# 目　录

# 第 1 章　抽象空间

## 1.1　引言

## 1.2　赋范空间

设 $X$ 是数域 $K$ 上的向量空间 ($K = R$ 或 $C$)，若对每个 $x \in X$ 指定一个实数 $||x||$，称为 x 的范数，其满足以下范数公理。

**($N_1$)** 齐次性　　$||ax|| = |a| \cdot ||x|| \quad a \in K$

**($N_2$)** 三角不等式　$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

**($N_3$)** 正定性　　$||x|| \geq 0, \quad ||x|| = 0 \leftrightarrow ||x|| = 0$

则称 X 为 K 上的赋范向量空间，简称赋范空间。

注：

**1** 如 K=R，称为实赋范空间，如 K=C，则称为复赋范空间。

**2** description

- **a.** 称 $|x| = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$ 称为 Euclid 范数，常用于解释赋范空间的模型。
- **b.** 一般范数无具体计算公式，其本质在于范数公理，正是舍弃了特殊的表达式，才得到了具有高度抽象性的赋范空间理论。
- **c.** 一旦将赋范空间理论应用于某个特定空间，就必须选择适当的范数公式。

例：有界函数空间 $B(\Omega)$

设 $\Omega$ 是任一非空集合，$B(\Omega)$ 是定义在 $\Omega$ 上的有界实（复）函数之全体。其显然是一实（复）向量空间。任给 $\mu \in B(\Omega)$，令

$$||\mu||_0 = \sup_{x \in \Omega} |\mu(x)|$$

验证：

$1^0$ 齐次性

$$||a\mu||_0 = \sup_{x \in \Omega} |a\mu(x)|$$

$2^0$ 三角不等式

$3^0$ 正定性

[说明]

1. 自然数集 $N$ 上的有界函数就是有界数列。因此，有界数列空间 $B(N)$ 是一赋范空间，通常记做 $\ell^\infty$。

## 1.3 Banach 空间

## 1.4 常用函数空间

## 1.5 内积空间与 Hilbert 空间