Forme canoniche delle coniche

-

Forma canonica	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Ellisse reale
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	Ellisse immaginaria
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Iperbole
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Ellisse degenere (un punto)
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Iperbole degenere (due rette incidenti)
$y^2=a\,x$	Parabola

Forme canoniche delle coniche

-

Forma canonica	
$y^2 = a, \ \ a > 0$	Rette parallele
$y^2 = a, \ \ a < 0$	Rette immaginarie
$y^2 = 0$	Retta doppia

Forme canoniche delle quadriche nello spazio

Forma canonica	
$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2=0$	Autovalori tutti dello stesso segno: un punto (cono immaginario)
$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	Cono
$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=0$	Autovalori con lo stesso segno: una retta
$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=0$	Autovalori con segno discorde: una coppia di piani incidenti
$x^2=0$	Un piano
$a x^2+b y^2+c z^2=1$	a>0, b>0, c>0 ellissoide
$a x^2+b y^2+c z^2=1$	a>0, b>0, c<0, iperboloide iperbolico
$a x^2+b y^2+c z^2=1$	a>0, b<0, c<0, iperboloide ellittico
$a x^2+b y^2+c z^2=1$	a<0, b<0, c<0, insieme vuoto (ellissoide immaginario)

Forme canoniche delle quadriche nello spazio

Forma canonica	
$a x^2 + b y^2 = 1$	a<0 e b<0 insieme vuoto
$a x^2 + b y^2 = 1$	a>0 e b>0 cilindro ellittico
$a x^2 + b y^2 = 1$	ab<0 cilindro iperbolico
$x^2 = u$	Due piani paralleli se u>0
$x^2 = u$	Insieme vuoto se u<0 (piani immaginari)
$a x^2 + b y^2 = z$	a>0 e b>0 paraboloide ellittico
$a x^2 + b y^2 = z$	a>0, b<0 paraboloide iperbolico
$x^2 = a z$	Cilindro parabolico

Coniche nondegeneri: $I_3 \neq 0$

$I_2 > 0$	$I_1 I_3 > 0$	Ellisse immaginaria
$I_2 > 0$	$I_1 I_3 < 0$	Ellisse
$I_2 < 0$		Iperbole
$I_2 = 0$		Parabola

Coniche degeneri: $I_3 = 0$

$I_2 > 0$		Ellisse degenere (un punto)
$I_2 < 0$		Iperbole degenere (due rette incidenti)
$I_2 = 0$	$rk(A) = 1$	Retta doppia
$I_2 = 0$	$I_1 f' < 0$	Rette parallele
$I_2 = 0$	$I_1 f' > 0$	Rette immaginarie

- Nei casi degeneri con $I_2 = 0$, gli invarianti metrici non bastano: bisogna calcolare f'

Classificazione affine delle quadriche nondegeneri

Segnatura q_0		
$(3,0)$ o $(0,3)$	$detA>0$	Ellissoide immaginario
$(3,0)$ o $(0,3)$	$detA<0$	Ellissoide
$(2,1)$ o $(1,2)$	$detA>0$	Iperboloide iperbolico
$(2,1)$ o $(1,2)$	$detA<0$	Iperboloide ellittico
$rk(A_0)=2$	$detA>0$	Paraboloide iperbolico
$rk(A_0)=2$	$detA<0$	Paraboloide ellittico

Classificazione affine delle quadriche con $rk(A)=3$

Segnatura q_0		
$(3,0)$ o $(0,3)$		Un punto (cono immaginario)
$(2,1)$ o $(1,2)$		Cono
$(2,0)$ o $(0,2)$	$tr(A_0)f'>0$	Cilindro immaginario
$(2,0)$ o $(0,2)$	$tr(A_0)f'<0$	Cilindro ellittico
$(1,1)$		Cilindro iperbolico
$(1,0)$ o $(0,1)$		Cilindro parabolico

Classificazione affine delle quadriche con $rk(A) \leq 2$

Segnatura A_0			
$(2,0)$ o $(0,2)$			Una retta (due piani immaginari incidenti)
$(1,1)$			Due piani incidenti
$(1,0)$ o $(0,1)$	$rk(A)=2$	$tr(A_0)f'>0$	Vuoto (due piani parralleli immaginari)
$(1,0)$ o $(0,1)$	$rk(A)=2$	$tr(A_0)f'<0$	Due piani paralleli
$(1,0)$ o $(0,1)$	$rk(A)=1$		Piano doppio