Appunti

Gabr1313

November 29, 2023

Contents

Chapter 1

Matrice Hessiana

Proof. Criterio matrice Hessiana □

1.1 Strategie

Strategie da adottare in caso di forma quadratica indotta da $H_f(\underline{x}_0)$ sia semidifenita:

1. **Indagine diretta**
2. Convessità/concavità

1.1.1 Indagine diretta

La startegia consiste nel trovare due curve passanti per il punto critico in cui le restirzioni di f hanno in un caso un massimo e nell'altro un minimo. Si conclude quindi che il punto critico è **punto di sella**.

1.1.2 Convessità/Concavità

Definizione 1 (Funzione convessa/concava)**.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$*, diciamo che* f *è covessa (risp. concava) se* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *la matrice Hessiana* $H_f(x, y)$ *è definita positiva o semi-definita positiva (risp. definita negativa o semi-definita negativa)*

Osservazioni

- Esiste anche la definizione per funzioni non regolari come generalizzazione del caso $n = 1$.

Teorema 1. *Sia $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto critico di f, allora:*

- *se f è convessa su $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) è punto di* ***minimo assoluto***
- *se f è concava su $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) è punto di* ***massimo assoluto***

1.2 Riassunto

- Se A è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$, allora i massimi e minimi sono raggiunti da f in A per il teo. di Weierstrass
- se A è aperto, allora i punti estermali:
  - potrebbero non essere raggiunti in A
  - se f è deriviabile, condizione necessaria è che siano punti critici per il teormea di Fermat
  - se $f \in \mathscr{C}^2(A)$, possiamo applicare i criteri della matrice Hessiana per classificare i punti critici, che però non sono conclusivi nel caso $|H_f(\underline{x}_0)| = 0$ (dove $\underline{x}_0$ è punto critico). In tali si può provare a procedere con:
    - strategia diretta per verificare se $\underline{x}_0$ è un punto di sella
    - verificare se f è convessa o concava su $\mathbb{R}^2$ per concludere che $\underline{x}_0$ è punto di minimo o massimo assoluto.

Chapter 2

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Definizione 2. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *aperto e* $f, F \in \mathscr{C}^1(A)$*. Sia* Z *l'insieme di livello di* 0 *di* F*, cioè* $z = l_0^F$ *o esplicitamente* $Z := \{\underline{x} \in A : F(\underline{x}) = 0\}$ *che viene chiamato vincolo dell'ottimizzazione.*

Dato $\underline{x}_0 = (x_0, y_0) \in Z$ *abbiamo che:*

1. $\underline{x}_0$ *è punto di massimo (risp. minimo) locale o relativo di* f *vincolato a* Z *se* $\exists \delta > 0 : f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ *(risp.* $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$*)* $\forall (x, y) \in B_\delta(\underline{x}_0) \cap Z$*)*

2. $\underline{x}_0$ *è punto di massimo (risp. minimo) assoluto o globale di* f *vincolato a* Z *se* $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ *(risp.* $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$*)* $\forall (x, y) \in A \cap Z$

3. $\underline{x}_0$ *è punto estremale o di estremo vincolato a* Z *se e' punto di massimo o minimo locale vincolato a* Z

Si parla di ottimizzazione vincolata di f con vincolo Z per indicare la ricerca dei punti estremali di f vincolati a Z.