1$$

Siccome $V \cap W \subset V$ e entrambi hanno dimensione 1, allora $V \cap W = V$ e quindi $V = V \cap W \subset W$ quindi, siccome entrambi hanno dimensione 1, segue che $V = W$
Se invece le rette sono espresse una in froma vettoriale, l'altra con il vettore ortogonale, basta imporre che il prodotto scalare fra i due vettori sia nullo.

□

8.3.4 Due piani in 3 dimensioni

I piani di equazione $\alpha : \ ax + by + cz = d$ e $\beta : \ a_1x + b_1y + c_1x = d_1$ sono parallelli se hanno la stessa giacitura, quindi se e solo se:

$$\alpha \,||\, \beta \quad \Longleftrightarrow \quad rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = 1 \tag{112}$$

Dimostrazione. Considero i piani $\alpha : \ ax + by + cz = d$ e $\beta : \ a_1x + b_1y + c_1x = d_1$ che hanno giacitura rispettivamente $\alpha_g : \ ax + by + cz = 0$ e $\beta_g : \ a_1x + b_1y + c_1x = 0$
Abbiamo che:

$$\alpha \,||\, \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1x = 0 \end{cases}$$

Se il sistema ha ∞^2 soluzioni si ha il parallelismo fra i due piani, quindi:

$$rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad (a_1, b_1, c_1) = t\,(a, b, c) \quad , \quad t \neq 0$$

Ne segue che le due equazioni sono equivalenti:

$$a_1x + b_1y + c_1x = d_1 \qquad \approx \qquad ax + by + cz = d_1/t$$

□

Uno strumeto utile per la risoluzione degli esercizi è il fascio improprio di piani:

Definition 8.11 (fascio improprio di piani)**.** *:*
L'insieme di tutti i piani paralleli ad un dato piano è chiamato fascio improprio di piani.
Se ha equazione $ax + by + cz = d$ *allora l'equazione del fascio improprio è:*

$$ax + by + cz = k$$

Infatti al variare di k *si ottengono tutti i piani paralleli al piano dato.*

8.3.5 Due rette in dimensione 3

Date le rette r, s nello spazio di equazione cartesiana:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

Le rette sono parallele se e solo se:

$$r \,||\, s \quad \Longleftrightarrow \quad rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix} = 2 \tag{113}$$

Dimostrazione. :
Le rette r, s hanno giacitura: e V, W sono gli insiemi delle soluzioni dei sistemi:

$$r_g: \quad V = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \qquad s_g: \quad W = \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = 0 \end{cases}$$

L'intersezione $\quad V \cap W \quad$ è data dall'insieme delle soluzioni di:

$$V \cap W = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z = 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = 0 \end{cases}$$

Se la giacitura di r è contenuta nella giacitura di s allora $V \subset W$ e quindi $\quad V \cap W = V$.
Ne segue che il sistema deve avere ∞^1 soluzioni, ciò significa che il rango deve essere 2 (o nullità uguale a 1):

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix} = 2$$

Viceversa se il rango è apri a 2, allora $\quad dim(V \cap W) = 1$
Siccome $\quad (V \cap W \subset V \quad$ e entrambi hanno dimensione 1, allora $\quad (V \cap W) = V \quad$ e quindi $\quad V = (V \cap W) \subset W$ e quindi $\quad r \,||\, s$

□

8.4 Retta e piano in dimensione 3

Dato il piano α e la retta r di equazione:

$$r: \; ax + by + cz = d \qquad , \qquad \alpha: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Se il piano e la retta sono paralleli se e solo se:

$$r \,||\, \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad det(A) = det \begin{pmatrix} a & b & c1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{114}$$

Dimostrazione. :
Sia v la giacitura di r e sia W la giacitura di α.
V è l'insimee delle soluzioni di:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

W è l'insieme delle soluzioni di:

$$ax + by + cz = 0$$

L'intersezione $\quad V \cap W \quad$ è data dall'insieem delle soluzioni di:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

Se la giacitura di r è contenuta nella giacitura di α, allora $V \subset W$ e quindi $(V \cap W) = V$.
Ne segue che il sistema deve avere ∞^1 soluzioni, quindi:

$$rk \begin{pmatrix} a & b & c1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad det \begin{pmatrix} a & b & c1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0$$

Viceversa, se il determinante è pari a 0, siccome il rango:

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad dim(V \cap W) = 1$$

Siccome $\quad (V \cap W) \subset V \quad$ e entrambi hanno dimensione 1, allora $\quad (V \cap W) = V \quad$ e quindi $\quad V = (V \cap W) \subset W$ e quindi $\quad r \,||\, \alpha$

$\square$

8.4.1 Piano con fascio

Calcolare l'equazione di un piano passante per la retta r e parallelo alla retta s:

$$r(\,||\,): \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \qquad , \qquad s(\,\perp\,): \begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

Il piano cercato appartiene al fascio di piani con centro r e quindi la sua equazione ha forma:

$$\lambda(2x + y - z - 1) + \mu(x + y + 2z) = 0$$

Imponiamo la condizione di parallelismo con s:

$$det \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu & \lambda + \mu & -\lambda + 2\mu \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 7\lambda - 3\mu = 0$$

Scegliendo poi dei valori arbitrari, troviamo l'equazione del piano cercato.

8.5 Posizione reciproca

8.5.1 Piano-retta

Sia il piano α e la retta r di equazione:

$$\alpha: \ ax + by + cz = d \qquad , \qquad r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Volgiamo verificare se piano e retta sono incidenti o paralleli. Per fare questo studiamo l'intersezione del piano con la retta, chiaramente sfrutteremo il Teorema di Rouche Capelli.
L'intersezione del piano con la retta è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Sia A la matrice dei coefficienti e $\vec{b}$ il vettore dei termini noti del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \qquad tc \quad rk(A) = \geq 2$$

Allora la posizione reciproca del piano e della retta sarà:

rkA	$rk(A, \vec{b})$	Soluzioni	
2	2	∞^1	la retta sta sul piano
2	3	nessuna	piano e retta paralleli e distinti
3	3	1	piano e retta incidenti

Figura 17: Posizione reciproca fra piano e retta

8.5.2 Retta-retta

Date le rette r, s di equazione cartesiana:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad , \quad s: \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

Vogliamo verificare la loro posizione reciproca. Per fare questo studiamo la loro intersezione che è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

Siano A la matrice dei coefficienti e $\vec{b}$ il vettore dei termini noti del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d'_1 \\ d'_2 \end{pmatrix}$$

Allora la posizione reciproca delle rette sarà:

rkA	$rk(A, \vec{b})$	Soluzioni	
2	2	∞^1	rette coincidenti
2	3	nessuna	rette parallele e distinte
3	3	1	rette incidenti
3	4	nessuna	rette sghembe

Figura 18: Posizione reciproca fra due rette

8.5.3 Rette complanari e sghembe

Osservazioni sulle rette complanari e sghembe:

- Due rette si dicono complanari se appartengono allo stesso piano.
- Se due rette sono complanari o sono parallele oppure sono incidenti.

- Se due rette non sono complanari allora sono sghembe.
- Dalla tabella ricaviamo che le due rette sono complanari se e solo se $rk(A,b) < 4$ e quindi se e solo se $det(A,b) = 0$

Condizione di complanarità: Se due rette r, s in equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \quad , \quad s: \begin{cases} x = x'_0 + tl' \\ y = y'_0 + tm' \\ z = z'_0 + tn' \end{cases}$$

Allora la condizione di complanarità è:

$$det \begin{pmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 0 \tag{115}$$

Dimostrazione. :
Scriviamo le due rette in forma vettoriale:

$$r: \ P = P_0 + tv \quad , \quad s: \ P = P'_0 + tv'$$

Dove:

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad P'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$$

A cui corrispondono:

$$v = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad , \quad v' = l'\vec{i} + m'\vec{j} + n'\vec{k} = \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P_0P'_0} = \begin{pmatrix} x'_0 - x_0 \\ y'_0 - y_0 \\ z'_0 - z_0 \end{pmatrix}$$

Sia $\alpha = Q + W$ un piano a cui appartengono entrambe le rette.
Allora sia v che v' che $\vec{P_0P'_0}$ stanno in W.
Siccome W ha dimensione 2, sicuramente i tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi:

$$det \begin{pmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 0$$

□

8.6 Ortogonalita

8.6.1 Ortogonalità tra rette nel piano

- Rette in equazione cartesiana:
  Considero due rette in equazione cartesiana con vettori normali $\vec{n}, \vec{n'}$:

  $$r: \ ax + by + cz = 0 \quad \vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} \quad , \quad s: \ a'x + b'y + c'z = 0 \quad \vec{n'} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$$

  Sono ortogonali se e solo se:

  $$r \perp s \iff \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \implies aa' + bb' = 0$$

- Rette in equazione parametrica:
  Considero due rette in equzione parametrica:

  $$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad , \quad s: \begin{cases} x = x'_0 + l't \\ y = y'_0 + m't \end{cases}$$

Che hanno come vettore di direzione:

$$v_r = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \qquad , \qquad v_s = \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$$

Quindi le rette saranno perpendicolari se e solo se:

$$r \perp s \quad \Longleftrightarrow \quad v_r \cdot v_s = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ll' + mm' = 0$$

- Se le rette sono date un a in equazione parametrica e l'altra in equaziuone cartesiana:

$$r: \; ax + by + c = 0 \qquad , \qquad s: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

  Le rette sono ortogonali se il vettore normale a r e il vettore direzione di s sono paralleli, quindi:

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ l & m \end{pmatrix} = 0$$

8.6.2 Ortogonalità piano-piano

Due piani sono ortogonali se e solo se i vettori normali sono ortogonali quindi se i due piani hanno equazione cartesiana:

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad , \quad \vec{n_\alpha} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k} \\ \beta: &\quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad , \quad \vec{n_\beta} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k} \end{aligned}$$

Allora sono ortogonali se e solo se:

$$\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

8.6.3 Ortogonalità piano-retta

Un piano e una retta sono ortogonali se il vettore normale al piano è parallelo al vettore direzione della retta.
Se sia la retta che il piano sono dati mediante la loro equazione cartesiana:

$$\alpha: \; ax + by + cz = d \qquad , \qquad r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Allora la condizione di ortogonalità si ricava dal fatto che $\vec{n_\alpha}$ deve essere sulla giacitura della retta r, ciò significa che $\vec{n}$ deve essere soluzione del sistema:

$$\begin{cases} a_1a + b_1b + c_1c = 0 \\ a_2a + b_2b + c_2c = 0 \end{cases} \tag{116}$$

8.6.4 Ortogonalità retta-retta

Definition 8.12 (ortogonalità tra rette)**.** *:*
Due rette si dicono ortogonali se sono incidenti e i rispettivi vettori direzione sono ortogonali (quindi non sghembe).

Se le rette sono date in forma vettoriale:

$$r = P + tv \qquad , \qquad s = Q + tw \qquad \Longrightarrow$$

Allora sono ortogonali se e solo se:

1. sono colplanari $\quad \big(rk(A, b) < 4\big)$
2. i vettori direzione sono ortogonali $\quad (v \cdot w = 0)$

8.6.5 Applicazione del prodotto vettore

Considero la retta descritta dall'inteserzione di dui piani:

$$r: \begin{cases} a_1 a + b_1 b + c_1 c = d_1 \\ a_2 a + b_2 b + c_2 c = d_2 \end{cases}$$

Il vettore direzione della retta r è:

$$\vec{v} = (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) \wedge (a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}) \tag{117}$$

Dimostrazione. :
Un vettore direzione di r è una qualsiasi soluzione non nulla del sistema:

$$\begin{cases} a_1 a + b_1 b + c_1 c = d_1 \\ a_2 a + b_2 b + c_2 c = d_2 \end{cases}$$

Cioè un vettore $\vec{v}$ non nullo ortogonale a:

$$\vec{v} \perp (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) \qquad e\vec{v} \perp (a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k})$$

Quindi:

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

□

8.6.6 Esercizio di riepilogo

1. Calcolare l'equazione cartesiana della retta passante per P e ortogonale alla retta r:

$$P = (1, 1, 1) \qquad , \qquad r: \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

2. Troviamo la retta me intersezione dei piani α, β:
   - α è il piano passante per ve $(1, 1, 1)$
   - β è il piano ortogonale passante per $(1, 1, 1)$
3. Trovo il piano α:
   - Cerchiamo ora l'equazione del piano passante per r e per il punto $(1, 1, 1)$. Utilizziamo il metodo del fascio di piani.
   - L'equazione del fascio di piani con centro r è:

$$\lambda(2x + y - z - 1) + \mu(x + y + 2z) = 0$$

   - Imponiamo il passaggio per $P = (1, 1, 1)$ e troviamo il paino:

$$\alpha: \ -7x - 3y + 6z = 4$$

4. Trovo il piano β:
   - Un piano è ortogonale a r se un suo vettore normale è il vettore direzione della retta e quindi i coefficienti della sua equazione sono le componenti di un vettore direzione della retta.
   - Un vettore direzione di r è quello ottenuto dal prodotto vettore, ovvero:

$$v_r = \big((2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \wedge (\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k})\big) = det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$$

- L'equazione del piano ortogonale a r e passante per $P = (1,1,1)$ è quindi:

$$3(x-1) - 5(y-1) + (z-1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x - 5y + z = -1$$

5. L'equazione della retta passante per $(1,1,1)$ e ortogonale a r è:

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = -1 \\ -7x - 3y + 6z = 4 \end{cases}$$

8.7 Distanza fra spazi affini

8.7.1 Principio di ortogonalità

Sia V uno spazio vettoriale e sia $\quad (v \cdot w) \quad$ un prodotto scalare su V.
Sia U un sottospazio di V.
Allora, dato $v \in V$, il vettore di U che minimizza la distanza da v è la proiezione ortogonale di v su U:

$$min_{u \in U} ||v - u|| = ||v - p_U(v)|| = ||p_{U^\perp}(v)|| \tag{118}$$

Questo vettore è anche unico.

Dimostrazione. :
Sia u_v la priezione ortogonale di v su U. Quindi $\quad w_v = v - u_v \quad$ è ortogonale a U
Se $u \in U$ allora:

$$||v-u||^2 = ||v - u + u_v - u_v||^2 = \big(v - u_v - (u - u_v)\big) \cdot \big(v - u_v - (u - u_v)\big) =$$
$$= (v - u_v) \cdot (v - u_v) - 2(v - u_v) \cdot (u - u_v) + (u - u_v) + (u - u_v) \cdot (u - u_v) =$$
$$= (v - u_v) \cdot (v - u_v) - \underbrace{2w_v}_{\in w^\perp} \cdot \underbrace{(u - u_v)}_{\in W} + (u - u_v) \cdot (u - u_v) =$$
$$= ||v - u_v||^2 + ||u - u_v||^2 \geq ||v - u_v||^2$$

□

8.7.2 Definizione e formula della distanza

Definition 8.13 (Distanza fra spazi affini)**.** *:*
Indichiamo con $\quad d(P,Q) \quad$ *la distanza tra due punti, quindi:*

$$d(P,Q) = \big|\big|\vec{PQ}\big|\big|$$

Dati due spazi affini A, B nel piano o nello spazio si definisce la distanza $d(A,B)$ tra A e B come la minima distanza tra i punti di A e quelli di B.
In simbli:

$$d(A,B) = min_{p \in A, Q \in B} d(P,Q) \tag{119}$$

Se $A = P + U$ e $B = Q + W$ sono spazi affini con giaciture U, W rispettivamente allora:

$$d(A,B) = \big|\big|p_{(U+W)^\perp}(\vec{PQ})\big|\big| \tag{120}$$

Dimostrazione. :
Siano $quad A = P + U \quad$ e $\quad B = Q + W \quad$ spazi affini.
Siccome $\quad p_{(U+W)}(\vec{PQ} \in (U + W) \quad$ abbiamo che:

$$p_{(U+W)}(\vec{PQ} = u_0 + w_0 \qquad con \quad u_0 \in U \quad , \quad w_0 \in W$$

Quindi $\quad P_0 = P + u_0 \quad , \quad Q_0 = Q - w_0 \quad$ sono punti di a e B rispettivamente.
Se P' e Q' sono punti qualsiasi di A e B allora $\quad P' = P + u' \quad$ e $\quad Q' = Q + w' \quad$, quindi:

$$d(P', Q') = ||\vec{P'Q'}|| = ||\vec{PQ} - (u' - w')|| \underbrace{\geq}_{***} ||p_{(U+W)^\perp}(\vec{PQ})|| =$$

***: sfrunttando il principio di ortogonalità.

$$||\vec{PQ} - p_{(U+W)}(\vec{PQ}|| = ||\vec{PQ} - u_0 - w_0|| = ||\vec{P_0Q_0}|| = d(P_0, Q_0)$$

Di conseguenza:

$$d(P', Q') \geq d(P_0, Q_0) \qquad \Longrightarrow \qquad d(A, B) = d(P_0, Q_0) = \big|\big|p_{(U+W)^\perp}(\vec{PQ})\big|\big|$$

□

8.7.3 Distanza punto-retta nel piano

Sia r la retta di equazione $ax + by + c = 0$.
Siccome $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ è un vettore normale alla retta allora la distanza di P_0 da r è:

$$d(P_0, r) = \big|\big|p_{\vec{n}}(\vec{PP_0})\big|\big| = \bigg|\bigg|\left(\frac{\vec{PP_0} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||^2}\right)\vec{n}\bigg|\bigg| = \frac{\big|\vec{PP_0} \cdot \vec{n}\big|}{||\vec{n}||}$$

Esplicitando $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e usando il fatto che $ax + by = -c$.
Troviamo che la formula della distanza in $\mathbf{R}^2$ è:

$$d(P_0, r) = \frac{\big|a\,x_0 + b\,y_0 + c\big|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{121}$$

Dimostrazione. :
Considero il punto A generico e il punto B appartenente alla retta r:

$$A = P_0 + \{\vec{0}\} \qquad , \qquad B = r = P_0 + L\big((v)\big)$$

La distanza tra i punti A e B sarà:

$$d(A, B) = \bigg|\bigg|P_{\big(\{\vec{0}+\{L(v)\}\}\big)^\perp}(\vec{P_0P})\bigg|\bigg| = \bigg|\bigg|P_{\underbrace{L(v)^\perp}_{\vec{n}\ di\ r}}(\vec{P_0P})\bigg|\bigg| = \bigg|\bigg|P_{\vec{n}}(\vec{P_0P})\bigg|\bigg|$$

Esplicitiamo $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Quindi la formula ricavata diventa:

$$d(P_0, r) = \bigg|\bigg|\frac{\vec{P_0P} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||^2}\vec{n}\bigg|\bigg| = \frac{\big|\vec{P_0P} \cdot \vec{n}\big|}{||\vec{n}||} = \frac{\big|(x - x_0)\,a + (y - y_0)\,b\big|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\big|ax + by - x_0a - y_0b\big|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = ***$$

Siccome $ax + by = -c$, allora sostituendo otteniamo (poi si cambia segno tanto siamo dentro al valore assoluto:

$$*** = \frac{\big|-c - x_0a - y_0b\big|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad d(P_0, r) = \frac{\big|ax_0 + by_0 + c\big|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Analogamente si dimostra in $\mathbf{R}^3$ e si generalizza in $\mathbf{R}^n$.

□

8.7.4 Distanza punto-piano

Consideriamo un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e un piano $\alpha : \ ax + by + cz = d$ in $\mathbf{R}^3$, la formula della distanza punto piano diventa:

$$d(P_0, \alpha) = \frac{\big|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d\big|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{122}$$

Dimostrazione. :
Si dimostra come la distanza punto retta in $\mathbf{R}^2$.

□

8.7.5 Distanza piano-piano paralleli

Considero due piani paralleli α_1, α_2 :

$$\alpha_1 : \; ax + by + cz = d_1 \qquad , \qquad \alpha_2 : \; ax + by + cz = d_2$$

La formula della distanza fra piani paralleli è:

$$d(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\left|d_1 - d_2\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{123}$$

Dimostrazione. :
È sufficiente calcolare la distanza fra un punto generico $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ appartenente al piano α_1 dal piano α_2.
Utilizzo la formula della distanza punto piano:

$$d(P_0, \alpha_2) = \frac{\left|a\, x_0 + b\, y_0 + c\, z_0 + d\right.}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Siccome $\quad a\, x_0 + b\, y_0 + c\, z_0 = -d_1\right|$ possiamo sostituirlo nella formula e otteniamo:

$$d(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\left|d_1 - d_2\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

□

8.7.6 Distanza retta-retta sghembe

Date due rette sghembe in forma vettoriale:

$$r : P = P0 + tv \qquad , \qquad s : P = Q0 + tw$$

Si ha che la minima distanza tra le due rette è la lunghezza della proiezione $P_0\vec{Q}_0$ di lungo un vettore ortogonale sia a v che a w.
Da questa osservazione si ricava la formula generale:

$$d(r, s) = \frac{\left|P_0\vec{Q}_0 \cdot (v \wedge w)\right|}{||v \wedge w||} \tag{124}$$

Se consideriamo le rette in equazione parametrica:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \qquad , \qquad s : \begin{cases} x = x'_0 + tl' \\ y = y'_0 + tm' \\ z = z'_0 + tn' \end{cases}$$

Allora la formula diventa:

$$d(r, s) = \frac{\left|det \begin{pmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(mn' - m'n)^2 + (ln' - l'n)^2 + (lm' - l'm)^2}} \tag{125}$$

Dimostrazione. :
In $*A*$ sfruttiamo il fatto che le rette sghembe siamo linearmente indipendenti, quindi:

$$rk\Big(L(v) + L(w)\Big) = 2 \quad \Longrightarrow \quad rk\Big(L(v) + L(w)\Big)^{\perp} = dim(\mathbf{R}^3) - rk\Big(L(v) + L(w)\Big) = 3 - 2 = 1$$

Quindi possiamo trovare:

$$d(r, s) = \left|\left|P_{\left(L(v)+L(w)\right)^{\perp}}\left(P_0\vec{P}_0\right)\right|\right| = *A* = \left|\left|P_{(v \wedge w)}\left(P_0\vec{Q}_0\right)\right|\right| = \frac{\left|P_0\vec{Q}_0 \cdot (v \wedge w)\right|}{||v \wedge w||^2}(v \wedge w) = \frac{\left|P_0\vec{Q}_0 \cdot (v \wedge w)\right|}{||v \wedge w||}$$

□

8.7.7 Distanza punto-retta nello spazio

Dato un punto P e una retta in forma vettoriale $r = P_0 + tv$, allora la distanza del punto dalla retta è data da:

$$\left|\left|\vec{P_0P}\right|\right|\sin\theta$$

Dove θ è l'angolo minimo tra i vettori $\vec{P_0P}$ e $\vec{v}$.
La formula per trovare la distanza punto retta in $\mathbf{R}^3$ è:

$$d(P, r) = \frac{\left|\left|\vec{P_0P} \wedge v\right|\right|}{||v||} \tag{126}$$

Dimostrazione. :
Si ottiene dala formula:

$$\left|\left|\vec{P_0P} \wedge v\right|\right| = \left|\left|\vec{P_0P}\right|\right| \, ||v|| \sin\theta$$

□

9 Quadriche

9.1 Forme quadratiche

9.1.1 Definizione forme quadratiche

Definition 9.1 (Forme quadratiche)**.** *:*
Le forme quadratiche su $\mathbf{R}^n$ *sono i polinomi di grado due omogenei in n variabili, se:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \textit{allora} \qquad q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i\, x_j \tag{127}$$

è una forma quadratica.

Ad esempio in $\mathbf{R}^2$:

$$q\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2$$

Ad esempio in $\mathbf{R}^3$:

$$q\Bigg(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Bigg) = a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2 + d\,xz + e\,z^2 + f\,yz$$

9.1.2 Forme quadratiche e matrici

Sia $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i\, x_j$ una forma quadratica e A la matrice dei coefficienti (a_{ij})

Ponendo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ possiamo riscrivere la forma quadratica come:

$$q(X) = X^T\, A\, X \tag{128}$$

Dimostrazione. :
Considero:

$$X^T A^j = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j}\, x_1 + a_{2j}\, x_2 + \cdots + a_{nj}\, x_n = \sum_i a_{ij}\, x_i$$

Quindi scrivendo la matrice completa:

$$X^T\, A\, X = \sum_{ij}\, x_i\, x_j$$

□

La matrice A **non è unica**, abbiamo visto che ogni quadratica può essere scritta nella forma:

$$q(X) = X^T\, A\, X$$

Dimostrazione. :

$$q(X) = X^T A X = \big(q(X)\big)^T = \big(X^T A X\big)^T = X^T A^T X$$

$$X^T A^T X = \big(X^T A T X\big)^T = \textit{prop.trasposta} = X^T \big(A^T\big)^T \big(X^T\big)^T = X^T A X = q(X)$$

quindi possiamo scegliere A^T invece che A.

□

9.1.3 Matrice di Gram di una forma quadratica

Se $q(X$ è una forma quadratica allora possiamo sempre scrivere la forma quadratica nella seguente forma, dove S è una matrice simmetrica (quindi $S^T = S$):

$$q(X) = X^T\, S\, X$$

Dove S è unica, proprio perchè potendo scegliere fra S e S^T come dimostrato in precedenza, in realtà sono lo stasse cosa in quanto simmetrica.

Dimostrazione. Siccome in precedenza bbiamo dimostrato come:

$$q(X) = \big(q(X)\big)^T = X^T AX = X^T A^T X$$

Possiamo fare la "media" fra le due e otteniamo:

$$q(x) = \frac{1}{2}\big(X^T AX + X^T A^T X\big) = X^T\big(\frac{1}{2}(A + A^T)X\big)$$

Vediamo come la matrice è unica se e solo se è simmetrica, in quanto:

$$\frac{1}{2}\big(X^T AX + X^T A^T X\big) = X^T AX = X^T A^T X$$

□

Matrice di Gram:

Theorem 9.1 (Teorema della matrice di Gram)**.** *:*
Una forma quadratica $q(X)$ si può quindi scrivere in modo compatto come:

$$q(X) = X^T\, S\, X$$

Dove S è una matrice simmetrica.
La matrice S è unica ed è detta matrice di Gram di una forma quadratica.

Dimostrazione. :
Supponiamo per assurdo che esistano due matrici simmetriche:
- Sulla diagonale:

Si considerano le singole colonne moltiplicando per la base canonica:

$$q(e_i) = e_i^T\, S\, e_i = e_i^T\, S^i = s_{ii} \qquad e \qquad q(e_i) = e_i^T\, S'\, e_i = e_i^T\, S^i{\prime} = s'_{ii}$$

Quindi abbiamo visto che sulla diagonale gli sono uguali le matrici S e S': $\quad s_{ii} = s'_{ii}$

- Fuori dalla diagonale:

Relativo a S:

$$q(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T S(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T (S^i + S^j) = s_{ii} + s_{ji} + s_{ij} + s_{jj}$$

Relativo a S':

$$q(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T S'(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T (S^i{\prime} + S^j{\prime}) = s'_{ii} + s'_{ji} + s'_{ij} + s'_{jj}$$

Di conseguenza, sfruttando il fatto che sulla diagonale le matrici sono uguali ($\quad s_{ii} = s'_{ii} \quad$):

$$s_{ii} + s_{ji} + s_{ij} + s_{jj} = s'_{ii} + s'_{ji} + s'_{ij} + s'_{jj} = s_{ii} + s'_{ji} + s'_{ij} + s_{jj}$$

Ora sfruttiamo l'ipotesi della simmetria, ovvero che $S = S^T$:

$$\underbrace{S_{ij} + S_{ji}}_{=\ x\ simm.} = \underbrace{S'_{ij} + S'_{ji}}_{=\ x\ simm.}$$

Allora:

$$\Longrightarrow \qquad 2\, S_{ij} = 2\, S'_{ij} \qquad \Longrightarrow \qquad S = S'$$

□

Ora che abbiamo capito che è unica, come si calcola la matrice di Gram??
Esercizio di esempio in $\mathbf{R}^3$:

1. Considero la quadrica:
$$q(x,y,z) = xy - 2xz + 3x^2 - 7yz + z^2 - 2y^2$$
2. Si scrive la matrice formata dai couefficienti:
$$\begin{pmatrix} x^2 & \frac{xy}{2} & \frac{xz}{2} \\ \frac{yx}{2} & y^2 & \frac{xz}{2} \\ \frac{zx}{2} & \frac{xy}{2} & z^2 \end{pmatrix} \tag{129}$$
3. Che nel nostro caso diventa:
$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \\ -1 & -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$
4. Per le matrice 2×2 la matrice di Gram è:
$$a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a & \frac{ab}{2} \\ \frac{ba}{2} & b \end{pmatrix}$$

9.1.4 Segnatura di una forma quadratica

Definition 9.2 (Segnatura di una matrice simmetrica)**.** *:*
Sia A una matrice simmetrica reale.
Sia r il numero di autovalori positivi di A contati con la loro molteplicità geometrica e sia s il numero di autovalori negativi contati con la loro molteplicità geometrica.
La coppia (r, s) è detta segnatura della matrice A

La segnatura di una forma quadratica è riferita alla matrice simmetrica di Gram, quindi molteplicità geometrica e algebrica sono equivalenti.

9.1.5 Criterio di Cartesio

Definition 9.3 (Numero di variazioni)**.** *:*
Dato il polinomio:
$$p(t) = \sum_{j=0}^{r} a_j\, t_j^i \qquad , \quad a_j \neq 0 \quad , \quad 0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_r$$
Il numero di variazioni di segno è il numero di j tali che:
$$sgn(a_j) \neq sgn(a_{j-1})$$

Esempio per chiaririre, nel polinomio $p(t)$ il numero di variazioni è 2, infatti (non si contano i termini co coefficiente nullo):
$$p(t) = -2t^7 + 3t^4 - t^2 - 1 \qquad // \qquad -1 \to -1 \to +3 \to -1 \qquad // \quad 2\,variazioni$$

Theorem 9.2 (Teorema del criterio di Cartesio)**.** *:*
Il numero di variazioni di un polinomio è il massimo numero di radici positive del polinomio.
Se il polinomio ha solo radici reali allora il numero di variazioni è il numero di radici positive contato con la loro molteplicità.

Applicazione del criterio di Cartesio al calcolo della segnatura di una matrice simmetrica:

- Se A è simmetrica allora il polinomio caratteristico ha solo radici reali, quindi il numero di autovalori positivi è uguale al numero di variazioni del polinomio caratteristico:

$$\# \, autovalori \, positivi \; = \# \, n. \, variazioni$$

- Il numero di autovalori nulli è uguale alla nullità di A:

$$\# \, autovalori \, nulli \; = dim\big(N(A)\big) = null(A)$$

- Il numero di autovalori negativi è uguale a:

$$\# \, autovalori \, negativi \; = n - null(A) - \# \, autovalori \, positivi \; = rk(A) - \# \, n. \, variazioni$$

Sapendo queste relazioni, possiamo riscivere la segnatura (r, s) di una forma quadratica $q(X)$ con:

- r : numero di variazioni del polinomio caratteristico dell amtrice di Gram S di $q(X)$
- $s = rk(S) - r$

9.1.6 Forme quadratiche particolari e segnatura

Sia $q(X)$ una forma quadratica su $\mathbf{R}^n$:

1. Se $q(X) = 0 \quad (\iff X = 0)$ allora si sice che q è non degenere.
2. Si dice che q è semidefinita positiva se:
$$q(X) \geq 0 \quad \forall \, X \in \mathbf{R}^n$$
3. Si dice che q è semidefinita negativa se:
$$q(X) \leq 0 \quad \forall \, X \in \mathbf{R}^n$$
4. Si dice che q è definita positiva se:
$$\begin{cases} q(X) \geq 0 & \forall \, X \in \mathbf{R}^n \\ q(X) = 0 & \iff \quad X = 0 \end{cases}$$
5. Si dice che q è definita negativa se:
$$\begin{cases} q(X) \leq 0 & \forall \, X \in \mathbf{R}^n \\ q(X) = 0 & \iff \quad X = 0 \end{cases}$$
6. Si dice che q è indefinita se esiste un vettore v per cui:
$$\begin{cases} \exists \, v \mid q(v) > 0 \\ \exists \, w \mid q(w) < 0 \end{cases}$$
7. Si dice che q è nondegenere se io rango della sua matrice di Gram è n.

Theorem 9.3 (Segnatura con forma semidefinita e definita positiva)**.** *:*

1. *La forma q su $\mathbf{R}^n$ è semidefinita positiva se e solo se ha segnatura $(r, 0)$*
2. *La forma q su $\mathbf{R}^n$ è definita positiva se e solo se ha segnatura $(n, 0)$*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$). :
Sia S la matrice di Gram di $q(X)$, assumiamo che abbia segnatura $(r,0)$ e dimostriamo che $r(x) \geq 0$ ovvero che gli autovalori di S sono tutti positivi.

Per il teorema spettrale esiste una matrice ortogonale M tale che:

$$M^T SM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad , \quad con \quad \lambda_i > 0$$

Sia $\quad X' = M^T X \quad \Longrightarrow \quad MX' = MM^T X = X \quad$ cosicchè $\quad X = MX'$

Calcoliamo $q(X)$:

$$q(X) = X^T SX = (MX')^T SMX' = prop.trasposta = X'M^T SMX' = (X')^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} X'$$

Esplicitiamo X' , scrivendolo come: $\qquad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

Quindi sostiuiamo e si ottiene:

$$q(X) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \cdots + \lambda_r (x'_r)^2 \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q(x) \geq 0$$

Quindi $q(X)$ è semidefinita positiva.

- Se $r < n$ allora è chiaro che possiamo avere $q(X) = 0 \quad con \quad X \neq \vec{0}$

Ad esempio se scelgo $\quad X = Me_{r+1} \quad$ allora $\quad X' = e_{r+1} \quad$ quindi:

$$q(X) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_r (x'_r)^2 = 0$$

- Se invece $r = n$ e $q(X) = 0$ allora:

$$q(X) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_n (x'_n)^2 = 0$$

da cui si ottiene: $\; x'_1 = x'_2 = \cdots = x'_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad X' = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad X = MX' = \vec{0}$
Quindi se la segnatura è (n,0) la forma è definita positiva. □

Dimostrazione ($\Longrightarrow$). :
Rimane solo da vedere l'impliczione diretta, ovvero che se $q(X$ è semidefinita positiva allora la segnatura di $q(X)$ è $(r,0)$, cioè tutti gli autovalori della matrice di Gram sono maggiori o uguali a zero.

Se λ è un autovalore della matice di Gram S di $q(X)$ e v è un vettore relativo all'autovalore λ, allora:

$$0 \leq q(v) = v^T Sv = v^T \lambda v = \lambda ||v||^2$$

Siccome $||v|| > 0 \implies \lambda \geq 0$

$\square$

Theorem 9.4 (Segnatura con forma semidefinita e definita negativa)**.** *:*

1. *La forma q su $\mathbf{R}^n$ è semidefinita negativa se e solo se ha segnatura $(0, s)$*
2. *La forma q su $\mathbf{R}^n$ è definita negativa se e solo se ha segnatura $(0, n)$*

Dimostrazione. :
Analogamente al caso positivo si dimostra con $\lambda \leq 0$.
In alternativa si può dedurre dal caso positivo, considerando segnatura $\quad -q(X) \quad$ e si trovano gli stessi risultati

$\square$

Theorem 9.5 (Segnatura con forma indefinita)**.** *:*
La forma $q(X)$ è indefinta se e solo se la segnatura di $q(X)$ è (r, s) con $r \neq 0 \quad , \quad s \neq 0$

Dimostrazione. :
$q(X)$ è indefinita se e solo se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa quindi la sua segnatura è (r, s) con $r \neq 0 \quad , \quad s \neq 0$

$\square$

Se $q(X)$ è indefinita, per trovare un vettore v per cui $q(v) > 0$ e un vettore w per cui $q(w) < 0$ si può procedere così:

1. Siccome $r \neq 0$ e $s \neq 0$, esiste un autovalore positivo e un autovalore negativo della matrice di Gram S di q.
2. Sia v un autovettore relativo a λ e w un autovettore relativo a μ , allora:
   - $$q(v) = v^T S v = \lambda v^T v = \lambda v ||v||^2 > 0$$
   - $$q(w) = w^T S w = \mu w^T w = \mu w ||w||^2 < 0$$

Theorem 9.6 (Segnatura con forma nondegenere)**.** *:*

- *Se q ha segnatura (r, s) allora q è nondegenere se e solo se $r + s = n$.*
- *Una forma quadratica semidefinita positiva è nondegenere se e solo se è definita positiva.*
- *Una forma quadratica semidefinita negativa è nondegenere se e solo se è definita negativa.*

Osservazione:
Se q è semidefinita positiva o semidefinita negativa e S è la sua matrice di Gram allora:

$$\{X \in \mathbf{R}^n \,\big|\, q(X) = 0\} = N(S) \tag{130}$$

9.1.7 Traccia di una matrice

Definition 9.4. *La traccia di una matrice A quadrata di ordine n è la somma degli elementi sulla diagonale principale della matrice.*
In simboli:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{131}$$

Nel caso di una matrice di dimensioni 2×2 abbiamo:

$$q(r,s) = ax^2+bxy+cy^2 \quad , \quad tr(S) = tr\Big(\begin{pmatrix} a & ab/2 \\ ba/2 & b \end{pmatrix}\Big) = a+c = \lambda_1+\lambda_2 \quad , \quad det\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \lambda_2 = ac - b^2/2$$

Sia S una matrice $n \times m$ diagonalizzabile, allora:

$$M^{-1}SM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_2 \end{pmatrix} \implies det(M^{-1}SM) = det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = det(M^{-1}) \cdot det(S) \cdot det(M) = det(S)$$

Di conseguenza: $\quad det(S) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n \quad$ (prodotto autovalori)

Proprietà della traccia: La traccia di AB è pari alla traccia di BA:

$$tr(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = tr(BA) \tag{132}$$

Dimostrazione. :
Considero S , la matrice quadrata di ordine n:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \implies tr(S) = a_{11} + 1_{22} + \dots + a_{nn}$$

Allo stesso tempo:

$$tr(AB) = tr(BA) = \sum_{i,S} a_{ij} \cdot b_{ji}$$

Siccome per ipotesi S è diagonalizzabile, allora:

$$tr(S) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

□

Theorem 9.7 (matrici simili e traccia)**.** *:*
Se A, B sono matrici simili, allora hanno la stessa traccia:

$$tr(A) = tr(B) \quad , \quad det(A) = det(B) \tag{133}$$

Dimostrazione. :
Matrici simili hanno stessa traccia:

$$tr(B) = tr(M^{-1}AM) = tr(MM^{-1}A) = tr(A)$$

Matrici simili hanno stesso determinante:

$$det(B) = det(M^{-1}AM) = det(M^{-1}) \cdot det(A) \cdot det(M) = det(A)$$

□

9.1.8 Traccia - determinante - autovalori

Theorem 9.8. *:*
Se A è una matrice diagonalizzabile e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono i suoi autovalori, allora:

$$det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n \quad e \quad tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

Dimostrazione. :
la matrice A è simile alla matrice $\quad diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad$ e quindi:

$$det(A) = det\big(diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\big) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n$$

Per quanto riguarda la traccia:

$$tr(A) = tr\big(diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\big) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

□

9.1.9 Segnatura di una quadratica nel piano

Nel caso di una matrice di dimensioni 2×2 abbiamo:

$$q(r, s) = ax^2+bxy+cy^2 \quad , \quad tr(S) = tr(\begin{pmatrix} a & ab/2 \\ ba/2 & b \end{pmatrix})= a+c = \lambda_1+\lambda_2 \quad , \quad det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \lambda_2 = ac-b^2/2$$

Elenco i vari casi (S la matrice di Gram e a l'elemento $S[0][0]$):

- Se $\quad det(S) > 0 \quad$ e $\quad a > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ la segnatura è $\quad (2, 0)$

  Dimostrazione. :
  Infatti $detS > 0$ implica che $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, quindi i due autovalori hanno lo stesso segno.
  Inoltre $ac - b^2/4 = det(S) > 0$ quindi $ac > 0$ e quindi a e c hanno lo stesso segno.
  Siccome $a > 0$ abbiamo che $c > 0$ e quindi $a + c > 0$.
  Ma allora $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c > 0$ e quindi λ_1, λ_2 sono entrambi positivi, quindi la segnatura è $(2, 0)$.

  □

- Se $\quad det(S) > 0 \quad$ e $\quad a < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ la segnatura è $\quad (0, 2)$

  Dimostrazione. :
  Infatti $detS > 0$ implica che $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, quindi i due autovalori hanno lo stesso segno.
  Inoltre $ac - b^2/4 = det(S) > 0$ quindi $ac > 0$ e quindi a e c hanno lo stesso segno.
  Siccome $a < 0$ abbiamo che $c < 0$ e quindi $a + c < 0$.
  Ma allora $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c > 0$ e quindi λ_1, λ_2 sono entrambi negativi, quindi la segnatura è $(0, 2)$.

  □

- Se $\quad det(S) < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ la segnatura è $\quad (1, 1)$

  Dimostrazione. :
  Infatti $detS < 0$ implica che $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, quindi i due autovalori hanno segno opposto e quindi la segnatura è $(1, 1)$.

  □

- Se $\quad det(S) = 0 \quad$ e $\quad a + c > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ la segnatura è $\quad (1, 0)$

  Dimostrazione. :
  Infatti $detS = 0$ implica che $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, quindi uno dei due autovalori è nullo.
  Inoltre $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c > 0$ quindi l'altro autovalore deve essere positivo, quindi la segnatura è $(1, 0)$.

  □

- Se $\quad det(S) = 0 \quad$ e $\quad a + c < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ la segnatura è $\quad (0, 1)$

  Dimostrazione. :
  Infatti $detS = 0$ implica che $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, quindi uno dei due autovalori è nullo.
  Inoltre $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c < 0$ quindi l'altro autovalore deve essere negativo, quindi la segnatura è $(0, 1)$.

  □

9.2 Quadriche

9.2.1 Definizione di quadriche

Definition 9.5 (Quadrica)**.** *:*
una quadrica è il luogo di punti in definito da un'equazione di secondo grado:

$$p(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad con \quad p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \leq j} a_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i + f \tag{134}$$

In base al valore di n le quadriche assumono diversi nomi:

- Coniche: $n = 2$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad , \quad (a, bc) \neq (0, 0, 0)$$

- Cubiche: $n = 3$
- Quadratiche: $n = 4$

È importante sottolineare che l'insiem vuoto è una conica, per mantenere la coerenza della definizione generale.

Esempi geometici:
Data una retta r detta direttrice e un punto F non appartenente a r detto fuoco e un numero $e > 0$ detto eccentricità, il luogo dei punti P tali che:

$$d(P, F) = e \cdot d(P, r)$$

è una conica detta ellisse se $e < 1$, parabola se $e = 1$, iperbole se $e > 1$.

9.2.2 Sfere

Le sfere sono superfici quadriche:

Definition 9.6 (Sfere). *:*
La sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio R è il luogo di punti di equazione:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \tag{135}$$

9.2.3 Coni

Definition 9.7 (Cono). *:*
Un cono è una superfice per ogni punto della quale passa una retta g tutta contenuta nella superficie e passante per un punto fisso V, detto vertice del cono.

Le rette g si dicono generatrici del cono.
Una curva che interseca tutte le generatrici in un punto è detta direttrice del cono.

Definition 9.8 (Cono quadrico). *:*
Un cono quadrico è un cono che è anche una superfice quadrica.

Ad esempio:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

è il cono quadrico con vertice l'origine e come direttrice la circonferenza di raggio 1 centro $(0, 0, 1)$ giacente nel piano $z = 1$.

9.2.4 Cilindri

Definition 9.9 (Cilindri). *:*
Chiamiamo cilindro una superficie per ogni punto della quale passa una retta g di direzione assegnata tutta contenuta nella superficie.

Le rette g si dicono generatrici del cilindro.
Una curva che interseca tutte le generatrici in un punto è detta direttrice del cilindro.

Definition 9.10 (Cilindro quadrico). *:*
Un cilindro quadrico è un cilindro che è anche una superfice quadrica.

Esempio:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

è il cilindro quadrico con generatrici parallele all'asse z e direttrice la circonferenza di raggio 1 centro $(0, 0, 0)$ giacente nel piano $z = 0$.

9.2.5 Superfici di rotazione

Definition 9.11 (Superficie di rotazione)**.** *:*
Data una curva γ ed una retta r la superficie decritta dai punti di γ durante una rotazione di 2π attorno alla retta r si dice superficie di rotazione generata da γ ed r si dice asse di rotazione.

Le quadriche di rotazione sono le superfici quadriche che sono anche superfici di rotazione.

Esempi di quadriche di rotazione:

- Ellissoidi di rotazione ottenuti ruotando un'ellisse intorno a un asse di simmetria
- Iperboloidi ottenuti ruotando un iperbole intorno a un asse di simmetria
- Paraboloidi ottenuti ruotando una parabola intorno al suo asse di simmetria
- Ruotando un retta intorno ad un'altra retta si ottiene (quasi sempre) una quadrica di rotazione (iperboloide).

9.2.6 isometrie

Definition 9.12 (isometrie)**.** *:*
Un'isomeria su $\mathbf{R}^n$ è una funzione $\quad F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \quad$ *che rispetta la distanza tra i punti:*

$$d\big(F(P), F(Q)\big) = d(P, Q) \tag{136}$$

Definition 9.13 (isometrie lineari)**.** *:*
Una isometria lineare di $\mathbf{R}^n$ è una trasformazione lineare T tale che:

$$T(x) \cdot T(y) = x \cdot y \tag{137}$$

Una proprietà delle isometrie lineari è:

- Preserva la norma:

$$||T(x)|| = ||x|| \tag{138}$$

Dimostrazione proprietà. :

$$||T(x)|| = \sqrt{T(x) \cdot T(y)} = \sqrt{x \cdot x} = ||x||$$

□

- Preserva gli angoli:

Dimostrazione proprietà. :

$$\widehat{T(x)\,T(y)} = \arccos\left(\frac{T(x) \cdot T(y)}{||T(x)\,||T(y)||}\right) = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{||x||\,||y||}\right) = \widehat{x\,y}$$

□

- Le isometrie lineari sono particolari isometrie tali per cui:

$$d\big(T(P), T(Q)\big) = d(P, Q) \tag{139}$$

Dimostrazione proprietà. :

$$d\big(T(P), T(Q)\big) = ||T(P)\,T(Q)|| = ||T(Q) - T(P)|| = T(Q - P)|| = ||Q - P|| = ||\vec{PQ}|| = d(P, Q)d(P, Q)$$

□

9.2.7 Matrice associata ad una isometria lineare

La trasformazione lineare T è un'isometria lineare se e solo se la sua matrice A è una matrice ortogonale:

$$x \cdot y = T(x) \cdot T(y) = Ax \cdot Ay = x \cdot A^T\, Ay$$

Di conseguenza per ogni x, y:

$$x \cdot (y - A^T\, Ay) = 0 \qquad \forall\, x, y$$

In particolare scegliendo $\quad x = y - A^T\, Ay \quad$, si ha:

$$(y - A^T\, Ay) \cdot (y - A^T\, Ay) = ||y - A^T\, Ay||^2 = 0 \qquad \forall\, y$$

Che corrisponde a:

$$y = A^T\, Ay \qquad \forall\, y \qquad \Longrightarrow \qquad A^T\, A = I$$

Le isometri lineari nel piano sono ($\mathbf{R}^2$):

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad , \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Dimostrazione delle isometrie lineari nel piano. :
Se T è una isometria del piano allora la sua matrice A è una matrice ortogonale 2×2.
Quindi $A = (v\ \ w)$ con $\{v, w\}$ base ortogonale.
In particolare $\quad v = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ per qualche θ e w può essere solo: o $\quad w = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ o $\quad w = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$

□

9.2.8 Isometrie non lineari (Traslazione)

Traslazione:

Definition 9.14 (Traslazione)**.** *:*
Dato un vettore v, la traslazione T_v è la funzione definita ponendo:

$$T_v(P) = P + v \tag{140}$$

Se il vettore $v \neq 0$, allora la traslazione T_v non è lineare perchè $\quad T(\vec{0}) = v \neq \vec{0}$.
Le trslazioni sono comunque isometrie:

$$d\big(T_v(P), T_v(Q)\big) = d(P + v, Q + v) = ||(Q + v) - (P + v)|| = ||Q - P|| = d(P, Q)$$

9.2.9 Rototraslazione

Theorem 9.9 (Composta di isometrie)**.** *:*
La composta di due isometrie F e G è ancora un'isometria.

Dimostrazione.

$$d\big(F \circ G(P), F \circ G(Q)\big) = d\Big(F\big(G(P)\big), F\big(G(Q)\big)\Big) = d\big(G(P), G(Q)\big) = d(P, Q)$$

□

Definition 9.15 (Rototraslazione)**.** *:*
Una rototraslazione è una isometria lineare seguita da una traslazione.
Sia $\quad R = T_v \circ T \quad$ una rototraslazione con T isomeria lineare (rotazione) e T_v l'isomerie non lineare (traslazione).
Sia A la matrice di T (rotazione) nella base canonica.
Allora:

$$R(X) = T_v(AX) = AX + v \tag{141}$$

Proprieta conseguenti dalla definizione:

- Siccome una rototraslazione è la composta di due isometrie, è essa stessa un'isometria.
- Siccome T è un'isometria lineare, A è ortogonale.
- L'isometria lineare T è anche detta parte lineare di R.
- Si può dimostrare che tutte le isometrie del piano o dello spazio sono rototraslazioni.

9.2.10 Matrice di una rototraslazione

Definition 9.16 (Matrice di una rototraslazione)**.** *:*
Se $\quad R = T_v \circ T \quad$ *è una rototraslazione con parte lineare* T *(rotazione) e* M_0 *è la matrice di* T *allora la matrice associata alla rototraslazione* R *è:*

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & v \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \tag{142}$$

Osservazione:

$$\begin{pmatrix} R(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0X + v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 & v \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inversa di una rototraslazione:
L'inversa R^{-1} di una rototraslazione R è anch'essa una rototraslazione.
Se $\quad R(X) = T_v(AX) = AX + v \quad$ è la rototraslazione, allora l'inversa è:

$$R^{-1} = A^{-1}(X - v) = A^{-1}X - A^{-1}v = T_{-A^{-1}v}A^{-1}X$$

Se R ha matrice $\begin{pmatrix} M_0 & v \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$ allora R^{-1} ha matrice:

$$\begin{pmatrix} M_0^{-1} & -M_0^{-1}v \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0^T & -M_0^Tv \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \tag{143}$$

Si noti che la matrice dell'inversa di R è l'inversa della matrice di R.

9.3 Forma canonica

Ogni quadrica può essere spostata con una rototraslazione in una particolare forma detta forma canonica della quadrica.
Per calcolare la forma canonica è necessario capire come si trasforma l'equazione della quadrica se si rototrasla la quadrica.

9.3.1 Matrice di una quadrica

All'equazione di una quadrica:

$$p(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad con \quad p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \le j} a_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i + f$$

si associa la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix}$$

dove A_0 è la matrice di Gram di $\quad \sum a_{ij}x_ix_j \quad$ (quindi simmetrica $A_0 = A_0^T$) e quindi:

$$(A_0)_{ii} = a_{ii} \quad , \quad (A_0)_{ij} = a_{ij}/2 \qquad e \qquad q_i = b_i/2$$

L'equazione si può scrivere come:

$$(X^T \ \ 1)A \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si omogenizza il polinomio:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sum a_{ij} x_i x_j + \sum b x_i x_{n+1} + f x_{n+1}^2$$

Q è una forma quadratica in $\mathbf{R}^{n+1}$
A è la matrice di Gram di Q.

$$Q(\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}) = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \ A \ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$P(x_1, \ldots, x_n) = Q(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix}) \qquad , \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$P(X) = Q(\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}) = (X^T \ \ 1) \ A \ \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.3.2 Equazione della rototraslazione di una quadrica

Se Q è una quadrica di equazione $p(X) = 0$ e R è una rototraslazione, allora la quadrica $R(Q)$ ha equazione:

$$p\big(R^{-1}(X)\big) = 0 \tag{144}$$

Dimostrazione. :
Il punto X sta su $R(Q)$ se e solo se $\quad X = R(X') \quad$ con X' su Q.
Segue che $\quad X = R^{-1}(X) \quad$ e, siccome X' sta su Q, allora $\quad p(X') = 0$.
Quindi X sta su $R(Q)$ se e solo se:

$$0 = p(X') = p\big(R^{-1}(X)\big)$$

□

Equazione della rototraslazione di una quadrica:
Sia Q una quadrica.
Sia R una rototraslazione.
Sia A la matrice di Q.

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix} \qquad , \qquad M = \begin{pmatrix} M_0 & v \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione di Q è $p(X) = 0$ con:

$$p(X) = (X^T \ \ 1) \ A \ \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \tag{145}$$

Inoltre, sia M la matrice di R , quindi:

$$\begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia Q la vecchia qudrica prima della tototraslazione, e $R(Q)$ l'equazione della trasformata:

$$0 = P(X) \qquad , \qquad P\big(R^{-1}(X)\big) = 0$$

Allora abbiamo:

$$0 = P\big(R^{-1}(X)\big) = \begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \left(M^{-1} \begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix}\right)^T A\, M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = ***$$

Sfruttando le proprietà della trasposta:

$$*** = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}^T (M^{-1})^T A\, M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad (X^T \ \ 1)(M^{-1})^T A\, M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza la matrice di $R(Q)$ è:

$$\left(M^{-1}\right)^T A\, M^{-1} \tag{146}$$

dove M è la matrice di R.

9.3.3 Calcolo della forma canonica

Forma canonica delle quadriche, quadriche con centro di simmetria:
Il metodo consiste nel modificare l'equazione della quadrica in successivi passaggi moltiplicandola per un fattore k non nullo oppure effettuando una rototraslazione.
In generale si applicano due procedimenti:

- la diagonalizzazione.
- l'eliminazione dei termini lineari.

Se l'equazione della quadrica è:

$$p(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad con \quad p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \le j} a_{ij} x_i x_j + \sum b_i x_i + f$$

Allora:

- La diagonalizzazione consiste nella diagonalizzazione della matrice A_0 e l'effetto è quello di eliminare i termini $a_{ij} x_i x_j$ con $i \neq j$ dall'equazione.
- L'eliminazione dei termini lineari consiste in una traslazione e l'effetto è quello di eliminare dall'equazione termini del tipo $b_i x_i$.
- La forma canonica è quella che si ottiene eliminando tutti i termini $a_{ij} x_i x_j$ con $i \neq j$ e il maggior numero possibile di termini lineari.

9.3.4 Eliminazione dei termini lineri (I passo)

Effettuiamo la traslazione che manda il centro c_0 nell'origine degli assi:

$$\begin{pmatrix} T_{-c_0}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -c_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice dell'equazione diventa:

$$A' = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix} \tag{147}$$

Dimostrazione. :

$$A' = (X^T \ \ 1) \begin{pmatrix} I & \vec{0} \\ c_0^T & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & c_0 \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = ***$$

Svolgiamo i prodotti riga per colonna (f' è il termine noto che chiaramente cambia):

$$(X^T \;\; 1)\begin{pmatrix} I & \vec{0} \\ C_0^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 & A_0c_0+q \\ * & f' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = (X^T \;\; 1)\begin{pmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{0} & f' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo come spariscono tutti i termini lineari.

□

Significato geometrico della traslazione:
Geometricamente con la traslazione si porta un centro di simmetria nell'origine degli assi.

L'equazione della quadrica traslata è:

$$p'(X) = X^T A_0 X + f' = 0$$

Se si vuolo solo calcolare f' della traslata si possono usare delle scorciatoie che sfruttano la relazione:

$$A' = \left(M^{-1}\right)^T A\, M^{-1}$$

- Se $det(A_0) \neq 0$:
  Si noti che (sfruttando proprietà delle matrici a blocchi):

  $$det(A') = det\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix} = f' \cdot det(A_0)$$

  Inolte $\quad det(A') = det(M^{-1} \cdot det(A) = det(A) \quad$ e quindi, se vale $\quad det(A_0) \neq 0 \quad$, allora:

  $$f' = \frac{det(A)}{det(A_0)}$$

- Se $det(A_0) = 0$:
  Se $\quad det(A_0) = 0 \quad$ allora non possiamo sfruttare la formula precesente, quindi usiamo:

  $$f' = p'(0) = p\big(T_{c_0}(0)\big) = p(c_0)$$

9.3.5 Diagonalizzazione (II passo)

Significato geometrico della diagonalizzazione:
Geometricamente la diagonalizzazione corrisponde a ruotare gli assi di simmetria della quadrica negli assi coordinati.
I versori corrispondenti agli assi di simmetria sono dati dalle colonne della matrice M_0, cioè dagli autovettori della matrice A_0.

A questo punto si diagonalizza la matrice A_0.
Siccome A_0 è una matrice simmetrica sappiamo che A_0 ammette una matrice modale M_0 ortogonale (per il terema spettrale).
Abbiamo dunque che:

$$M_0^T A_0 M_0 = M_0^{-1} A_0 M_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si effettua la isomeria lineare:

$$\begin{pmatrix} R(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice A'' dell'equazione della quadrica rototraslata mediante R è:

$$A'' = (X^T \;\; 1)\begin{pmatrix} M_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 & \vec{0} \\ \vec{0} & f' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = (X^T \;\; 1)\begin{pmatrix} M_0^T A_0 M_0 & \vec{0} \\ \vec{0} & f' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

che corrisponde all'equazione:

$$\sum \lambda_i X_i^2 + f' = 0$$

9.3.6 Qudriche con centro di simmetria

Definition 9.17 (Centro di simmetria)**.** *:*
Sia $A = \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix}$ *la matrice di una quadrica* Q
Una quadrica con centro di simmetria è una quadrica tale che esiste una soluzione c_0 *di:*

$$A_0 X + q = \vec{0}$$

E il punto c_0 *è un centro di simmetria della quadrica.*

Si possono riordinare gli autovalori di A_0 in modo che $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ siano positivi, $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}$ siano negativi e $\lambda_{r+s+1}, \dots, \lambda_n$ siano nulli.
L'equazione diventa, chamando $\mu_i = -\lambda_{r+i}$:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{S} \mu_i x_i^2 = -f' \qquad \lambda_i > 0 \quad , \quad \mu_i > 0$$

La seguante equazione è chiamata forma canonica della quadrica (con centro di simmetria):

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{S} \mu_i x_i^2 = -f'$$

9.3.7 Quadriche senza centro di simmetria

Se $A_0 X + q$ non ha soluzione, si decompone q rispetto a $R(A_=)$ (decomposizione ortogonale):

$$\mathbf{R}^n = R(A_0) \oplus R(A_0)^{\perp} = R(A_0) \oplus N(A_0^T) = R(A_0) \oplus N(A_0)$$

Siccome la matrice è simmetrica, allora $A^T = A$ e quindi $N(A_0) = N(A_0^T)$
La decomposizione ortogonale del vettore q è:

$$q = q_0 + q_1 \qquad con \quad q_0 \in N(A_0) \quad , \quad q_1 \in R(A_0)$$

Se c_0 è una soluzione di $A_0 X + q_1 = \vec{0}$, allora si trasla c_0 nell'origina e la amtrice traslata diventa:

$$\begin{pmatrix} A_0 & q_0 \\ q_0^T & f' \end{pmatrix} \tag{148}$$

Si calcola una matrice modale ortogonale M_0 di A_0 e si trasforma la quadrica con l'isometria lineare $R(X) = M_0^T$.
La matrice si trasforma in:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n & b'_n \\ b'_1 & b'_2 & \cdots & b' & f' \end{pmatrix} \qquad \text{con} \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = M_0^T q_0$$

Si possono riordinare gli autovalori di A_0 in modo che $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ siano positivi, $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s}$ siano negativi e $\lambda_{r+s+1}, \ldots, \lambda_N$ siano nulli.

Analisi di $M_0^T q_0$:
Siccome le ultime $n-r-s$ colonne di M_0 sono gli autovettori relativi all'autovalore nullo, formano una base ortonormale di $N(A_0)$.
Le prime $r+s$ colonne di M_0 fomrano quindi una base ortonormale di $N(A_0)^\perp = R(A_0)$.
Siccome $q_0 \in N(A_0)$ si ha che $M_0^i \cdot q_0 = 0$ se $i \leq s+r$ e quindi:

$$M_0^T q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b'_{r+s+1} \\ b'_{r+s+2} \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice dopo la diagonalizzazione è:

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda_{r+s} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & {b'}_{r+s+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & {b'}_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 & {b'}_{r+s+1} & \cdots & {b'}_n & f'
\end{pmatrix}$$

Eliminazione dei termini lineari tranne uno: Introduciamo un lemma rilevante per calcolare una nuova forma canonica senza matrice.

Lemma 9.10. *:*
Se $v \in \mathbf{R}^n$ allora esiste una matrice ortogonale Q tale che $Q_v = -||v||e_1$

Dimostrazione. :
Se $v = \vec{0}$ allora $Q = I$ va bene.
Se $v \neq \vec{0}$ allora esiste una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ per cui $v_1 = -v$:

$$Q \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -||v|| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ortonormalizzando questa base si trova una base ortontonormale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ per cui $u_1 = -\frac{v}{||v||}$
Sia $M = (u_1 \ u_2 \ \ldots \ u_n)$
Siccome:

$$M(-||v||e_1) = -||v||u_1 = v$$

Si ha che, ponendo $Q = M^T = M^{-1}$, $Q_v = -||v||e_1$
In simboli:

$$Q\, u = -||u||\, e_1 = -||M_0^T Q_0||e_1 = -||q_0||\, e_1$$

□

Applichiamo il lemma a:

$$v = \begin{pmatrix} b'_{r+s+1} \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Troviamo una matrice ortogonale Q per cui:

$$Q\,v = -||v||e_1 = -||M_0^T q_0||\,e_1 = -||q_0||\,e_1$$

Si trasforma la quadrica con l'isometria lineare:

$$R(X) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

La matrice dell'equazione si trasforma in:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{r+s} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\|q_0\| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\|q_0\| & \cdots & 0 & f' \end{pmatrix}$$

Sia $\quad \mu_i = -\lambda_{i-r} \quad$ per $i > r$.
L'equazione è diventata:

$$\sum i = 1^r \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{S} \mu_i x_{i+r}^2 - 2||q_0||x_{r+s+1} + f' = 0$$

Con una traslazione si elimina il termine f' e finalmente si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{S} \mu_i x_{i+r}^2 - 2||q_0||x_{r+s+1} = 0 \qquad \textit{con} \quad \lambda_i > 0 \quad , \quad \mu_i > 0$$

9.3.8 Teorema della rototraslazione delle quadriche

Theorem 9.11 (Teorema della rototraslazione delle quadriche)**.** *:*
Ogni quadrica può essere portata con una rototraslazione in una quadrica con equazione in una delle tre seguenti forme:

1. *Se* $\quad rk(A) = rk(A_0)$ *:*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i x_{i+r}^2 = 0 \qquad \textit{con } \lambda_i > 0, \mu_i > 0$$

2. *Se* $\quad rk(A) = rk(A_0) + 1$ *:*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i x_{i+r}^2 = c \qquad \textit{con } c \neq 0, \lambda_i > 0, \mu_i > 0$$

3. *Se* $\quad rk(A) = rk(A_0) + 2$ *:*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i x_{i+r}^2 - c x_{r+s+1} = 0 \qquad \textit{con } c > 0, \lambda_i > 0, \mu_i > 0$$

Conseguenze del teorema precedente:

- Osservazione 1:

Corollary 9.11.1 (Osservazione 1)**.** *:*
Se M è invertibile allora $rk(AM) = rk(A)$ e $rk(MA) = rk(A)$.
In particolare due matrici simili hanno lo stesso rango.

Dimostrazione. :
Siccome $R(AM)$ è contenuto in $R(A)$ si ha che: $rk(AM) \leq rk(A)$
Siccome $A = (AM)M^{-1}$ si ha che:

$$rk(A) \leq rk(AM) \qquad \Longrightarrow \qquad rk(A) = rk(AM)$$

□

- Osservazione 2:

  Corollary 9.11.2 (Osservazione 2)**.** *:*
  Se si rototrasla una quadrica con la rototraslazione $R(X) = M_0X + v$ allora la sua matrice A si trasforma in $A' = (M^{-1})^T AM^{-1}$ dove M è la matrice di R.
  Inoltre $A_0' = M_0A_0M_o^T$, ne segue che il rango di A e di A_0 non cambiano.

  Applicando questa osservazione alle tre forme in cui si trasforma ogni quadrica si vede che:

  1. Il primo tipo corrisponde a: $rk(A) = rk(A_0)$
  2. Il secondo tipo corrisponde a: $rk(A) = rk(A_0) + 1$
  3. Il terzo tipo corrisponde a: $rk(A) = rk(A_0) + 2$

- Osservazione 3:
  Per calcolare esattamente la forma a cui corrisponde una quadrica non è necessario calcolare gli autovettori di ma solo gli autovalori:

  1. Se $rk(A) = rk(A_0)$ si è nel primo caso e bastano gli autovalori.
  2. Se $rk(A) = rk(A_0) + 2$ si è nel terzo tipo e bastano gli autovalori poichè $c = 2||q_0||$
  3. Se $rk(A) = rk(A_0) + 1$ e:
     - Se $rk(A) = rk(A_0) + 1$ e $det(A_0) \neq 0$ allora bastano gli autovalori poichè $c = -\frac{det(A)}{det(A_0)}$
     - Se $rk(A) = rk(A_0) + 1$ e $det(A_0) = 0$ allora oltre agli autovalori si calcola un centro c_0 e $c = -p(c_0)$

9.4 Classificazione delle quadriche

9.4.1 Forma canonica delle coniche (R2)

Applichiamo la classificazione delle quadriche al caso delle quadriche nel piano ovvero le coniche.
Classificheremo le coniche in base alla loro equazione:

1. Caso $rk(A) = rk(A_0)$:
   - $rk(A_0) = 2$ l'equazione è del tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$:
     - Autovalori tutti dello stesso segno si ha un punto (ellisse degenere):
       $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$
     - Autovalori con segno discorde si ottiene una coppia di rette incidenti (iperbole degenere):
       $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$
   - $rk(A_0) = 1$ l'equazione si riduce a $y^2 = 0$ che è una retta (retta doppia).

2. Caso $\quad rk(A) = rk(A_0) + 1$:

   - $rk(A_0) = 2 \quad$ l'equazione è del tipo $\quad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c \quad$ con $c \neq 0$.
     Dividendo per c si ottiene:
     $$rx^2 + sy^2 = 1$$
     - Se $\quad r > 0 \quad , \quad s > 0 \quad$ ellisse:
       $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
     - Se $\quad r > 0 \quad , \quad s < 0 \quad$ iperbole:
       $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
     - Se $\quad r < 0 \quad , \quad s < 0 \quad$ insieme vuoto (ellisse immaginaria):
       $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

   - $rk(A_0) = 1 \quad$ l'equazione è del tipo $\quad \lambda X^2 = c \quad$ con $c \neq 0$.
     Dividendo per λ si ottiene:
     $$y^2 = a$$
     - Se $\quad a < 0 \quad$ si ha l'insieme vuoto (rette immaginarie)
     - Se $\quad a > 0 \quad$ si ha una coppia di rette parallele

3. Caso $\quad rk(A) = rk(A_0) + 2$:

   - $rk(A_0) = 2 \quad$ l'equazione è del tipo $\quad \lambda y^2 = cx \quad$ con $c \neq 0$.
     Dividendo per λ si ottiene una parabola nondegenere:
     $$y^2 = ax \qquad \textit{con} \quad a > 0$$

Forme canoniche delle coniche:

Nome	Forma canonica
Ellisse reale	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Ellisse immaginaria	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
Iperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Ellisse degenere (un punto)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
Iperbole degenere (due rette incidenti)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
Parabola	$y^2 = ax$
Rette parallele	$y^2 = a \quad , \quad a > 0$
Rette immaginarie	$y^2 = a \quad , \quad a < 0$
Retta doppia	$y^2 = 0$

Tabella 1: Forma canonica delle coniche.

9.4.2 Forma canonica delle quadriche (R3)

Applichiamo la classificazione delle quadriche al caso delle quadriche nello spazio.
Classificheremo le coniche in base alla loro equazione:

1. Caso $rk(A) = rk(A_0)$:
   - $rk(A_0) = 3$ l'equazione è del tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 = 0$:
     - Autovalori tutti dello stesso segno si ha un punto (cono immaginario):
     - Autovalori con segno discorde si ottiene un cono:
     $$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$
   - $rk(A_0) = 2$ l'equazione si riduce a $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 y^2 = 0$:
     - Autovalori con lo stesso segno si ha una retta
     - Autovalori con segno discorde una coppia di piani incidenti
   - $rk(A_0) = 1$ l'equazione si riduce a $\lambda_1 X^2 = 0$:
     - L'equazione è $x^2 = 0$ che è un piano

2. Caso $rk(A) = rk(A_0) + 1$:
   - $rk(A_0) = 3$ l'equazione è del tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = c$ con $c \neq 0$.
     Dividendo per c si ottiene:
     $$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$
     - Se $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ellissoide
     - Se $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ iperboloide iperbolico
     - Se $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ iperboloide ellittico
     - Se $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$ insieme vuoto (ellissoide immaginario)
   - $rk(A_0) = 2$ l'equazione è del tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c$ con $c \neq 0$.
     Dividendo per λ si ottiene:
     $$ax^2 + by^2 = 1$$
     - Se $a < 0$, $b < 0$ si ha l'insieme vuoto
     - Se $a > 0$, $b > 0$ si ha un cilindro ellittico
     - Se $ab < 0$ $(a, b$ discordi) si ha un cilindro iperboloico
   - $rk(A_0) = 1$ l'equazione è del tipo $\lambda x^2 = c$ con $c \neq 0$.
     Dividendo per λ si ottiene:
     $$y^2 = a$$
     - due piani paralleli se $a > 0$
     - il vuoto se $a < 0$ (piani immaginari)

3. Caso $rk(A) = rk(A_0) + 2$:
   - $rk(A_0) = 2$ l'equazione è del tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = cz$ con $c \neq 0$.
     Si può assumere $c\lambda_1 > 0$ dividendo per c si ottiene:
     $$ax^2 + by^2 = z \qquad con \quad a > 0$$
     - Se $a > 0$, $b > 0$ si ha un paraboloide ellittico
     - Se $a > 0$, $b < 0$ si ha un paraboloide iperbolico.

- $rk(A_0) = 1$ l'equazione è del tipo $\lambda x^2 = cz$ con $c \neq 0$.
  Dividendo per λ si ottiene un cilindro parabolico:
$$x^2 = az$$

Forme canoniche delle coniche:

Nome	Forma canonica
Autovalori tutti dello stesso segno: un punto (cono immaginario)	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$
Cono	$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
Autovalori con lo stesso segno: una retta Autovalori con segno discorde: una coppia di piani incidenti	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$
Piano	$x^2 = 0$
$a > 0\,,\ b > 0\,,\ c > 0$ ellissoide $a > 0\,,\ b > 0\,,\ c < 0$ iperboloide iperbolico $a > 0\,,\ b < 0\,,\ c < 0$ iperboloide ellittico $a < 0\,,\ b < 0\,,\ c < 0$ insieme vuoto (ellissoide immaginario)	$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$
$a < 0\,,\ b < 0$ insieme vuoto $a > 0\,,\ b > 0$ cilindro ellittico $ab < 0$ cilindro iperbolico	$ax^2 + by^2 = 1$
$a > 0$ due piani paralleli $a < 0$ insieme vuoto (piani immaginari)	$x^2 = a$
$a > 0\,,\ b > 0$ paraboloide ellittico $a > 0\,,\ b < 0$ paraboloide iperbolico	$ax^2 + by^2 = z$
Cilindro parabolico	$x^2 = az$

Tabella 2: Forma canonica delle coniche.

9.5 Classificazione affine delle quadriche

Vogliamo determinare il tipo di forma canonica senza dover calcolare gli autovalori della matrice A_0.

- Il calcolo della forma canonica di una quadrica è detto classificazione metrica della quadrica.
- Il calcolo del tipo di forma canonica è detto classificazione affine della quadrica.

9.5.1 Invarianti metrici

Data l'equazione di una conica sia A la sua matrice:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix} \qquad , \quad A_0 = A_0^T \in \mathbf{R}^{2\times 2}$$

Gli invarianti metrici della conica sono

- Invariante cubico: $I_3 = det(A)$
- Invariante quadratico: $I_2 = det(A_0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$
- Invariante lineare: $I_1 = tr(A_0) = \lambda_1 + \lambda_2$

Gli invarianti metrici rimangono invariati se si applica una rototraslazione alla conica.
Dal segno degli invarianti metrici è possibile (tranne in un caso) classificare affinemente la conica.

9.5.2 Coniche

- Coniche non degeneri ($I_3 \neq 0$):
  - Ellisse immaginaria: $I_2 > 0 \quad , \quad I_1 I_3 > 0$
  - Ellisse: $I_2 > 0 \quad , \quad I_1 I_3 < 0$
  - Iperbole: $I_2 < 0$
  - Parabola: $I_2 = 0$

- Coniche degeneri ($I_3 = 0$):
  - Ellisse degenere (punto): $I_2 > 0$
  - Iperbole degenere (due rette incidenti): $I_2 < 0$

$$rk(A_0) = 2 \qquad rk(A) = 2 \qquad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$$

  - Retta doppia: $I_2 = 0 \quad , \quad rk(A) = 1$

$$rk(A_0) = 1 \qquad x^2 = 0$$

  - Rette parallele: $I_2 = 0 \quad , \quad I_1 f' < 0$
  - Rette immaginarie: $I_2 = 0 \quad , \quad I_1 f' > 0$

Nei casi degeneri con $I_2 = 0$, gli invarianti metrici non bastano: bisogna calcolare f' :

$$\textit{non ha senso}: \quad f' = \frac{det(A)}{det(A_0)} \qquad \Longrightarrow \qquad f' = P(c_0) \quad , \quad c_0 = \textit{centro}$$

9.5.3 Quadriche

Come nel caso delle coniche vogliamo classificare affinemente le quadriche senza dover calcolare gli autovalori di A_0.

La classificazione dipende dalla segnatura della forma quadratica che ha la matrice A_0 come matrice di Gram:

$$q_0(X) = X^T A_0 X$$

- Quadriche non degeneri: $det(A) \neq 0$
- Quadriche con $rk(A) = 3$
- Quadriche con $rk(A) \leq 2$

Nome	Segnatura q_0	Condizione
Ellissoide immaginario	$(3,0)$ *o* $(0,3)$	$det(A) > 0$
Ellissoide	$(3,0)$ *o* $(0,3)$	$det(A) < 0$
Iperboloide iperbolico	$(2,1)$ *o* $(1,2)$	$det(A) > 0$
Iperboloide ellittico	$(2,1)$ *o* $(1,2)$	$det(A) < 0$
Paraboloide iperbolico	$rk(A_0) = 2$	$det(A) > 0$
Paraboloide ellittico	$rk(A_0) = 2$	$det(A) < 0$

Tabella 3: Forma canonica delle quadratiche non degeneri ($det(A) \neq 0$).

Nome	Segnatura q_0	Condizione
Un punto (cono immaginario)	$(3,0)$ *o* $(0,3)$	
Cono	$(2,1)$ *o* $(1,2)$	
Cilindro immaginario	$(2,0)$ *o* $(0,2)$	$tr(A_0)f' > 0$
Cilindro ellittico	$(2,0)$ *o* $(0,2)$	$tr(A_0)f' < 0$
Cilindro iperbolico	$(1,1)$	
Cilindro parabolico	$(1,0)$ *o* $(0,1)$	

Tabella 4: Forma canonica delle quadratiche di rango 3.

Nome	Segnatura q_0	Condizione 1	Condizione 2
Una retta (due piani immaginari incidenti)	$(2,0)$ *o* $(0,2)$		
Due piani incidenti	$(1,1)$		
Vuoto (due piani parralleli immaginari)	$(1,0)$ *o* $(0,1)$	$rk(A) = 2$	$tr(A_0)f' > 0$
Due piani paralleli	$(1,0)$ *o* $(0,1)$	$rk(A) = 2$	$tr(A_0)f' < 0$
Piano doppio	$(1,0)$ *o* $(0,1)$	$rk(A) = 1$	

Tabella 5: Forma canonica delle quadratiche di rango minore di 2.

9.5.4 Coniche nello spazio

Una conica nello spazio viene descritta come l'intersezione di una quadrica con un piano non contenuto nella quadrica.

Per riconoscere affinemente la conica è sufficente eliminare un parametro dall'equazione della quadrica usando l'equazione del piano e classificare affinemente l'equazione che si ottiene.

Esempio: Classificare affinemente la conica

1. Considero la conica di equazione:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x2+2xy+y2+z2+x+y-1=0 \end{cases}$$

2. Sostituendo si ottiene la conica di equazione:

$$2x^2+4xy+2y^2-x-y=0$$

3. La matrice della conica è:

$$A=\begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1/2 \\ 2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad det(A)=0 \quad , \quad det(A_0)=0 \quad , \quad rk(A)=2 \quad , \quad tr(A)=4$$

4. Troviamo se la quadrica ha centro di simmetria:

$$A_0X+q=\vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-3/4 \end{cases}$$

5. Di conseguenza sostituendo troviamo:

$$f'=p'(c_0)=-1/8$$

6. Siccome sono verificate le condizioni, si tratta di due rette parallele:

$$I_2=0 \quad , \quad I_1f'<0$$

9.6 Superfici quadriche

Definition 9.18 (Superficie quadrica)**.** *:*
Una superfice nello spazio è detta una superficie quadrica se è il luogo di punti definito da un'equazione di secondo grado.

Esempio:

- Un paraboloide ellittico è una superficie quadrica
- Un punto (cono immaginario) non è una superficie quadrica perché non è una superficie

9.6.1 Sfere

Le sfere sono superfici quadriche, infatti la sfera (x_0, y_0, z_0) di centro e raggio R è il luogo di punti di equazione:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{149}$$

È un ellissoide ed è caratterizzato dal fatto che A_0 ha un solo autovalore e $det(A)<0$.
(se il determinante è positivo è un ellissoide immaginario).
Il centro della sfera è il centro di simmetria e il raggio è:

$$R=\frac{\sqrt{-det(A)}}{\left(detA_0\right)^{2/3}} \tag{150}$$

9.6.2 Coni quadrici

Un cono quadrico è un cono che è anche una superfice quadrica.
I coni quadrici sono caratterizzati dal fatto di possedere un centro di simmetria (il vertice V) che appartiene alla quadrica, quindi nella forma canonica si ha:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c = p(V) = 0$$

Quindi i coni quadrici sono le superfici quadriche per cui $rk(A) = rk(A_0)$.

Classificazione dei coni quadrici:

- Coni:
$$rk(A_0) = 3 \quad , \quad segnatura \quad (2,1)\; o\; (1,2) \quad , \quad z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$
- Piani incidenti:
$$rk(A_0) = 2 \quad , \quad segnatura \quad (1.1) \quad , \quad ax^2 - by^2 = 0 \quad con \quad a > 0 \quad , \quad b > 0$$
- Piano:
$$rk(A_0) = 1 \quad , \quad x^2 = 0$$

9.6.3 Cilindri quadrici

Un cilindro quadrico è un cilindro che è anche una superfice quadrica.
I cilindri quadrici sono caratterizzati dal fatto che:

$$rk(A) \leq 3 \quad , \quad rk(A_0) \leq 2$$

Classificazione dei cilindri quadrici:

- Cilindro ellittico:
$$rk(A) = 3 \quad , \quad rk(A_0) = 2 \quad , \quad segnatura \quad (2,0)\; o\; (0,2) \quad , \quad tr(A_0)f' < 0$$
- Cilindro iperbolico:
$$rk(A) = 3 \quad , \quad rk(A_0) = 2 \quad , \quad segnatura \quad (1,1)$$
- Cilindro parabolico:
$$rk(A) = 3 \quad , \quad rk(A_0) = 1$$
- Due piani incidenti:
$$rk(A) = 2 \quad , \quad rk(A_0) = 2 \quad , \quad segnatura \quad (1,1)$$
- Due piani paralleli:
$$rk(A) = 2 \quad , \quad rk(A_0) = 1 \quad , \quad tr(A_0)f' < 0$$
- Un piano:
$$rk(A) = 1 \quad , \quad rk(A_0) = 1$$

9.7 Quadriche di rotazione

9.7.1 Autovalore doppio

Theorem 9.12. *:*
Le quadriche di rotazione hanno un autovalore doppio di A_0.

Dimostrazione. :
Sia v una direzione dell'asse di rotazione e sia w un vettore ortogonale a v.
Il piano passante per l'asse di rotazione e avente direzioni v e w è un piano di simmetria della quadrica.
I piani di simmetria delle quadriche hanno direzioni parallele agli autovettori di A_0 , quindi ogni vettore ortogonale a v è autovettore di A_0.
Siccome gli autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali, A_0 deve avere un autovalore doppio.

□

9.7.2 Classificazione delle quadriche di rotazione

Le quadriche che possono avere un autovalore doppio sono:

- Ellissoidi di rotazione ottenuti ruotando un'ellisse intorno a un asse di simmetria
- Iperboloidi sia ellittici che iperbolici ottenuti ruotando un iperbole intorno a un asse di simmetria
- Paraboloide ellittico ottenuto ruotando una parabola intorno al suo asse di simmetria
- Coni di rotazione ottenuti ruotando due rette incidenti una intorno all'altra
- Cilindro ellittico ottenuto ruotando due rette parallele una intorno all'altra
- Due piani paralleli ottenuti ruotando due rette parallele intorno a un asse ortogonale a entrambe
- Piano ottenuto ruotando una retta attorno a un asse ortogonale alla retta
- Cilindro parabolico ha un autovalore doppio, ma non è una quadrica di rotazione

10 Teoria per l'esame

1. **Se A è invertibile allora $det(A) \neq 0$ e $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.**

   Controllo invertibilità:
   come conseguenza della formula di Formula di Bindet, se A è invertibile allora il determinante:

   $$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

   Condizione matrice inversa. :
   $A \cdot A^{-1} = I \quad \Longrightarrow \quad det(A \cdot A^{-1}) = det(I) = 1$

   $det(A \cdot A^{-1}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad det(A) \neq 0$

   $\Longrightarrow \quad det(A) \neq 0$ è condizione necessaria e sufficente per stabilire se una matrice è invertibile:

   $$A \,\text{invertibile} \iff det(A) \neq 0 \tag{151}$$

   □

2. $Sol(A, b) = X_p + Sol(A, 0)$ **è una soluzione particolare del sistema $AX = b$.**
   Sistemi non omogenei:
   Per indicare una soluzione si utilizza la notazione $sol(A, b)$, dato un sistema $A \cdot X = b$
   Supponiamo $A \cdot X = b$ abbia soluzioni e fissiamo la soluzione particolare x_{part}. allora tutte le soluzioni del sistema sono date da $x_{part} + y$ al variare di y in $sol(A, \vec{0})$; in simboli $sol(A, b) = x_{part} + \underbrace{sol(A, \vec{0})}_{\text{sist. omogeneo associato}}$.

   Dimostrazione. :
   Se y è in $sol(A, b)$ allora:

   $$A \cdot (x_{part} + y) = A \cdot x_{part} + A \cdot y = b + \vec{0} = b$$

   Se x' è in $sol(A, b)$ allora sia

   $$y = x' - x_{part} \quad cosicchd' \quad x' = x_{part} + y$$

   Di conseguenza si ha che

   $$A \cdot y = A \cdot (x' - x_{part} = Ax' - Ax_{part} = b - b = \vec{o}$$
   $$\Longrightarrow \quad x' = x_{part} + y$$

   Con:

   $$y \in sol(A, \vec{0})$$

   □

3. **Se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sono n-vettori allora $L(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ è sosttospazio di R^n.**

   Per convenzione le combinazioni lineari dell'insieme vuoto è il vettore nullo: $L(\varnothing) = \{\vec{0}\}$. Lo spazio generato da $v_1, v_2, .., v_n$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^n$, infatti:

   - non è vuoto: $\vec{0} \in L(v_1, v_2, .., v_n) = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_n \cdot v_n$
   - è chiuso rispetto alla somma: se $v, W \in L(v_1, v_2, .., v_n) \Longrightarrow$ allora anche $(v + w) \in L$ che corrisponde a $(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_n \cdot v_n) + (b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + .. + b_n \cdot v_n) = (a_1 + b_1) \cdot v_1 + (a_2 + b_2) \cdot v_2 + .. + (a_n + b_n) \cdot v_n$
   - è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare: se $v \in L(v_1, v_2, .., v_n) \Longrightarrow$ allora anche $t \cdot v \in L$ che corrisponde
     $t \cdot (a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + .. + a_n \cdot v_n) = (t \cdot a_1) \cdot v_1 + (t \cdot a_2) \cdot v_2 + .. + (t \cdot a_n) \cdot v_n$

4. **Se** $dimV = n$ **allora** n **vettori linearmente indipendenti formano una base.**

   Corollary 10.0.1 (Coneguenze del teorema della base V)**.** *:*
   Sia V uno spazio di dimensione finita, se $v_1, v_2, .., v_n$ *sono linearmente indipendenti e* $\dim(V) = n$ *allora* $\{v_1, v_2, .., v_k\}$ *è una base di* V*.*

   Dimostrazione. Siccome $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ è linearmente indipendente allora, per il teorema della base, è contenuto in una base B di V.
   Siccome B ha n elementi, ne segue che $B = v_1, v_2, .., v_n$.

   □

5. **Teorema del rango.**

   Theorem 10.1 (Teorema del rango)**.** *Il rango di una matrice A è uguale al rango della matrice trasposta, in simboli:*

   $$rk(A) = rk(A^T) \tag{152}$$

   (Infatti il numero di colonne della matrice (A) è pari al numero di righe della matrice A trasposta (A^T)*.)*

   Dimostrazione. :
   Supponiamo che A è $n \times m$ e sia $r = rk(A)$:
   - Possiamo estrarre dalle colonne di A una base per ottenere lo spazio colonna di A.
   - Sia B la matrice che ha per colonne gli elementi di questa base estratta.

   $\Longrightarrow$ allora abbiamo che ogni colonna di A è una combinazione lineare delle colonne di B
   - Ora consideriamo la matrice C tale che $A = B \cdot C$ quindi vale anche $A^T = C^T \cdot B^T$

   $\Longrightarrow$ Anche le colonne di A^T sono combinazioni lineari di C^T $\Longrightarrow$ lo spazio colonna di A^T è incluso nello spazio colonna di C^T, in simboli:

   $$R(A^T) \subseteq R(C^T)$$

   $\Longrightarrow rk(A^T) \subseteq rk(C^T)$

   - C essendo di dimensioni $r \times m$ ha rango:

   $$rk(C^T) \leq r \implies rk(A^T) \leq r = R(A)$$

   Abbiamo dimostrato che $rk(A^T) \leq rk(A)$.
   Ora consideriamo $A_0^T = (A^T)^T$ e $A_0 = A^T$, otteniamo che:

   $$rk\big((A^T)^T\big) \leq rk(A^T)$$

   Mettiamo a sistema le due condizioni:

   $$\begin{cases} rk(A^T) \leq rk(A) \\ rk\big((A^T)^T\big) \leq rk(A^T) \end{cases} \approx \begin{cases} rk(A^T) \leq rk(A) \\ rk(A) \leq rk(A^T) \end{cases} \implies rk(A) = rk(A^T)$$

   □

6. **Se $T : V \to W$ è lineare allora $T(\vec{0}) = \vec{0}$**

Definition 10.1 (Trasformazione lineare)**.** *Dati due spai vettoriali v e W, una trasformazione lineare da V in W è una funzione $f : A \to B$ tale che dati $v_1, v_2 \in V$ e $t \in \mathbf{R}$:*

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
- $f(t \cdot v_1) = t \cdot f(v_1)$

Una trasformazione lineare $T : V \to W$ conserva il vettore nullo, ovvero:

$$T(\vec{0}) = T(\vec{0} + \vec{0}) = T(\vec{0}) + T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Questo può essere usato per vedere se una trasformazione non è lineare, deriva dalla definizione di trasformazione lineare, perchè deve essere chiusa rispetto alla somma.

7. **Se $T : V \to W$ è lineare allora $Ker(T)$ è sottospazio di V.**

Definition 10.2 (Nucleo)**.** *In una trasformazione lineare i vettori del codominio sono i trasformati del dominio. Se $T : V \to W$ è una trasformazione lineare, allora è chiamato nucleo di T l'insieme:*

$$Ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = \vec{0}\} \tag{153}$$

Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $T : V \to W$ sono sottospazi vettoriali rispettivamente di V e di W.

Dimostrazione sottospoazio (nucleo). Per verificare che $Ker(T)$ è sottospazio di V dobbiamo vedere che:

\- È non vuoto (zero): $T(\vec{0}) = \vec{0}$ perchè ogni trasformazione lineare trasforma zero in zero, quindi $\vec{0} \in Ker(T)$

\- Chiuso rispetto alla somma: se due vettori v e w stanno in $Ker(T)$, allora nel nucleo $T(v + w) = T(v) + T(w) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ perchè qualsiasi trasformata del nucleo resta zero.

\- Chiuso rispetto al prodotto per scalare: se un vettori v sta in $Ker(T)$, allora nel nucleo $T(t \cdot w) = t \cdot T(w) = t \cdot \vec{0} = \vec{0}$ perchè qualsiasi trasformata del nucleo resta zero.

□

8. **Se $T : V \to W$ è lineare allora T è iniettiva se e solo se $Ker(T) = \vec{0}$** T è iniettiva se e solo se il nucleo è nullo, quindi:

$$iniettiva \iff Ker(T) = \{\vec{0}\}$$

Dimostrazione ($\implies$): iniettiva $\implies$ $Ker(T) = \{\vec{0}\}$. :
$T(v) = \vec{0} \quad , \quad T(\vec{0}) = \vec{0} \implies T(v) = T(\vec{0})$
Siccome T è iniettiva: $\quad v = \vec{0} \implies Ker(T) = \{\vec{0}\}$ □

Dimostrazione ($\Longleftarrow$): $Ker(T) = \{\vec{0}\} \implies$ iniettiva. :
Assumendo che $Ker(T) = \{\vec{0}\} \implies T(v) = T(w) \quad ,$ se è iniettiva allora $v = w$
Infatti $T(v) - T(w) = 0 \quad ,$ siccome T è lineare $\implies T(v) - T(w) = T(v - w) = \vec{0}$
Quindi sappiamo che $\begin{cases} (v - w) \in Ker(T) \\ Ker(T) = \vec{0} \text{ per ipotesi} \end{cases} \implies v - w = \vec{0} \implies v = w \implies$ è iniettiva.

□

9. **Teorema della dimensione.**

Theorem 10.2 (Teorema della dimesnione)**.** *:*
Se $T : V \to W$ è una trasformazione lineare tra due spazi vettoriali e V è di dimensione finita, allora:

- $Im(T)$ *è di dimensione finita*
- $dimV = dimKerT + dimImT$

Dimostrazione del teorema della Dimensione. :

Si sceglie una base $\{v_1, .., v_k\}$ di $Ker(T)$, si completa questa base ad una base di V.

Devo dimostrare che $\{T(v_{k+1}), .., T(v_n)\}$ è una base di $Im(T)$, quindi se lineamente indipendente.

Linearmente indipendente:

$$x_1 T(v_{k+1}) + x_2 T(v_{k+2}) + .. + x_{n-k} T(v_n) = \vec{0}$$

Allora siccome è una trasformazione lineare diventa:

$$T\Big(x_1\ v_{k+1} + x_2\ v_{k+2} + .. + x_{n-k}\ v_n\Big) = \vec{0}$$

Quindi siccome la trasformazione di zero è zero (deve stare in Ker(T)):

$$x_1\ v_{k+1} + x_2\ v_{k+2} + .. + x_{n-k}\ v_n = \vec{0} \implies \in Ker(T)$$

Di conseguenza:

$$x_1\ v_{k+1} + x_2\ v_{k+2} + .. + x_{n-k}\ v_n = y_1\ v_{k+1} + y_2\ y_{k+2} + .. + y_{n-k}\ v_n$$

Portando dall'altra parte:

$$x_1\ v_{k+1} + x_2\ v_{k+2} + .. + x_{n-k}\ v_n - y_1\ v_{k+1} - y_2\ y_{k+2} - .. - y_{n-k}\ v_n = \vec{0}$$

Siccome $\{v_1, v_2, .., v_k, v_{k+1}, .., v_n\}$ è base di V per ipotesi, allora sono vettori linearmente indipendenti che si annullano con:

$$x_1 = x_2 = .. = x_{n-k} = y_1 = y_2 = .. = y_{n-k} = 0$$

E posso scrivere vi come combinazione lineare dei vettori della base.

Se $T(v) \in Im(T)$ allora considero:

$v = x_1 v_{k+1} + x_2 v_{k+2} + .. + x_{n-k} v_n + y_1 v_{k+1} + y_2 y_{k+2} + .. + y_{n-k} v_n \implies$ trasf. lineare: $T(v) = x_1 T(v_{k+1}) + x_2 T(v_{k+2}) + .. + x_{n-k}$

Siccome $T(v_1) = T(v_k) = \vec{0}$ tolgo i vettori dipendenti dalla y:

$$\implies T(v) = span\Big(T(v_k + 1), .., T(v_n)\Big)$$

Siccome il vettore è insieme generatore ed è linearmente indipendente è una base di $Im(T)$:

$$\{(T(v_k + 1), .., T(v_n)\}$$

Di conseguenza vale:

$$dim\big(Im(T)\big) = n - k = dim(V) - dim\big(Ker(T)\big)$$

Che corrisponde a:

$$dim(V) = dim\big(Ker(T)\big) + dim\big(Im(T)\big)$$

$\square$

10. **Teorema di Rouchè-Capelli.**

Theorem 10.3 (Teorema di Rouchè-Capelli)**.** *Sia A una matrice $n \times m$ e si consideri il sistema lineare di n equazioni e m incognite $AX = b$. Il sistema ha soluzione se e solo se*

$$rk(A) = rk(A, b)$$

(quindi se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa).

In tal caso il sistema ha ∞^{m-r} soluzioni, dove $\quad r = rk(A) = rk(A, b)$ e m è il numero di incognite (numero colonne della matrice omogenea $n \times m$).

Dimostrazione del teorema di Rouchè-Capelli. :
- Parte 1:

Il sistema ha soluzione se e solo se:

$$\iff \exists\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \textit{tale che} \quad AX = b \implies x_1 A^1 + .. + x_m A^m = b$$

Che corrisponde a dire che hanno lo stesso spazio colonna:

$$L(A^1, .., A^m, b) = L(A^1, .., A^m \iff R(A) = R(A, b)$$

$R(A) = R(A, b) \iff rk(A) = rk(A, b)$ infatti:

. + ($\implies$) Se due matrici hanno lo stesso spazio colonna, allora hanno lo stesso rango in quanto il rango è la dimensione dello pazio colonna.

. + ($\impliedby$) Per il teorema della base se due matrici hanno:

$$\begin{cases} dim(R(A)) = dim(R(A, b)) \\ R(A) \subseteq R(A, b) \end{cases} \implies r(A) = R(A, b)$$

- Parte 2:

Resta solo da dimostrare che se $\quad r = rk(A) = rk(A, b) \quad$ allora il sistema ha ∞^{m-r} soluzioni, ma questo segue dal Teorema nullità più rango (Teorema 6.3):

$$dim(Sol(A, 0) = null(A) = m - rk(A) = m - r$$

$\square$

11. **Teorema e formula di Cramer.**

Definition 10.3 (Sistema crameriano)**.** *Un sistema di n equazioni e n incognite è detto crameriano. Se un sistema crameriano $AX = b$ è tale che $det(A) \neq 0$, allora ha un'unica soluzione.*

Theorem 10.4 (Teorema di Cramer)**.** *Sia A una matrice quadrata di ordine n, allora il sistema crameriano $AX = b$ ha un'unica soluzione se e solo se $det(A) \neq 0$.*

Dimostrazione del Teorema di Cramer. :
È presente una sola soluzione del sistema se e solo se:

$$\iff \infty^0 \; soluzioni \quad \implies n_A - rk(A) = 0 \implies r = n \implies det(A) \neq 0$$

□

È importante sottolineare che ll Teorema di Cramer non dice che se $det(A) = 0$ allora il sistema non ha soluzione, dice solo che se $det(A) = 0$ e il sistema ha soluzione allora la soluzione non è unica.
Quindi se $det(A) = 0$, allora il sistema non ha soluzioni o ne ha più di una.

Procedimento del metodo di Cramer:

(a) Consideriamo il sistema crameriano $AX = b$ tale che $det(A) \neq 0$

(b) Considero il vettore-colonna (che corrisponde a X vettore delle variabili) $S \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$

(c) Allora l'unica soluzione si calcola con:

$$s_i = \frac{det\big(A(i,b)\big)}{det(A)}$$

Dove $A(i, b)$ è la matrice che si ottiene sosttuendo alla i-esima colonna di A il vettore b.

(d) Quindi nel caso di s_1 di una matrice 3×3 la formula sarà: $s_1 = \frac{det\big(A(b,A^2,A^3)\big)}{det\big(A\big)}$

Dimostrazione del Metodo di Cramer. :

Considero S il vettore colonna dell'unica soluzione di un sistema lineare $AX = b$: $\quad S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$

Posso dire che

$$AS = b \implies s_1A^1 + s_1A^1 + .. + s_nA^n = b$$

Siccome:

$$A = (A^1, A^2, .., A^n) \implies A(i, b) = (A^1, A^2, .., b^i, .., A^n) = (A^1, .., s_1A^1 + s_2A^2, .., s_nA^n, .., A^n)$$

$$det\big(A(i,b)\big) = det(A^1, A^2, .., b^i, .., A^n) = (A^1, .., s_1A^1 + s_2A^2, .., s_nA^n, .., A^n) = prop.\ multilinearita\ determ. =$$
$$= s_1 \cdot det(A^1, .., A^i, .., A^n) + s_2 \cdot det(A^1, .., A^i, .., A^n) + .. + s_n \cdot (A^1, .., A^i, .., A^n) = ***$$

L'unico elemento che non si annulla è l'i-esimo elemento:

$$*** = 0 + 0 + s_i \cdot det(A) + 0 + 0 = s_i \cdot det(A) \qquad \implies \qquad s_i = \frac{det\big(A(i,b)\big)}{det\big(A\big)}$$

□

12. **Se A è un matrice quadrata di ordine n allora A è invertibile se e solo se $rk(A) = n$**

Theorem 10.5. *Sia A una matrice quadrata di ordine n, allora il rango di A è uguale alla dimensione della matrice se e solo se il determinante è diverso da zero:*

$$rk(A)_n = n \iff det(A) \neq 0 \tag{154}$$

In particolare $v_1, v_2, .., v_n$ in $\mathbf{R}^n$ formano una base di $\mathbf{R}^n$ se e solo se il determinante della matrice che ha per righe (o per colonne) i vettori dati è diverso da zero.

Dimostrazione ($\Longrightarrow$): $T_A n$ suriettiva $\Longrightarrow rk(A) = n$. :
Essendo T_A suriettiva:

$$\Longrightarrow Im(T_A) = \mathbf{R}^n \Longrightarrow R(A) = \mathbf{R}^n \Longrightarrow dim(R(A) = n \Longrightarrow rk(A) = n$$

□

Dimostrazione ($\Longleftarrow$): $rk(A) = n \Longrightarrow T_A n$ suriettiva. :

$$dim(Im(T_A)) = dim(\mathbf{R}^n) \Longrightarrow Im(T_A) \subseteq R^n$$

Per un corollario del teorema della base (sia V uno spazio di dimensione finita, se $v_1, v_2, .., v_k$ sono linearmente indipendenti in V, allora $k \leq dim(V)$):

$$\Longrightarrow Im(T_A) = \mathbf{R}^n \Longrightarrow T_A \quad suriettiva$$

□

13. **λ è autovalore di A se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico.**

Theorem 10.6 (Determinante, polinomio caratteristico e autovalori)**.** *:*
Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A, cioè è autovalore di A se e solo se:

$$p_a(\lambda) = 0$$

Dimostrazione del teorema. :
Considerato un autovalore λ, allora $\Longleftrightarrow$:
- esiste v non nullo tale che $\quad Av = \lambda v$
- esiste v non nullo tale che:

$$Av - \lambda v = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad Av - \lambda Iv = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad (AI\lambda)v = \vec{0}$$

- esiste v non nullo tale che $\quad (A - I\lambda)v = \vec{0}$
- il sistema $(A - \lambda I)X = \vec{0}$ ha una soluzione non nulla se e solo se:

$$\Longleftrightarrow det(A - \lambda I) = p_a(\lambda) = 0$$

□

14. **Se λ_1, λ_2 sono autovalori distinti di una matrice A allora i relativi autovettori sono linearmente indipendenti**

Lemma 10.7 (Lemma dell'indipendenza lineare degli autovettori). *:*
Sia A una matrice quadrata. Siano $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ autovalori distinti di A. Se v_i è autovettore relativo a λ_i , allora i vettori $v_1, .., v_r$ sono linearmente indipendenti. (Che corrisponde ad affermare che autovettori relativi a autovalori distinti sono linearmente indipendenti).

Dimostrazione del lemma in un caso particolare. :
- Dimostriamo il lemma solo nel caso $r = 2$.
- Siano v_1 e v_2 autovettori relativi agli autovalori λ_1, λ_2.
Stiamo assumendo che $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Supponiamo che:

$$x\, v_1 + y\, v_2 = \vec{0}$$

E verifichiamo che $x = y = 0$
- Da $xv_1 + yv_2 = \vec{0}$ otteniamo che:

$$\lambda_1 x v_1 + \lambda_1 y v_2 = \vec{0}, Axv_1 + Ayv_2 = \vec{0} \Leftrightarrow x\lambda_1 v_1 + y\lambda_2 v_2 = \vec{0}$$

Sottraendo le due equazioni si trova

$$y\,(\lambda_2 - \lambda_1)\, v_2 = \vec{0}$$

- Siccome $\lambda_1 \neq \lambda_2$, abbiamo che $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Siccome v_2 è un autovettore, abbiamo che $v_2 \neq \vec{0}$ Dall'equazione:

$$y\,(\lambda_2 - \lambda_1)\, v_2 = \vec{0}$$

concludiamo che y = 0.
Dall'equazione $xv_1 + yv_2 = \vec{0}$ otteniamo $xv_1 = \vec{0}$.
Siccome v_1 è un autovettore, abbiamo che $v_1 \neq \vec{0}$, quindi x = 0.
Quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

□

15. **Un autovalore semplice è regolare.**

Definition 10.4 (Autovalore semplice)**.** *Un autovalore si dice semplice se $M_a(\lambda) = 1$*

Definition 10.5 (Autovalore regolare)**.** *Un autovalore si dice regolare se $M_g(\lambda) = m_a(\lambda)$*

Un autovalore semplice è anche regolare.

Dimostrazione. :
Se λ è autovalore semplice, allora:

$$m_a(\lambda) = 1$$

Quindi

$$m_g(\lambda) \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad m_g(\lambda) = dim(\mathbf{R}^n) \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad m_g(\lambda) = 1 = m_a(\lambda)$$

□

16. **Il 1° criterio di diagonalizzabilità.**

Lemma 10.8 (Lemma dell'indipendenza lineare degli autovettori). *:*
Sia A una matrice quadrata. Siano $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ autovalori distinti di A. Se v_i è autovettore relativo a λ_i , allora i vettori $v_1, .., v_r$ sono linearmente indipendenti. (Che corrisponde ad affermare che autovettori relativi a autovalori distinti sono linearmente indipendenti).

Come conseguenza diretta del lemma precedente, si ottiene il corollario "Primo criterio di diagonalizzabilità":

Corollary 10.8.1 (Primo criterio di diagonalizzabilità)**.** *:*
Se una matrice A quadrata di ordine n ha n autovalori distinti allora la matrice è diagonalizzabile.

Dimostrazione del primo criterio di digonazzibalità. :
gli n autovettori $v_1, .., v_n$ relativi agli n autovalori distinti sono indipendenti in $\mathbf{R}^n$ e quindi sono una base.

□

17. **Enunciato del II criterio di diagonalizzabilità e calcolo di una base formata da autovettori.**

Theorem 10.9 (Secondo criterio di diagonalizzazione)**.** *:*
Una matrice quadrata A di ordine n è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche è n e ogni autovalore è regolare.

Quindi significa che per ogni autovalore ci sono abbstanza autovettori. Il polinomio caratteristico si fattorizza solo in fattori lineari ($q(t)$ è costante), quindi polinimio ha n radici contando le molteplicità.

Il secondo criterio di diagonalizzazione è necessario e sufficente.
La dimostrazione del secondo criterio descrive anche un modo per calcolare una base di autovettori una volta verificato che A è diagonalizzabile.

Dimostrazione del secondo criterio di diagonalizzazione. :
Dimostriamo solo che se vale il secondo criterio allora A è diagonalizzabile.
Siano $\lambda_1, .., \lambda_r$ gli autovalori distinti di A. Sia B_i una base dell'autospazio relativo a λ_1. Sia B l'unione delle basi B_i, ricordiamo che:

$$\#B_i = dim(\mathbf{R}^n_{\lambda i} = m_g(\lambda_i)$$

Chiaramente B ha:

$$m_g(\lambda_1) + .. + m_g(\lambda_r) = m_a(\lambda_1) + .. + m_a(\lambda_r) = n\, elementi$$

Sappiamo per ipotesi che:

$$m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) \quad \forall\ \lambda_i$$

Basta verificare che B è indipendente, in quanto formata da autovettori $\implies$ B è base.

Gli elementi che stanno in B_i distinte sono indipendenti (per Lemma dell'indipendenza lineare degli autovettori). Elementi che stanno nella stessa B_i sono indipendenti, quindi gli elementi di B sono indipendenti. Siccome B ha n elementi indipendenti è una base di formata da autovettori di A. In simboli:

$$m_i = m_g(\lambda_i) \qquad \text{Base di } \mathbf{R}^n_{\lambda i} \quad B = \{v_{i1}, .., v_{imi}\}$$

$$B = \{v_{11}, .., v_{1m1}, v21, ..v_{2m2}, ..., v_{ri}, .., v_{rmr}\}$$

La combinazione lineare deve avere come unica soluzione il vettore $\vec{0}$ per essere linearmente indipendente:

$$\underbrace{x_1 v_{11}, .., x_1 v_{1m1}}_{w_1} + \underbrace{..........}_{w_2} + \underbrace{x_{r1} v_{ri}, .., x_{r1} v_{rmr}}_{w_r} = \vec{0} \quad \implies \quad w_1 + w_2 + ... + w_r = \vec{0}$$

Sappiamo che $w_i \in \mathbf{R}^n_{\lambda_i}$ quindi stanno negli autospazi, quindi o sono zero o sono autovettori. Ma non possono essere autovettori perchè sarebbe una combinazione lineare di autovettori relativi ad autovalori distinti che è ha i coefficienti diversi da zero (sono tutti 1 i coefficienti). Questo è assurdo perchè sono indiependenti.
Se w_i sono autovettori $\quad w_1 + w_2 + ... + w_r = \vec{0}\quad$ è combinazione lineare di autovettori indipendenti con coefficienti non nulli (applicazione del Lemma).

Questo implica che $w_i = 0$ per ogni i di conseguenza:$w_i = \vec{0} = x_{i1} v_{i1} + ... + x_{imi} \cdot v_{imi}$
Quindi $\{v_{i1}, ..., v_{imi}\}$ è indipendente $\implies$ $x_{ij} = 0$ $\implies$ B è indipendente.

□

18. **Se $\{v1, \ldots, vk\}$ è un insieme ortogonale allora è linearmente indipendente.**

Definition 10.6 (Insieme di vettori ortogonali)**.** *un insieme $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ in uno spazio euclideo V si dice ortogonale se $v_i \neq \vec{0}$ per ogni i e $v_i \cdot v_j = 0$ con $i \neq j$. In simboli:*

$$\begin{cases} v_i \neq \vec{0} & \forall\, i \\ v_i \cdot v_j = 0 \quad (v_1 \perp v_2) & \forall\, i \neq j \end{cases} \implies \textit{ortogonali}$$

Dato un insieme ortogonale $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ si può costruire un insieme ortonormale $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$ ponendo:

$$w_i = \frac{v_i}{||v_i||}$$

Dimostrazione: insiemi ortogonali sono sempre linearmente indipendenti. :
Se $\quad x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_rv_r \quad$ allora $\quad (x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_rv_r) = 0 \cdot v_i = 0$

Quindi $\quad x_1(v_1 \cdot v_i) + x_2(v_2 \cdot v_i) + x_i(v_i \cdot v_i) + \cdots + x_r(v_r \cdot v_i) = 0$

Siccome il prodotto di vettori ortogonali, per definizione, è nullo ogni termine $\quad v_i \cdot v_j = 0$.
L'unico termine che sopravvive è $\quad v_i \cdot v_i \neq 0\, \forall\, v_i$ in quanto per la proprietà definitoria di prodotto scalare, un prodotto fra un vettore e se stesso è nullo se e solo se il vettore è nulla, ma per ipotesi esso non è nullo.

□

19. **Se A è una matrice simmetrica, λ_1, λ_2 sono autovalori distinti di A e v_1, v_2 sono i relativi autovettori allora v_1, v_2 sono ortogonali.**

Theorem 10.10. *:*
Se A è una matrice quadrata di ordine n simmetrica reale e v, w sono due autovettori di A relativi ad autovalori distinti, allora v e w sono ortogonali.

Dimostrazione. :
Consideriamo λ, μ gli autovalori relativi a v e w tali che $\quad Av = \lambda v$ e $\quad Aw = \mu w$
Quindi abbiamo che:

$$\lambda\, v \cdot w = \mu\, v \cdot w \quad \implies \quad (\lambda - \mu)\, v \cdot w = 0$$

Siccome gli autovalori sono distiti $\quad \lambda \neq \mu$, di conseguenza il prodotto scalare $\quad v \cdot w = 0$, che si ottiene solo se i vettori o sono perpendicolari o uno dei due è nullo. Siccome non possono essere nulli, $\implies \quad v \perp w$ ortogonali

□

20. **Enunciato del teorema spettrale e calcolo di una matrice modale ortogonale.**

Theorem 10.11 (Teorema spettrale, enunciato 1)**.** *:*
una matrice A reale quadrata di ordine n è simmetrica se e solo se esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di A. In particolare ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

Theorem 10.12 (Teorema spettrale, enunciato 2)**.** *:*
Sia A una matrice quadrata, allora esiste una matrice ortogonale M tale che:

$$M^{-1} A\, M = M^T A\, M$$

è diagonale se e solo se A è simmetrica

Metodo per calcolare una base di autovettori ortonormale:

(a) Sia A una matrice simmetrica e siano $\lambda_, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori distinti di A.

(b) Per ogni autovalore si calcola una base dell'autospazio e la si ortonormalizza mediante Gram-Schmidt, quindi si trova una base ortonormale B_i dell'autospazio relativo a λ_1.

(c) Sia $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$. Se v è in B_i e w è in B_j con $i \neq j$, allora $v \cdot w = 0$.
(d) Se v e w stanno tutti e due in B_i , allora $v \cdot w = 0$ perché B_i è ortogonale.
(e) Quindi B è un insieme ortogonale.
(f) Siccome A è diagonalizzabile B ha n elementi e quindi è una base ortonormale.
(g) la matrice modale è la matrice che ha per colonne gli elementi di una base di autovettori.

21. **La formula dell'equazione cartesiana del piano passante per tre punti non allineati.** Dati tre punti non allineati (vettori associati ai punti sono linearmente indipendenti o si considera e vettori che congiungono i punti e si vedono se sono allineati):

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad P_1(x_1, y_1, z_1) \quad , \quad P_2(x_2, y_2, z_2)$$

Cerchiamoo di determinare l'equzione parametrica del piano passante per questi tre punti:

- Tramite equazione parametrica:
  (a) Poniamo il passaggio per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$
  (b) Come direzione del piano consideriamo $P_0\vec{P}_1 \quad , \quad P_0\vec{P}_2$
  (c) L'equazione parametrica del piano è:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t_1(y_1 - y_0) + t_2(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + t_2(z_1 - z_0) \end{cases}$$

- Tramite equazione cartesiana:
  (a) Il punto $P = (x, y, z) \in \alpha$ se e solo se il vettore $P_0\vec{P}$ è combinazione lineare dei vettori $P_0\vec{P}$ e $P_0\vec{P}_2$
  (b) Quindi significa trovare per quali valori:

$$det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix}$$

  (c) Questa è l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti dati. In altro modo (che alla fine è lo stesso) si può risolvere il sistema crameriano dove si impone il passaggio per i tre punti e si trovano i parametri dell'equazione cartesiana generica del piano.
  (d) In teoria avremmo dovuto verificare prima del calcolo dell'equazione che i tre punti non sono allineati, ma questo passaggio non serve perchè è già implicito nel calcolo dell'equazione. Questo porterebbe a un determinate che è nullo.

22. **Discussione della posizione reciproca di una retta ed un piano nello spazio.** Sia il piano α e la retta r di equazione:

$$\alpha: \ ax + by + cz = d \qquad , \qquad r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Volgiamo verificare se piano e retta sono incidenti o paralleli. Per fare questo studiamo l'intersezione del piano con la retta, chiaramente sfrutteremo il Teorema di Rouche Capelli.
L'intersezione del piano con la retta è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Sia A la matrice dei coefficienti e $\vec{b}$ il vettore dei termini noti del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \qquad tc \quad rk(A) =\geq 2$$

Allora la posizione reciproca del piano e della retta sarà:

rkA	$rk(A, \vec{b})$	Soluzioni	
2	2	∞^1	la retta sta sul piano
2	3	nessuna	piano e retta paralleli e distinti
3	3	1	piano e retta incidenti

Figura 19: Posizione reciproca fra piano e retta

23. **Discussione della posizione reciproca di due rette nello spazio.** Date le rette r, s di equazione cartesiana:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \qquad , \qquad s: \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

Vogliamo verificare la loro posizione reciproca. Per fare questo studiamo la loro intersezione che è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

Siano A la matrice dei coefficienti e $\vec{b}$ il vettore dei termini noti del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d'_1 \\ d'_2 \end{pmatrix}$$

Allora la posizione reciproca delle rette sarà:

rkA	$rk(A, \vec{b})$	Soluzioni	
2	2	∞^1	rette coincidenti
2	3	nessuna	rette parallele e distinte
3	3	1	rette incidenti
3	4	nessuna	rette sghembe

Figura 20: Posizione reciproca fra due rette

24. **Il principio di ortogonalità.** Sia V uno spazio vettoriale e sia $(v \cdot w)$ un prodotto scalare su V.
Sia U un sottospazio di V.
Allora, dato $v \in V$, il vettore di U che minimizza la distanza da v è la proiezione ortogonale di v su U:

$$min_{u \in U} ||v - u|| = ||v - p_U(v)|| = ||p_{U^\perp}(v)|| \tag{155}$$

Questo vettore è anche unico.

Dimostrazione. :
Sia u_v la priezione ortogonale di v su U. Quindi $w_v = v - u_v$ è ortogonale a U
Se $u \in U$ allora:

$$||v-u||^2 = ||v-u+u_v-u_v||^2 = \big(v-u_v-(u-u_v)\big)\cdot\big(v-u_v-(u-u_v)\big) =$$
$$= (v-u_v)\cdot(v-u_v) - 2(v-u_v)\cdot(u-u_v) + (u-u_v) + (u-u_v)\cdot(u-u_v) =$$
$$= (v-u_v)\cdot(v-u_v) - \underbrace{2w_v}_{\in w^\perp} \cdot \underbrace{(u-u_v)}_{\in W} + (u-u_v)\cdot(u-u_v) =$$
$$= ||v-u_v||^2 + ||u-u_v||^2 \geq ||v-u_v||^2$$

□

25. **La formula per la distanza tra due spazi affini.**

Definition 10.7 (Distanza fra spazi affini)**.** *:*
Indichiamo con $d(P, Q)$ *la distanza tra due punti, quindi:*

$$d(P, Q) = \big|\big|\vec{PQ}\big|\big|$$

Dati due spazi affini A, B nel piano o nello spazio si definisce la distanza $d(A, B)$ tra A e B come la minima distanza tra i punti di A e quelli di B.
In simbli:

$$d(A, B) = min_{p \in A, Q \in B} d(P, Q) \tag{156}$$

Se $A = P + U$ e $B = Q + W$ sono spazi affini con giaciture U, W rispettivamente allora:

$$d(A, B) = \big|\big|p_{(U+W)^\perp}(\vec{PQ})\big|\big| \tag{157}$$

Dimostrazione. :
Siano $A = P + U$ e $B = Q + W$ spazi affini.
Siccome $p_{(U+W)}(\vec{PQ} \in (U + W)$ abbiamo che:

$$p_{(U+W)}(\vec{PQ} = u_0 + w_0 \qquad con \quad u_0 \in U \quad , \quad w_0 \in W$$

Quindi $P_0 = P + u_0$, $Q_0 = Q - w_0$ sono punti di a e B rispettivamente.
Se P' e Q' sono punti qualsiasi di A e B allora $P' = P + u'$ e $Q' = Q + w'$, quindi:

$$d(P', Q') = ||\vec{P'Q'}|| = ||\vec{PQ} - (u' - w')|| \underbrace{\geq}_{***} ||p_{(U+W)^\perp}(\vec{PQ})|| =$$

***: sfrunttando il principio di ortogonalità.

$$||\vec{PQ} - p_{(U+W)}(\vec{PQ})|| = ||\vec{PQ} - u_0 - w_0|| = ||\vec{P_0Q_0}|| = d(P_0, Q_0)$$

Di conseguenza:

$$d(P', Q') \geq d(P_0, Q_0) \qquad \Longrightarrow \qquad d(A, B) = d(P_0, Q_0) = \left|\left|p_{(U+W)^\perp}(\vec{PQ})\right|\right|$$

□

26. **La formula per la distanza di un punto da una retta nel piano.** Sia r la retta di equazione $ax + by + c = 0$.
Siccome $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ è un vettore normale alla retta allora la distanza di P_0 da r è:

$$d(P_0, r) = \left|\left|p_{\vec{n}}(\vec{PP_0})\right|\right| = \left|\left|\left(\frac{\vec{PP_0} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||^2}\right)\vec{n}\right|\right| = \frac{\left|\vec{PP_0} \cdot \vec{n}\right|}{||\vec{n}||}$$

Esplicitando $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e usando il fatto che $ax + by = -c$.
Troviamo che la formula della distanza in $\mathbf{R}^2$ è:

$$d(P_0, r) = \frac{\left|a\,x_0 + b\,y_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{158}$$

Dimostrazione. :
Considero il punto A generico e il punto B appartenente alla retta r:

$$A = P_0 + \{\vec{0}\} \qquad , \qquad B = r = P_0 + L\big((v)\big)$$

La distanza tra i punti A e B sarà:

$$d(A, B) = \left|\left|P_{\left(\{\vec{0} + \{L(v)\}\right)^\perp}(\vec{P_0P})\right|\right| = \left|\left|P_{\underbrace{L(v)^\perp}_{\vec{n}\ di\ r}}(\vec{P_0P})\right|\right| = \left|\left|P_{\vec{n}}(\vec{P_0P})\right|\right|$$

Esplicitiamo $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Quindi la formula ricavata diventa:

$$d(P_0, r) = \left|\left|\frac{(\vec{P_0P} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||^2}\vec{n} = \frac{\left|(\vec{P_0P} \cdot \vec{n}\right|}{||\vec{n}||} = \frac{\left|(x - x_0)\,a + (y - y_0)\,b\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|ax + by - x_0a - y_0b\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = ***\right.\right.$$

Siccome $ax + by = -c$, allora sostituendo otteniamo (poi si cambia segno tanto siamo dentro al valore assoluto:

$$*** = \frac{\left|-c - x_0a - y_0b\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad d(P_0, r) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Analogamente si dimostra in $\mathbf{R}^3$ e si generalizza in $\mathbf{R}^n$.

□

27. **La formula per la distanza tra due rette sghembe.** Date due rette sghembe in forma vettoriale:

$$r : P = P0 + tv \qquad , \qquad s : P = Q0 + tw$$

Si ha che la minima distanza tra le due rette è la lunghezza della proiezione $P_0\vec{Q}_0$ di lungo un vettore ortogonale sia a v che a w.
Da questa osservazione si ricava la formula generale:

$$d(r,s) = \frac{\left|P_0\vec{Q}_0 \cdot (v \wedge w)\right|}{||v \wedge w||} \tag{159}$$

Se consideriamo le rette in equazione parametrica:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \qquad , \qquad s : \begin{cases} x = x_0' + tl' \\ y = y_0' + tm' \\ z = z_0' + tn' \end{cases}$$

Allora la formula diventa:

$$d(r,s) = \frac{\left| det \begin{pmatrix} x_0' - x_0 & y_0' - y_0 & z_0' - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(mn' - m'n)^2 + (ln' - l'n)^2 + (lm' - l'm)^2}} \tag{160}$$

Dimostrazione. :
In $*A*$ sfruttiamo il fatto che le rette sghembe siamo linearmente indipendenti, quindi:

$$rk\Big(L(v) + L(w)\Big) = 2 \quad \Longrightarrow \quad rk\Big(L(v) + L(w)\Big)^{\perp} = dim(\mathbf{R}^3) - rk\Big(L(v) + L(w)\Big) = 3 - 2 = 1$$

Quindi possiamo trovare:

$$d(r,s) = \left|\left|P_{\left(L(v)+L(w)\right)^{\perp}}\left(P_0\vec{P}_0\right)\right|\right| = *A* = \left|\left|P_{(v\wedge w)}\left(P_0\vec{Q}_0\right)\right|\right| = \frac{\left|P_0\vec{Q}_0 \cdot (v \wedge w)\right|}{||v \wedge w||^2}(v \wedge w) = \frac{\left|P_0\vec{Q}_0 \cdot (v \wedge w)\right|}{||v \wedge w||}$$

□

28. **La relazione tra la matrice di una quadrica e la matrice della quadrica rototraslata.**
Equazione della rototraslazione di una quadrica:
Se Q è una quadrica di equazione $p(X) = 0$ e R è una rototraslazione, allora la quadrica $R(Q)$ ha equazione:

$$p\big(R^{-1}(X)\big) = 0 \tag{161}$$

Dimostrazione. :
Il punto X sta su $R(Q)$ se e solo se $\quad X = R(X') \quad$ con X' su Q.
Segue che $\quad X = R^{-1}(X) \quad$ e, siccome X' sta su Q, allora $\quad p(X') = 0$.
Quindi X sta su $R(Q)$ se e solo se:

$$0 = p(X') = p\big(R^{-1}(X)\big)$$

□

Equazione della rototraslazione di una quadrica:
Sia Q una quadrica.
Sia R una rototraslazione.
Sia A la matrice di Q.

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix} \qquad , \qquad M = \begin{pmatrix} M_0 & v \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione di Q è $p(X) = 0$ con:

$$p(X) = (X^T \;\; 1)\, A \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \tag{162}$$

Inoltre, sia M la matrice di R , quindi:

$$\begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia Q la vecchia qudrica prima della tototraslazione, e $R(Q)$ l'equazione della trasformata:

$$0 = P(X) \qquad , \qquad P\big(R^{-1}(X)\big) = 0$$

Allora abbiamo:

$$0 = P\big(R^{-1}(X)\big) = \begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \left(M^{-1} \begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix}\right)^T A\, M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = ***$$

Sfruttando le proprietà della trasposta:

$$*** = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}^T (M^{-1})^T A\, M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad (X^T \;\; 1)(M^{-1})^T A\, M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza la matrice di $R(Q)$ è:

$$\big(M^{-1}\big)^T A\, M^{-1} \tag{163}$$

dove M è la matrice di R.

29. **La matrice di Gram di una forma quadratica è unica.**

Theorem 10.13 (Teorema della matrice di Gram)**.** *:*
Una forma quadratica $q(X)$ si può quindi scrivere in modo compatto come:

$$q(X) = X^T\, S\, X$$

Dove S è una matrice simmetrica.
La matrice S è unica ed è detta matrice di Gram di una forma quadratica.

Dimostrazione. :
Supponiamo per assurdo che esistano due matrici simmetriche:
- Sulla diagonale:
Si considerano le singole colonne moltiplicando per la base canonica:

$$q(e_i) = e_i^T\, S\, e_i = e_i^T\, S^i = s_{ii} \qquad e \qquad q(e_i) = e_i^T\, S'\, e_i = e_i^T\, S^i\prime = s'_{ii}$$

Quindi abbiamo visto che sulla diagonale gli sono uguali le matrici S e S': $\quad s_{ii} = s'_{ii}$

- Fuori dalla diagonale:
Relativo a S:

$$q(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T S(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T (S^i + S^j) = s_{ii} + s_{ji} + s_{ij} + s_{jj}$$

Relativo a S':

$$q(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T S'(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T (S^i\prime + S^j\prime) = s'_{ii} + s'_{ji} + s'_{ij} + s'_{jj}$$

Di conseguenza, sfruttando il fatto che sulla diagonale le matrici sono uguali ($\quad s_{ii} = s'_{ii} \quad$):

$$s_{ii} + s_{ji} + s_{ij} + s_{jj} = s'_{ii} + s'_{ji} + s'_{ij} + s'_{jj} = s_{ii} + s'_{ji} + s'_{ij} + s_{jj}$$

Ora sfruttiamo l'ipotesi della simmetria, ovvero che $S = S^T$:

$$\underbrace{S_{ij} + S_{ji}}_{=\ x\ simm.} = \underbrace{S'_{ij} + S'_{ji}}_{=\ x\ simm.}$$

Allora:

$$\Longrightarrow \qquad 2\,S_{ij} = 2\,S'_{ij} \qquad \Longrightarrow \qquad S = S'$$

□

30. **Una forma quadratica q su $\mathbf{R}^n$ è semidefinita positiva se e solo se ha segnatura $(r, 0)$ ed è definita positiva se e solo se ha segnatura $(n, 0)$.**

Theorem 10.14 (Segnatura con forma semidefinita e definita positiva)**.** *:*

(a) La forma q su $\mathbf{R}^n$ è semidefinita positiva se e solo se ha segnatura $(r, 0)$
(b) La forma q su $\mathbf{R}^n$ è definita positiva se e solo se ha segnatura $(n, 0)$

Dimostrazione ($\Longleftarrow$). :
Sia S la matrice di Gram di $q(X)$, assumiamo che abbia segnatura $(r, 0)$ e dimostriamo che $r(x) \geq 0$ ovvero che gli autovalori di S sono tutti positivi.

Per il teorema spettrale esiste una matrice ortogonale M tale che:

$$M^T S M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad , \quad con \quad \lambda_i > 0$$

Sia $\quad X' = M^T X \quad \Longrightarrow \quad MX' = MM^T X = X \quad$ cosicchè $\quad X = MX'$

Calcoliamo $q(X)$:

$$q(X) = X^T S X = (MX')^T S M X' = prop.trasposta = X' M^T S M X' = (X')^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} X'$$

Esplicitiamo X' , scrivendolo come: $\quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

Quindi sostiuiamo e si ottiene:

$$q(X) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \cdots + \lambda_r (x'_r)^2 \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q(x) \geq 0$$

Quindi $q(X)$ è semidefinita positiva.

- Se $r < n$ allora è chiaro che possiamo avere $q(X) = 0 \quad con \quad X \neq \vec{0}$
Ad esempio se scelgo $\quad X = Me_{r+1} \quad$ allora $\quad X' = e_{r+1} \quad$ quindi:

$$q(X) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_r (x'_r)^2 = 0$$

- Se invece $r = n$ e $q(X) = 0$ allora:

$$q(X) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_n (x'_n)^2 = 0$$

da cui si ottiene: $\quad x'_1 = x'_2 = \cdots = x'_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad X' = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad X = MX' = \vec{0}$
Quindi se la segnatura è (n,0) la forma è definita positiva. □

Dimostrazione ($\Longrightarrow$). :
Rimane solo da vedere l'impliczione diretta, ovvero che se $q(X$ è semidefinita positiva allora la segnatura di $q(X)$ è $(r, 0)$, cioè tutti gli autovalori della matrice di Gram sono maggiori o uguali a zero.

Se λ è un autovalore della matice di Gram S di $q(X)$ e v è un vettore relativo all'autovalore λ, allora:

$$0 \leq q(v) = v^T S v = v^T \lambda v = \lambda ||v||^2$$

Siccome $||v|| > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda \geq 0$

□

31. **Calcolo della segnatura di una forma quadratica su $\mathbf{R}^n$.**

Definition 10.8 (Numero di variazioni). *:*
Dato il polinomio:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{r} a_j\, t_j^i \qquad , \quad a_j \neq 0 \quad , \quad 0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_r$$

Il numero di variazioni di segno è il numero di j tali che:

$$sgn(a_j) \neq sgn(a_{j-1})$$

Esempio per chiaririre, nel polinomio $p(t)$ il numero di variazioni è 2, infatti (non si contano i termini co coefficiente nullo):

$$p(t) = -2t^7 + 3t^4 - t^2 - 1 \qquad // \qquad -1 \to -1 \to +3 \to -1 \qquad // \quad 2\, variazioni$$

Theorem 10.15 (Teorema del criterio di Cartesio). *:*
Il numero di variazioni di un polinomio è il massimo numero di radici positive del polinomio.
Se il polinomio ha solo radici reali allora il numero di variazioni è il numero di radici positive contato con la loro molteplicità.

Applicazione del criterio di Cartesio al calcolo della segnatura di una matrice simmetrica:

- Se A è simmetrica allora il polinomio caratteristico ha solo radici reali, quindi il numero di autovalori positivi è uguale al numero di variazioni del polinomio caratteristico:

$$\#\, autovalori\, positivi \ = \#\, n.\, variazioni$$

- Il numero di autovalori nulli è uguale alla nullità di A:

$$\#\, autovalori\, nulli \ = dim\big(N(A)\big) = null(A)$$

- Il numero di autovalori negativi è uguale a:

$$\#\, autovalori\, negativi \ = n - null(A) - \#\, autovalori\, positivi \ = rk(A) - \#\, n.\, variazioni$$

Sapendo queste relazioni, possiamo riscivere la segnatura (r, s) di una forma quadratica $q(X)$ con:

- r : numero di variazioni del polinomio caratteristico dell amtrice di Gram S di $q(X)$
- $s = rk(S) - r$

32. **Gli invarianti affini e la classificazione affine di una conica.**
Data l'equazione di una conica sia A la sua matrice:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix} \quad , \quad A_0 = A_0^T \in \mathbf{R}^{2\times 2}$$

Gli invarianti metrici della conica sono

- Invariante cubico: $I_3 = det(A)$
- Invariante quadratico: $I_2 = det(A_0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$
- Invariante lineare: $I_1 = tr(A_0) = \lambda_1 + \lambda_2$

Gli invarianti metrici rimangono invariati se si applica una rototraslazione alla conica.
Dal segno degli invarianti metrici è possibile (tranne in un caso) classificare affinemente la conica.

Elenco delle coniche:

- Coniche non degeneri ($I_3 \neq 0$):
  - Ellisse immaginaria: $I_2 > 0 \quad , \quad I_1 I_3 > 0$
  - Ellisse: $I_2 > 0 \quad , \quad I_1 I_3 < 0$
  - Iperbole: $I_2 < 0$
  - Parabola: $I_2 = 0$

- Coniche degeneri ($I_3 = 0$):
  - Ellisse degenere (punto): $I_2 > 0$
  - Iperbole degenere (due rette incidenti): $I_2 < 0$

    $$rk(A_0) = 2 \qquad rk(A) = 2 \qquad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$$

  - Retta doppia: $I_2 = 0 \quad , \quad rk(A) = 1$

    $$rk(A_0) = 1 \qquad x^2 = 0$$

  - Rette parallele: $I_2 = 0 \quad , \quad I_1 f' < 0$
  - Rette immaginarie: $I_2 = 0 \quad , \quad I_1 f' > 0$

  Nei casi degeneri con $I_2 = 0$, gli invarianti metrici non bastano: bisogna calcolare f' :

  $$non\ ha\ senso: \quad f' = \frac{det(A)}{det(A_0)} \qquad \Longrightarrow \qquad f' = P(c_0) \quad , \quad c_0 = \ centro$$

Riferimenti bibliografici