11 Calcolo integrale

11.1 Definizioni di integrale

11.1.1 Significato geometrico

L'integrale serve per calcolare l'area di una figuara non elementare (non riconducibili a rettangoli).
L'integrale rappresenta il valore dell'area sottesa dal grafico della funzione in un dato intervallo.

11.1.2 Esempio con parabola

Consideriamo la funzione parabole $f(x) = x^2$ nell'intervallo $I = [0, 1]$, abbiamo che $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \in [0, 1], y \in [0, x^2]\}$
Suddiavidiamo l'intervallo $I = [0, 1]$ in intervalli I_k con $n \geq 1$:

$$I = \bigcup_{k=0}^{n-1} I_k \quad , \quad I_k := \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big] \tag{189}$$

Osserviamo che $K = 0, 1, ..n-1$, $\frac{k}{n}$ rappresenta la posizione sull'asse delle ascisse e $\frac{1}{n} = |I_k|$ rappresenta la lungezza di una singola partizione.

- Approssimiamo A_f con l'unione di rettangoli R_k:

$$\tilde{R_n} := \bigcup_{k=0}^{n-1} \quad con \quad R_k := I_k \times \Big[0, f\big(\frac{k}{n}\big)\Big] = \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big] \times \Big[0, \big(\frac{k}{n}\big)^2\Big] \tag{190}$$

$$Area\ di\ \tilde{R_n} = |\tilde{R_n}| = \sum_{k=0}^{n-1} |R_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |I_k| \cdot \Big|\Big[0, f\big(f\big(\frac{k}{n}\big)\Big]\Big| = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\big(\frac{k}{n}\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{K=1}^{n-1} k^2 \tag{191}$$

- Approssimiamo A_f per eccesso:

$$\tilde{Q_n} := \bigcup_{k=1}^{n-1} Q_k \quad , \quad Q_k := I_k \times \Big[0, f\big(\frac{k+1}{n}\big)\Big] \tag{192}$$

$$Area\ di\ \tilde{Q_n} = |\tilde{Q_n}| = \sum_{k=0}^{n-1} |R_n| == \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\big(\frac{k+1}{n}\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\Big(\frac{k+1}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{K=1}^{n-1} k^2 \tag{193}$$

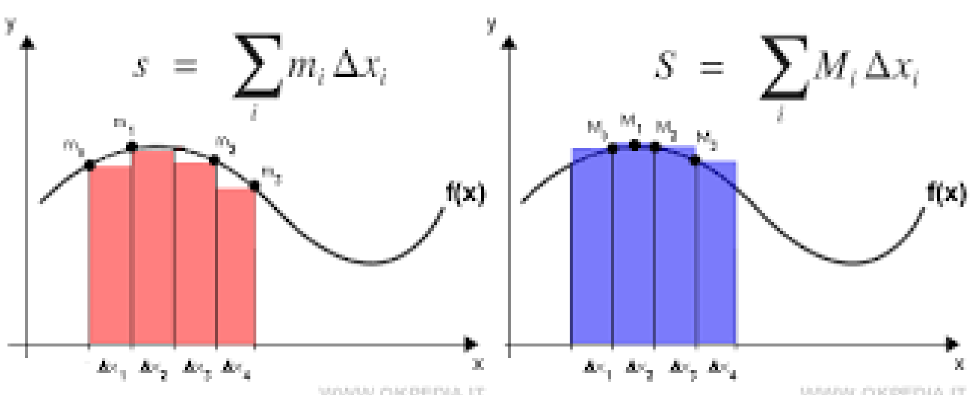

Figura 46: Approssimazione per difetto ed eccesso dell'area di una curva

Utilizzando una formula (dimostrabile per induzione):

$$\sum_{k=1}^{n} K^2 = \frac{n(n+1(2n+1)}{6} \quad , \quad con\ n \geq 1 \tag{194}$$

Otteniamo:

- Per difetto:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\tilde{R_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)(n)\big(2(n-1)+1\big)}{6} \sim \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^3}{3n^3}\Big) = \frac{1}{3} \tag{195}$$

- Per eccesso:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\tilde{R_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)(n)(2n+1)}{6} \sim \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^3}{3n^3}\Big) = \frac{1}{3} \tag{196}$$

Per confronto otteniamo che $\Big|A_f\Big| = \frac{1}{3}$

11.1.3 Partizione di intervalli

Definition 11.1 (Partizione di intervallo). *Sia $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$ (limitato), una partizione $P := \{I_k\}_{k=1}^n$ è una famiglia finita di intervalli I_k tutti contenuti $\big(I_k \subset I\big)$ tali che $I = \bigcup_{k=1}^n$ con $n \neq j$ contiene al più un punto.*

Ciò significa che I_k e I_j o sono disgiunti o si "toccano" solo in un punto (l'estremo della partizione).
Notazione: la lungezza della partizione I_k si indica con $\big|I_k\big| = \big|[x_k, x_{k+1}]\big| = x_{k+1} - x_k$
L'insieme delle partizioni possibili di un dato insieme si indica con $\mathcal{P} := \{$insieme di tutte le partizioni di I$\}$

11.1.4 Integrale inferiore e superiore

Iniziamo a definire somme inferiori e superiori:

- Somme inferiori:

  Definition 11.2 (Somme inferiori). *Sia $[a,b] \to \mathbf{R}$ limitata, sia $P = \{I_k\}_{k=1}^n \in \mathcal{P}(I)$, la somma inferiore è definita come l'area del più piccolo rettangolo sotto a $G(f)$ su I_k:*

$$s(f,P) := \sum_{k=1}^{n}|I_k| \cdot \begin{pmatrix} Inf(f) \\ I_k \end{pmatrix} \tag{197}$$

- Somme superiori:

  Definition 11.3 (Somme superiori). *Sia $[a,b] \to \mathbf{R}$ limitata, sia $P = \{I_k\}_{k=1}^n \in \mathcal{P}(I)$, la somma superiore è:*

$$S(f,P) := \sum_{k=1}^{n}|I_k| \cdot \begin{pmatrix} Sup(f) \\ I_k \end{pmatrix} \tag{198}$$

Ovviamente si deduce che:

$$s(f,P) \le S(f,P) \quad \Longrightarrow \quad -\infty < s(f,P) \le S(f,P) < +\infty \tag{199}$$

Definition 11.4 (Integrale inferiore e superiore di f in I). *:*

- *Integrale inferiore: migliore approssimazione per difetto dall'alto*

$$\underline{I}(f) := Sup\Big\{s(f,P) \mid P \in \mathcal{P}(I)\Big\} \tag{200}$$

- *Integrale superiore: migliore approssimazione per eccesso dal basso*

$$\bar{I}(f) := Inf\Big\{S(f,P) \mid P \in \mathcal{P}(I)\Big\} \tag{201}$$

E $\underline{I}(f) \le \bar{I}(f)$

11.1.5 Integrale di Reimann

Definition 11.5 (Integrale di Reimann). *Se l'integrale inferiore coincide con quello superiore, ovvero $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$, allora si dice che f è integrabile (secondo Reimann) su I e il valore è detto integrale di f si I. Si scrive:*

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f = \int_a^b f(x)\,dx = \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \tag{202}$$

Ed è l'area $|A_f|$ del sottogrfico A_f di f su $I = [a, b]$

Ad esempio non è integrabile la funzione di Dirichlet che assume valore 0 se l'argomento è razionale, altrimenti se è irrazionale 1:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad x \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \implies x\,razionale \\ 1 \quad , \quad x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}^c \implies x\,non\,razionale \end{cases} \tag{203}$$

Si ha che:

- $s(f, P) = 0 \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(I) \implies \underline{I}(f) = 0$
- $S(f, P) = 1 \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(I) \implies \bar{I}(f) = 1$

Quindi si ha $\quad 0 = \underline{I}(f) \neq \bar{I}(f) = 1 \implies$ la funzione non è integrabile.

11.2 Teoremi relativi agli integrali

11.2.1 1° teorema fondamentale del calcolo integrale

Theorem 11.1 (1° teorema fondamentale del calcolo integrale). *:*
Se $f \in C\big([a, b]\big)$ è cobntinua, allora è integrabile su $[a, b]$ (quindi l'area del grafico ha un senso).
La notazione per le funzioni integrabili è:

$$\mathcal{R}\big([a, b]\big) := \big\{insieme\ di\ tutte\ le\ f\ integrabili\ su\ [a, b]\big\} \tag{204}$$

Definition 11.6 (primitiva di una funzione). *Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ data una funzione $F : (a, b) \to \mathbf{R}$ è detta primitiva di f se:*

- *F è derivabile*
- *$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a, b)$*

Due funzioni primitive F, G di f, rispettivamente $F' = f \quad , \quad G' = f$ differiscono di una costane su $[a, b]$ che è $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0 \quad \implies \quad F - G$ è costante su $[a, b]$. Si dice che sono curve parallele o coincidenti se la distanza è zero.
Abbiamo visto l'integrale definito come diferenza fra funzione in $F(b) - F(a)$, per indicare una famiglia di primitive si usa la notazione:

$$\int f(x)\,dx = g(x) + k \tag{205}$$

Dimostrazione del 1° teorema fondamentale del calcolo integrale. :
Per ogni partizione:

$$P = \big\{I_k\big\}_{k=1}^n \quad , \quad I_k = \big[x_k, x_k + 1\big] \qquad con \quad x_0 = a \quad , \quad x_n = b$$

Abbiamo:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^n \big[F(x_k) - F(x_{k-1})\big] = ***$$

Questa sommatoria rappresenta una somma telescopica (si semplificano tutti i termini tranne il primo e l'ultimo). Applicando il teorema di Lagrange a F su $\quad [x_k, x_k+1] \quad$ (controllo e sono rispettate tutte le ipotesi del T. di Lagrange):

$$\implies \exists\, y_k \in (x_{k-1}, x_k) \,\Big|\, \frac{F(x_k) - F(X_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(y_k) = f(y_k)$$

Cioè:

$$F'(y_k) - F(x_{k-1}) = f(y_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = |I_k| \cdot f(y_k) \qquad con \quad |I_K| \quad lunghezza$$

Sostituiamo in $\quad *** \quad$ e si ottiene:

$$*** = \sum_{k=1}^{n} |I_k| f(y_k)$$

Poichè:

$$y_k \in (x_{k-1}, x_k) \implies \quad Inf(f) \le f(y_k) \le Sup(f) \qquad nell'intervallino \quad I_k$$

Quindi passando alla sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| \binom{Inf(f)}{I_k} \le \sum_{k=1}^{n} |I_k| \cdot f(y_k) \le \sum_{k=1}^{k} \cdot \binom{Sup(f)}{I_k}$$

Che corrisponde a:

$$s(f,P) \le F(b) - F(a) \le S(f,P) \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(I)$$

Passando a Inf e Sup:

$$Sup\{s(f,P) \,|\, P \in \mathcal{P}(I)\} \le F(b) - F(a) \le Inf\{S(f,P) \,|\, P \in \mathcal{P}(I)\}$$

Quindi:

$$\underline{I}(f) \le F(b) - F(a) \le \bar{I}(f)$$

Poichè per ipotesi f è integrabile :

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$$

si ha che:

$$F(b) = F(a) = \underline{I}(f) \le F(b) - F(a) \le \bar{I}(f) = \int_a^b f(x)\, dx \tag{206}$$

□

11.2.2 Proprietà e interpretazione dell'integrale

Proprietà del calcolo integrale:

1. Linearità:
   Sia $a, b \in \mathbf{R} \quad , \quad I \subset \mathbf{R} \quad$ e:
   $$\int_I \Big(a \cdot f + b \cdot g\Big) = a \cdot \int_I f + b \cdot \int_I g \qquad \implies \qquad f, g \in \mathcal{R}\big(I\big)$$
2. Positività:
   $$\begin{cases} f \in \mathcal{R}(I) \\ f \ge 0 \end{cases} \qquad \implies \qquad \int_I f \ge 0$$
3. Monotonia:
   $$\begin{cases} f, g \in \mathcal{R}(I) \\ f \le g \end{cases} \qquad \implies \qquad \int_I f \le \int_I g$$
4. Annullamento:
   $$\begin{cases} f \in C\big(\big) \subset \mathcal{R}\big([a,b]\big) \\ f \ge 0 \\ \int_I f = 0 \end{cases} \qquad \implies \qquad \int_I f \ge 0 \quad su\, [a,b]$$

5. Addittività:
   Rispetto all'intervallo di integrazione

$$\begin{cases} a < b < c \\ f \in \big(\mathcal{R}[a,b] \cap \mathcal{R}[b,c]\big) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f \in \mathcal{R}\big([a,c]\big) \qquad e \qquad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

6. Orientazione:

$$\int_a^b f := -\int_b^a f \qquad \forall\, a, b$$

Interpretazione dell'integrale:

- Integrale della velocità istantanea è lo spostamento
- Il valore assoluto dell'integrale della velocità istantanea è la sistanza percorsa
- Probabilità della particellla di trovarsi in una data area

11.2.3 Integrazione per parti

Metodo per semplificare gli integrali: integrazione per parti

Theorem 11.2 (integrazione per parti)**.** *:*
Sia $f, g \in C\big([a,b]\big)$ *e* $f', g' \in C\big([a,b]\big)$ *, allora:*

$$\int_a^b f' \cdot g = \big[f \cdot g\big]_a^b - \int_a^b f \cdot g'$$

Piccolo tip per scegliere chi integrare e chi derivare (metodo LINATE):

L(log) - I(trigonometriche inverse) - N(num) - A(polinomio algebrico) - T(trigonometriche) - E(exp)

Dimostrazione dell'integrazione per parti. :
Partendo dalla regola di Leibniz di derivazione di Leibniz si ricava la formula di integrazione oer parti.

$$\big(f \cdot g\big) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Si integrano entrambi i membri dell'equazione di Leibniz:

$$\int_a^b \big(f \cdot g\big)' = \int_a^b \big(f' \cdot g + f \cdot g'\big) = \int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g'$$

Poichè $(f \cdot g)$ è primitiva di $(f \cdot g)'$, per il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale $\quad *** = \big[f \cdot g\big]_a^b$

□

11.2.4 Integrazione per sostituzione

Metodo per semplificare gli integrali: sostituzione

Theorem 11.3 (Integrazione per sostituzione)**.** *:*
Sia $f \in C\big([a,b]\big) \subset \mathcal{R}$, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ *derivabile,* $\varphi' \in C\big([a,b]\big)$ *strettamente monotona e crescente. Fissato* $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, *allora vale la seguente proprietà:*

$$\int_a^b f(y)\, dy = \int_c^d f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \cdot d(x) \tag{207}$$

Dimostrazione dell'integrazione per sostituzione. :
Sia $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ primitiva di F , così per il 1° Teorema del calcolo integrale:

$$\int_a^b f(y)\_dy = F(b) - F(a)$$

Sia $G := F \circ \varphi : [c, d] \to \mathbf{R}$ per il teorema della funzione composta:

$$G' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' \quad cioe' \quad G'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi' = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'$$

Quindi G' è una primitiva di $(f \circ g) \cdot \varphi'$, di conseguenza per il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_c^d f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx = G(d) - G(c) = F\big(\varphi(d)\big) - F\big(\varphi(x)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f = \int_a^b f(y)\, dy$$

□

Esercizi di esempio di integrali risolvibili per sostituzione:

1. Bisogna valutare il polinomio che crea problemi, se è nella forma:
   - Differenza di quadrati:
     (a) $\sqrt{a^2 - x^2}$ sostituire $x = a \cdot \sin(x)$
     (b) $\sqrt{x^2 - a^2}$ sostituire $x = a \cdot \cosh(x)$
   - Somma di quadrati: $\sqrt{a^2 + x^2}$ Sostituire $t = \sinh(x) = \frac{e^x + x^{-x}}{2}$ nell'integrale:

     $$\int \sqrt{1 + x^2} = \int \sqrt{1 + \sinh^2(t)} \cdot \cosh(t)\, dt = \int \cosh^2(t)\, dt = \dots$$

     Poi per tornare nella variabile x devo trovare l'inversa uso $\sinh(x)^{-1} = \log\big(x + \sqrt{x^2 + 1}\big)$

2. Ricordarsi le formule di duplicazione e bisezione per integrare funzioni gognometriche

3. Sostituire $\tan(x/2) = t$ (formule parametriche) nell'integrale:

   $$\int \frac{dx}{4\sin(x) + 3\cos(x)} =$$

   Ricordo che le formule parametriche sono:

   $$\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \qquad , \qquad \cos(x) = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \tag{208}$$

4. Per gli integrali definiti risolti per sotituzione, ricrdarsi di aggiornare l'intervallo di integrazione

5. Ogni funzione si può riscrivere come una somma di una funzione pari e una funzione dispari:

   $$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{209}$$

   Quindi l'integrale simmetrico fra a e $-a$ (con p_1, p_2 pari e d dispari):

   $$\int_{-a}^{+a} \frac{p_1(x)}{1 + p_2(x)^{d(x)}}\, dx = \int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{+a} \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx + \underbrace{\int_{-a}^{+a} \frac{f(x) - f(-x)}{2} dx}_{\text{dispari } = 0}$$

   $$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1(x)}{1 + p_1(x)^{d(X)}} + \frac{p_1(x)}{1 + p_1(x)^{-d(X)}}\right) = \frac{p_1(x)}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{-a}^{+a} \frac{p_1(x)}{2} dx$$

6. Per le funzioni razionalia potenze razionali di polinomi del tipo $ax + b$ $(a \neq 0)$, si può scomporre:

   $$ax + b = t^q \qquad con \quad q = mcm\big(\text{esponenti del polinomio}\big)$$

11.2.5 Integrali di funzioni razionali fratte

Si distinguono due casi in base al grado del numeratore e denominatore della funzione fratta:

- Se il numeratore è di grado maggiore o uguale al denominatore:
  1. Si fa il rapporto fra i polinomi (vedi: 4)
  2. Si riscrive la frazione come $\int \frac{D(x)\cdot(P(x)+R(X)}{D}$ dove $D(x)$ è il divisore della divisione fra polinomi, $P(x)$ è il risultato della divisione e $R(x)$ è il resto della divisione
  3. Poi si risolve l'integrae scomponendolo in diversi integrali

- Se il numeratore è di grado inferiore al numeratore è tosta e si distinguono 3 casi in base al grado del denominatore:
  - Se il $\Delta(D) > 0$:
    1. Considero l'integrale:
    $$\int \frac{x-1}{x^2+5x+6}dx$$
    2. Posso riscrivere la frazione come:
    $$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx+3B}{(x+3)(x+2)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} coeff(x) = A+B = 1 & \Longrightarrow \ A=1 \\ termine\, noto = 2A+3B = -1 & \Longrightarrow \ B \end{cases}$$
    3. Riscrivo l'integrale come:
    $$\int \frac{A}{x+3}dx + \int \frac{B}{x+2}$$
    4. Poi lo risolvo normalmente, notare che potrebbe anche essere che si debba ricorrere all'uso di $Ax+b$ per rappresentare il numeratore relativo al denominatore di terzo grado.

  - Se il $\Delta(D) = 0$:
    1. Considero l'integrale:
    $$\int \frac{x+5}{(x+3)^2}dx$$
    2. Posso riscrivere la frazione come:
    $$\frac{x+5}{(x+3)^2}dx = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{(x+3)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \end{cases}$$
    3. Riscrivo l'integrale come:
    $$\int \frac{A}{(x+3)^2}dx + \int \frac{B}{x+3}dx$$
  - Se il $\Delta(D) < 0$:
    1. Devo cercare di ricordurmi al caso:
    $$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}dx \quad \Longrightarrow \quad formula\ generale: \quad \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+n^2}dx = \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n} + k$$
    2. Ad esempio:
    $$\int \frac{1}{x^2-6x+10}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2+1} = \arctan(x-3)+k$$

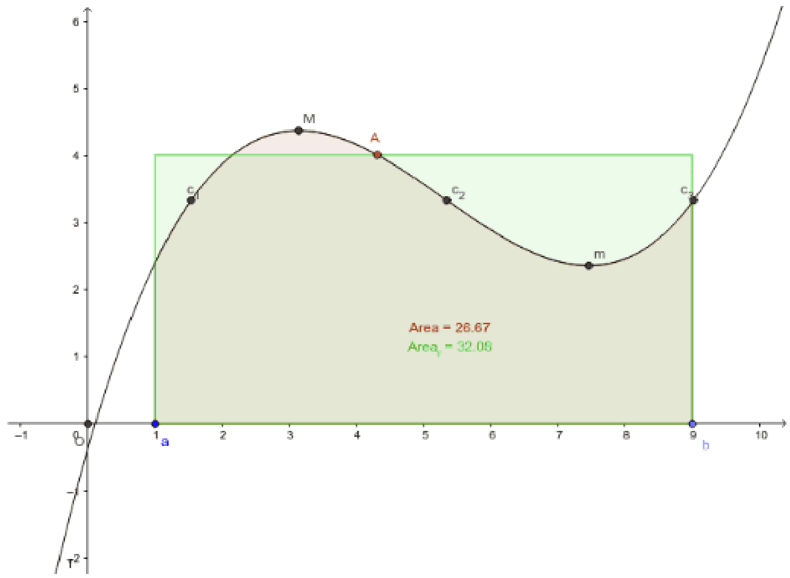

Figura 47: teorema della media

11.2.6 Teorema della Media

Theorem 11.4 (teorema della media)**.** *:*
Sia $f \in C\big([a,b]\big) \subset \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ *allora:*

$$\exists\, x_0 \in [a,b] \,\Big|\, \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(x_0) \quad cioe' \qquad \int_a^b f = f(x_0)\cdot(b-a) \tag{210}$$

Dimostrazione del teorema della media. :
Per il teorema di Weistrass, f assume estremi assoluti su $[a,b]$. Denotiamo con $m = min(f)$, $M = max(f)$ $\Longrightarrow$ $m \le f(x) \le M$.
Per la monotonia:

$$m(b-a) = \int_a^b m \le \int_a^b f \le M = M(b-a)$$

Per il teorema dei valori intermedi:

$$\Longrightarrow \; \exists\, x_0 \in [a,b] \,\Big|\, \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(x_0)$$

□

11.2.7 2° teorema del calcolo integrale

Theorem 11.5 (2° teorema del calcolo integrale)**.** *:*
Sia $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ *e definiamo la funzione integrale* F *su* $[a,b]$*:*

$$F : [a,b] \to \mathbf{R} \qquad F(x) := \int_a^x f = \int_a^x f(y)\,dy \tag{211}$$

Allora:

1. *se* f *è limitata allora* F *è continua*
2. *se* f *è continua allora* F *è derivabile in* (a,b) *e:*

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad x \in (a,b)$$

Quindi la funzione integrale F *è primitiva della funzione integrale* f*:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f = f(x) \quad , \quad x \in (a,b)$$

Dimostrazione del 2° teorema fondamenmtale del calcolo integrale. :
- Punto 1: se f è limitata allora F è continua
Se f è limitata $\implies$ esiste M tale che:

$$|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in [a, b]$$

Quindi:

$$\big|F(x+h)-F(x)\big| = *** = \Big|\int_a^{x+h} f - \int_a^{x+h} f\Big| = additività' = \Big|\int_x^{x+h} f\Big| \leq proprieta' \leq \int_x^{x+h} |f| \leq \int_x^{x+h} M = M \cdot |h|$$

Passando al limite di h che tende a 0:

$$M \cdot |h| \to 0 \quad , \quad h \to 0 \quad \implies \quad \lim_{h\to 0} \big|F(x+h) - F(x)\big| = 0 \quad cioe' \quad \lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)$$

Quindi F è continua per ogni $x \in [a, b]$

- Punto 2: se f è continua allora F è derivabile in (a, b) e $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$
La media dell'integrale di f sull'intervallo di lunghezza h è:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = *** = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} = t.\, media = f\big(y(h)\big)$$

Questo per il teorema della media selezionando un opportuno $y(h)$
Tra x e $x + h$:

$$\big|y(h) - x\big| \leq \big|(x+h) - x\big| = |h| \quad \implies \quad \lim_{h\to 0} y(h) = x$$

E poichè è continua in x, allora:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x =}{h} = \lim_{h\to 0} f\big(y(h)\big) = \int \Big(\lim_{h\to 0}\big(y(h)\big)\Big) = f(x)$$

Quindi in un singolo punto l'incremento dell'area sottesa dal grafico è pari al limite dell'integrale su un intrevallo che tende a zero, che è il valore dellìa funzione stessa.

□

Una conseguenza del 2° teorema fondamentale del calcolo integrale è che il 1° teorema fondamentale del calcolo integrale può essere espresso come:

$$\int_a^x F' = F(x)F(a) \quad cioe' \quad F(x) = F(a) + \int_a^x F'$$

11.3 Integrali su intervalli particolari

11.3.1 Integrabilità di funzioni con salti

Theorem 11.6 (Integrabilità di funzioni con salti)**.** *:*
Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua solo al più un numero finito di salti, allora è integrabile:

$$f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$$

Dimostrazione. :
Se $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ sono punti di salto, allora $f \in C\big([x_k, x_{k+1}\big)$, $k = 1, \ldots, n-1$

$\implies f \in \mathcal{R}\big([x_k, x_{k+1}\big)$ e per l'addittività:

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f$$

□

11.3.2 Integrale di funzioni su insiemi non limitati

Definition 11.7 (Integrale di funzioni su insimi non limitati)**.** *:*
Sia data una funzione $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$, *allora* f *è integrabile su* $[a, +\infty]$ *se:*

- $\forall\, b > a$ *, si ha:* $\big|f\big| \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$
- $\exists \lim_{b\to+\infty} \int_a^b |f|$ *(il limite essiste ed è finito, quindi converge)*

$\implies$ *allora* $\exists \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f$

f si dice integrabile su una semiretta e il suo integrale è definito da:

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f \tag{212}$$

Nella risoluzione degli esercizi bisogna integrare e considerare i diversi casi, ovvero se la funzione diverge, converge e in che modo si comporta avvicinandosi all'eventuale asintoto orizzonatle.

Esercizio di esempio: calcolo di un integrale su un insieme non limitato:

1. Considero l'integrale della funzione $f(x)$ dipendnente da α :
$$I_\alpha := \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \qquad , \quad \alpha > 0$$
2. Sia $b > 1$ e $_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, allora:
$$\int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \alpha = 1 & \implies \quad [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 \\ \alpha \neq 1 & \implies \quad \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^b = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \end{cases}$$
3. Passando al limite si ottiene:
$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \alpha = 1 & \implies \quad \lim_{b\to+\infty}\big(\ln(b)\big) = +\infty \quad \implies \quad \textit{diverge} \\ \alpha < 1 & \implies \quad \text{tende a } +\infty \quad \implies \quad \textit{diverge} \\ \alpha > 1 & \implies \quad \frac{1}{\alpha-1} > 0 \end{cases}$$
4. Quindi la funzione converge, e quindi è integrabile se e solo se:
$$\implies \quad f_\alpha \in \mathcal{R}\Big([1, +\infty]\Big) \iff \alpha > 1 \quad e \quad \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

11.3.3 Integrali di funzioni non limitate

Definition 11.8 (Integrali di funzioni non limitate)**.** *:*
Sia $f : (a, b] \to \mathbf{R}$ *è integrabile su* $(a, b]$ *se:*

- $\forall\, \varepsilon > 0 \quad |f| \in \mathcal{R}\big([a + \varepsilon, b]\big)$
- $\exists \lim_{\varepsilon\to0} \int_{a+\varepsilon}^b |f|$

Allora l'integrale è definito come:

$$\int_a^b f := \lim_{\varepsilon\to0} \int_{a+\varepsilon}^b f \tag{213}$$

Nella risoluzione degli esercizi bisogna integrare e considerare i diversi casi, ovvero se la funzione diverge, converge e in che modo si comporta avvicinandosi all'eventuale asintoto verticale.

Esercizio di esempio: calcolo di un integrale di una funzione non limitata:

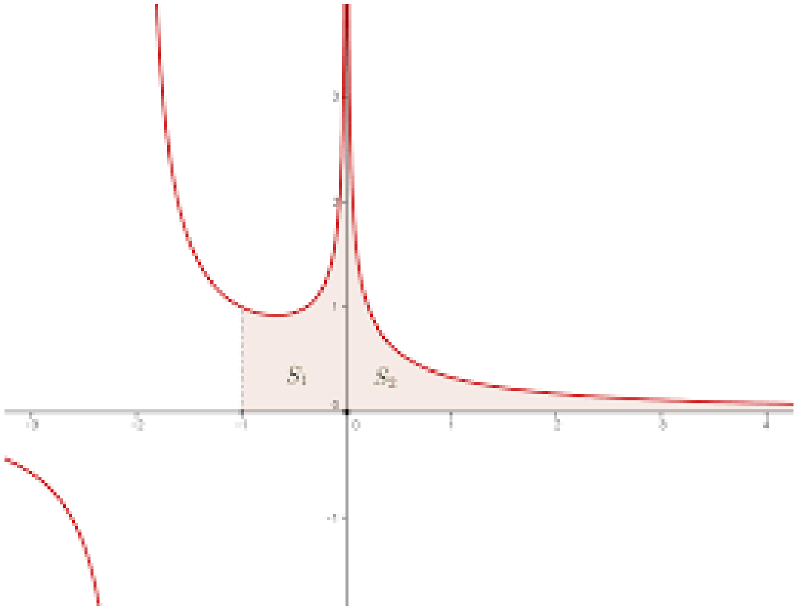

Figura 48: Integrali impropri

1. Considero l'integrale della funzione $f_\beta(x)$ dipendente da β:

$$J_\beta := \int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx \quad \beta > 0$$

2. Otteniamo i due casi:

$$\int_\varepsilon^1 x^{-\beta}\, dx = \begin{cases} \beta = 1 & \Longrightarrow \quad [\ln(x)]_\varepsilon^1 = \ln 1 - \ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) \\ \beta \neq 1 & \Longrightarrow \quad \left[\frac{x^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta} \end{cases}$$

3. Passando al limite:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\beta}\, dx = \begin{cases} \beta = 1 & \Longrightarrow \quad +\infty \quad \Longrightarrow \quad diverge \\ \beta > 1 & \Longrightarrow \quad +\infty \quad \Longrightarrow \quad diverge \\ \beta < 1 & \Longrightarrow \quad \frac{1}{1-\beta} \quad \Longrightarrow \quad ?? \end{cases}$$

4. Di condeguenza:

$$\Longrightarrow \quad f_\beta \in \mathcal{R}\Big([0,1]\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \beta < 1 \quad e \quad \int_0^1 x^{-\beta}\, dx = \frac{1}{1-\beta}$$

11.3.4 Area delimitata da funzioni

Per calcolare l'area delimitata dei grafici di $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a,b]$ vale:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \qquad se \qquad f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in [a,b] \tag{214}$$

Questa formula vale indipendentemente dal segno asunto dalle due funzioni a patto che vengano rispettate le ipotesi.

Se su $[a,b]$ la posizione reciproca di f, g varia (ad esempio come nella figura (49) la formula è:

$$\int_a^c |f(x) - g(x)|\, dx \qquad \forall\, x \in [a,c] \tag{215}$$

Si scompone l'integrale calcolandolo nell'intervallo $[a,b]$ e $[b,c]$ dove $(b = x_B)$ è l'ascissa di $\quad B = (x_B, y_B) = f \cap g$

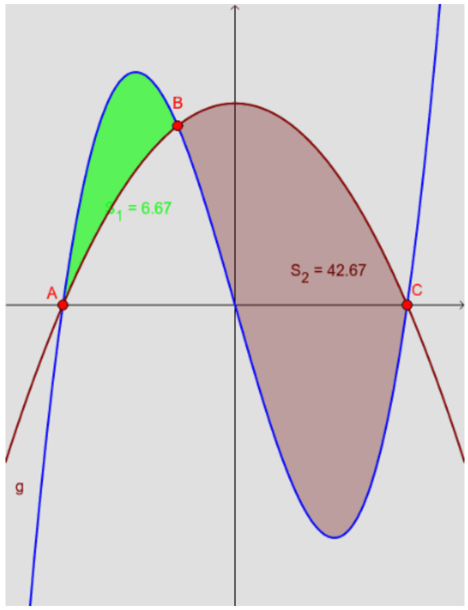

Figura 49: Area fra funzioni

11.4 Funzione integrale

11.4.1 Definizione della funzione integrale

Definition 11.9 (Funzione integrale)**.** *:*
Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $fix.\, F_0 : D(F_{x_0}) \to \mathbf{R}$ *:*

$$F_{x_0}(x) := \int_{x_0}^{x} f(j)\,dy \qquad x \in D\{F_{x_0}\} \tag{216}$$

$D(F_{x_0}) :=$ è il più grande intervallo (chiuso o aperto) in cui f (intervallo contenente x_0).
In generale, il domionio $D(F_{x_0})$ cambia con x_0.

Notiamo che per il 2° Teorema fondamentale del calcolo integrale:

- f limitata $\implies$ F_{x_0} è continua
- f continua $\implies$ F_{x_0} è derivabile

Quindi:

$$F'_{x_0}(x) = f(x)$$

Cioè f_{x_0} è primitiva della funzione f.

11.4.2 Dominio della funzione integrale (esercizi)

In pratica per trovare il dominio di una funzione integrale bisogna:

1. Trovare il dominio e in punti di discontinuità della funzione
2. Considero l'integrale $F_{x_0} = \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy$
3. Trovo gli asintotici di f nei punti di discontinuità
4. Valuto se la funzione è integrabile in quei punti (teoria: 11.3)
5. Parto dal punto x_0 e controllo a destra e sinistra fin che è integrabile e trovo il dominio della funzione integrale

11.4.3 Derivata di integrale composto

Theorem 11.7 (Derivata di integrale composto)**.** *:*
Considero la funzione integrale:

$$F(x) := \int_a^{f(x)} g(t)\, dt$$

Se:

$$F(x) := \int_a^{x} g(t)\, dt \quad \Longrightarrow \quad G(x) = F\big(f(x)\big)$$

La derivata è:

$$G'(x) = F'\big(f(x)\big) \cdot f(x) = g\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \tag{217}$$

11.4.4 Itegrali notevoli fondamentali

$\int 0 \cdot dx = c$	
$\int dx = x + c$	$\int k \cdot f(x) = k \cdot \int f(x)dx$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c$
$\int sin x\, dx = -\cos x + c$	$\int \text{sen}\, f(x) \cdot f'(x)dx = -\cos f(x) + c$
$\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + c$	$\int \cos f(x) \cdot f'(x)dx = \text{sen}\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tg\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -ctg x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = -ctg\, f(x) + c$

Figura 50: Tabella integrali fondamentali