

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет Информационных технологий и управления

Кафедра Высшей математики

Лабораторная работа №2

“РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ПРЯМЫМИ

МЕТОДАМИ. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ”

Выполнили:

Заломов Р.А., 121702

Готин И.А., 121702

Проверил:

Самсонов П.А.

Минск 2022

Цель:

Изучение прямых методов решения СЛАУ - метода единственного деления, метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, метода оптимального исключения, метода Гаусса-Жордана или метода LU – разложения, метода прогонки для систем с трехдиагональной матрицей; применение этих методов для вычисления обратной матрицы; исследование накопления погрешностей округления при решении СЛАУ прямыми методами на ЭВМ.

Вариант: 5**Условия заданий:****Вариант 5**

1. Решить системы линейных уравнений $AX = B$ и $AX = B + \Delta B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1001 & 100 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1101 \\ 11 \end{pmatrix}, \Delta B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,01 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Сравнить полученные решения.

Найти число обусловленности матрицы A в нормах $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_1$.

Определить экспериментальное значение относительной погрешности решения системы, сравнив полученные решения с точными, и вычислить вектор невязки.

2. Решить методом прогонки трехдиагональную систему

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 11, \\ -2x_1 + 14x_2 + 5x_3 = 33, \\ 3x_2 - 17x_3 + 2x_4 = 28, \\ x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 19, \\ 3x_4 + 5x_5 = -17. \end{cases}$$

Составить таблицу для прогоночных коэффициентов $L_i, M_i, i = \overline{1, 5}$.

Выполнение заданий:

1. Задание 1:

Входные данные:

```

A = {{1001, 100}, {10, 1}}
B = {{1101}, {11}}
dB = {{0}, {0.01}}
X = {{x}, {y}}
"A*X"
MatrixForm[A.X]
[матричная форма]
Solve[ $\begin{pmatrix} 1001 x + 100 y \\ 10 x + y \end{pmatrix} = B, \{x, y\}$ ]
[решить уравнения]

Solve[ $\begin{pmatrix} 1001 x^* + 100 y^* \\ 10 x^* + y^* \end{pmatrix} = B + dB, \{x^*, y^*\}$ ]
[решить уравнения]

X =  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 
X* =  $\begin{pmatrix} 4.423544863740766 \cdot 10^{-14} \\ 11.01 \end{pmatrix}$ 
"dX = X* - X"
dX = MatrixForm[X* - X]
[матричная форма]
"Норма вектора dX"
normdX = Sqrt[Power[-0.99999999999999558, 2] + Power[10.01, 2]]
[квадрат] [степень] [степень]

"Число обусловленности матрицы A"
condA = Norm[A] * Norm[Inverse[A]]
[норма] [но... [обратная матрица]

"Оценка погрешностей"
"Norm[dX] / Norm[X] <= condA * Norm[dB] / Norm[B]"
normdX / Norm[X] <= condA * Norm[dB] / Norm[B]
[норма] [норма] [норма]

"Norm[dX] / Norm[X] <= condA * Norm[dB] / Norm[B]"
normdX / Norm[X*] <= condA * Norm[dB] / Norm[B]
[норма] [норма] [норма]

"Возвращается True, значит оценка погрешности выполняются"

```

Выходные данные:

```

Out[122]= {{1001, 100}, {10, 1}}

Out[123]= {{1101}, {11}}

Out[124]= {{0}, {0.01}}

Out[125]= {{x}, {y}}

Out[126]= A*X

Out[127]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1001 x + 100 y \\ 10 x + y \end{pmatrix}$$


Out[128]= {{x → 1, y → 1}}

Out[129]= {{x* → 4.42354 × 10-14, y* → 11.01}}

Out[130]= {{1}, {1}}

Out[131]= {{4.42354 × 10-14}, {11.01}}

Out[132]= На самом деле  $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 11.01 \end{pmatrix}$ , но из-за ошибки округления решения  $x = 4.423544863740766 \cdot 10^{-14}$ 

Out[133]= dX = X* - X

Out[134]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1. \\ 10.01 \end{pmatrix}$$


Out[135]= Норма вектора dX

Out[136]= 10.0598

Out[137]= Число обусловленности матрицы A

Out[138]= 506051 + 30 √284541794

Out[139]= Оценка погрешностей

Out[140]= Norm[dX] / Norm[X] ≤ condA * Norm[dB] / Norm[B]

Out[141]= True

Out[142]= Norm[dX] / Norm[X] ≤ condA * Norm[dB] / Norm[B]

Out[143]= True

Out[144]= Возвращается True, значит оценка погрешности выполняются

```

2. Задание 2:

Входные данные:

```

in[215]= "Вектор p"
p = {0.0, -2.0, 3.0, 1.0, 3.0}
"Вектор q"
q = {4.0, 14.0, -17.0, 8.0, 5.0}
"Вектор r"
r = {1.0, 5.0, 2.0, -3.0, 0.0}
"Вектор b"
b = {11.0, 33.0, 28.0, 19.0, -17.0}
n = Length[b]; UL = {}; VL = {};
длина
u = {Null, Null, Null, Null, Null}
пустой пустой пустой пустой пустой
v = {Null, Null, Null, Null, Null}
пустой пустой пустой пустой пустой
u[[1]] =  $-\frac{r[[1]]}{q[[1]]}$ ; v[[1]] =  $\frac{b[[1]]}{q[[1]]}$ ;
For[цикл для i = 1, i ≤ n, i++, условный оператор If[i == 1, s = q[[1]], s = q[[i]] + p[[i]] * u[[i - 1]]];

$$u[[i]] = \frac{-r[[i]]}{s}; v[[i]] = \frac{b[[i]] - p[[i]] * v[[i - 1]]}{s};$$

UL = Append[UL, u[[i]]; VL = Append[VL, v[[i]];]
добавить в конец добавить в конец
x = {Null, Null, Null, Null, Null}
пустой пустой пустой пустой пустой
XL = {};
x[[n]] = v[[n]]
For[i = n - 1, i ≥ 1, i--, x[[i]] = u[[i]] * x[[i + 1]] + v[[i]];
цикл для
XL = Append[XL, x[[i]];]
добавить в конец
"Полученное решение - вектор x"
PaddedForm[x, {2, 1}]
форма числа с заполнением нулями
"Сравним полученное решение, с решением, полученным с помощью встроенных функций"
a = {{4.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0}, {-2.0, 14.0, 5.0, 0.0, 0.0}, {0.0, 3.0, -17.0, 2.0, 0.0}, {0.0, 0.0, 1.0, 8.0, -3.0}, {0.0, 0.0, 0.0, 3.0, 5.0}}
b = {11.0, 33.0, 28.0, 19.0, -17.0}
PaddedForm[MatrixForm[a], {2, 1}]
форма числ... матричная форма
"Искомое решение"
PaddedForm[LinearSolve[a, b], {2, 1}]
форма числ... решить линейные уравнения
"Равны ли полученные решения?"
PaddedForm[LinearSolve[a, b], {2, 1}] = PaddedForm[x, {2, 1}]
форма числ... решить линейные уравнения форма числа с заполнением нулями

```

Выходные данные:

```

Out[215]= Вектор p

Out[216]= {0., -2., 3., 1., 3.}

Out[217]= Вектор q

Out[218]= {4., 14., -17., 8., 5.}

Out[219]= Вектор r

Out[220]= {1., 5., 2., -3., 0.}

Out[221]= Вектор b

Out[222]= {11., 33., 28., 19., -17.}

Out[224]= {Null, Null, Null, Null, Null}

Out[225]= {Null, Null, Null, Null, Null}

Out[228]= {Null, Null, Null, Null, Null}

Out[230]= -4.

Out[232]= Полученное решение - вектор x

Out[233]//PaddedForm=
  { 2.0,  3.0, -1.0,  1.0, -4.0}

Out[234]= Сравним полученное решение, с решением, полученным с помощью встроенных функций

Out[235]= {{4., 1., 0., 0., 0.}, {-2., 14., 5., 0., 0.}, {0., 3., -17., 2., 0.}, {0., 0., 1., 8., -3.}, {0., 0., 0., 3., 5.}}

Out[236]= {11., 33., 28., 19., -17.}

Out[237]//PaddedForm=
  ( 4.0  1.0  0.0  0.0  0.0 )
  (-2.0 14.0  5.0  0.0  0.0 )
  ( 0.0  3.0 -17.0  2.0  0.0 )
  ( 0.0  0.0  1.0  8.0 -3.0 )
  ( 0.0  0.0  0.0  3.0  5.0 )

Out[238]= Искомое решение

Out[239]//PaddedForm=
  { 2.0,  3.0, -1.0,  1.0, -4.0}

Out[240]= Равны ли полученные решения?

Out[241]= True

```

Вывод:

В ходе лабораторной работы мы познакомились с понятием нормы матрицы, число обусловленности матрицы и методом решения СЛАУ при помощи метода прогонки. Также были получены знания по решению СЛАУ при помощи пакета MATHEMATICA.