Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет информационных технологий и управления

ОТЧЕТ

Индивидуальная практическая работа №1

Выполнил:

Заломов Р.А.

Проверил:

Самсонов П.А.

Минск 2022

Цель: Ознакомление с основными источниками возникновения погрешности, изучение влияния конечной арифметики на достоверность результатов, получаемых при численном решении задачи, на примере функции, представляемой сходящимся рядом Тейлора с теоретически бесконечным радиусом сходимости.

Листинг программы для вычисления рядов Тейлора для синуса. Язык программирования - Python:

```
import math


DELTA = 1E-4
PI = math.pi


def tailor_term(n: int, x: float) -> float:
    return (-1)**n*((x**(2*n+1))/math.factorial(2*n+1))


def sin_tailor(term_num: int, x: float):
    # while x >= 2*PI:
    #     x -= 2*PI
    tailor_list = [tailor_term(i, x) for i in range(term_num)]
    # print("Tailor terms:", ', '.join(list(map(str, tailor_list))))
    sin = sum(tailor_list)
    return sin


def scores() -> str:
    return "-"*200


print(scores())
print("Computed sin\t\tTailor sin")
for x in range(30):
    print(scores())
    print(f"Computing sin({x})")
    n = 1
    while abs(math.sin(x) - sin_tailor(n, x)) >= DELTA:
        print(f"{n}. Computed sin({x}): {math.sin(x)}\t\tTailor sin({x}):
{sin_tailor(n, x)}\t\t"
              f"E={abs((math.sin(x)-sin_tailor(n, x))/sin_tailor(n, x))}"
              f"\t\tdelta={abs(math.sin(x) - sin_tailor(n, x))}")
        n += 1
    try:
        print(f"{n}. Computed sin({x}): {math.sin(x)}\t\tTailor sin({x}):
{sin_tailor(n, x)}\t\t"
              f"E={abs((math.sin(x) - sin_tailor(n, x)) / sin_tailor(n, x))}"
              f"\t\tdelta={abs(math.sin(x) - sin_tailor(n, x))}")
    except ZeroDivisionError:
        print(f"{n}. Computed sin({x}): {math.sin(x)}\t\tTailor sin({x}):
{sin_tailor(n, x)}\t\t"
              f"E=0\t\tdelta={abs(math.sin(x) - sin_tailor(n, x))}")
    print(f"{n} tailor terms needed to count sin with {DELTA} accuracy")
```

Для получения заранее просчитанного значения синуса использовался модуль math. Для того, чтобы синус, просчитанный с помощью ряда Тейлора считался правильным, разница между им и заранее просчитанным синусом должна составлять не более 10^-4(константа DELTA в листинге).

Пример вывода:

```
Computing sin(9)
1. Computed sin(9): 0.4121184852417566      Tailor sin(9): 9.0      E=0.9542090571953603       delta=8.587881514758243
2. Computed sin(9): 0.4121184852417566      Tailor sin(9): -112.5       E=1.0036632754243713       delta=112.91211848524176
3. Computed sin(9): 0.4121184852417566      Tailor sin(9): 379.575      E=0.9989142633597002       delta=379.1628815147582
4. Computed sin(9): 0.4121184852417566      Tailor sin(9): -569.4267857142856       E=1.0007237427103552       delta=569.8389041995274
5. Computed sin(9): 0.4121184852417566      Tailor sin(9): 498.20022321428587       E=0.9991727854263436       delta=497.7881047290441
6. Computed sin(9): 0.4121184852417566      Tailor sin(9): -287.9614833603895       E=1.0014311583633773       delta=288.37360184563124
7. Computed sin(9): 0.4121184852417566      Tailor sin(9): 120.23786428415349       E=0.9965724733411114       delta=119.82574579891173
8. Computed sin(9): 0.4121184852417566      Tailor sin(9): -37.21045552159879       E=1.0110753410423192       delta=37.622574006840544
9. Computed sin(9): 0.4121184852417566      Tailor sin(9): 9.676727949967152        E=0.957411380440518     delta=9.264609464725394
10. Computed sin(9): 0.4121184852417566     Tailor sin(9): -1.428131293298465       E=1.2885718471233218       delta=1.8402497785402216
11. Computed sin(9): 0.4121184852417566     Tailor sin(9): 0.7135201321884752       E=0.42241505649220257      delta=0.3014016469467186
12. Computed sin(9): 0.4121184852417566     Tailor sin(9): 0.3706866036026211       E=0.11177064732436559      delta=0.04143188163913547
13. Computed sin(9): 0.4121184852417566     Tailor sin(9): 0.4169691299617114       E=0.011633102720098843      delta=0.004850644719954833
14. Computed sin(9): 0.4121184852417566     Tailor sin(9): 0.4116288384587395       E=0.001189534690646284      delta=0.0004896467830171058
15. Computed sin(9): 0.4121184852417566     Tailor sin(9): 0.41216155226630197      E=0.00010449064040196407       delta=4.306702454537348e-05
15 tailor terms needed to count sin with 0.0001 accuracy
```

Computed sin – заранее просчитанный синус
Tailor sin – синус, подсчитанный с помощью рядов Тейлора при очередной итерации
E – относительная погрешность
delta – разница между заранее просчитанным синусом и синусом, подсчитанным при помощи ряда Тейлора.

Как видно, для обеспечения требуемой точности потребовалось просчитать и просуммировать 15 слагаемых ряда (последняя строка).

В данной конфигурации можно просчитать sin(t) до t = 30 (не включая t = 30). Т.е., начиная с t = 30, увеличение количества слагаемых ряда Тейлора не помогает.

```
Computing sin(29)
1. Computed sin(29): -0.6636338842129675        Tailor sin(29): 29.0        E=1.0228839270418264        delta=29.663633884212967
2. Computed sin(29): -0.6636338842129675        Tailor sin(29): -4035.8333333333335     E=0.9998355645961066        delta=4035.1696994491203
3. Computed sin(29): -0.6636338842129675        Tailor sin(29): 166890.40833333333      E=1.0000039764650999        delta=166891.07196721755
4. Computed sin(29): -0.6636338842129675        Tailor sin(29): -3255704.097420635      E=0.9999997961627148        delta=3255703.433786751
5. Computed sin(29): -0.6636338842129675        Tailor sin(29): 36722101.171177804      E=1.000000018071784     delta=36722101.83481169
6. Computed sin(29): -0.6636338842129675        Tailor sin(29): -268926391.8369248      E=0.9999999975322843        delta=268926391.1732909
7. Computed sin(29): -0.6636338842129675        Tailor sin(29): 1378832471.1106026      E=1.0000000004813012        delta=1378832471.7742364
8. Computed sin(29): -0.6636338842129675        Tailor sin(29): -5220049451.455448      E=0.9999999998728683        delta=5220049450.791814
9. Computed sin(29): -0.6636338842129675        Tailor sin(29): 15183111198.831493      E=1.0000000000437086        delta=15183111199.495127
10. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -34989573324.24254      E=0.9999999999810334        delta=34989573323.5789
11. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 65475254494.5795        E=1.0000000000101357        delta=65475254495.24313
12. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -101502848658.83817     E=0.9999999999934619        delta=101502848658.17453
13. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 132544792594.53558      E=1.0000000000050069        delta=132544792595.19922
14. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -147845615231.79962     E=0.9999999999955113        delta=147845615231.136
15. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 142558735731.19043      E=1.0000000000046552        delta=142558735731.85406
16. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -120054231107.38446     E=0.9999999999944722        delta=120054231106.72083
17. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 89091133581.29117       E=1.000000000007449     delta=89091133581.9548
18. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -58716640959.193054     E=0.9999999999886977        delta=58716640958.52942
19. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 34606435909.08565       E=1.0000000000191767        delta=34606435909.74928
20. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -18352206227.3667       E=0.9999999999638389        delta=18352206226.703064
21. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 8805243795.045757       E=1.000000000075368     delta=8805243795.70939
22. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -3841165656.1440964     E=0.9999999998272311        delta=3841165655.4804626
23. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 1530364822.8713923      E=1.0000000004336442        delta=1530364823.535026
24. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -559115812.1202939      E=0.9999999988130653        delta=559115811.4566599
25. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 188015656.42902935      E=1.0000000035296734        delta=188015657.09266323
26. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -58391231.82586509      E=0.9999999886346997        delta=58391231.16223121
27. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 16800420.214180708      E=1.000000039501029     delta=16800420.87781459
28. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -4491222.669886131      E=0.9999998522375904        delta=4491222.006252247
29. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 1118511.5611603018      E=1.0000005933187526        delta=1118512.224794186
30. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -260151.9363002621      E=0.9999974490526818        delta=260151.2726663779
31. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 56639.32090310787       E=1.0000117168404146        delta=56639.98453699209
32. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -11568.93493612259      E=0.999942636561803     delta=11568.271302238378
33. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 2220.282169837221       E=1.0002988961913168        delta=2220.945803721434
34. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -402.22610381999357     E=0.9983500974255267        delta=401.5624699357806
35. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 67.83558802691977       E=1.0097829753307308        delta=68.49922191113274
36. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -11.706038299690718     E=0.9433084133826471        delta=11.042404415477751
37. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): 1.0212272521889272      E=1.6498395756581272        delta=1.6848611364018948
38. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -0.9073547890958984     E=0.26860596076841997       delta=0.24372090488293086
39. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -0.6301952715428331     E=0.053060716543097276      delta=0.03343861267013448
40. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -0.6680224630816399     E=0.006569507930059014      delta=0.004388578868672388
41. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -0.6631131007229769     E=0.0007853614857297044     delta=0.0005207834899906283
42. Computed sin(29): -0.6636338842129675       Tailor sin(29): -0.6637197380640929     E=0.00012935256585223158        delta=8.585385112536148e-05
```

(на подсчёт значения sin(29) с заданной точностью потребовалось 42 слагаемых ряда Тейлора)

```
315. Computed sin(30): -0.9880316240928618      Tailor sin(30): -0.988278330373463      E=0.00024963238899305414        delta=0.00024670628060119437
316. Computed sin(30): -0.9880316240928618      Tailor sin(30): -0.988278330373463      E=0.00024963238899305414        delta=0.00024670628060119437
317. Computed sin(30): -0.9880316240928618      Tailor sin(30): -0.988278330373463      E=0.00024963238899305414        delta=0.00024670628060119437
Traceback (most recent call last):
  File "D:\Programms\Programming\BSUIR\NumMethods\IPT1\Python\tailor.py", line 34, in <module>
    f"\t\tdelta={abs(math.sin(x) - sin_tailor(n, x))}")
  File "D:\Programms\Programming\BSUIR\NumMethods\IPT1\Python\tailor.py", line 15, in sin_tailor
    tailor_list = [tailor_term(i, x) for i in range(term_num)]
  File "D:\Programms\Programming\BSUIR\NumMethods\IPT1\Python\tailor.py", line 15, in <listcomp>
    tailor_list = [tailor_term(i, x) for i in range(term_num)]
  File "D:\Programms\Programming\BSUIR\NumMethods\IPT1\Python\tailor.py", line 9, in tailor_term
    return (-1)**n*((x**(2*n+1))/math.factorial(2*n+1))
KeyboardInterrupt
```

(а на подсчёт sin(30) уже не хватает и 317 – программа была прервана самим пользователем. Как видно, максимальная точность в этом случае составляет примерно 2*10^-4).

Т.к. Python поддерживает только один вещественный тип(float), то для увеличения «радиуса сходимости» требуется использовать формулы приведения, т.е. привести аргумент к виду $0 < t < 2\pi$.

```
while x >= 2*PI:
    x -= 2*PI
```

Или

```
x -= 2*PI*(x // (2*PI))
```

(PI = 3.141592653589793)

Это приведёт к потере точности(ибо проводятся дополнительные вычислительные процедуры). Но синус можно будет вычислять для больших чисел. Также в этом случае можно увеличить точность с 10^-4, до, например, 10^-8. И даже при такой хорошей точности, синус вычисляется для достаточно больших чисел(проверено на числах <= 10000). Так, что, если использовать данный метод подсчёта, то «радиус сходимости» будет «неограниченным», что проверить достаточно сложно. Единственным способом «сломать» метод будет введение достаточно маленького числа погрешности, например, 10^-15, что позволит сократить «радиус сходимости» (при точности 10^-15 максимальное число, для которого вычисляется синус, составляет 4). Но такая точность является «запредельной» и ненужной.

```
Computing sin(10000)
1. Computed sin(10000): -0.30561438888825215      Tailor sin(10000): 3.45217627718948     E=1.0885280369104042       delta=3.757790666077732
2. Computed sin(10000): -0.30561438888825215      Tailor sin(10000): -3.404720964066936       E=0.9102380511901933       delta=3.0991065751786837
3. Computed sin(10000): -0.30561438888825215      Tailor sin(10000): 0.6811398960361723       E=1.4486807932801256       delta=0.9867542849244244
4. Computed sin(10000): -0.30561438888825215      Tailor sin(10000): -0.47822517069490544     E=0.36094039457570554      delta=0.1726107818066533
5. Computed sin(10000): -0.30561438888825215      Tailor sin(10000): -0.2863257597782495      E=0.06736602785911099      delta=0.019288629110002675
6. Computed sin(10000): -0.30561438888825215      Tailor sin(10000): -0.30711635313142777     E=0.0048905381555272       delta=0.001501964243175613
7. Computed sin(10000): -0.30561438888825215      Tailor sin(10000): -0.3055280689397397      E=0.00028252706473741955       delta=8.631994851243663e-05
8. Computed sin(10000): -0.30561438888825215      Tailor sin(10000): -0.30561820422681546     E=1.2484002950541061e-05       delta=3.815338563306625e-06
9. Computed sin(10000): -0.30561438888825215      Tailor sin(10000): -0.30561425500188544     E=4.3808940363299744e-07       delta=1.338863667155188e-07
10. Computed sin(10000): -0.30561438888825215     Tailor sin(10000): -0.3056143926187604      E=1.2206585572391494e-08       delta=3.73050823565535e-09
10 tailor terms needed to count sin with 1e-08 accuracy

Process finished with exit code 0
```

```
Computing sin(4)
1. Computed sin(4): -0.7568024953079282     Tailor sin(4): 4.0      E=1.189200623826982     delta=4.756802495307928
2. Computed sin(4): -0.7568024953079282     Tailor sin(4): -6.666666666666666       E=0.8864796257038108        delta=5.909864171358738
3. Computed sin(4): -0.7568024953079282     Tailor sin(4): 1.8666666666666671       E=1.4054299082006758        delta=2.6234691619745956
4. Computed sin(4): -0.7568024953079282     Tailor sin(4): -1.3841269841269837      E=0.45322755499541867       delta=0.6273244888190554
5. Computed sin(4): -0.7568024953079282     Tailor sin(4): -0.6617283950617279      E=0.14367541268548942       delta=0.09507410024620033
6. Computed sin(4): -0.7568024953079282     Tailor sin(4): -0.7668045534712196      E=0.013043816860519943      delta=0.01000205816329136
7. Computed sin(4): -0.7568024953079282     Tailor sin(4): -0.7560275115830666      E=0.001025073443741303      delta=0.000774983724861622
8. Computed sin(4): -0.7568024953079282     Tailor sin(4): -0.7568486195364497      E=6.094247559004621e-05     delta=4.612422852146025e-05
9. Computed sin(4): -0.7568024953079282     Tailor sin(4): -0.7568003190686036      E=2.875579290603853e-06     delta=2.1762393246360645e-06
10. Computed sin(4): -0.7568024953079282        Tailor sin(4): -0.7568025787396139      E=1.1024233798226825e-07        delta=8.343168567126469e-08
11. Computed sin(4): -0.7568024953079282        Tailor sin(4): -0.7568024926569087      E=3.5029212254758167e-09        delta=2.6510195150208915e-09
12. Computed sin(4): -0.7568024953079282        Tailor sin(4): -0.7568024953788914      E=9.376717931203857e-11     delta=7.096323528799076e-11
13. Computed sin(4): -0.7568024953079282        Tailor sin(4): -0.7568024953063053      E=2.144448554890398e-12     delta=1.6229240173970538e-12
14. Computed sin(4): -0.7568024953079282        Tailor sin(4): -0.7568024953079596      E=4.151586681027884e-14     delta=3.141931159689193e-14
15. Computed sin(4): -0.7568024953079282        Tailor sin(4): -0.756802495307927       E=1.6136909360886464e-15        delta=1.2212453270876722e-15
16. Computed sin(4): -0.7568024953079282        Tailor sin(4): -0.7568024953079275      E=8.80195056048352e-16      delta=6.661338147750939e-16
16 tailor terms needed to count sin with 1e-15 accuracy
```

Вывод: вычисление значения синуса на языке Python с использованием рядов Тейлора для больших значений невозможно ввиду накопления ошибки округления. «Радиус сходимости» для значения точности 10^-4 – 29. Увеличить «радиус сходимости» позволило применение формул приведения. Хоть это и выливается в частичную потерю точности ввиду дополнительных вычислений с использованием вещественных чисел, это позволило увеличить точность до 10^-8 и посчитать значение синуса и для больших чисел.