Dimostrazioni

Gabr1313

January 5, 2024

List of Theorems

Teorema 1 (Formula risolutiva per le EDO del primo ordine lineari)**.**
Date $a, b : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, l'integrale generale delle EDO

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

con $t \in I$, è dato da:

$$y(t) = e^A \left(\int e^{-A} b(t) dt + c \right)$$

dove $A = \int a(t)dt$, $t \in I$, $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Calcoli e teorema fondamentale del calcolo integrale

- Derivando la seguente funzione, si ottine

$$\begin{aligned}
(ye^{-A})' &= y'e^{-A} + [ye^{-A}(-a')] \\
&= y'e^{-A} - aye^{-A} \\
&= (y' - ay)e^{-A} \\
&= (b)e^{-A}
\end{aligned}$$

- Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned}
ye^{-A} &= \int (ye^{-A})' dt \\
&= \int (b)e^{-A} dt + c \\
y &= e^A \int (b)e^{-A} dt + c
\end{aligned}$$

  dove $c \in \mathbb{R}$.

$\square$

Teorema 2 (Teorema di struttura dell'integrale generale di equazioni del secondo ordine lineari omogenee)**.**
Siano $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $a \neq 0$, allora la EDO

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

con $t \in I$ ha come IG uno spazio vettoriale di dimensione 2

$$y_o(t) = c_1 y_{o,1}(t) + c_2 y_{o,2}(t)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dove $y_{o,1}, y_{o,2}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'EDO.

Dimostrazione. Principio di Sovrapposizione + $\exists!$ del PC

- per il pricipio di Sovrapposizione l'insieme di tutte le soluzioni è uno spazio vettoriale, perchè chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare. Rimane quindi da dimostrare che la dimesione di tale spazio vettoriale è 2:
  - si trovano $y_{o,1}$ e $y_{o,2}$ LI
  - si dimostra che ogni soluzione si possa scrivere come combinazione lineare di queste due
- Si scelgono $y_{o,1}, y_{o,2}$ come soluzioni di problemi di Cauchy seguenti con $t_o \in I$ fissato

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_o) = 1 \\ y'(t_o) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_o) = 0 \\ y'(t_o) = 1 \end{cases}$$

  Queste soluzioni esistono e sono uniche per il teorema di $\exists!$ del PC. $y_{o,1}$ e $y_{o,2}$ sono inoltre LI perchè se per assurdo si ipotizzasse che $\exists c \neq 0 : y_{o,1} = c y_{o,2} \quad \forall t \in I$, allora $1 = y_{o,1}(t_o) = c y_{o,2}(t_o) = 0$.

- Sia $\bar{y}_o$ una qualunque soluzione particolare della EDO, si cercano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ in modo tale che $\bar{y}_o(t)$ coincida con

$$z(t) = c_1 y_{o,1}(t) + c_2 y_{o,2}(t)$$

  la quale è una soluzione per il Principio di Sovrapposizione.
  Si scelgono quindi c_1, c_2 in modo che:

$$\begin{aligned} \bar{y}_o(t_o) = z(t_o) = c_1 y_{o,1}(t_o) + c_2 y_{o,2}(t_o) = c_1 \\ \bar{y}'_o(t_o) = z'(t_o) = c_1 y'_{o,1}(t_o) + c_2 y'_{o,2}(t_o) = c_2 \end{aligned}$$

  quindi

$$z(t) = \bar{y}_o(t_o) y_{o,1}(t) + \bar{y}'_o(t_o) y_{o,2}(t)$$

  Sia $\bar{y}_o$ che z soddisfano lo stesso PC

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_o) = y_o(t_o) \\ y'(t_o) = y'_o(t_o) \end{cases}$$

  e quindi per il teorema di $\exists!$ del PC $\bar{y}_o(t) = z(t)$.

□

Teorema 3 (Criterio della radice e criterio del rapporto per la determinazione del raggio di convergenza)**.**
Data la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n$$
con $a_n \in \mathbb{R}$, capita uno dei seguenti casi:
$$\exists R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{oppure} \quad \exists R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\right|$$
con $R \in [0,+\infty]$, allora la serie converge e ha raggio R.

Dimostrazione. Applicazione dei criteri del rapporto e della radice

- Per il teorema del raggio di convergenza di una serie di potenze è sufficiente verificare che:
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_o)^n|$$
  - converge per $|x-x_o| < R$
  - non converge per $|x-x_o| > R$
- tutte le serie convergono per $x = x_o$; nel caso in cui $x \neq x_o$ si può applicare il criterio del rapporto alla serie di partenza:
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-x_0|}{R}$$
  E quindi i 2 punti precedenti sono verificati.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ si può applicare il criterio della radice alla serie di partenza:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty}|x-x_0|\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-x_0|}{R}$$
  E quindi i 2 punti precedenti sono verificati.

□

Teorema 4 (Calcolo dei coefficienti di Fourier di una funzione periodica)**.**
Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione 2π-periodica e somma di una funzione trigonometrica:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ e convergenza totale in $[-\pi, \pi]$, allora a_n, b_n sono i coefficienti di Fourier di f:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Dimostrazione. calcoli utilizzando le formule di ortogonalità

- a_0

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \\ = &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right]dx = \end{aligned}$$

per convergenza totale

$$\begin{aligned} = &\frac{1}{2\pi}\left(a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx\right) = \\ = &\frac{1}{2\pi}(2\pi a_0 + 0 + 0) = \\ = &a_0 \end{aligned}$$

- a_n

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \\ = &\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right]\cos(nx)dx = \end{aligned}$$

per convergenza totale: $|\cos(nx)| \leq 1$

$$= \frac{1}{\pi}\left(a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(nx)\right) =$$

per le formule di ortogonalità delle serie armoniche n-esime

$$\begin{aligned} = &\frac{1}{\pi}(0 + a_n\pi + 0) = \\ = &a_n \end{aligned}$$

- b_n si dimostra in modo analogo a a_n.

□

Teorema 5 (Invarianza della lunghezza per riparametrizzazioni)**.**
Sia $r : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare con sostegno γ e sia $v : [c,d] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una riparametrizzazione di γ relativa alla variabile $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ (monotona), cioè $v(s) = r(\varphi(s)) \quad \forall s \in [c,d]$, allora

$$\text{len}(r([a,b])) = \int_c^d ||v'(s)||ds = \text{len}(v([c,d]))$$

Dimostrazione. calcoli e discussione della monotonia di φ

- Siccome r è regolare
$$\text{len}(r([a,b])) = \int_a^b ||r'(t)||dt$$
- allora $\forall s \in [c,d]$
$$v'(s) = \begin{bmatrix} v_1'(s) \\ \vdots \\ v_n'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [r_1(\varphi(s))]' \\ \vdots \\ [r_n(\varphi(s))]' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1'(\varphi(s))\varphi(s)' \\ \vdots \\ r_n'(\varphi(s))\varphi(s)' \end{bmatrix} = \varphi'(s)r'(\varphi(s))$$
  quindi
$$||v'(s)|| = ||\varphi'(s)r'(\varphi(s))|| = |\varphi'(s)|||r'(\varphi(s))||$$
- sia $t = \varphi(s)$, allora $dt = \varphi'(s)ds$
- se φ è crescente, allora $\varphi(c) = a < b = \varphi(d)$ e $\varphi'(s) \geq 0 \quad \forall s \in [c,d]$, quindi
$$||v'(s)|| = \varphi'(s)||r'(\varphi(s))||$$
$$\text{len}(r([a,b])) = \int_a^b ||r'(t)||dt = \int_c^d ||r'(\varphi(s))||\varphi'(s)ds = \int_c^d ||v'(s)||ds = \text{len}(v([c,d]))$$
- se φ è decrescente, allora $\varphi(c) = b > a = \varphi(d)$ e $\varphi'(s) \leq 0 \quad \forall s \in [c,d]$, quindi
$$||v'(s)|| = -\varphi'(s)||r'(\varphi(s))||$$
$$\text{len}(r([a,b])) = \int_a^b ||r'(t)||dt = \int_d^c ||r'(\varphi(s))||(-\varphi'(s))ds = \int_c^d ||v'(s)||ds = \text{len}(v([c,d]))$$

□

Teorema 6 (Differenziabilità implica continuità).
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$, allora f è continua in $\underline{x}_0$.

Dimostrazione. definizione, disuguaglianza triangolare, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, limite e teorema dei carabinieri

- Siccome f è differenziabile in $\underline{x}_0$, allora

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + o(||\underline{x} - \underline{x}_0||)$$

ovvero

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| \\ &= |\nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + o(||\underline{x} - \underline{x}_0||)| \end{aligned}$$

per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} &\leq |\nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)| + |o(||\underline{x} - \underline{x}_0||)| \\ &= |\nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)| + o(||\underline{x} - \underline{x}_0||) \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\leq ||\nabla f(\underline{x}_0)|| \cdot ||(\underline{x} - \underline{x}_0)|| + o(||\underline{x} - \underline{x}_0||)$$

- passando ora al limite

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) \\ &\leq \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} (||\nabla f(\underline{x}_0)|| \cdot ||(\underline{x} - \underline{x}_0)||) + \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} o(||\underline{x} - \underline{x}_0||) \\ &= ||\nabla f(\underline{x}_0)|| \cdot \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} ||(\underline{x} - \underline{x}_0)|| + \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \left(\frac{o(||\underline{x} - \underline{x}_0||)}{||\underline{x} - \underline{x}_o||} ||\underline{x} - \underline{x}_o|| \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- quindi per il teormema dei carabinieri

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| = 0$$

ovvero f è continua in $\underline{x}_0$.

$\square$

Teorema 7 (Formula del gradiente)**.**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ differenziale in $\underline{x}_0 \in A$, allora $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $||\underline{v}|| = 1$ esiste la derivata direzionale in $\underline{x}_0$ lungo la direzione $\underline{v}$. In particolare

$$f_{\underline{v}}(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$$

Dimostrazione. definizione di differenziabilità e di derivata direzionale

- Siccome f è differenziabile in $\underline{x}_0$, allora per $h \to 0$

$$f(\underline{x}_0 + h) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} + o(||\underline{h}||)$$

- sia $\underline{h} = t\underline{v}$, allora per $t \to 0^+$

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot t\underline{v} + o(||t\underline{v}||)$$

- essendo $o(||t\underline{v}||) = o(|t|||\underline{v}||) = o(t)$, allora

$$\frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0) \cdot t\underline{v}}{t} + \frac{o(t)}{t}$$

- dunque per la definizione di derivata direzionale

$$f_{\underline{v}}(\underline{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$$

□

Teorema 8 (Ortogonalità del gradiente agli insiemi di livello)**.**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in A, supponendo che l'insieme di livello $k \in \mathbb{R}$ di f ($I_k = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = k\}$) sia il sostegno di una curva regolare $\underline{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to A$, allora

$$\nabla f(\underline{x}) \cdot r'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Dimostrazione. definizione e teorema di derivazione delle funzioni composte

- Considerando $F : I \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(r(t))$ si osserva che

$$\{\underline{r}(t) : t \in I\} = I_k = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = k\}$$

  dunque $F(t) = f(r(t)) = k$, da cui si deduce che $F'(t) = 0 \quad \forall t \in I$.

- per il teorema di derivazione delle funzioni composte 1-n-1 si ottiene che

$$0 = F'(t) = \nabla f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) \quad \forall t \in I$$

$\square$

Teorema 9 (Criterio della matrice Hessiana)**.**
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ un aperto, $f \in C^2(A)$, $\underline{x}_0 \in A$ punto critico di f, $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forma quadratica indotta da $H_f(\underline{x}_0)$, allora:

- se q è definita positiva $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è un punto di minimo locale
- se q è definita negativa $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è un punto di massimo locale
- se q è indefinita $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è un punto di sella

Dimostrazione. definizione di forma quadratcia, formula di Taylor e definizione di limite

- $H_f(\underline{x}_0)$ è simmetrica per il teorema di Schwarz
- se q è definita positiva $\Rightarrow$ $H_f(\underline{x}_0)$ ha autovalori $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$
- quindi per la definizione di forma quadratica definita positiva

$$H_f(\underline{x}_0)\underline{h} \cdot \underline{h} = q(\underline{h}) \geq \lambda_{min}||\underline{h}||^2 \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$$

- utilizzando la formula di Taylor al secondo ordine per $||\underline{h}|| \to 0$, dato che x_0 è un punto critico

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) &= \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} + \frac{1}{2}q(\underline{h}) + o(||\underline{h}||^2) \\ &= \frac{1}{2}q(\underline{h}) + o(||\underline{h}||^2) \\ &\geq \lambda_{min}||\underline{h}||^2 + o(||\underline{h}||^2) \end{aligned}$$

- per la definizione di o si ha che

$$\lim_{||\underline{h}|| \to 0} \frac{o(||\underline{h}||^2)}{||\underline{h}||^2} = 0$$

- per la definizione di limite

$$\exists \delta > 0 : \text{ se } ||\underline{h}|| < \delta \text{ e } \underline{h} \neq \underline{0} \Rightarrow \frac{o(||\underline{h}||^2)}{||\underline{h}||^2} < \frac{\lambda_{min}}{4}$$

  con $\lambda_{min} > 0$ perchè q è definita positiva.

- In paricolare

$$\exists \delta > 0 : \forall \underline{h} \in B_\delta(0) \Rightarrow o(||\underline{h}||^2) > -\frac{\lambda_{min}}{4}||\underline{h}||^2$$

- utilizzando la formula precedentemente trovata si deduce che $\forall h \in B_\delta(\underline{x}_0) : \underline{x}_0 + \underline{h} \in A$

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) &\geq \lambda_{min}||\underline{h}||^2 + o(||\underline{h}||^2) \\ &\geq \lambda_{min}||\underline{h}||^2 - \frac{\lambda_{min}}{4} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

  e quindi $\underline{x}_0$ un punto di minimo locale

- analogamente si dimostra che se q è definita negativa $\underline{x}_0$ è un punto di massimo locale

$\square$

Teorema 10 (Cambiamenti di variabili in coordinate polari, cilindriche, e sferiche e loro Jacobiano)**.**
Sia $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio regolare, $f : \omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua, se $\underline{T} : U \to V$ è un cambio di varibili tra U e V con $\omega \subseteq V$

$$\underline{T}(u_1, \ldots, u_n) = (x_1 \ldots, x_n),$$

allora

$$\int \cdots \int_\omega f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int \cdots \int_{\underline{T}^{-1}} f(\underline{T}(u_1, \ldots, u_n)) |\det(J_{\underline{T}}(u_1, \ldots, u_n))| du_1 \ldots du_n$$

- Sia $\underline{T}_p : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{T}_p(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

  il suo Jacobiano è

$$det(J_{\underline{T}_p}(\rho, \theta)) = \rho$$

- Sia $\underline{T}_c : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\underline{T}_c(\rho, \theta, z) = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

  il suo Jacobiano è

$$det(J_{\underline{T}_c}(\rho, \theta, z)) = \rho$$

- Sia $\underline{T}_s : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\underline{T}_s(\rho, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \rho \cos(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

  il suo Jacobiano è

$$det(J_{\underline{T}_s}(\rho, \theta, \varphi)) = \rho^2 \sin(\varphi)$$

Dimostrazione. Dimostrazione riportata solo per il cambio di coordinate in coordinate sferiche: calcoli

- $$J_{\underline{T}_s}(\rho, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \rho\cos(\varphi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) & 0 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{aligned} \det(J_{\underline{T}_s}(\rho, \varphi, \theta)) &= \cos(\varphi) \det\left(\begin{bmatrix} \rho\cos(\varphi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \rho\cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \end{bmatrix}\right) \\ &\quad + \rho\sin(\varphi) \det\left(\begin{bmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \end{bmatrix}\right) \\ &= \rho^2 \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &\quad + \rho^2 \sin^3(\varphi)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= \rho^2 \sin(\varphi)(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \\ &= \rho^2 \sin(\varphi) \end{aligned}$$

$\square$