

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет Информационных технологий и управления

Кафедра Высшей математики

Индивидуальная практическая работа №4
“ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ”

Выполнил:
Заломов Р.А., 121702

Проверил:
Самсонов П.А.

Минск 2022

Цель:

Изучение кусочно-полиномиальной интерполяции функции, заданной в узлах; построение интерполяционного кубического сплайна; исследование зависимости погрешности интерполирования сплайнами от числа узлов и гладкости функции.

Вариант: 4**Условия заданий:**

1. Ознакомьтесь с описанием кусочно-полиномиальной интерполяции функции, заданной таблично.
2. Ознакомьтесь с описанием функций пакета MATHEMATICA, используемых для интерполяции сплайнами.
3. Рассмотрите решение типового примера.
4. Напишите программу построения кубического сплайна для функции $f(x)$, заданной в равноотстоящих узлах на отрезке $[a, b]$. В программе предусмотрите:
 - а) вычисление $n+1$ значения заданной функции в равноотстоящих точках отрезка;
 - б) решение методом прогонки системы линейных уравнений относительно коэффициентов c_k ($k = 0, 1, 2, \dots, m$);
 - в) вычисление значений сплайна $S_3(x)$ на отрезке $[a, b]$ с шагом h и вычисление максимальной погрешности приближения на отрезке - разности между значениями функции и построенного многочлена $S_3(x)$;
 - д) вывод графика интерполяционного сплайна $S_3(x)$ и функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
5. Постройте кубический сплайн, аппроксимирующий функцию $f(x)$ согласно номера вашего варианта (варианты задания предыдущей ИПР) и исследуйте зависимость погрешности от числа узлов.

Выполнение заданий:

Исходный код:

In[420]:= "Вариант 4"

```
f[x_] := 
$$\frac{x^2}{\sqrt{2 + x^2} + \sqrt{(2 + x^2)^5}}$$
;

n = 5; begin = 0; end = 6; step = 
$$\frac{\text{end} - \text{begin}}{n}$$
;
Array[xdata, n + 1, 0]; Array[ydata, n + 1, 0];
Array[h, n, 0]; Array[w, n, 0]; Array[{p, q, r, b}, n, 1];
(*Вычисление узлов сплайна*)
For[i = 0, i < n + 1, i++,
  xdata[i] = begin + i * step;
  ydata[i] = f[xdata[i]];];
(*Расчёт коэффициентов сплайна*)
For[i = 0, i < n + 1, i++, h[i] = xdata[i + 1] - xdata[i];
  w[i] = ydata[i + 1] - ydata[i];];
p[1] = 0; r[n] = 0;
For[i = 1, i < n + 1, i++,
  p[i] = h[i - 1];
  r[i] = h[i];
  q[i] = 2 * (h[i] + h[i - 1]);
  b[i] = 3 * (w[i] / h[i] - w[i - 1] / h[i - 1]);];
Array[u, n, 1]; Array[v, n, 1];
u[1] = 
$$\frac{-r[1]}{q[1]}$$
; v[1] = 
$$\frac{b[1]}{q[1]}$$
;
For[i = 2, i < n, i++, s = q[i] + p[i] * u[i - 1];
  u[i] = -r[i] / s;
  v[i] = (b[i] - p[i] * v[i - 1]) / s];
cs[0] = 0; cs[n] = 0;
For[i = n - 1, i >= 1, i--, cs[i] = u[i] * cs[i + 1] + v[i];];
(*Расчёт остальных коэффициентов сплайна*)
spln[xdata_, ydata_, cs_, n_, x_] :=
Block[{i = 0, h1, a, b, c, d, t}, While[x > xdata[i + 1], i++];
  h1 = xdata[i + 1] - xdata[i];
  a = ydata[i];
  b = (ydata[i + 1] - ydata[i]) / h1 - (cs[i + 1] + 2 * cs[i]) * h1 / 3;
  c = cs[i];
  d = (cs[i + 1] - cs[i]) / (3 * h1);
  t = x - xdata[i];
```

```

u = (u2[x] - u1[x]) / (x1 - x2);
t = x - xdata[i];
Return[a + b*t + c*t^2 + d*t^3];
[вернуть управление]

sq[x_] := spline[xdata, ydata, cs, n, x] (*Функция сплайна*)
data1 = Table[{xdata[i], N[ydata[i]]}, {i, 0, n}];
[таблица значений] [численное приближение]

MatrixForm[data1] (*Вывод узлов*)
[матричная форма]

sp = Interpolation[data1, Method -> "Spline"] (*Встроенная сплайн-интерполяция*)
[интерполировать] [метод]

gr3 := Plot[{f[x], sq[x], sp[x]}, {x, xdata[0], xdata[n]},
[график функции]
PlotLegends -> {"Функция", "Рассчитанный сплайне", "Встроенный сплайн"}]
[легенды графика]

gr2 := ListPlot[data1]
[диаграмма разброса данных]

Show[{gr3, gr2}]
[показать]

"График погрешностей для рассчитанного и программного сплайна"
grerr := Plot[{Abs[sq[x] - f[x]], Abs[sp[x] - f[x]]}, {x, xdata[0], xdata[n]}, PlotLegends -> {"Рассчитанный сплайн", "Программный сплайн"}]
[график] [абсолютное значение] [абсолютное значение] [легенды графика]

Show[grerr]
[показать]


```

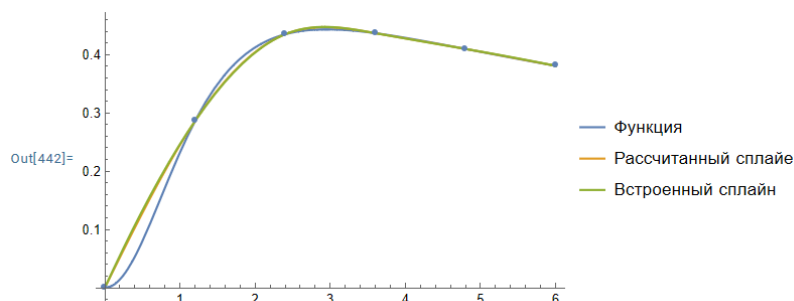
Вывод программы (n=5):

Out[420]= Вариант 4

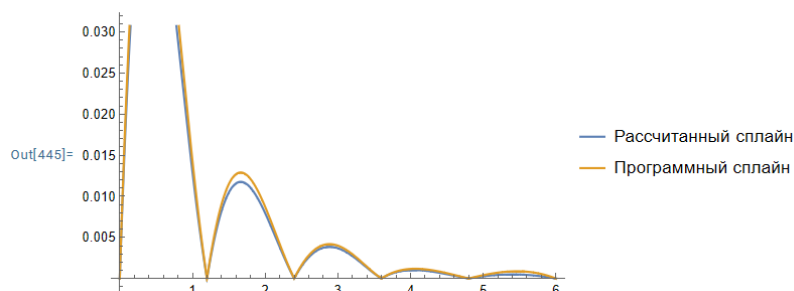
Out[438]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0. \\ 6 & 0.28579 \\ 5 & \\ 12 & 0.434786 \\ 5 & \\ 18 & 0.436737 \\ 5 & \\ 24 & 0.409698 \\ 5 & \\ 6 & 0.380757 \end{pmatrix}$$

Out[439]= InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 6.}}
Output: scalar]



Out[443]= График погрешностей для рассчитанного и программного сплайна сплайна




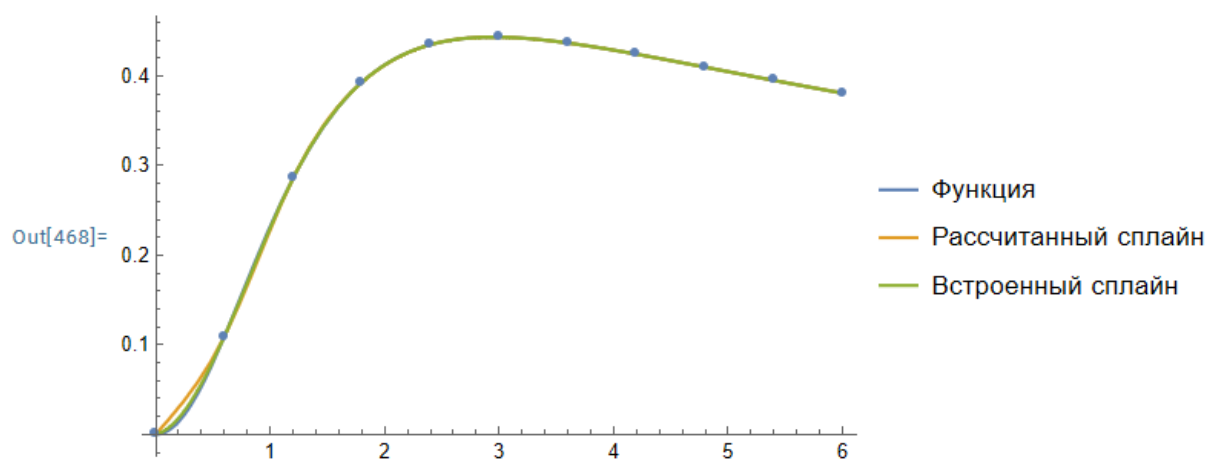
Вывод программы(n=10):

Out[446]= Вариант 4

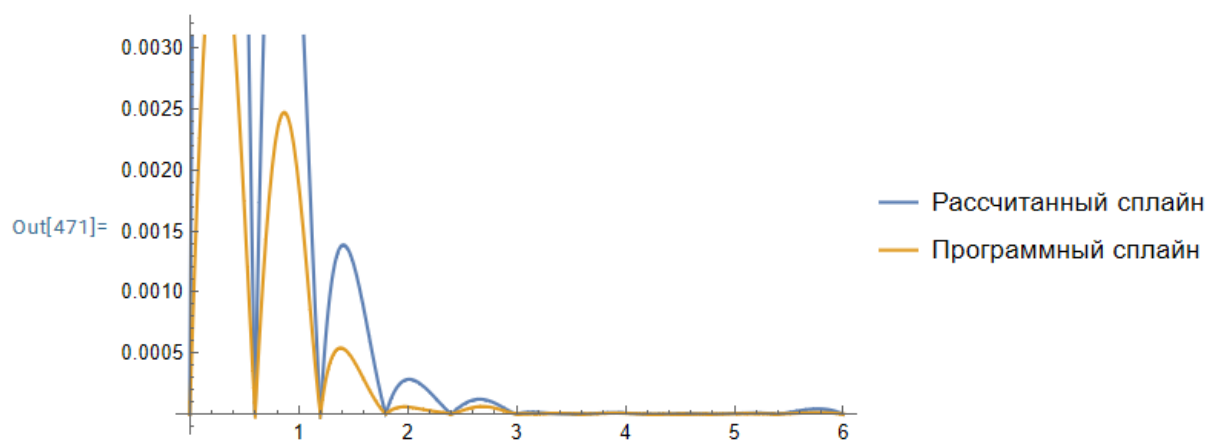
Out[464]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0. \\ \frac{3}{5} & 0.10896 \\ \frac{6}{5} & 0.28579 \\ \frac{9}{5} & 0.392638 \\ \frac{12}{5} & 0.434786 \\ 3 & 0.443231 \\ \frac{18}{5} & 0.436737 \\ \frac{21}{5} & 0.42422 \\ \frac{24}{5} & 0.409698 \\ \frac{27}{5} & 0.394953 \\ 6 & 0.380757 \end{pmatrix}$$

Out[465]= InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 6.}}
Output: scalar]



Out[469]= График погрешностей для рассчитанного и программного сплайна сплайна



n во всех случаях – количество узлов.

Вывод:

В ходе лабораторной работы мною был изучен метод интерполяции функций при помощи сплайнов. Была рассмотрена как интерполяция при помощи встроенных средств, так и при помощи составленного алгоритма. С увеличением количества узлов график составленного сплайна лучше совпадает с графиком интерполируемой функции. Также уменьшается и погрешность. Помимо этого, при увеличении количества узлов погрешность уменьшается быстрее. Было также замечено, что при увеличении количества узлов, интерполяция при помощи программных средств работает лучше, чем самостоятельно составленный алгоритм(суждение было составлено на основе графиков погрешностей).