Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет Информационных технологий и управления
Кафедра Высшей математики

Лабораторная работа №3
“ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ”

Выполнил:
Заломов Р.А., 121702

Проверил:
Самсонов П.А.

Минск 2022

Цель:
Изучение приближения функции, заданной в узлах, алгебраическими многочленами; построение интерполяционного многочлена Ньютона и таблицы разделенных разностей; применение интерполирования для построения графика функции, заданной в узлах; исследование зависимости погрешности интерполирования от числа и взаимного расположения узлов и от гладкости функции.

Вариант: 4

Условия заданий:

1. Ознакомьтесь с постановкой задачи интерполирования и описанием алгоритма построения интерполяционного многочлена Ньютона $N_n(x)$.

2. Ознакомьтесь с описанием функций пакета MATHEMATICA, используемых для построения интерполяционного многочлена, графиков функции и многочлена и исследования погрешности.

3. Рассмотрите решение типового примера.

4. Постройте интерполяционные многочлены степени n для функции $f(x)$, заданной в равноотстоящих точках отрезка $[a,b]$ (согласно номера вашего варианта), и исследуйте зависимость погрешности интерполирования от степени полинома n (n = 4, 5, 6, 7 и 10) (или, что равносильно, от расстояния между узлами $h=(b-a)/n$).
   Для этого:
   а) вычислите $n+1$ значение заданной функции в равноотстоящих точках отрезка $x_j = a + \frac{b-a}{n}\cdot j, \quad j=0,1,\ldots,n$;
   б) постройте и выведите таблицу разделенных разностей по значениям функции в $n+1$ узле;
   в) найдите интерполяционный многочлен $N_n(x)$ для интерполирования вперед;

   г) найдите интерполяционный многочлен $N_n(x)$ с помощью встроенной функции ***InterpolatingPolinomial***;
   д) выведите графики функции $f(x)$, интерполяционного многочлена и абсолютной величины погрешности интерполирования на отрезке $[a-h, b+h]$;
   е) вычислите по схеме Горнера значения интерполяционного многочлена $N_n(x)$ в узлах и точках между узлами интерполирования $\left(x_k = a + \frac{b-a}{10n}\cdot k, \quad k=0,1,\ldots,10n\right)$ и найдите максимальную погрешность интерполирования на отрезке $[a,b]$ как разности между значениями функции и построенного интерполяционного многочлена $N_n(x)$ в точках между узлами интерполирования $(x_k, \quad k=0,1,\ldots,10n)$;
   ж)* найдите оценку погрешности интерполирования на отрезке $[a, b]$ с помощью априорной и апостериорной формул оценки погрешности.

4	$tg\, x$	$[-\pi/4, \pi/4]$

Выполнение заданий:

Исходный код одинаков для любого n.

```
In[288]:= "Вариант 4"

"n = 4"
n = 4; a = -π/4; b = π/4;
h = (b - a)/n;
"Таблица значений для заданной функции"
XDT = {}; YDT = {};
For[i = 0, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
  xdata[i] = a + i × h;
  ydata[i] = N[Tan[xdata[i]]];
             ··· тангенс
  XDT = Append[XDT, xdata[i]];
        добавить в конец
  YDT = Append[YDT, ydata[i]];
        добавить в конец
 ];
Array[xdata, {n + 1, 0}]; Array[ydata, {n + 1, 0}];
массив                    массив
MatrixForm[XDT]
матричная форма
MatrixForm[YDT]
матричная форма
"вычисляем таблицу разностей по рекуррентной формуле"
Array[difftab, {n + 1, n + 1}, {0, 0}];
массив
For[k = 1, k ≤ n, k++,
цикл ДЛЯ
  For[i = n, i ≥ n - k, i--, difftab[i, k] = ""]];
  цикл ДЛЯ
For[i = 0, i ≤ n, i++, difftab[i, 0] = ydata[i]];
цикл ДЛЯ
For[k = 1, k ≤ n, k++,
цикл ДЛЯ
  For[i = 0, i ≤ n - k, i++,
  цикл ДЛЯ
   difftab[i, k] = (difftab[i + 1, k - 1] - difftab[i, k - 1])/(xdata[i + k] - xdata[i])]];
tab1 = Array[difftab, {n + 1, n + 1}, {0, 0}];
       массив
PaddedForm[TableForm[tab1], {6, 5}]
форма числ··· табличная форма
"Находим интерполяционные многочлены"
pln = difftab[0, 0] + difftab[0, 1] × (x - xdata[0]);
lst = List[pln]; n = 4;
      список
For[k = 2, k ≤ n, k++,
цикл ДЛЯ
  pln = lst[[k - 1]] + difftab[0, k] × Product[(x - xdata[i]), {i, 0, k - 1}];
```

```
  pln = lst[[k - 1]] + difftab[0, k] × ∏_{i=0}^{k-1} (x - xdata[i]);

  lst = Append[lst, pln]];
        добавить в конец

newton[x_] := N[lst[[n]]];
              численное приближение

ColumnForm[lst]
ColumnForm[Collect[lst, x]]
           сгруппировать

"с помощью втроенной функции InterpolatingPolynominal получаем решение"
data = {{-π/4, 1}, {-π/8, -0.414214}, {0, 0}, {π/8, 0.414214}, {π/4, 1}};

inpln := InterpolatingPolynomial[data, x]; Collect[inpln, x]
         интерполяционный многочлен        сгруппировать
"Выводим график интерполяционного многочлена Ньютона и функции tg(x)"
Plot[{Tan[x], newton[x_]}, {x, a - h, b + h}, PlotLabels → "Expressions"]
граф⋯ тангенс                                 пометки на графике
Plot[{Tan[x], newton[x_]}, {x, a - 2 h, b + 2 h}, PlotLabels → "Expressions"]
граф⋯ тангенс                                     пометки на графике
"Алгоритм вычисления интерполяционного многочлена по схеме Горнера"
Pln = {}; P[n + 1] = 0;
For[i = n, i ≥ 0, i--, P[i] = difftab[0, i] + (x - xdata[i]) × P[i + 1];
цикл ДЛЯ
 Pln = Append[Pln, P[i]];]
       добавить в конец
ColumnForm[Pln]
P[0]
newton[x_] := P[0];
m = 10 × n;
XDAT = {}; YDAT = {}; newtonDAT = {}; MR = {};
For[i = 0, i ≤ m, i++,
цикл ДЛЯ

  xdatas[i] = a + i × h/10;
  ydatas[i] = N[Tan[xdatas[i]]];
              ⋯ тангенс
  x = xdatas[i];
  newtondatas[i] = newton[x];
  mr[i] = Abs[ydatas[i] - newtondatas[i]];
          абсолютное значение
  XDAT = Append[XDAT, xdatas[i]];
         добавить в конец
  YDAT = Append[YDAT, ydatas[i]];
         добавить в конец
  newtonDAT = Append[newtonDAT, newtondatas[i]];
              добавить в конец
  MR = Append[MR, mr[i]];];
       добавить в конец

MatrixForm[N[XDAT]] × MatrixForm[N[YDAT]] × MatrixForm[newtonDAT] × MatrixForm[MR]
матричная ⋯ численное⋯ матричная ⋯ численное⋯ матричная форма   матричная форма
```

```
MatrixForm[N[XDAT]] × MatrixForm[N[YDAT]] × MatrixForm[newtonDAT] × MatrixForm[MR]
матричная ··· численное··· матричная ··· численное··· матричная форма матричная форма
"График абсолютной разности межжу значениями ф-ции tg(x) и интерполяционного многочлена"
Plot[Abs[Tan[x] - newton[x]], {x, a, b}]
гр··· аб··· тангенс
"Величина погрешности интерполирования"
FindMaximum[{Abs[Tan[x] - newton[x]], a < x < b}, {x, b}]
найти максимум аб··· тангенс
"Априорная форма оценки погрешности"
f[x_] := ∏_{i=0}^{n} (x - xdata[i]);
der[x_] := D[Tan[x], {x, n + 1}];
 ·· тангенс
Collect[f[x], x]
сгруппировать
Plot[f[x], {x, a, b}]
график функции
FindMaximum[{f[x], a ≤ x ≤ b}, {x, a}];
найти максимум
e = FindMaximum[{Abs[der[x]], a ≤ x ≤ b}, {x, a}] / (n + 1)! × FindMaximum[{f[x], a ≤ x ≤ b}, {x, a}]
                                                               найти максимум

Print[e]
печатать
"Апостериорная формула оценки погрешности"
n = n + 1; h = (b - a)/n;
XDT = {}; YDT = {};
For[i = 0, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
  xdata[i] = a + i × h;
  ydata[i] = N[Tan[xdata[i]]];
             ·· тангенс
  XDT = Append[XDT, xdata[i]];
        добавить в конец
  YDT = Append[YDT, ydata[i]];
        добавить в конец
 ];
Array[xdata, {n + 1, 0}]; Array[ydata, {n + 1, 0}];
массив                    массив
MatrixForm[XDT]
матричная форма
MatrixForm[YDT]
матричная форма
Array[difftab, {n + 1, n + 1}, {0, 0}];
массив
For[k = 1, k ≤ n, k++,
цикл ДЛЯ
  For[i = n, i ≥ n - k, i--, difftab[i, k] = ""];
```

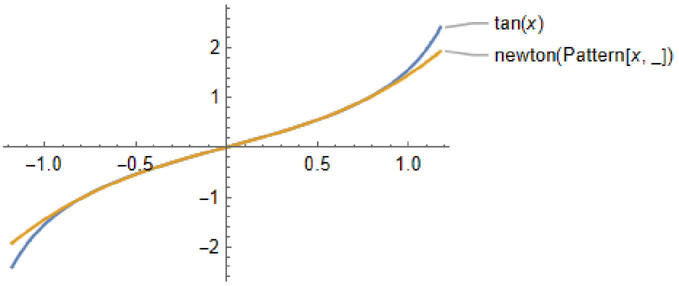
```
"Апостериорная формула оценки погрешности"
n = n + 1; h = (b - a)/n;
XDT = {}; YDT = {};
For[i = 0, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
  xdata[i] = a + i × h;
  ydata[i] = N[Tan[xdata[i]]];
             ·· тангенс
  XDT = Append[XDT, xdata[i]];
        добавить в конец
  YDT = Append[YDT, ydata[i]];
        добавить в конец
 ];
Array[xdata, {n + 1, 0}]; Array[ydata, {n + 1, 0}];
массив                    массив
MatrixForm[XDT]
матричная форма
MatrixForm[YDT]
матричная форма
Array[difftab, {n + 1, n + 1}, {0, 0}];
массив
For[k = 1, k ≤ n, k++,
цикл ДЛЯ
  For[i = n, i ≥ n - k, i--, difftab[i, k] = ""]];
  цикл ДЛЯ
For[i = 0, i ≤ n, i++, difftab[i, 0] = ydata[i]];
цикл ДЛЯ
For[k = 1, k ≤ n, k++,
цикл ДЛЯ
  For[i = 0, i ≤ n - k, i++,
  цикл ДЛЯ
   difftab[i, k] = (difftab[i + 1, k - 1] - difftab[i, k - 1])/(xdata[i + k] - xdata[i])]];
tab1 = Array[difftab, {n + 1, n + 1}, {0, 0}];
       массив
PaddedForm[TableForm[tab1], {6, 5}]
форма числ··· табличная форма
```

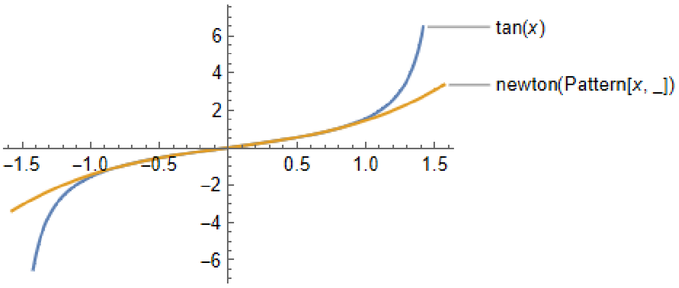
Для n = 4:

Out[25]= с помощью втроенной функции InterpolatingPolynominal получаем решение

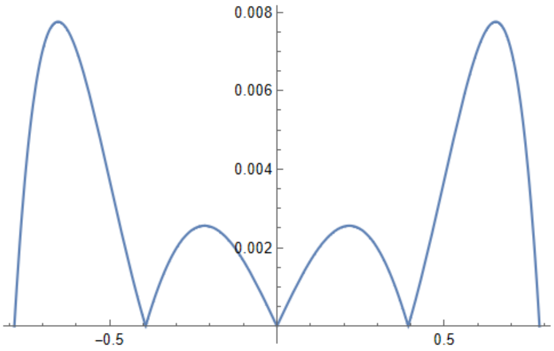
Out[27]= $-2.22045\times10^{-16}+1.40638\,x-0.54038\,x^2-2.27994\,x^3+3.50412\,x^4$

Out[28]= Выводим график интерполяционного многочлена Ньютона и функции tg(x)

Out[29]= 

Out[30]= 

Out[41]= График абсолютной разности мехжу значениями ф-ции tg(x) и интерполяционного многочлена

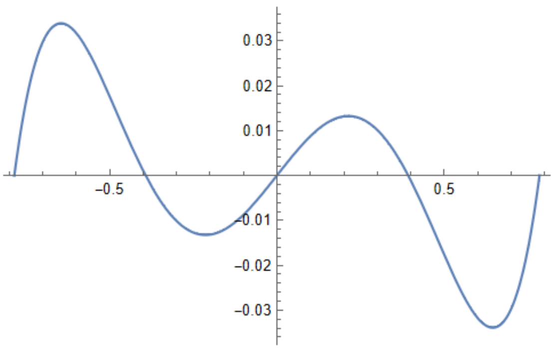
Out[42]= 

Out[43]= Величина погрешности интерполирования

Out[44]= $\left\{0.0077563, \left\{\frac{\pi}{4} \to 0.654485\right\}\right\}$

Out[45]= Априорная форма оценки погрешности

Out[48]= 0

Out[49]= 

Out[51]= $\left\{0.144699, \left\{\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{4} \to -0.785398\right)\left(\frac{\pi}{4} \to -0.645767\right)\right\}\right\}$

$\left\{0.144699, \left\{\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{4} \to -0.785398\right)\left(\frac{\pi}{4} \to -0.645767\right)\right\}\right\}$

Out[53]= Апостериорная формула оценки погрешности

Out[58]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{3\pi}{20} \\ -\frac{\pi}{20} \\ \frac{\pi}{20} \\ \frac{3\pi}{20} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Out[59]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1. \\ -0.509525 \\ -0.158384 \\ 0.158384 \\ 0.509525 \\ 1. \end{pmatrix}$$

Out[65]//PaddedForm=

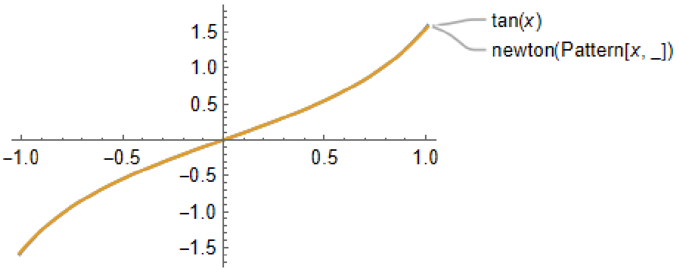
-1.00000	1.56123	-0.70587	0.56419	-0.15492	0.19725
-0.50953	1.11772	-0.17413	0.36952	0.15492	
-0.15838	1.00831	0.17413	0.56419		
0.15838	1.11772	0.70587			
0.50953	1.56123				
1.00000					

Оценка погрешности интерполирования: 0.0077563 (при x = 0.654485)
Априорная погрешность: 0.144699
Апостериорная погрешность: 0.19725

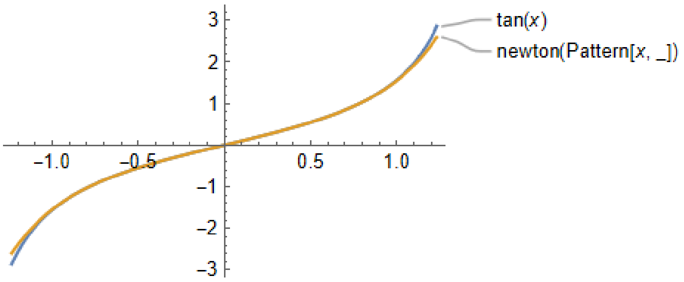
Для n = 7

Out[28]= Выводим график интерполяционного многочлена Ньютона и функции tg(x)

Out[29]=

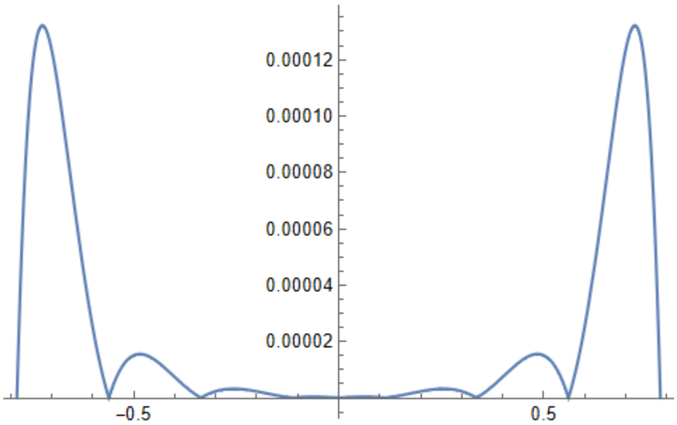


Out[30]=



Out[41]= График абсолютной разности межжу значениями ф-ции tg(x) и интерполяционного многочлена

Out[42]=



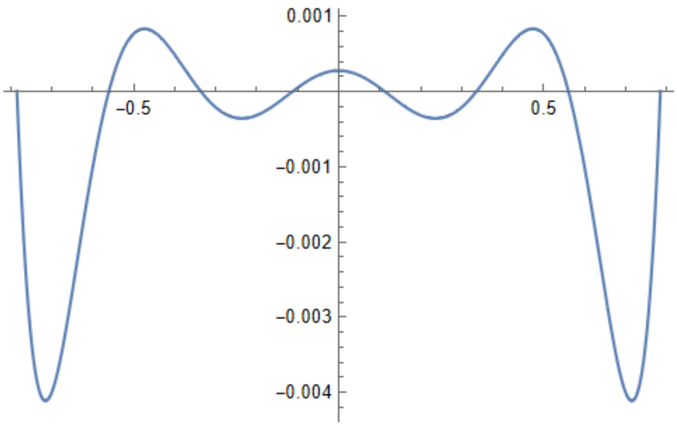
Out[43]= Величина погрешности интерполирования

Out[44]= $\left\{0.000132083, \left\{\frac{\pi}{4} \to 0.723227\right\}\right\}$

Out[45]= Априорная форма оценки погрешности

Out[48]= 0

Out[49]=



Out[51]= $\left\{0.0073352, \left\{\frac{\left(\frac{\pi}{4} \to -0.785398\right) \left(\frac{\pi}{4} \to -0.474171\right)}{40320}\right\}\right\}$

$\left\{0.0073352, \left\{\frac{\left(\frac{\pi}{4} \to -0.785398\right) \left(\frac{\pi}{4} \to -0.474171\right)}{40320}\right\}\right\}$

Out[53]= Апостериорная формула оценки погрешности

Out[58]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{3\pi}{16} \\ -\frac{\pi}{8} \\ -\frac{\pi}{16} \\ 0 \\ \frac{\pi}{16} \\ \frac{\pi}{8} \\ \frac{3\pi}{16} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Out[59]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1. \\ -0.668179 \\ -0.414214 \\ -0.198912 \\ 0. \\ 0.198912 \\ 0.414214 \\ 0.668179 \\ 1. \end{pmatrix}$$

Out[65]//PaddedForm=

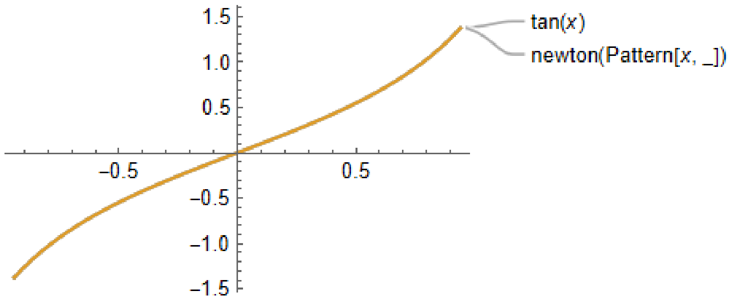
-1.00000	1.68995	-1.00973	0.86290	-0.47424	0.31498	-0.12470	0.09073	0.00000
-0.66818	1.29343	-0.50144	0.49043	-0.16501	0.16808	0.00000	0.09073	
-0.41421	1.09652	-0.21255	0.36083	0.00000	0.16808	0.12470		
-0.19891	1.01305	0.00000	0.36083	0.16501	0.31498			
0.00000	1.01305	0.21255	0.49043	0.47424				
0.19891	1.09652	0.50144	0.86290					
0.41421	1.29343	1.00973						
0.66818	1.68995							
1.00000								

Величина погрешности интерполирования: 0.000132083 (при x = 0.723227)
Априорная погрешность: 0.0073352
Апостериорная погрешность не высчитывается из-за ошибки округления(возможно, имеет низкий порядок)

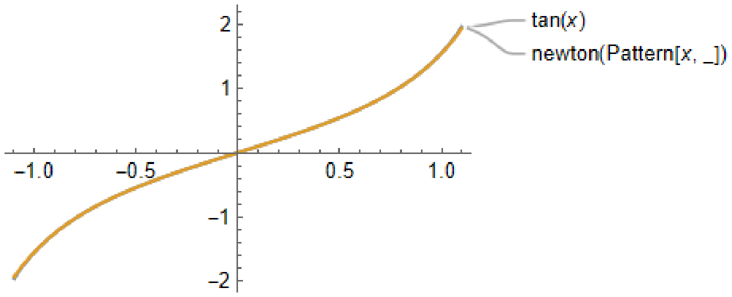
Для n = 10

Out[28]= Выводим график интерполяционного многочлена Ньютона и функции tg(x)

Out[29]=

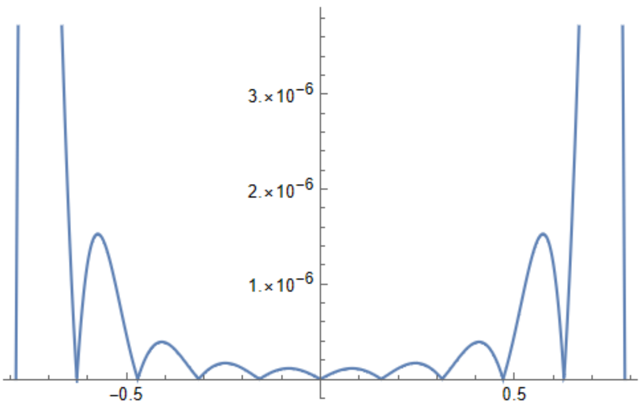


Out[30]=



Out[41]= График абсолютной разности межжу значениями ф-ции tg(x) и интерполяционного многочлена

Out[42]=



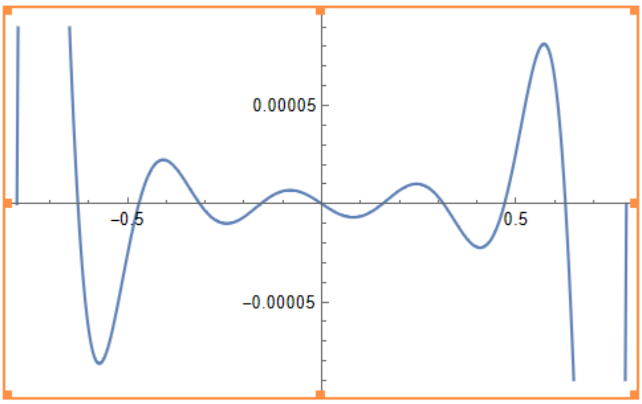
Out[43]= Величина погрешности интерполирования

Out[44]= $\left\{1.52798\times10^{-6}, \left\{\frac{\pi}{4}\to 0.573767\right\}\right\}$

Out[45]= Априорная форма оценки погрешности

Out[48]= 0

Out[49]=



Out[51]= $\left\{0.0108636, \left\{\frac{\left(\frac{\pi}{4} \to -0.785398\right) \left(\frac{\pi}{4} \to -0.740559\right)}{39\,916\,800}\right\}\right\}$

$\left\{0.0108636, \left\{\frac{\left(\frac{\pi}{4} \to -0.785398\right) \left(\frac{\pi}{4} \to -0.740559\right)}{39\,916\,800}\right\}\right\}$

Out[53]= Апостериорная формула оценки погрешности

Out[58]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{9\pi}{44} \\ -\frac{7\pi}{44} \\ -\frac{5\pi}{44} \\ -\frac{3\pi}{44} \\ -\frac{\pi}{44} \\ \frac{\pi}{44} \\ \frac{3\pi}{44} \\ \frac{5\pi}{44} \\ \frac{7\pi}{44} \\ \frac{9\pi}{44} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Out[59]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1. \\ -0.748591 \\ -0.546041 \\ -0.372981 \\ -0.217537 \\ -0.0715214 \\ 0.0715214 \\ 0.217537 \\ 0.372981 \\ 0.546041 \\ 0.748591 \\ 1. \end{pmatrix}$$

Out[65]//PaddedForm=

-1.00000000	1.76057398	-1.19803543	1.10873316	-0.75144070	0.53537747	-0.30498836	0.18503853	-0.08516376	0.05053308	-0.01335364	0.01700238
-0.74859062	1.41841586	-0.72305525	0.67951124	-0.36918208	0.27406406	-0.12002427	0.08774769	-0.02021880	0.03146412	0.01335364	
-0.54604131	1.21191177	-0.43195332	0.46863493	-0.17350080	0.17122751	-0.03231189	0.06464978	0.02021880	0.05053308		
-0.37298072	1.08854619	-0.23119059	0.36953151	-0.05124464	0.14354275	0.03231189	0.08774769	0.08516376			
-0.21753668	1.02251831	-0.07288366	0.34026064	0.05124464	0.17122751	0.12002427	0.18503853				
-0.07152141	1.00170278	0.07288366	0.36953151	0.17350080	0.27406406	0.30498836					
0.07152141	1.02251831	0.23119059	0.46863493	0.36918208	0.53537747						
0.21753668	1.08854619	0.43195332	0.67951124	0.75144070							
0.37298072	1.21191177	0.72305525	1.10873316								
0.54604131	1.41841586	1.19803543									
0.74859062	1.76057398										
1.00000000											

Величина погрешности интерполирования: ~1.53*10^-6 (при x = 0.573767)
Апpиорная погрешность: 0.0108636
Апостериорная погрешность: 0.01700238

Вывод:

В ходе лабораторной работы мною был изучен метод интерполирования функций с помощью многочлена Ньютона. Было обнаружено, что погрешность интерполирования имеет тенденцию уменьшаться с увеличением степени интерполирующего многочлена, однако при слишком большой степени она может возрасти. Хотя при n = 10, график интерполирующей функции «наложился» на график интерполируемой функции, самые лучшие значения погрешностей были получены при n = 7.