$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\tau(r_M)}{\Delta t} &= 1 - 0.6937\times10^{-9} - 0.00120\times10^{-9} = 1 - 0.6950\times10^{-9} \\
\frac{\Delta\tau(r_E)}{\Delta t} &= 1 - 0.6928\times10^{-9} - 0.00121\times10^{-9} = 1 - 0.6940\times10^{-9} \\
\frac{\Delta\tau(r_G)}{\Delta t} &= 1 - 0.1669\times10^{-9} - 0.08315\times10^{-9} = 1 - 0.2501\times10^{-9}
\end{aligned}$$

Restando lado a lado estas ecuaciones se llega a:

$$\begin{aligned}
\Delta\tau(r_E) - \Delta\tau(r_M) &= 0.0010\times10^{-9}\times\Delta t \\
\Delta\tau(r_G) - \Delta\tau(r_M) &= 0.4449\times10^{-9}\times\Delta t
\end{aligned}$$

Si en el lado derecho de estas ecuaciones hacemos Δt = un día = 86400 seg. se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta\tau(r_E) - \Delta\tau(r_M) &= 82.8 \quad \text{nanosegundos} \\
\Delta\tau(r_G) - \Delta\tau(r_M) &= 38438 \quad \text{nanosegundos}
\end{aligned}$$

En palabras: Comparado con el reloj a nivel del mar, el reloj en el Everest se adelanta 82.8 nanosegundos cada día. Comparados con el reloj a nivel del mar, los relojes de los satélites de GPS se adelantan 38438 nanosegundos cada día.

El GPS utiliza una constelación de 24 satélites. Un aparato receptor que se utilice aquí abajo analiza las señales de 4 satélites: con una señal sincroniza su reloj y con las otras 3 señales calcula las 3 coordenadas espaciales del lugar donde se encuentra. Los relojes del GPS son capaces de medir nanosegundos y, en consecuencia, son sensibles a los 38456 nanosegundos que ellos se adelantan cada día respecto a los relojes que están a nivel del mar. El GPS fue diseñado en base a la fórmula (13.48), y si la teoría especial de la relatividad, o la general, fueran inválidas, el GPS no funcionaría bien. El GPS funciona perfectamente.

13.8 Constantes del movimiento

A continuación vamos a estudiar la caída libre de una partícula de cualquier masa, bien sea $m = 0$ o $m \neq 0$. Tal como hemos visto, la trayectoria es una geodésica. Lo primero es identificar las constantes del movimiento siguiendo la regla (10.15). Como x^0 y x^3 no aparecen en la métrica (13.13), podemos asegurar que $g_{0\beta}dx^\beta/d\lambda$ y $g_{3\beta}dx^\beta/d\lambda$ son constantes del movimiento:

$$\begin{aligned} g_{0\beta}\,\frac{dx^\beta}{d\lambda} &= g_{00}\,\frac{dx^0}{d\lambda} = cg_{00}\,\frac{dt}{d\lambda} = c\,(1 - s/r)\,\frac{dt}{d\lambda} \\ g_{3\beta}\,\frac{dx^\beta}{d\lambda} &= g_{33}\,\frac{dx^3}{d\lambda} = -r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\frac{d\varphi}{d\lambda} \end{aligned}$$

Ajustamos el parámetro afín de manera que la primera constante valga 1 y a la segunda constante la llamamos $-J$. Escribimos entonces $c(1 - s/r)dt/d\lambda = 1$ y $-r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta d\varphi/d\lambda = -J$, es decir,

$$d\lambda = c\,(1 - s/r)\,dt \tag{13.49}$$

$$J = r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,\frac{d\varphi}{d\lambda} \tag{13.50}$$

Vamos a demostrar que el movimiento de la partícula se desarrolla en un plano. Si J es cero en un instante, también será cero en todos los instantes. Pero J es proporcional a $d\varphi/d\lambda$, y podemos afirmar en consecuencia que si $d\varphi/d\lambda$ es cero en un instante, también será cero en todos los instantes. Esto es lo que ocurre si la partícula se mueve en un plano que pasa por los polos norte y sur. Esta idea se generaliza afirmando que si en un instante la partícula se mueve en un plano (cualquiera) que pase por el centro, ella nunca abandonará ese plano[4]. Para simplificar la escritura conviene que orientemos al eje zeta de modo que el plano del movimiento sea el plano ecuatorial; haciendo $\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$ en las ecuaciones (13.12) y (13.50) se obtiene:

$$ds^2 = (1 - s/r)\,c^2dt^2 - (1 - s/r)^{-1}\,dr^2 - r^2d\varphi^2 \tag{13.51}$$

$$J = r^2\,\frac{d\varphi}{d\lambda} \tag{13.52}$$

[4]Recordemos la manera como se trata, en mecánica newtoniana, el problema de una partícula sujeta a una fuerza central: el torque es cero $\Rightarrow$ el momentum angular es constante $\Rightarrow$ el movimiento se desarrolla en un plano.

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{J}{r^2} \tag{13.53}$$

13.9 Una tercera constante del movimiento

De las cuatro ecuaciones (10.8) de las geodésicas ya hemos ejecutado dos, al identificar las dos constantes del movimiento de la sección anterior. Nos falta por considerar las otras dos ecuaciones de las geodésicas:

$$\frac{d^2x^1}{d\lambda^2} + \Gamma^1{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{13.54}$$

$$\frac{d^2x^2}{d\lambda^2} + \Gamma^2{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{13.55}$$

Utilizando los símbolos $\Gamma^2{}_{\mu\nu}$ de la página 319, y la escogencia $\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$, es evidente que la ecuación (13.55) se convierte en $d^2\theta/d\lambda^2 = 0$, lo cual, si bien es cierto, no es útil. Queda la ecuación (13.54); usando los coeficientes $\Gamma^1{}_{\mu\nu}$ de la página 319 y la condición $\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$, se obtiene:

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} - \frac{s}{2r(r-s)}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{c^2s(r-s)}{2r^3}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - (r-s)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

En el tercer término usar (13.49) y en el cuarto término usar (13.53):

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} - \frac{s}{2r(r-s)}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{s(r-s)}{2r^3}\left(1-\frac{s}{r}\right)^{-2} - \frac{J^2(r-s)}{r^4} = 0$$

Multiplicar ambos lados de esta ecuación por $\dfrac{2r}{r-s}\dfrac{dr}{d\lambda}$:

$$\frac{2r}{r-s}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d^2r}{d\lambda^2} - \frac{s}{(r-s)^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^3 + \frac{s}{(r-s)^2}\frac{dr}{d\lambda} - \frac{2J^2}{r^3}\frac{dr}{d\lambda} = 0$$

Reunir los dos primeros términos con un común denominador:

$$\frac{2r(r-s)\dfrac{dr}{d\lambda}\dfrac{d^2r}{d\lambda^2} - s\left(\dfrac{dr}{d\lambda}\right)^3}{(r-s)^2} + \frac{s}{(r-s)^2}\frac{dr}{d\lambda} - \frac{2J^2}{r^3}\frac{dr}{d\lambda} = 0$$

El lado izquierdo de esta ecuación tiene tres términos. El primer término es igual a $\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{r(dr/d\lambda)^2}{r-s}$; el segundo término es $-\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{r}{r-s}$, y el tercer término es $\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{J^2}{r^2}$. La ecuación es entonces

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{r\left(\dfrac{dr}{d\lambda}\right)^2}{r-s} - \frac{r}{r-s} + \frac{J^2}{r^2}\right] = 0$$

o sea que la cantidad entre paréntesis es una constante, a la que llamaremos $-D$:

$$D \equiv \frac{1-\left(\dfrac{dr}{d\lambda}\right)^2}{1-\dfrac{s}{r}} - \frac{J^2}{r^2} \tag{13.56}$$

$$\frac{dD}{d\lambda} = 0 \tag{13.57}$$

La ecuación (13.56) se puede escribir también así :

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 1 - \left(1-\frac{s}{r}\right)\left(D + \frac{J^2}{r^2}\right) \tag{13.58}$$

13.10 J y D en términos de r, v y v_φ

Las variables naturales de la cinemática son la posición y la velocidad. Si nosotros conocemos la posición y la velocidad de una partícula en cierto instante, deberíamos ser capaces de utilizar esa información para averiguar los valores de las constantes J y D. En esta sección nos proponemos deducir las fórmulas correspondientes. Para ejecutar esta tarea debemos encontrar inicialmente la relación que existe entre el parámetro λ y el tiempo local T: basta combinar las ecuaciones (13.28) y (13.49)para obtener

$d\lambda = cdT\sqrt{1-s/r}$. Con este resultado las ecuaciones (13.52) y (13.56) dan:

$$
\begin{aligned}
J &= r^2 \frac{1}{c\sqrt{1-s/r}} \frac{d\varphi}{dT} \\
D &= \frac{1 - \dfrac{1}{c^2(1-s/r)} \left(\dfrac{dr}{dT}\right)^2}{1-s/r} - \frac{r^2}{c^2(1-s/r)} \left(\frac{d\varphi}{dT}\right)^2
\end{aligned}
$$

Aquí reconocemos las velocidades locales v_r, v_φ y v^2 que habíamos definido en las ecuaciones (13.39), (13.40) y (13.42), lo que nos permite escribir:

$$J = \frac{r}{\sqrt{1-s/r}} \frac{v_\varphi}{c} \tag{13.59}$$

$$D = \frac{1-v^2/c^2}{1-s/r} \tag{13.60}$$

Estas son las fórmulas que buscábamos. Si sabemos que una partícula en caída libre pasa por r, y que al pasar por r tiene velocidades locales v y v_φ, las ecuaciones (13.59) y (13.60) nos permiten averiguar los valores de J y D.

Los valores r, v y v_φ que la partícula tiene en cierto instante (es decir, las condiciones iniciales) determinan unívocamente la trayectoria futura y pasada: en otros instantes la partícula tiene que *ajustar* los valores de r, v y v_φ de modo que las cantidades J y D adopten los mismos valores que adoptaron en el instante inicial. Esto de *ajustar* es lo que quiere decir que J y D sean constantes del movimiento. Cada geodésica en el espaciotiempo de Schwarzschild está caracterizada por dos números, que son los valores que adoptan J y D. Una vez que la partícula ha escogido determinada geodésica (es decir, determinados valores de J y D), no podrá abandonarla jamás, ya que abandonarla sería como cambiar los valores iniciales de J y D.

Continuemos con el examen de las ecuaciones (13.59) y (13.60). Es claro que ellas se combinan para producir esta otra relación, que será útil dentro de poco:

$$\frac{Dr^2}{J^2} = \frac{1-v^2/c^2}{v_\varphi^2/c^2} \tag{13.61}$$

De otro lado, las ecuaciones (13.59) y (13.60) se pueden invertir para expresar v y v_φ en términos de las constantes D y J:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(1 - \frac{s}{r}\right) D \tag{13.62}$$

$$\frac{v_\varphi^2}{c^2} = \left(1 - \frac{s}{r}\right) \frac{J^2}{r^2} \tag{13.63}$$

Restamos lado a lado estas dos ecuaciones para obtener:

$$\frac{v^2 - v_\varphi^2}{c^2} = 1 - \left(1 - \frac{s}{r}\right)\left(D + \frac{J^2}{r^2}\right)$$

Pero $v^2 - v_\varphi^2 = v_r^2$, o sea que

$$\frac{v_r^2}{c^2} = 1 - \left(1 - \frac{s}{r}\right)\left(D + \frac{J^2}{r^2}\right) \tag{13.64}$$

Obsérvese que

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dT}{dt}\frac{dt}{d\lambda}\frac{dr}{dT} = \sqrt{1 - s/r}\,\frac{1}{c(1 - s/r)}\frac{dr}{dT} = \frac{dl_r}{cdT} = \frac{v_r}{c}\,, \tag{13.65}$$

o sea que las ecuaciones (13.64) y (13.58) son equivalentes. Observemos también la diferencia que existe entre las ecuaciones (13.43) y (13.64): en la primera ecuación, las cantidades D y J son, en general, variables, mientras que en la segunda ecuación las cantidades D y J son constantes del movimiento.

A grandes distancias, la constante J tiene un significado que es familiar. En efecto, para s/r muy pequeño la ecuación (13.59)da $cJ \simeq rv_\varphi$. En palabras, a grandes distancias cJ tiende al momentum angular zeta por unidad de masa.

La constante D permite también algunos comentarios. Para un pulso de luz se tiene $v = c$, y en en este caso la ecuación (13.60) dice que $D = 0$. Para partícula masiva la ecuación (13.62) es clara: dado un valor de

D, la velocidad local v depende únicamente de la coordenada r. Cuando la partícula se acerca, r disminuye y la velocidad v tiene que aumentar. Esta ecuación es análoga a la ecuación newtoniana que dice que la energía total (que es constante) es la suma de la energía cinética y la energía potencial. La analogía se confirma al estudiar el comportamiento de D en el límite newtoniano: la ecuación (13.60) es $D = (1 - v^2/c^2)(1 - s/r)^{-1} = (1 - v^2/c^2)(1 + s/r + \cdots) \rightarrow (1 - v^2/c^2)(1 + s/r) \simeq 1 - (v^2/c^2 - s/r) = 1 - \dfrac{2}{c^2}\left(\dfrac{1}{2}v^2 + \Phi\right)$. Vemos así que $(1 - D)c^2/2 \rightarrow \dfrac{1}{2}v^2 + \Phi$; en palabras, $(1 - D)c^2/2$ tiende a la energía total (prerrelativista) por unidad de masa.

¿Cuáles son los valores numéricos que adoptan las constantes J y D? Esperamos responder esta pregunta, al menos medianamente, estudiando dos casos bien diferentes: el del planeta Tierra y el de una partícula de alta velocidad que pasa por las cercanías del origen.

La Tierra en su órbita alrededor del Sol tiene una r promedio de 1.49×10^{13} cm y una velocidad promedio de $0.98 \times 10^{-4}c$; como el s del Sol es 2.93 km, concluimos que $J/s \simeq 5000$ y $D \simeq 1 + 0.00000001$. Aprendemos que para los planetas solares J/s es un número muy grande y que D es muy cercano a 1, y mayor que 1. Pensemos ahora en una partícula masiva de alta velocidad, $v = 0.8c$ y r promedio igual a $10s$; en este caso se obtiene $J/s \simeq 8$ y $D \simeq 0.4$.

13.11 Las cuatro variables t, T, τ y λ

Queremos hacer una recopilación de las relaciones que existen entre las cuatro variables t, T, τ y λ. Antes de hacerlo conviene que repasemos el significado de esas variables.

t es un tiempo universal. Un reloj en reposo en $r = \infty$ marca un tiempo t. El tiempo T es el que marca un reloj en reposo en un punto con coordenada radial r. Una partícula en caída libre sigue una geodésica en el espaciotiempo, y los eventos de su trayectoria se parametrizan con λ. Si esta partícula en caída libre es masiva, hay un tiempo propio $d\tau$ que marca un reloj que acompaña a la partícula. Se puede verificar, con lo expuesto en las páginas anteriores, que las relaciones entre las cuatro variables son:

$$d\lambda = c\,(1 - s/r)\,dt \tag{13.66}$$

$$d\lambda = \frac{c}{\sqrt{D}}\,d\tau \tag{13.67}$$

$$\begin{aligned}
d\tau &= \sqrt{D}\,(1 - s/r)\,dt && (13.68)\\
dT &= \sqrt{1 - s/r}\,dt && (13.69)\\
dT &= \frac{1}{\sqrt{D\,(1 - s/r)}}\,d\tau && (13.70)\\
dT &= \frac{1}{c\sqrt{1 - s/r}}\,d\lambda && (13.71)
\end{aligned}$$

13.12 La caída vertical

Hagamos una pausa para estudiar una trayectoria simple, que es la que describe una partícula masiva que se suelta desde cierta altura. Este es, sin duda, uno de los problemas más importantes de la física, como lo demuestra el interés que Galileo le prestó al construir las bases de la ciencia moderna.

Suponemos que la partícula se suelta desde una altura r_0. Este dato debería ser suficiente para determinar la constante D; en efecto, haciendo $v = 0$ en la ecuación (13.60) encontramos

$$D = \frac{1}{1 - s/r_0} \qquad (13.72)$$

Igualando los lados derechos de las ecuaciones (13.60) y (13.72) se obtiene:

$$\begin{aligned}
v &= c\sqrt{\frac{s/r - s/r_0}{1 - s/r_0}} && (13.73)\\
r_0 &= s\,\frac{1 - v^2/c^2}{s/r - v^2/c^2} && (13.74)
\end{aligned}$$

Pensemos en este momento en el problema recíproco, el de una partícula masiva que inicialmente está en r y que se dispara hacia arriba con una velocidad v. A medida que asciende, su velocidad disminuye hasta que se vuelve cero en r_0. Vemos así que la ecuación (13.73) da respuesta a dos preguntas: a) da la velocidad (en r) que tiene una partícula que se suelta en r_0 y, b) da la velocidad vertical que hay que impartirle a una partícula para que alcance una altura máxima r_0. Del mismo modo, la ecuación

(13.74) responde dos preguntas: a) si se sabe que una partícula tiene (en r) una velocidad v hacia abajo, la ecuación nos permite averiguar desde qué altura fue soltada, y, b) si una partícula se dispara (en r) hacia arriba, la ecuación dice cuál es la altura máxima que ella alcanza.

La ecuación (13.73) tiene un caso interesante, y es cuando $r_0 = \infty$:

$$v = c\sqrt{s/r} \qquad \text{para } r_0 = \infty \tag{13.75}$$

En palabras: si, con un disparo vertical, se quiere enviar una partícula al infinito, se le debe impartir una velocidad local mayor o igual que $c\sqrt{s/r}$.

Concentrémonos ahora en otro aspecto de la caída vertical, que es el cálculo del tiempo que transcurre entre r_0 y r. Como el movimiento se da únicamente en la dirección radial, la constante J es cero y la ecuación (13.58) queda así:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 1 - (1 - s/r)D \tag{13.76}$$

Utilizar la ecuación (13.67):

$$\left(\frac{\sqrt{D}}{c}\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{s}{r}\right)D \tag{13.77}$$

Al tomar raíz cuadrada surge un $\pm$; escogemos el signo $-$ porque la partícula está cayendo:

$$\frac{\sqrt{D}}{c}\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{r}\right)D}\,,$$

es decir:

$$cd\tau = -\frac{rdr}{\sqrt{sr - \frac{D-1}{D}r^2}}\,, \tag{13.78}$$

y utilizando la ecuación (13.72):

$$\begin{aligned}
cd\tau &= -\frac{rdr}{\sqrt{sr - \dfrac{s}{r_0}r^2}} \\
cd\tau &= -\frac{r_0^2}{\sqrt{sr_0}} \frac{\dfrac{r}{r_0} d\left(\dfrac{r}{r_0}\right)}{\sqrt{\dfrac{r}{r_0} - \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2}} \qquad (13.79)
\end{aligned}$$

Llamar $x \equiv r/r_0$ e integrar, asumiendo que el reloj τ comienza a marchar cuando la partícula se suelta:

$$c\int_0^\tau d\tau = -\frac{r_0^2}{\sqrt{sr_0}} \int_1^{r/r_0} \frac{xdx}{\sqrt{x - x^2}} \qquad (13.80)$$

La integral del lado derecho se resuelve con ayuda de la fórmula 2.264.2 de [26], que reza:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x - x^2}} = -\sqrt{x - x^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen}(1 - 2x)$$

La ecuación (13.80) es entonces

$$c\tau = \frac{r_0^2}{\sqrt{sr_0}} \left(\sqrt{\frac{r}{r_0} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(1 - \frac{2r}{r_0}\right) + \frac{\pi}{4} \right) \qquad (13.81)$$

Si un objeto se suelta desde $r_0 = s$, ¿cuánto tarda en llegar al centro? Para responder esta pregunta hacemos $r_0 = s$, $r = 0$ en la ecuación (13.81), con lo que se llega a $c\tau = \pi s/2$. Si M es la masa del Sol se tiene $s = 9.85$ microsegundos-luz; en consecuencia $c\tau = 15.47$ microsegundos-luz y $\tau = 15.47$ microsegundos. Para el agujero negro que reside en el centro de la Vía Láctea, $M = 2.6 \times 10^6$ masas solares, $s = 25.61$ segundos-luz, $c\tau = 40.23$ segundos-luz y $\tau = 40.23$ segundos.

Es oportuno anotar que la física newtoniana da la misma respuesta (13.81). En efecto, en la gravitación de Newton el potencial gravitacional es

$-GM/r = -c^2 s/2r$, y por consiguiente la energía total para una partícula de masa m es $-c^2 sm/2r + \frac{1}{2}mu^2$. Como esta energía es una constante del movimiento podemos escribir

$$-\frac{c^2 sm}{2r} + \frac{1}{2}mu^2 = -\frac{c^2 sm}{2r_0} + 0\,,$$

de donde

$$u^2 = c^2 s\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Como esta ecuación newtoniana coincide con la ecuación relativista (13.77), el tiempo newtoniano es el mismo tiempo dado por la ecuación (13.81).

El tiempo universal. También nos interesa calcular t, el tiempo coordenado, y esto es un poco más difícil. Veamos: en vista de la ecuación (13.66) la ecuación (13.76) es

$$\frac{1}{(1-s/r)^2}\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2 = 1 - (1-s/r)D\,,$$

y utilizando la fórmula (13.72):

$$\frac{1}{(1-s/r)^2}\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2 = 1 - \frac{1-s/r}{1-s/r_0}\,,$$

de donde despejamos cdt:

$$cdt = -\frac{\sqrt{1-s/r_0}\,dr}{(1-s/r)\,\sqrt{s/r - s/r_0}} \tag{13.82}$$

Para integrar el lado derecho de esta ecuación conviene [40] hacer el cambio de variable $\eta = \arccos(2r/r_0 - 1)$, para finalmente llegar a

$$
\begin{aligned}
ct &= s \ln \left| \frac{\sqrt{\dfrac{r_0}{s} - 1} + \sqrt{\dfrac{r_0}{r} - 1}}{\sqrt{\dfrac{r_0}{s} - 1} - \sqrt{\dfrac{r_0}{r} - 1}} \right| + \\
& \quad s\sqrt{\frac{r_0}{s} - 1} \left[\left(\frac{r_0}{2s} + 1 \right) \arccos \left(\frac{2r}{r_0} - 1 \right) + \frac{r_0}{s} \sqrt{\frac{r}{r_0} + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2} \right]
\end{aligned} \tag{13.83}
$$

Esta es verdaderamente la integración de la ecuación (13.82); para cerciorarse de ello basta verificar que la ecuación (13.82) se obtiene tomando diferenciales en ambos lados de (13.83).

Observemos que el logaritmo en el lado derecho de la ecuación (13.83) diverge en $r = s$. Esto quiere decir que para llegar a $r = s$ la partícula toma una cantidad infinita de tiempo coordenado t. La Figura 13.4 muestra dos curvas: en trazo continuo el tiempo propio τ dado por la fórmula (13.81), y en trazo punteado el tiempo coordenado t dado por la fórmula (13.83). Notoriamente, el tiempo propio τ es una función de buena conducta, mientras que el tiempo coordenado t tiene un comportamiento muy preocupante. En la sección 13.21 abordaremos de nuevo este asunto.

13.13 Potencial efectivo

Se define

$$
V = \left(1 - \frac{s}{r}\right)\left(D + \frac{J^2}{r^2}\right) \tag{13.84}
$$

de modo que la ecuación (13.64) es

$$
\frac{v_r^2}{c^2} = 1 - V \tag{13.85}
$$

Al tomar la derivada d/dT en ambos lados de esta ecuación se obtiene $\dfrac{2v_r}{c^2}\dfrac{dv_r}{dT} = -\dfrac{dV}{dT} = -\dfrac{dl_r}{dT}\dfrac{dV}{dl_r} = -v_r\dfrac{dV}{dl_r}$, o sea que

$$
\frac{dv_r}{dT} = -\frac{c^2}{2}\frac{dV}{dl_r} \tag{13.86}
$$