Fag: Líkindaaðferðir verklegt
Skiladæmi 3

Nemi: Heimir Þór Kjartansson
Verkefnakennari: Jakob Sigurðsson

26. apríl 2012

1 Inngangur

Hér er skoðað LTI kerfi og hegðun þess við slembið inntak. Við umfjöllun og úrvinnslu er mikið stuðst við aðferðir og niðurstöður úr kennslubók áfangans. Verkefnið er unnið sem þriðja verklega verkefni fyrir áfangann Líkindaaðferðir við Háskóla Íslands.

2 LTI kerfi

Unnið er með LTI kerfi þar sem inntak er sett í gegnum Butterworth síu og titlum við yfirfærslufall hennar $H(f)$. Aflyfirfærslufall kerfisins hefur eiginleikana

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\frac{f^2 - f_u f_l}{f(f_u - f_l)}\right]^2}$$

þar sem mörk síunnar eru $f_u = 110Hz$ og $f_l = 90Hz$.

3 Inn- og úttak kerfisins

Inntakið sem skoðað er, $X(t)$, er vítt staðnað slembiferli. Skoðað verður úttak kerfisins, $Y(t)$.

Gefið er sjálffylgnifall innmerkisins

$$R_X(\tau) = 5^{-600|\tau|}$$

Til að finna sýni úr ferli $X(t)$ er stuðst við aðferð úr námsbók úr kafla 8-11. Hvítt suð er leitt í gegnum síu gefna með jöfnu (8-89), sjá kafla fyrir frekari útleiðslu.

Tíðnirófþéttleiki úttaksins er fundinn og settur fram sem jafna (8-83) í námsbók og má sjá frekari atriði útleiðslu þar.

$$S_Y(f) = \frac{6.0792 \cdot 10^4 f^2}{f^6 - 1.02811 \cdot 10^4 f^4 - 7.88969 \cdot 10^7 f^2 + 8.93744 \cdot 10^{11}}$$

Sýni úr inntaki og úttaki má finna með lítilvæglegri umritun á M-skrá úr námsbók, þ.e. ‚sysxmp5.m'. Sjá hluta 9 fyrir kóða. Mynd 1 sýnir sýni úr inntaksmerki og mynd 2 sýnir sýni úr úttaksmerkinu.

4 Föll sem finna rófsþéttleika

Í hluta 9 eru tilgreind þrjú föll sem hvert finnur rófsþéttleika.

```
[Shat] = spect_est_pg(x, dt)
```

tekur inn sýniferli x og söfnunarbil dt og skilar rófþéttleika sýniferlisins $Shat$.

Fallið fourier varpar innmerki, finnur annað veldi lengdar vörpunarinnar og deilir með lengd innmerkisins og fæst þá rófþéttleiki. Þessi aðferð vísar mikið til skilgreiningar (7-10) úr námsbók.

```
[Shat] = spect_ext_ac(x, dt, M)
```

tekur inn sýniferli x, söfnunarbil dt og tímaseinkun M og skilar rófþéttleika sýniferlisins $Shat$.

Fallið finnur sjálffylgnifall og varpar því yfir í rófþéttleika sem við vitum að gengur skv. jöfnu (7-40) úr námsbók. Síðar mun fallið prófað með tímaseinkun $M = 16$ valið í samræmi við notkun m-skránnar ‚corspec.m' í námsbók á bls. 298, en þetta fall er mikið byggt úr þeirri skrá.

```
[Shat] = spect_est_x(x, dt, wtype, stype)
```

tekur inn sýniferli x, söfnunarbil dt, gluggategund *wtype* þar sem 1 er boxcar, 2 er hamming og 3 hanning, og að lokum *stype* eða róftýpu þar sem 1 er nákvæmni í tind og 2 er mýkt fall. Þá skilar fallið rófþéttleika $Shat$.

Fallið er byggt á skránni ‚perspec.m' úr námsbók og er ‚periodogram' aðferð. Fallið hefur verið fest við lengd hólfa gagna upp á 16 punkta og skörun hólfa upp á 8 punkta. Minni skörun og stærri hólf ættu að ýta undir frekari nákvæmni í toppgildum þar sem rófþéttleikinn er ‚mýktur' með skörun og smáum hólfum en hér er stuðst við fyrrnefnd gildi. Síðar mun fallið prófað fyrir hanning glugga og hamming glugga og þá í bæði skipti fyrir ‚peaked' valkost til að setja einhverja nákvæmni í staðsetningu toppgildis.

5 Meðalkvaðratskekkja

Sýna skal að meðalkvaðratskekkju MSE megi setja fram sem línulega samantekt annars veldis bjögunar metna rófþéttleikans og ferviki hans.

Það er

$$\begin{aligned} MSE &= E[(S_X(\omega) - \hat{S}_X(\omega)^2] && (1) \\ &= (S_X(\omega) - E[\hat{S}_X])^2 + E[(\hat{S}_X(\omega) - E[\hat{S}_X(\omega)])^2] && (2) \\ &= bias(\hat{S}_X(\omega))^2 + var(\hat{S}_X(\omega)) && (3) \end{aligned}$$

Hér er jafna (2) umrituð þar til komið er á form jöfnu (1) og niðurstaðan þar sem sönnuð. Þar sem öll föll eru föll af horntíðni ω er sleppt að rita það fyrir hvert fall. Einnig er sleppt að taka fram hvaða ferli fallið tilheyrir, þau tilheyra öll saman ferli X.

$$\begin{aligned} &(S - E[\hat{S}])^2 + E[(\hat{S} - E[\hat{S}])^2] \\ &\qquad = S^2 - 2SE[\hat{S}] + E[\hat{S}]^2 + E[\hat{S}^2 - 2\hat{S}E[\hat{S}] + E[\hat{S}]^2] \\ &\qquad = E[S^2] - 2E[S]E[\hat{S}] + 2E[\hat{S}]^2 + E[\hat{S}^2] - 2E[\hat{S}E[\hat{S}]] \\ &\qquad = E[S^2 - 2S\hat{S} + \hat{S}^2] + 2E[\hat{S}]^2 - 2E[\hat{S}E[\hat{S}]] \\ &\qquad = E[(S - \hat{S})^2] + \varphi \\ &\quad \varphi = 2E[\hat{S}]^2 - 2E[\hat{S}E[\hat{S}]] \end{aligned}$$

Sýna má að $\varphi = 0$ en til þess skal fyrst skoða seinni lið φ.

$$
\begin{aligned}
&E[\hat{S}E[\hat{S}]] \\
&\quad = \frac{1}{N}\sum_N \hat{S}E[\hat{S}] \\
&\quad = \frac{1}{N}\sum_N \hat{S}\left(\frac{1}{N}\sum_N \hat{S}\right) \\
&\quad = \frac{1}{N^2}\left(\sum_N \hat{S}\right)^2 \\
&\quad = E[\hat{S}]^2
\end{aligned}
$$

þar sem N er fjöldi staka í $\hat{S}$.

Þá má ljóslega sjá að liðir φ eyða hvorum öðrum út svo $\varphi = 0$ og jafna (1) er jöfn jöfnu (2) og niðurstaðan heldur.

6 Samanburður aðferða

Notuð er fyrrgreind aðferð, sem nú er sýnt að virki skv. 5. hluta, til að meta föllin úr 4. hluta. Niðurstöðurnar má lesa úr töflu 1. Gildi úr líkani sem borið er saman við er tíðnigildi er lögleg Nyquist tíðni eða $f_N = 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_s$.

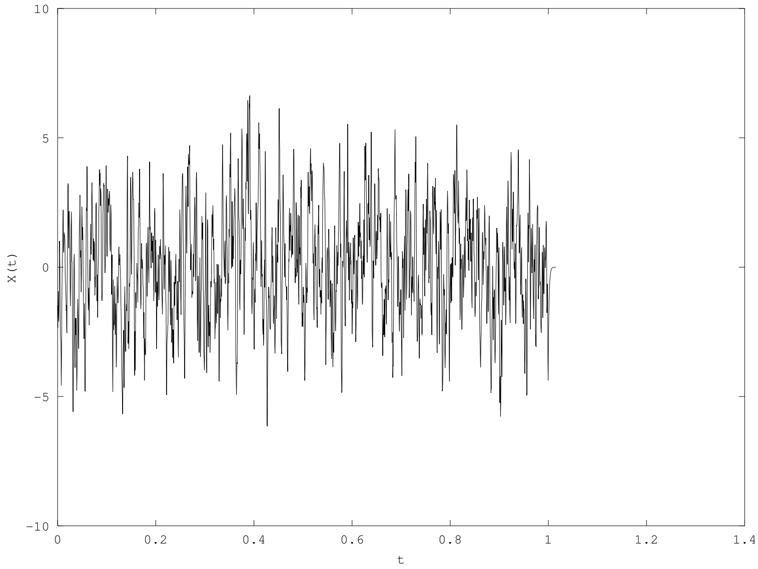
Fall / gluggatýpa	Fervik	Bjögun	MSE
spect_est_pg	2.04E-06	6.09E-08	2.04E-06
spect_est_ac	2.87E-07	6.17E-08	2.87E-07
spect_est_x hamming	2.92E-03	8.73E-04	2.92E-03
spect_est_x hanning	3.16E-03	1.06E-03	3.16E-03

Tafla 1: Mat á rófþéttleikaföllum.

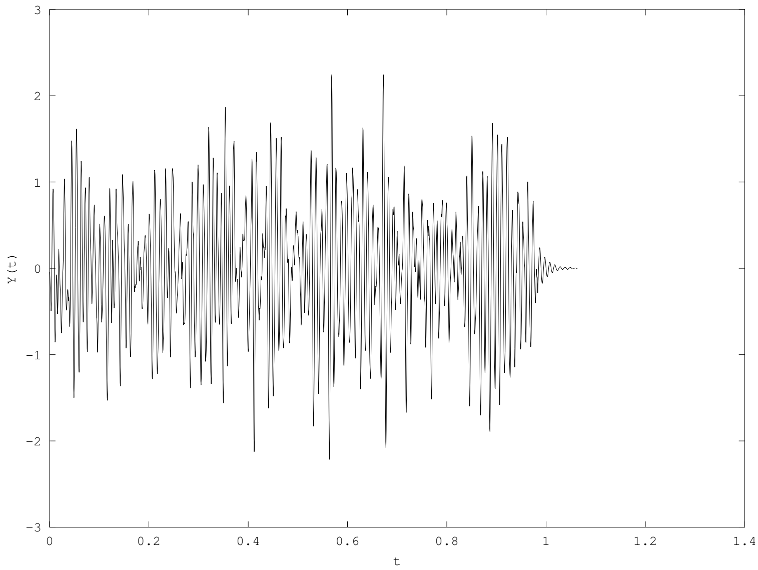
7 Samanburður hamming og hanning

Fyrir fallið ‚spect_est_x' er mögulegt að velja þrjú mismunandi gluggaföll til að sía takmarkaða bandbreidd fyrir rófþéttleikann. Fallið bíður upp á ‚boxcar' síu (mjög grófa kassasíu), sem er ekki notuð hér, og hamming og hanning síur sem hafa mjög vægan sveiflur í ‚vængjum'. Úr töflu 1 má sjá að fyrir þær stillingar gilda sem hér er stillt á (sjá umfjöllun um notkun í hluta 4) veldur hamming glugginn minni meðalkvaðratskekkju. Úr rissu af frádrætti hamming niðurstaðna frá hanning niðurstöðunum má sjá að hanning ferillinn byrjar í hærri útslagi og rís hægar og lægra en hamming ferillinn og dvínar svo aftur hægar. Sjá mynd 7 fyrir graf af samanburði gluggategunda.

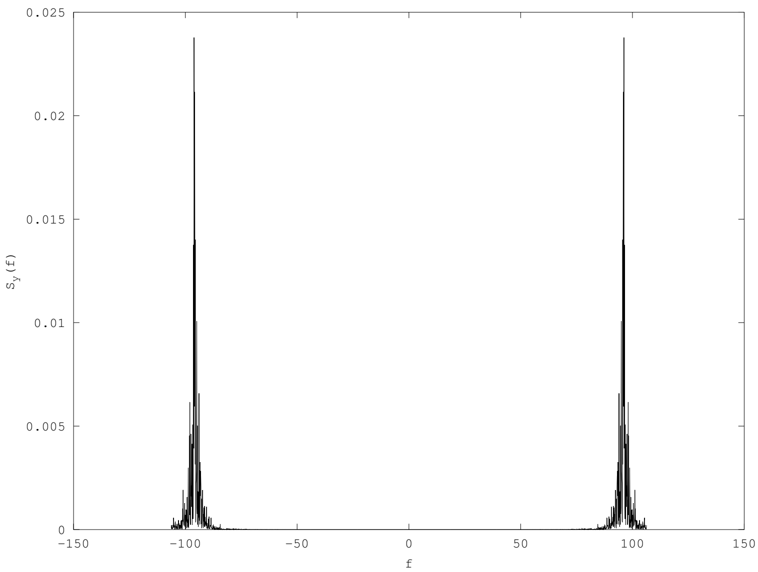
8 Myndir



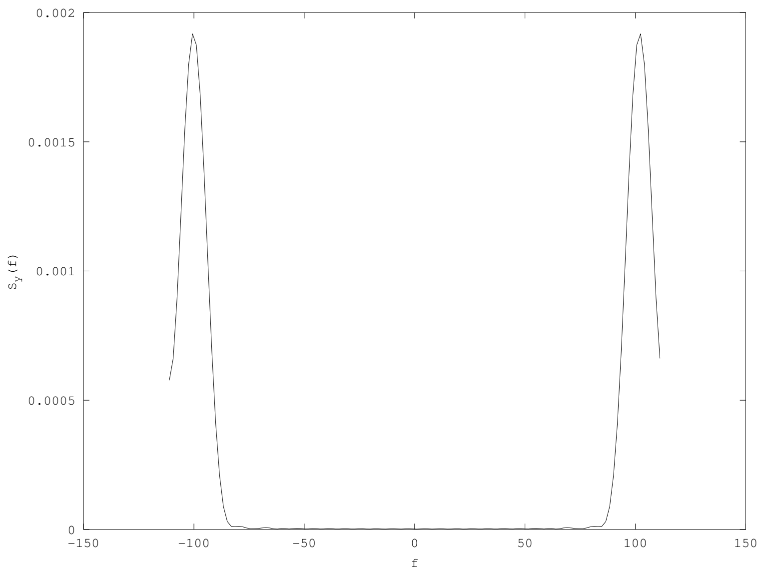
Mynd 1: Sýni úr inntaksmerki $X(t)$.



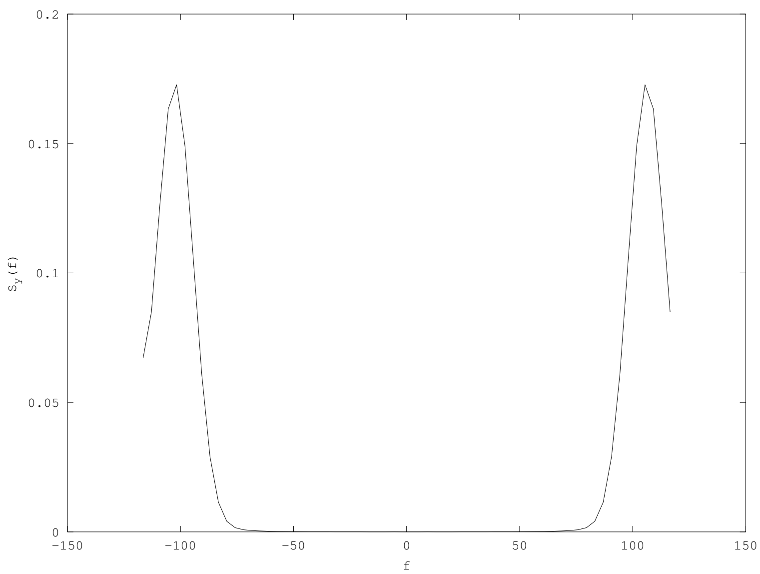
Mynd 2: Sýni úr úttakksmerki $Y(t)$.



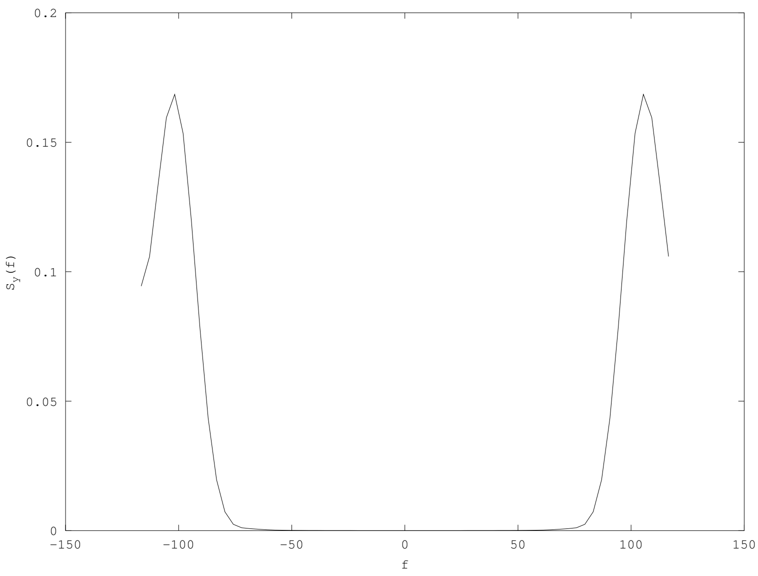
Mynd 3: Rófþéttleiki með spect_est_pg



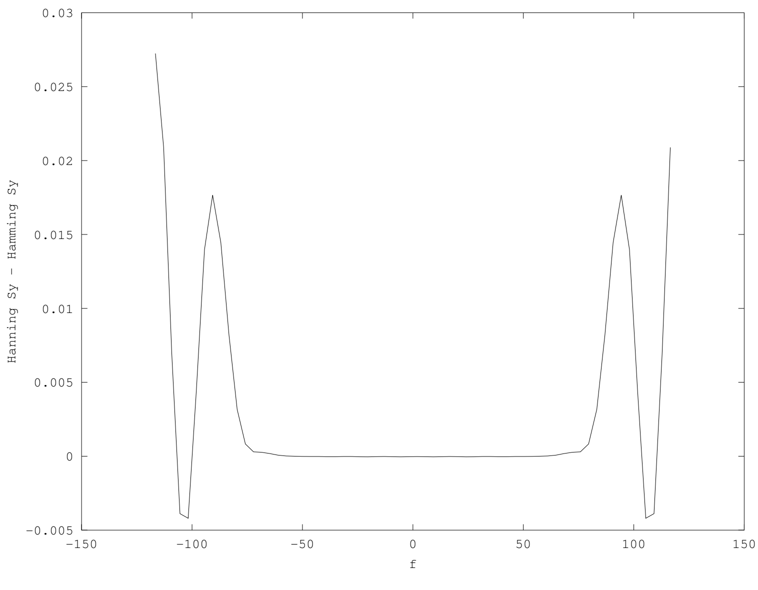
Mynd 4: Rófþéttleiki með spect_est_ac



Mynd 5: Rófþéttleiki með spect_est_x, hamming glugga og nákvæmni í toppgildi.



Mynd 6: Rófþéttleiki með spect_est_x, hamming glugga og nákvæmni í toppgildi.



Mynd 7: Hamming fundinn rófþéttleiki dreginn frá hanning fundnum rófþéttleika.

9 Kóði

LikVerk3.m

```
% Útdráttur úr sysxmp5.m úr bók
%% b)
fs=2000;
dt=1/fs;
t2=0:dt:0.016; % 0.016 / dt + 1 = 33 punktar
hn=exp(-600*t2);
hn(1)=0.5*hn(1); % Helmingsvægi endapunkta
randn('seed',500);
x=sqrt(6000*2000)*randn(1,2000);
n1=dt*conv(hn,x); % Sýni úr inntaki
t=0:dt:(size(n1)(2)-1)*dt;
figure(1, 'visible', 'off');
plot(t,n1);
xlabel('t'); ylabel('X(t)');
print -deps fig1.eps
%% c)
n=n1(33:1999);
a1=126.28; a2=-62.83; a3=622; a4=-5.76*2*pi/180;
t1=0:dt:0.08;
h=a1*exp(a2*t1).*cos(a3*t1+a4*ones(size(t1)));
y1=dt*conv(h,n);
t=0:dt:(size(y1)(2)-1)*dt;
figure(2, 'visible', 'off');
plot(t,y1);
xlabel('t'); ylabel('Y(t)');
print -deps fig2.eps
%% d) 1.
S1=spect_est_pg(y1,dt);
tau1=(length(S1)-1)/2;
figure(3, 'visible', 'off');
plot([-tau1:tau1]./10,S1);
xlabel('f'); ylabel('S_y(f)');
print -deps fig3.eps
%% d) 2.
% M sett á gildi 16 þar sem slíkt gildi
% er notað í dæmi í námsbók.
S2=spect_est_ac(y1,dt, 16);
tau2=(length(S2)-1)/2;
figure(4, 'visible', 'off');
plot([-tau2:tau2].*1.75,S2);
xlabel('f'); ylabel('S_y(f)');
print -deps fig4.eps
%% d) 3. Hamming
S3=spect_est_x(y1,dt, 2, 1);
tau3=(length(S3)-1)/2;
figure(5, 'visible', 'off');
```

```
plot([-tau3:tau3].*3.7,S3);
xlabel('f'); ylabel('S_y(f)');
print -deps fig5.eps
%% d) 3. Hanning
S4=spect_est_x(y1,dt, 3, 1);
tau4=(length(S4)-1)/2;
figure(6, 'visible', 'off');
plot([-tau4:tau4].*3.7,S4);
xlabel('f'); ylabel('S_y(f)');
print -deps fig6.eps
%% Samanburður Hamming og hanning.S3 er Hamming, S4 er Hanning.
figure(7, 'visible', 'off');
plot([-tau4:tau4].*3.7,S4-S3);
xlabel('f'); ylabel('Hanning Sy - Hamming Sy');
print -deps fig7.eps
%% Fræðilegt S_y við nyquistgilda söfnunartíðni.
fN=2*(2*pi*fs);
Sy=(6.0792*10^4).*fN.^2./(fN.^6-1.01811.*10.^4.*fN.^4 ...
+7.88969.*10.^2.*fN.^2+8.93744.*10.^4);
bias1=(Sy-mean(S1)).^2
var1=var(S1)
mse1=bias1.^2+var1;
mse1=mean(mse1)
bias2=(Sy-mean(S2)).^2
var2=var(S2)
mse2=bias2.^2+var2;
mse2=mean(mse2)
bias3=(Sy-mean(S3)).^2
var3=var(S3)
mse3=bias3.^2+var3;
mse3=mean(mse3)
bias4=(Sy-mean(S4)).^2
var4=var(S4)
mse4=bias4.^2+var4;
mse4=mean(mse4)
```

spect_est_pg.m

```
function [Shat] = spect_est_pg(x, dt)
Fx = fft(x);
absSquare = ((abs(Fx)).^2)./length(x);
Shat = dt.*absSquare;
```

spect_est_ac.m

```
function [Shat] = spect_est_ac(x, dt, M)
% Umritun á corspec úr kafla 7-9
fs=1/dt;
[a,b]=size(x);
if a<b % Gera inntak að dálkvigur
    x=x';
```

```
    N=b;
else
    N=a;
end
x1=detrend(x,0); % Fjarlægja fastaþátt.
x1(2*N-2)=0;
R1=real(ifft(abs(fft(x1)).^2));
W=triang(2*N-1);
R2=[R1(N:2*N-2);R1(1:N-1)]./((N)*W(1:2*N-2));
R3=R2(N-M:N+M-1);
H=hamming(2*M+1);
R4=R3.*H(1:2*M);
k=2^(ceil(log2(2*M))+2);
S1=abs((1/fs)*fft(R4,k));
Shat = S1;
```

spect_est_x.m

```
%wtype=input('Window type(boxcar-1, hamming-2, hanning-3)=');
%stype=input ('Spectrum type(peaked-1,smooth-2)=');
function [Shat] = spect_est_x(x, dt, wtype, stype)
% Útdráttur úr perspec.m úr bók (bls. 459).

Ls=16; % Fixed value from example from book.
N=8; % Fixed value from example from book.
fs = 1/dt;
%wtype=input('Window type(boxcar-1, hamming-2, hanning-3)=');
if wtype == 1
    w1=boxcar(Ls);
end
if wtype==2
    w1=hamming(Ls);
end
if wtype==3
    w1=hanning(Ls);
end
%stype=input ('Spectrum type(peaked-1,smooth-2)=');
if stype==1
    w=w1/(sum(w1)/sqrt(fs*Ls));
end
if stype==2
    w=w1/sqrt(sum(w1.^2)/Ls);
end

Lx=length(x);
x=x(:);
n1=fix((Lx-N)/(Ls-N));
n2=2^(2+round(log2(Ls)));
a=1:Ls;
SX=zeros(n2,1);
```

```
SXX=zeros(n2,1);

for k=1:n1;
    xw=w.*detrend(x(a),0);
    XW=abs(fft(xw,n2)).^2;
    SX=SX+XW;
    SXX=SXX+abs(XW).^2;
    a=a+(Ls-N);;
end

S2=(1/(n1*fs*Ls))*SX;

if n1==1
    SXX2=(1/((n1)*(fs*Ls)^2))*SXX;
end
if n1 >= 2
    SXX2=(1/((n1-1)*(fs*Ls)^2))*SXX;
end

%% Skipping confidence levels
Shat=S2;
```