Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет Информационных технологий и управления
Кафедра Высшей математики

Индивидуальная практическая работа №3
“Аппроксимация функции алгебраическими многочленами.
Среднеквадратическое приближение алгебраическими многочленами”

Выполнил:
Заломов Р.А., 121702

Проверил:
Самсонов П.А.

Минск 2022

Цель:
Изучение линейной аппроксимации функции, заданной таблично, алгебраическими многочленами - построение интерполяционного многочлена Лагранжа, многочленов наилучшего среднеквадратичного приближения.

Вариант: 4

Условия заданий:

1. Ознакомьтесь с постановкой задачи аппроксимации функции при различных способах оценки точности приближения, алгоритмами построение интерполяционного многочлена Лагранжа, многочленов наилучшего равномерного и среднеквадратичного приближения.

2. Ознакомьтесь с описанием функций пакета MATHEMATICA, используемых для построения аппроксимирующих многочленов.

3. Рассмотрите решение типовых примеров.

4. Постройте интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$ (согласно номера вашего варианта), заданной в равноотстоящих точках отрезка $[a,b]$ - $\left\{x_j, \quad x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n} \quad (j = 0,1,2,\ldots,n)\right\}$ для (n = 4, 6, 7 и 10).

8. Постройте для функции $f(x)$, заданной в m = 10 узлах, многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения $P_n^*(x)$ степени n = 1,2, 4 и 5 (для m = 4 и 5 воспользуйтесь командой ***FindFit***). Вычислите для каждого многочлена сумму квадратов отклонения в узлах.
   Выведите графики узлов и многочленов $P_n^*(x)$, аппроксимирующих функцию.

Выполнение заданий:

4.Исходный код:

```
In[ ]:= "Вариант 4"
"n = 7"
n = 7; a = 0; b = 6;
h = (b - a)/n;
XDT = {}; YDT = {};
f[x_] := x^2/Sqrt[2 + x^2 + Sqrt[(2 + x^2)^5]];

For[i = 0, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
 xdata[i] = a + i * h;
 ydata[i] = N[f[xdata[i]]];
            численное приближение
 XDT = Append[XDT, xdata[i]];
       добавить в конец
 YDT = Append[YDT, ydata[i]];]
       добавить в конец
MatrixForm[XDT] × MatrixForm[YDT]
матричная форма   матричная форма
Array[xdata, {n + 1, 0}]; Array[ydata, {n + 1, 0}];
массив                    массив
For[i = 0, i ≤ n, i++, xdata[i] = XDT[[i + 1]];
цикл ДЛЯ
  ydata[i] = YDT[[i + 1]];
 ];
```

$$\texttt{pln} = \sum_{i=0}^{n} \texttt{ydata[i]} \times \prod_{j=0}^{n} \texttt{If}\left[i \neq j, \frac{x - \texttt{xdata[j]}}{\texttt{xdata[i]} - \texttt{xdata[j]}}, 1\right];$$

условный оператор

```
lgr2[x_] := Collect[pln, x];
            сгруппировать
lgr2[x]
```

Получившийся многочлен Лагранжа:

Out[ ]= $0. - 0.054186\, x + 0.639928\, x^2 - 0.506529\, x^3 + 0.184544\, x^4 - 0.0360532\, x^5 + 0.00365735\, x^6 - 0.000151384\, x^7$

8. Исходный код:

```
In[1214]:= "n = 10"
n = 10; a = 0; b = 6;
h = (b - a)/n;
XDT = {}; YDT = {};
f[x_] := x^2/Sqrt[2 + x^2 + Sqrt[(2 + x^2)^5]];

For[i = 0, i ≤ n, i++,
 xdata[i] = a + i*h;
 ydata[i] = N[f[xdata[i]]];
 XDT = Append[XDT, xdata[i]];
 YDT = Append[YDT, ydata[i]];]
MatrixForm[XDT] × MatrixForm[YDT]
Array[xdata, {n + 1, 0}]; Array[ydata, {n + 1, 0}];
For[i = 0, i ≤ n, i++, xdata[i] = XDT[[i + 1]];
  ydata[i] = YDT[[i + 1]];
 ];
data = Table[{N[xdata[i]], N[ydata[i]]}, {i, 0, n}];
"Найдём аппроксимирующий многочлен 1-го порядка"
ex = Sum[xdata[i], {i, 0, n}]; ey = Sum[ydata[i], {i, 0, n}]; exx = Sum[xdata[i]^2, {i, 0, n}];
exy = Sum[xdata[i]*ydata[i], {i, 0, n}]; eyy = Sum[ydata[i]^2, {i, 0, n}];
k = (ey*exx - ex*exy)/((n + 1)*exx - ex^2); m = ((n + 1)*exy - ex*ey)/((n + 1)*exx - ex^2);
g[x_] := k + m*x;
g[x]
gr1 := Plot[N[f[x]], {x, a, b}];
gr2 := ListPlot[Table[{N[xdata[i]], N[ydata[i]]}, {i, 0, n}]];
gr3 := Plot[g[x], {x, a, b}];
Show[{gr1, gr2, gr3}]
sumq = 0;
For[i = 0, i ≤ n, i++,
```

```
"Найдём аппроксимирующий многочлен 1-го порядка"
ex = ∑_{i=0}^{n} xdata[i]; ey = ∑_{i=0}^{n} ydata[i]; exx = ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^2;
exy = ∑_{i=0}^{n} xdata[i] * ydata[i]; eyy = ∑_{i=0}^{n} ydata[i]^2;
k = (ey * exx - ex * exy) / ((n + 1) * exx - ex^2); m = ((n + 1) * exy - ex * ey) / ((n + 1) * exx - ex^2);
g[x_] := k + m * x;
g[x]
gr1 := Plot[N[f[x]], {x, a, b}];
       гр···   численное приближение
gr2 := ListPlot[Table[{N[xdata[i]], N[ydata[i]]}, {i, 0, n}]];
       диаграмм··  таблиц··  численное пр···  численное приближение
gr3 := Plot[g[x], {x, a, b}];
       график функции
Show[{gr1, gr2, gr3}]
показать
sumq = 0;
For[i = 0, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
  xd[i] = a + i * h;
  sumq = sumq + Abs[g[xdata[i]] - f[xdata[i]]]^2;];
                абсолютное значение
Print[sumq];
печатать
"Найдём аппроксимирующий многочлен 2-го порядка"
A = MatrixForm[( p * ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^4   q * ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^3   c * ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^2
    матричная форма  p * ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^3   q * ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^2   c * ∑_{i=0}^{n} xdata[i]
                 p * ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^2   q * ∑_{i=0}^{n} xdata[i]     c * n )];

B = MatrixForm[( ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^2 * ydata[i]
    матричная форма  ∑_{i=0}^{n} xdata[i] * ydata[i]
                 ∑_{i=0}^{n} ydata[i] )];

A = {{∑_{i=0}^{n} xdata[i]^4, ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^3, ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^2}, {∑_{i=0}^{n} xdata[i]^3, ∑_{i=0}^{n} xdata[i]^2, ∑_{i=0}^{n} xdata[i]}, {∑_{i=0}^{n} xdata[i]^2, ∑_{i=0}^{n} xdata[i], n}};
B = {∑_{i=0}^{n} xdata[i]^2 * ydata[i], ∑_{i=0}^{n} xdata[i] * ydata[i], ∑_{i=0}^{n} ydata[i]};
LinearSolve[A, B]
решить линейные уравнения
g[x_] := -0.0273509 x^2 + 0.213419 x + 0.045977;
g[x]
gr1 := Plot[N[f[x]], {x, a, b}];
       гр···   численное приближение
gr2 := ListPlot[Table[{N[xdata[i]], N[ydata[i]]}, {i, 0, n}]];
       диаграмм··  таблиц··  численное пр···  численное приближение
```

```
решить линейные уравнения
g[x_] := -0.0273509 x^2 + 0.213419 x + 0.045977;
g[x]
gr1 := Plot[N[f[x]], {x, a, b}];
         гр⋯  численное приближение
gr2 := ListPlot[Table[{N[xdata[i]], N[ydata[i]]}, {i, 0, n}]];
         диаграмм⋯ таблиц⋯ численное пр⋯ численное приближение
gr3 := Plot[g[x], {x, a, b}];
         график функции
Show[{gr1, gr2, gr3}]
показать
sumq = 0;
For[i = 0, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
  xd[i] = a + i * h;
  sumq = sumq + Abs[g[xdata[i]] - f[xdata[i]]]^2;];
                абсолютное значение
Print[sumq];
печатать
"Найдём апроксимирующий многочлен 4-го порядка"
koefs = FindFit[data, p * x^4 + q * x^3 + c * x^2 + s * x + l, {p, q, c, s, l}, x];
          найти параметры соответствия
y = p * x^4 + q * x^3 + c * x^2 + s * x + l /. koefs
g[x_] := -0.015512 + 0.295019 * x - 0.037821 * x^2 - 0.005643 * x^3 + 0.000937 * x^4;
gr1 := Plot[N[f[x]], {x, a, b}];
         гр⋯  численное приближение
gr2 := ListPlot[Table[{N[xdata[i]], N[ydata[i]]}, {i, 0, n}]];
         диаграмм⋯ таблиц⋯ численное пр⋯ численное приближение
gr3 := Plot[y, {x, a, b}];
         график функции
Show[{gr1, gr2, gr3}]
показать
sumq = 0;
For[i = 0, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
  xd[i] = a + i * h;
  sumq = sumq + Abs[g[xdata[i]] - f[xdata[i]]]^2;];
                абсолютное значение
Print[sumq];
печатать
"Найдём апроксимирующий многочлен 5-го порядка"
Clear[m, p, q, c, s, l];
очистить
koefs = FindFit[data, m * x^5 + p * x^4 + q * x^3 + c * x^2 + s * x + l, {m, p, q, c, s, l}, x];
          найти параметры соответствия
y = m * x^5 + p * x^4 + q * x^3 + c * x^2 + s * x + l /. koefs
g[x_] := -0.004676 + 0.153451 * x + 0.156573 * x^2 - 0.096918 * x^3 + 0.018356 * x^4 - 0.001161 * x^5;
```

```
печатать
"Найдём апроксимирующий многочлен 5-го порядка"
Clear[m, p, q, c, s, l];
очистить
koefs = FindFit[data, m*x^5 + p*x^4 + q*x^3 + c*x^2 + s*x + l, {m, p, q, c, s, l}, x];
        найти параметры соответствия
y = m*x^5 + p*x^4 + q*x^3 + c*x^2 + s*x + l /. koefs
g[x_] := -0.004676 + 0.153451*x + 0.156573*x^2 - 0.096918*x^3 + 0.018356*x^4 - 0.001161*x^5;
gr1 := Plot[N[f[x]], {x, a, b}];
       гр⋯  численное приближение
gr2 := ListPlot[Table[{N[xdata[i]], N[ydata[i]]}, {i, 0, n}]];
       диаграмм⋯ таблиц⋯ численное пр⋯ численное приближение
gr3 := Plot[y, {x, a, b}];
       график функции
Show[{gr1, gr2, gr3}]
показать
sumq = 0;
For[i = 0, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
  xd[i] = a + i*h;
  sumq = sumq + Abs[g[xdata[i]] - f[xdata[i]]]^2;];
                абсолютное значение
Print[sumq];
печатать
```

Вывод программы:

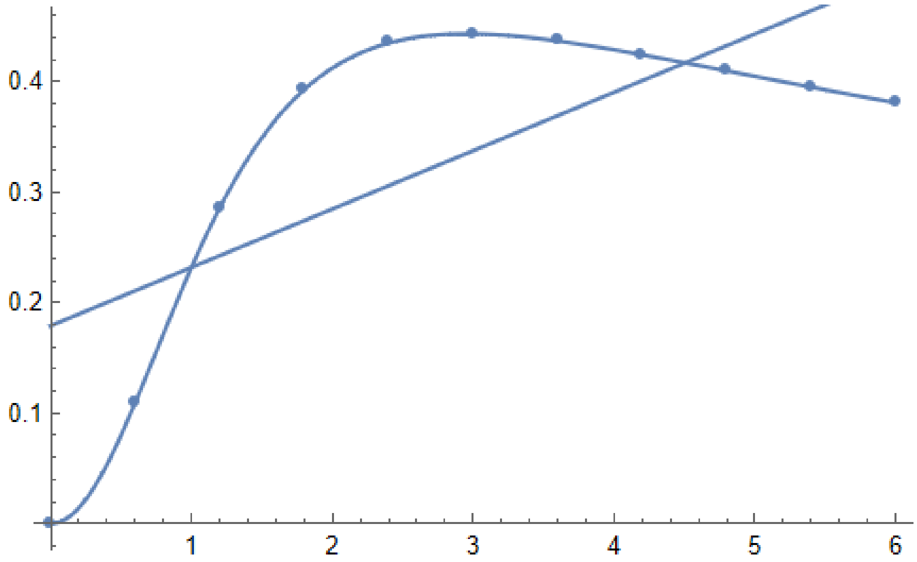
Out[1224]=

Найдём аппроксимирующий многочлен 1-го порядка

Out[1229]=

$0.179043 + 0.0527969\, x$

Out[1233]=



0.109862

Out[1237]=

Найдём аппроксимирующий многочлен 2-го порядка

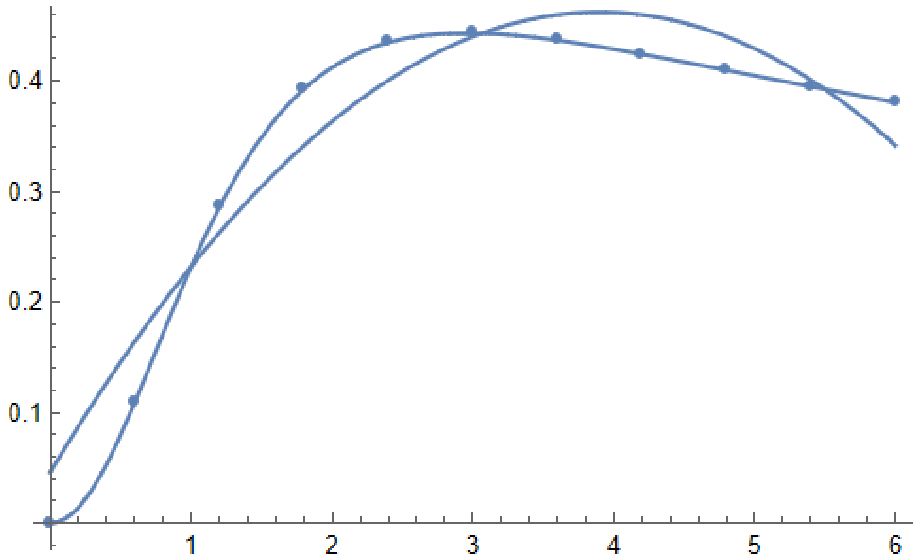
Out[1242]=

$\{-0.0273509, 0.213419, 0.045977\}$

Out[1244]=

$0.045977 + 0.213419\, x - 0.0273509\, x^2$

Out[1248]=



0.0137698

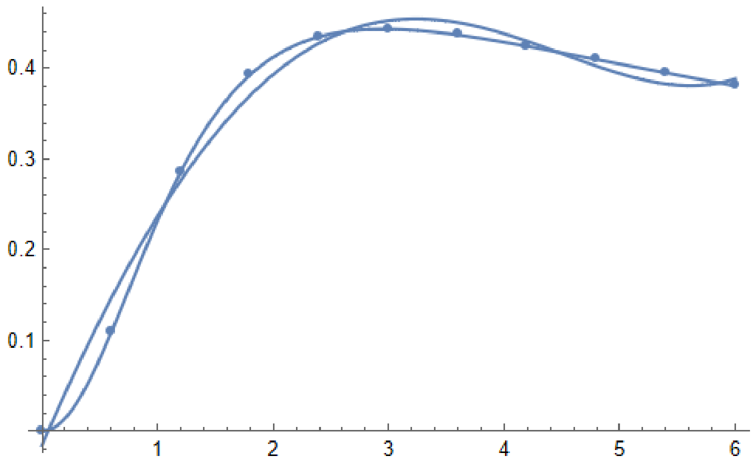
Out[1252]=

Найдём апроксимирующий многочлен 4-го порядка

Out[1254]=

$$-0.0155122 + 0.29502\,x - 0.037821\,x^2 - 0.00564349\,x^3 + 0.000936964\,x^4$$

Out[1259]=



0.00289676

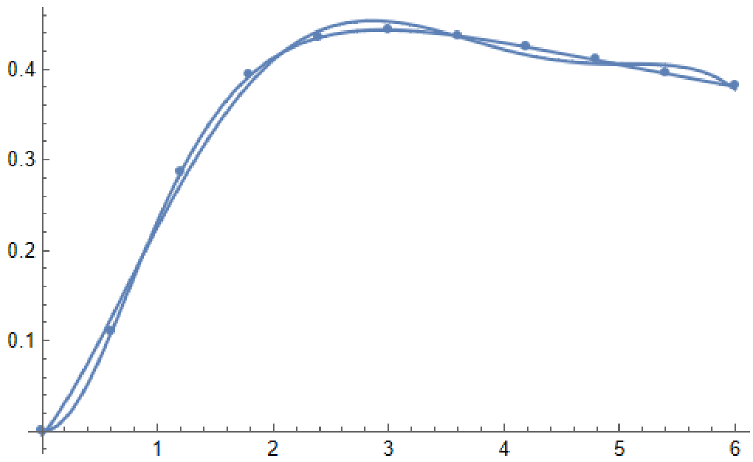
Out[1263]=

Найдём апроксимирующий многочлен 5-го порядка

Out[1266]=

$$-0.00467626 + 0.153451\,x + 0.156573\,x^2 - 0.0969181\,x^3 + 0.0183558\,x^4 - 0.00116125\,x^5$$

Out[1271]=



0.00086941

NO: Числа, стоящие после графиков – суммы квадратов отклонения в узлах для каждого из многочленов.

Вывод:

В ходе лабораторной работы мною был изучен метод аппроксимирования функций при помощи многочлена Лагранжа. Также было изучено приближение функций при помощи алгебраических многочленов. Были обнаружены следующие тенденции: при увеличении степени приближающего алгебраического многочлена, его график всё ближе и ближе ложился на график приближаемой функции. Также увеличение степени многочлена уменьшало сумму квадратов отклонения в узлах. Это означает, что для улучшения качества приближения можно увеличивать степень приближающего многочлена, хоть это и не рекомендуется делать слишком много раз.