

# 第 3 章 离散傅里叶变换

笪邦友

中南民族大学 电子信息工程学院

2018 年 10 月 22 日

# 目录

## 1 引言

## 2 基2FFT 算法

- 直接计算 DFT 的特点及减少运算量的基本途径
- 时域抽取法基2FFT 基本原理 (DIT-FFT)
- DIT-FFT 算法计算量

## 3 DIT-FFT 的运算规律与编程思想

- 原位计算 (同址计算)
- 旋转因子  $W_N^p$  的变化规律
- 蝶形运算规律
- 编程思想及程序框图
- 序列的倒序
  - 倒序的概念
  - 倒序的编程思想及程序框图

## 4 频域抽取法 (DIF-FFT)

- 频域抽取法 (DIF-FFT)

## 5 IDFT 的快速算法

# 引言

- DFT 是一种针对有限长带限信号的傅里叶变换理论。但实践中不存在这样的信号，对于时域有限的信号，其频域为无限长，在不影响信号分析的情况下，可通过滤除高于折叠频率的频率成分，使之频域成为有限长。这一点称为 DFT 理论上的近似性。
- FFT 是实现 DFT 的一种快速算法，其在理论上没有任何误差。
- 1965 年，库利和图基在《计算数学》上发表著名论文《机器计算傅里叶级数的一种算法》后，很快形成了一套高效计算方法，就是现在的快速傅里叶变换算法
- FFT 算法的提出，标志着数字信号处理这门学科的开端。

## 直接计算 DFT 的特点

有限长序列  $x(n)$  的  $N$  点 DFT 为  $X(k)$ , 则有:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

分析方程可知:

输入信号为:

$x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)$

那么频域变换结果为:

$X(0), X(1), X(2), \dots, X(N-1)$

## N 点 DFT 的计算量

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

令  $k = 2$ , 则

$$X(2) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{2n}$$

# N 点 DFT 的计算量

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

令  $k = 2$ , 则

$$X(2) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{2n}$$

- ① 显然, 计算  $X(k)$  的 1 个值, 需要做 **N-1** 次加法, **N** 次乘法
- ② 那么, 计算  $X(k)$  的所有  $N$  个值, 则需要  $N^2$  次复数乘法,  
 $N(N-1) \approx N^2$  次复数加法。
- ③ 如  $N = 2^{10}$ , 则  $N^2 = 1048576$

可见直接计算 DFT 计算量很大。

# 减少计算 DFT 运算量的途径

① 基本思想：将一个长序列 DFT 分解为若干个短序列 DFT。

- 如  $N = 2^{10} = 1024$ , 可分为两个长度为 512 的短序列。
- 一个短序列的乘法次数为  $(\frac{N}{2})^2$ ,
- 则两个短序列的乘法计算时间为,  $(\frac{N}{2})^2 + (\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{2}$

② 问题在于：

- ① 将长序列分离为短序列可行吗？
- ② 两个短序列的 DFT 与长序列的 DFT 等价吗？为什么？

# 旋转因子 ( $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ) 的性质

短序列  $DFT$  与长序列  $DFT$  的关系的关键在于旋转因子的性质

① 周期性:  $W_N^{m+lN} = W_N^m$

$$(W_N^{m+lN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+lN)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}m} \cdot e^{-j2\pi l} = W_N^m)$$

② 对称性 1:  $W_N^{m+\frac{N}{2}} = -W_N^m$       ( $W_N^{\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$ )

③ 对称性 2:  $W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn}$

$$(W_N^{2kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kn} = W_{N/2}^{kn})$$

## 时域抽取法基 2FFT 基本原理 (DIT-FFT)

时域抽取法基 2FFT 将长序列分解为短序列所遵循的原则

- ① 对时间奇偶分 ( $n$ )
- ② 对频率前后分 ( $k$ )

## (一) 第一次分解

假设序列  $x(n)$  长度为  $N$ , 且满足  $N = 2^M$ ,  $M$  为自然数。

按  $n$  的奇偶把  $x(n)$  分解为两个长度为  $N/2$  的子序列

$$\begin{cases} x_1(r) = x(2r) & r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ x_2(r) = x(2r + 1) & r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{cases}$$

注意: 此处存在 3 个序列,

- 原序列  $x(n)$  长度为  $N$
- 两个子序列  $x_1(r), x_2(r)$  长度分别为  $\frac{N}{2}$

以  $N=8$  的数字序列为例

例如:  $N = 2^3 = 8$  则:

$$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7)\}$$

可分解为两个长度为  $\frac{N}{2}$  的短序列,

$$\begin{cases} x_1(r) = x(2r) &= \{x(0), x(2), x(4), x(6)\} \text{ 序列的偶数部分} \\ x_2(r) = x(2r+1) &= \{x(1), x(3), x(5), x(7)\} \text{ 序列的奇数部分} \end{cases}$$

注意, 这里  $0 \leq r \leq \frac{N}{2} - 1$

推导：将  $X(k)$  分解为两个短序列的 DFT

$$\begin{aligned}
 X(k) &= DFT[x(n)] \quad (0 \leq k \leq N-1) \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
 &= \sum_{\substack{n \text{ 为偶数}}} x(n) W_N^{kn} + \sum_{\substack{n \text{ 为奇数}}} x(n) W_N^{kn} \\
 &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{k2r} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{k(2r+1)} \\
 &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{2kr} W_N^k \\
 &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{\frac{N}{2}}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_{\frac{N}{2}}^{kr} \quad (\text{因为: } W_N^{2kr} = W_{N/2}^{kr})
 \end{aligned}$$

## 问题：序列的长度不同

$$\text{即: } X(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_N^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_N^{kr}$$

设：

$$\begin{cases} X_1(k) = DFT[x_1(r)] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_N^{kr} \quad (0 \leq r \leq \frac{N}{2}-1) \\ X_2(k) = DFT[x_2(r)] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_N^{kr} \quad (0 \leq r \leq \frac{N}{2}-1) \end{cases}$$

这里有个问题， $X(k)$  长度为  $N$ ，而  $X_1(k)$  与  $X_2(k)$  长度均为  $N/2$ 。所以不能直接给出结论，需分两种情况讨论。

# 分两种情况讨论

① 当  $0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$  时,

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k \cdot X_2(k)$$

② 当  $\frac{N}{2} \leq k \leq N-1$  时, 令  $k = k_1 + \frac{N}{2}$ , 则  $0 \leq k_1 \leq \frac{N}{2} - 1$ 。

$$\begin{aligned} X(k_1 + \frac{N}{2}) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{\frac{N}{2}}^{(k_1 + \frac{N}{2})r} + W_N^{(k_1 + \frac{N}{2})} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_{\frac{N}{2}}^{(k_1 + \frac{N}{2})r} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{\frac{N}{2}}^{k_1 r} - W_N^{k_1} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_{\frac{N}{2}}^{k_1 r} \quad (0 \leq k_1 \leq \frac{N}{2} - 1) \end{aligned}$$

将  $k_1$  替换为  $k$ , 则有:

$$X(k + \frac{N}{2}) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{\frac{N}{2}}^{kr} - W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_{\frac{N}{2}}^{kr} \quad (0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1)$$

# 结论

综上所述，可得：

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) & (0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1) \\ X(k + \frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{cases}$$

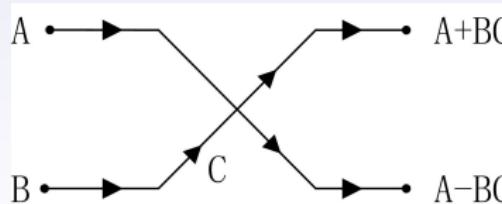
到目前为止，成功的将一个 N 点的 DFT 转化为两个 N/2 点 DFT

# 结论

综上所述，可得：

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) & (0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1) \\ X(k + \frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{cases}$$

到目前为止，成功的将一个  $N$  点的 DFT 转化为两个  $N/2$  点 DFT  
这种计算方式称为蝶形运算。



显然，一个蝶形运算，需要 1 次复数乘法，2 次复数加法。

以 8 点 DFT 为例

令  $k = 0$ , 则有

$$\begin{cases} X(0) = X_1(0) + W_N^0 X_2(0) \\ X(4) = X_1(0) - W_N^0 X_2(0) \end{cases}$$

令  $k = 1$ , 则有

$$\begin{cases} X(1) = X_1(1) + W_N^1 X_2(1) \\ X(5) = X_1(1) - W_N^1 X_2(1) \end{cases}$$

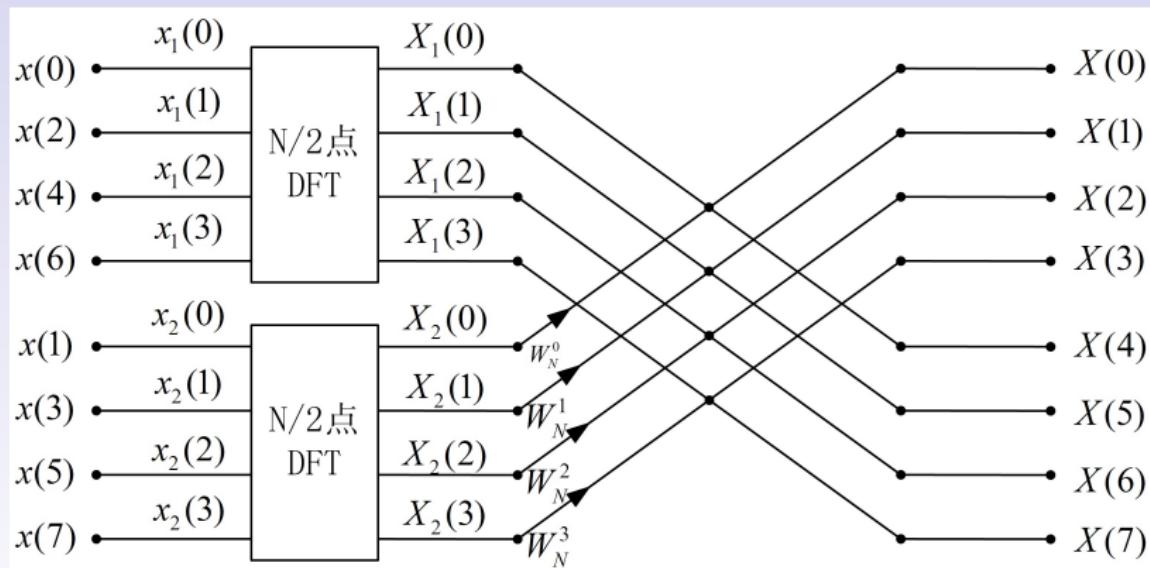
令  $k = 2$ , 则有

$$\begin{cases} X(2) = X_1(2) + W_N^2 X_2(2) \\ X(6) = X_1(2) - W_N^2 X_2(2) \end{cases}$$

令  $k = 3$ , 则有

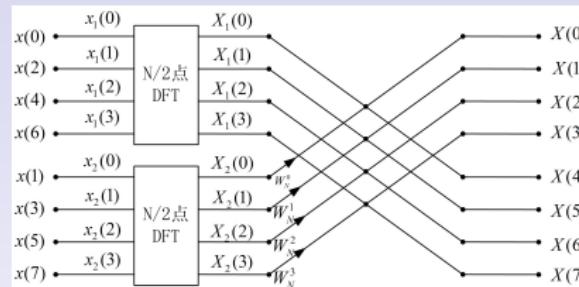
$$\begin{cases} X(3) = X_1(3) + W_N^3 X_2(3) \\ X(7) = X_1(3) - W_N^3 X_2(3) \end{cases}$$

## 8点 DFT 一次时域抽取分解运算流图



一个  $N$  点 DFT  $\iff$  两个  $\frac{N}{2}$  点 DFT +  $\frac{N}{2}$  次蝶形运算

# 第一次分解后 FFT 计算量分析



一个  $N$  点 DFT  $\iff$  两个  $\frac{N}{2}$  点 DFT +  $\frac{N}{2}$  次蝶形运算

计算量分析：

- 两个短序列：  $(\frac{N}{2})^2 \times 2 = \frac{N^2}{2}$
- $N/2$  个蝶形：  $N/2$  个乘法
- 总乘法次数，  $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} \approx \frac{N^2}{2}$

可见，一次分解后，计算量减半。

## (二) 第二次分解

经过第一次分解，将

$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7)\}$  分解为两个长度为  $\frac{N}{2}$  的短序列。

$$\begin{cases} x_1(r) = \{x(0), x(2), x(4), x(6)\} = x(2r) \\ x_2(r) = \{x(1), x(3), x(5), x(7)\} = x(2r+1) \end{cases}$$

设  $x_1(r) \longleftrightarrow X_1(k)$  长  $\frac{N}{2}$

再次对  $x_1(r)$  按奇偶分为两个  $N/4$  点的子序列  $x_3(l)$ 、 $x_4(l)$ ，即

$$\begin{cases} x_3(l) = x_1(2l) & (0 \leq l \leq \frac{N}{4} - 1) \\ x_4(l) = x_1(2l + 1) \end{cases}$$

## 第二次分解——推导

显然, 对于 8 点 DFT, 此处有

$$\begin{cases} x_3(l) = \{x(0), x(4)\} \\ x_4(l) = \{x(2), x(6)\} \end{cases}$$

如果

$$\begin{cases} x_3(l) \longleftrightarrow X_3(k) & (0 \leq l \leq \frac{N}{4} - 1) \\ x_4(l) \longleftrightarrow X_4(k) \end{cases}$$

可将  $X_1(k)$  用  $X_3(k), X_4(k)$  表示。

与前述类似, 可类推下列公式。

$$\begin{cases} X_1(k) = X_3(k) + W_{\frac{N}{2}}^k X_4(k) & (0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1) \\ X_1(k + \frac{N}{4}) = X_3(k) - W_{\frac{N}{2}}^k X_4(k) \end{cases}$$

## 第二次分解——示例

例如：

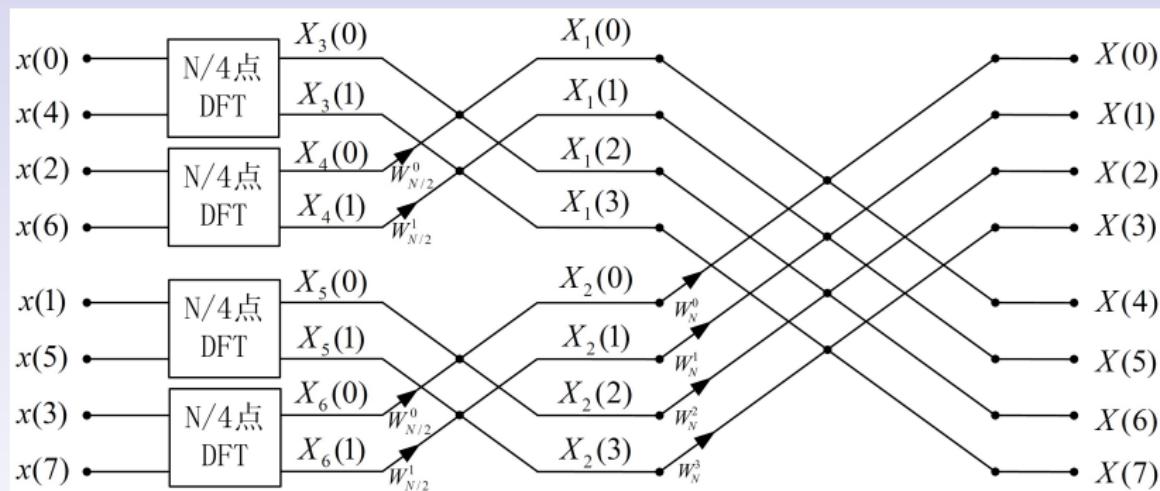
令  $k = 0$ , 则有

$$\begin{cases} X_1(0) = X_3(0) + W_{\frac{N}{2}}^0 X_4(0) \\ X_1(2) = X_3(0) - W_{\frac{N}{2}}^0 X_4(0) \end{cases}$$

令  $k = 1$ , 则有

$$\begin{cases} X_1(1) = X_3(1) + W_{\frac{N}{2}}^1 X_4(1) \\ X_1(3) = X_3(1) - W_{\frac{N}{2}}^1 X_4(1) \end{cases}$$

## 8点 DFT 二次时域抽取分解运算流图



## 最后一次分解

一直分解到短序列长度为 2，不能再分。此时，DFT 计算按定义来算。

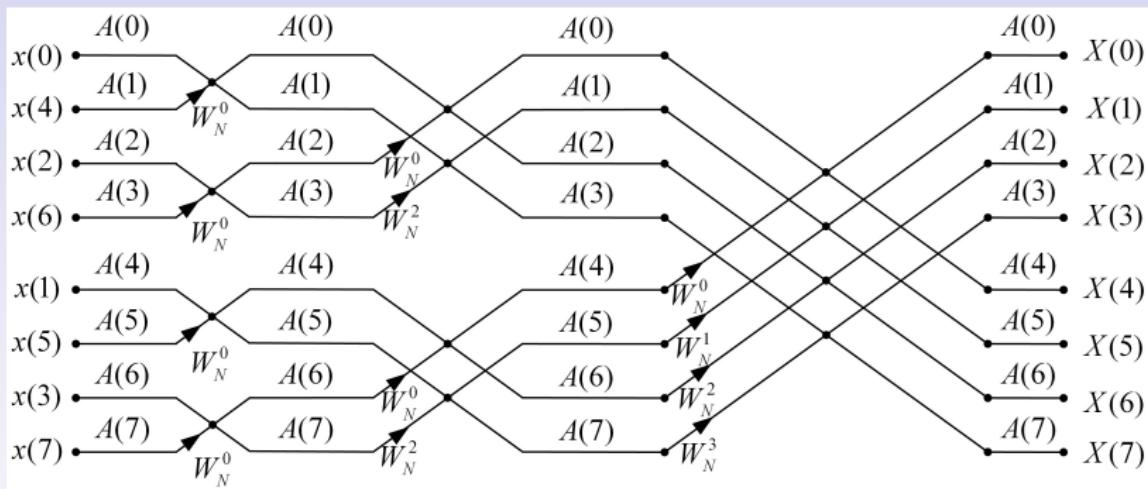
例如：当  $N=2$  时，

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^1 x(n) W_2^{kn} \quad (0 \leq k \leq 1) \\ &= x(0) W_2^0 + x(1) W_2^k \\ &= x(0) + x(1) W_2^k \quad (0 \leq k \leq 1) \end{aligned}$$

将  $k = 0, k = 1$  代入可得：

$$\begin{cases} X(0) = x(0) + x(1) \\ X(1) = x(0) - x(1) \quad (W_2^1 = -1) \end{cases}$$

## 8点 DFT 第三次时域分解运算流图



## DIT-FFT 算法计算量分析

设  $N = 2^M$  ( $M = \log_2 N$ ),

1 运算流图应有  $M$  级蝶形。

2 每一级都由  $\frac{N}{2}$  个蝶形构成,

3 每个蝶形需要一次复数乘法, 两次复数加法,

因此,  $M$  级蝶形运算总的复数乘法次数为:  $M \cdot \frac{N}{2} = \frac{N}{2} \log_2 N$   
以乘法为例:

$$\frac{DFT}{FFT} = \frac{N^2}{\frac{N}{2} \log_2 N} = \frac{2N}{\log_2 N}$$

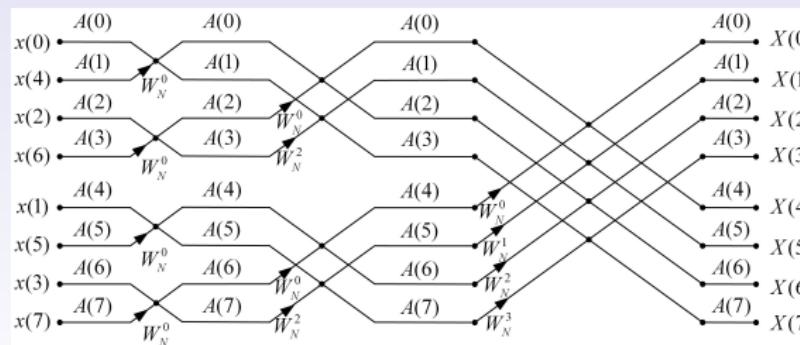
- 当  $N = 2^{10} = 1024$  时,  $\frac{DFT}{FFT} = 204.8$
- 当  $N = 2^{20} = 1024 \times 1024$  时,  $\frac{DFT}{FFT} = 104857.6$

可见,  $N$  越大, 节约的时间越多。

# 原位计算

DIT-FFT 的运算过程很有规律

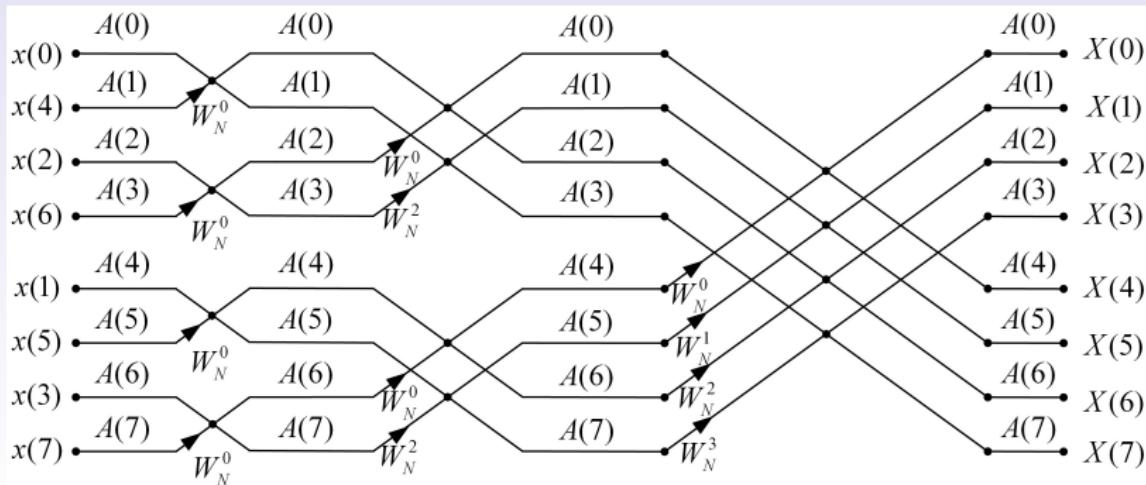
- 1 N 点的 FFT 共进行 M 级运算，每级有  $\frac{N}{2}$  个蝶形；
- 2 同一级中，每个蝶形的两个输入数据只对计算本蝶形有用；
- 3 且输入输出处于同一条水平线上，这意味着计算完一个蝶形后，所输出数据可立即存入原输入数据所占用的存储单元。



这种利用同一存储单元存储蝶形计算输入输出的方法称为原位计算。可以节省大量内存，使设备成本降低。

## 旋转因子

- ① N 点 DIT-DFT 运算流图中，每级都有  $N/2$  个蝶形，每个蝶形都要乘以因子  $W_N^p$ 。
  - ② 这里称  $W_N^p$  为旋转因子， $p$  称为旋转因子的指数。



## 旋转因子 $W_N^p$ 与运算级数的关系

设 L 为从左到右的运算级数，即  $L = 1, 2, 3, \dots, M$ , 有以下规律：

## 旋转因子 $W_N^p$ 与运算级数的关系

设 L 为从左到右的运算级数，即  $L = 1, 2, 3, \dots, M$ ，有以下规律：

- 1 第  $L$  级一共有  $2^{L-1}$  个不同的旋转因子。
- 2 第  $L$  级中，

$$W_N^p = W_{2^L}^J, \quad J = 0, 1, \dots, (2^{L-1} - 1)$$

# 旋转因子 $W_N^p$ 与运算级数的关系

设  $L$  为从左到右的运算级数，即  $L = 1, 2, 3, \dots, M$ ，有以下规律：

- 1 第  $L$  级一共有  $2^{L-1}$  个不同的旋转因子。
- 2 第  $L$  级中，

$$W_N^p = W_{2^L}^J, \quad J = 0, 1, \dots, (2^{L-1} - 1)$$

如： $L=1$  时， $W_N^p = W_2^J$   $J = 0$

推导：

$$W_{2^L}^J = W_{2^M \cdot 2^{L-M}}^J = W_{N \cdot 2^{L-M}}^J = W_N^{J/2^{L-M}} = W_N^{J \cdot 2^{M-L}} = W_N^p$$

└ DIT-FFT 的运算规律与编程思想

└ 旋转因子  $W_N^p$  的变化规律

# 旋转因子 $W_N^p$ 与运算级数的关系

设 L 为从左到右的运算级数，即  $L = 1, 2, 3, \dots, M$ ，有以下规律：

- 1 第  $L$  级一共有  $2^{L-1}$  个不同的旋转因子。
- 2 第  $L$  级中，

$$W_N^p = W_{2^L}^J, \quad J = 0, 1, \dots, (2^{L-1} - 1)$$

如：L=1 时，  $W_N^p = W_2^J$        $J = 0$

推导：

$$W_{2^L}^J = W_{2^M \cdot 2^{L-M}}^J = W_{N \cdot 2^{L-M}}^J = W_N^{J/2^{L-M}} = W_N^{J \cdot 2^{M-L}} = W_N^p$$

显然有：

$$p = J \cdot 2^{M-L}$$

└ DIT-FFT 的运算规律与编程思想

└ 旋转因子  $W_N^p$  的变化规律

以  $N=8$  为例，旋转因子为：

$$p = J \cdot 2^{M-L} \quad J = (0, 1, \dots, (2^{L-1} - 1))$$

例如：8 点 DFT 时， $M=3$ ，有

①  $L = 1, \quad J = (0)$

- $p = J \cdot 2^{M-L} = J \cdot 4 = (0)$
- 旋转因子为： $W_N^0$

②  $L = 2, \quad J = (0, 1)$

- $p = J \cdot 2^{M-L} = J \cdot 2 = (0, 2)$
- 旋转因子为： $W_N^0 \quad W_N^2$

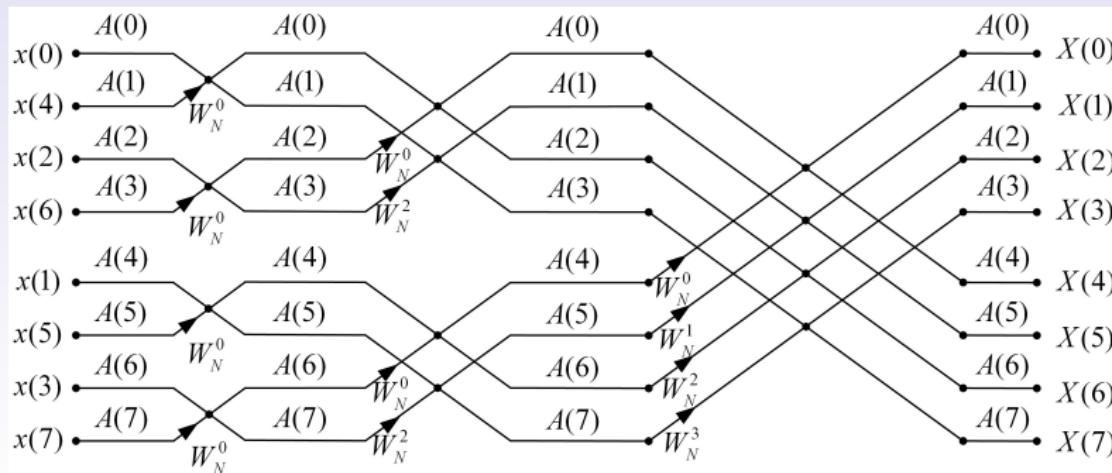
③  $L = 3, \quad J = (0, 1, 2, 3)$

- $p = J \cdot 2^{M-L} = J = (0, 1, 2, 3)$
- 旋转因子为： $W_N^0 \quad W_N^1 \quad W_N^2 \quad W_N^3$

# 蝶形运算规律

在第 L 级中，有

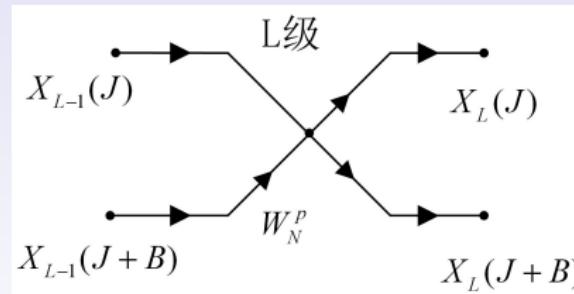
- 1 每个蝶形两个输入端相距点数为：  $B = 2^{L-1}$
- 2 有  $B = 2^{L-1}$  个不同的旋转因子
- 3 同一个旋转因子，对应相邻间隔为  $2^L$  点的  $2^{M-L}$  个蝶形



## 蝶形运算的计算公式

1 在第 L 级中，每个蝶形两个输入端相距点数为： $B = 2^{L-1}$

$$\begin{cases} A_{L-1}(J) + W_N^p A_{L-1}(J+B) \rightarrow A_L(J) \\ A_{L-1}(J) - W_N^p A_{L-1}(J+B) \rightarrow A_L(J+B) \end{cases}$$



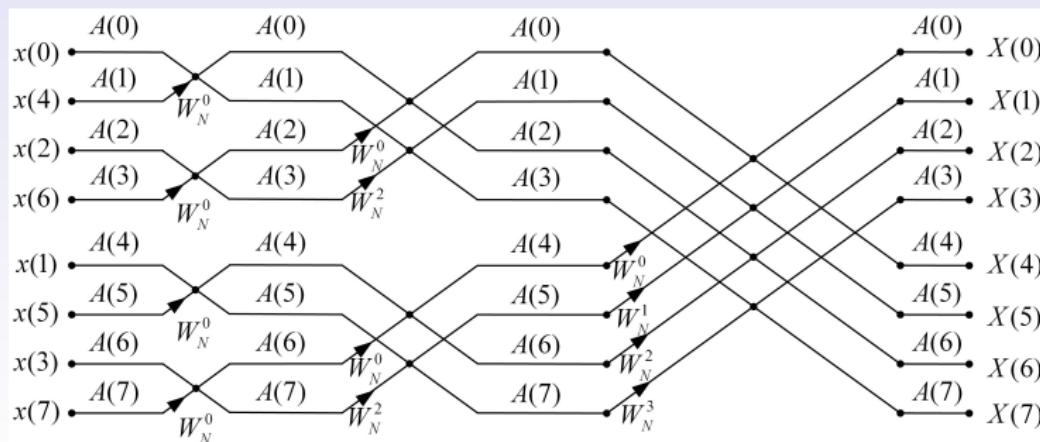
# 说明：容易混淆的情况

## 1 两个 $2^{L-1}$

(a) 第 L 级中，有  $B = 2^{L-1}$  个不同的旋转因子

(b) 第 L 级中，每个蝶形的两个输入端相距的点数  $B = 2^{L-1}$

## 2 $2^L$ : 同一级中具有同一旋转因子的不同蝶形相邻的点数.



## 总结：第 L 层旋转因子出现的规律

$N = 2^M$ , 共有 M 级运算, 每级有  $N/2$  个蝶形。

- 1 第 L 级中, 每个蝶形两个输入端相距点数为:  $B = 2^{L-1}$
- 2 第 L 级中, 一共有  $2^{L-1}$  个不同的旋转因子
- 3 第 L 级中, 同一个旋转因子, 对应  $2^{M-L}$  个蝶形, 每个蝶形相邻间隔为  $2^L$  点

## 编程思想

那么将分三个循环进行：

- ① 进行  $L = 1, 2, \dots, M$  级运算。(第一级循环)

$$L = 1, \dots, M$$

- ② 在第  $L$  级中，存在  $B = 2^{L-1}$  个旋转因子，按旋转因子不同进行计算。(第二级循环)

$$B = 2^{L-1}$$

$$J = 0, \dots, B - 1$$

- ③ 每一个旋转因子对应的  $2^{M-L}$  个蝶形运算。(第三级循环)

$$k = J, N - 1, 2^L$$

( $k$  从  $J$  开始，每循环一次增加  $2^L$ ，到不超过  $N-1$  为止)

## 举例说明——以第二级为例, $L = 2$

- ① 计算该层的旋转因子个数, 以及每个蝶形相距的点数。

$$L = 2 \quad \therefore B = 2^{L-1} = 2$$

- ② 计算旋转因子的指数  $p$

$$J = (0, 1) \quad p = 2^{M-L} \cdot J = 2 \cdot J = (0, 2)$$

- ③ 每个旋转因子的蝶形计算, 同一旋转因子间隔为  $2^L = 4$

$$k = J, 7, 4$$

- ④ 计算公式

$$\begin{cases} A_{L-1}(k) + W_N^p A_{L-1}(k+B) \longrightarrow A_L(k) \\ A_{L-1}(k) - W_N^p A_{L-1}(k+B) \longrightarrow A_L(k+B) \end{cases}$$

## 示例——计算过程 I

$$L = 2 \quad \therefore B = 2^{L-1} = 2$$

1  $J = 0$

(a)  $J = 0, p = 0, k = 0, B = 2$

$$\begin{cases} A(0) + W_N^0 A(2) \longrightarrow A(0) \\ A(0) - W_N^0 A(2) \longrightarrow A(2) \end{cases}$$

(b)  $J = 0, p = 0, k = 4, B = 2$

$$\begin{cases} A(4) + W_N^0 A(6) \longrightarrow A(4) \\ A(4) - W_N^0 A(6) \longrightarrow A(6) \end{cases}$$

## 示例——计算过程 II

2  $J = 1$

(a)  $J = 1, p = 2, k = 1, B = 2$

$$\begin{cases} A(1) + W_N^2 A(3) \longrightarrow A(1) \\ A(1) - W_N^2 A(3) \longrightarrow A(3) \end{cases}$$

(b)  $J = 1, p = 2, k = 5, B = 2$

$$\begin{cases} A(5) + W_N^2 A(7) \longrightarrow A(5) \\ A(5) - W_N^2 A(7) \longrightarrow A(7) \end{cases}$$

# 倒序的概念

- ① DIT-FFT 算法流图的输出  $X(k)$  是自然顺序
- ② 但是, 为了适应原位计算, 其输入序列不是自然顺序, 而是经过 M 次奇偶抽选后的, 这样的排序成为序列  $x(n)$  的倒序。

顺序		倒序	
十进制 I	二进制 I'	二进制 J'	十进制 J
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

图: 顺序和倒序二进制对照表

## 顺序数与倒序数的不同特点

关键：若已知当前倒序数  $J$ ，如何得到下一个倒序数。顺序数与倒序数的不同特点

- 顺序数二进制在最低位加 1，向左进位。
- 倒序数二进制在最高位加 1，向右进位。

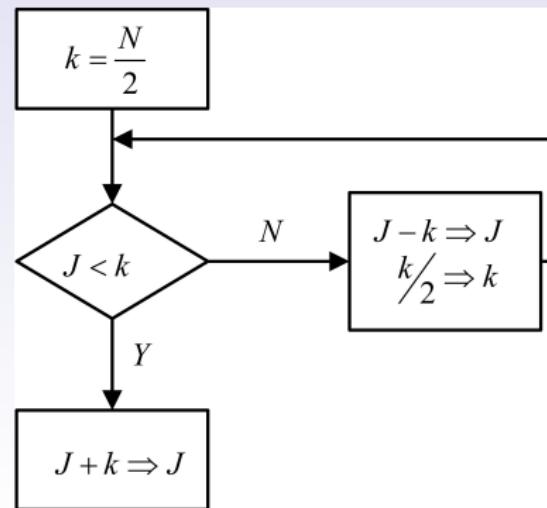
顺序		倒序	
十进制 I	二进制 I'	二进制 J'	十进制 J
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

## 8点 DIT-FFT 运算流图

编程：已知当前十进制  $J$ ，在  $J'$  中考察

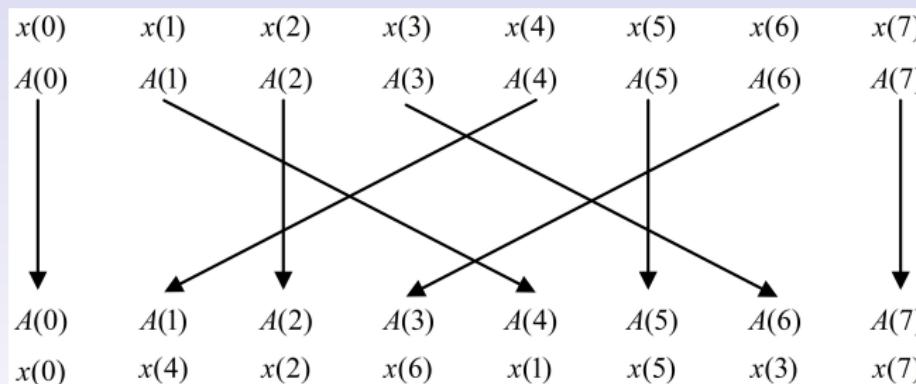
(1) 若  $J'$  最高位为 0，则  $J + \frac{N}{2} \rightarrow J$

(2) 若  $J'$  最高位为 1，则  $J - \frac{N}{2} \rightarrow J$ ，向右进一位。



## 对 $x(n)$ 按倒序重新排列

形成倒序后，我们已经知道倒序序列的组成。下一个问题是将原数组 A 中存放的输入序列重新按倒序排列。



- ①  $x(0), x(N - 1)$  不动。
- ② 当  $I = J$  时，不动。
- ③ 当  $I \neq J$  时， $A(I)$  和  $A(J)$  交换数据。

频域抽取法基 2FFT 将长序列分解为短序列所遵循的原则

- ① 对时间前后分  $(n)$
- ② 对频率分奇偶  $(k)$

假设序列  $x(n)$  长度为  $N$ , 且满足  $N = 2^M$ ,  $M$  为自然数。(不是的补 0)

按  $n$  的前后把  $x(n)$  分解为两个  $N/2$  长的子序列

$$X(k) = DFT[x(n)]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

令  $n = n_1 + \frac{N}{2}$ , 则有:

$$\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n_1 + \frac{N}{2}) W_N^{k(n_1 + \frac{N}{2})}$$

(将  $n_1$  替换为  $n$ )

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2}) W_N^{\frac{N}{2}k} W_N^{kn}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2}) W_N^{\frac{N}{2}k} W_N^{kn}$$

注意:  $W_N^{\frac{N}{2}k} = (W_N^{\frac{N}{2}})^k = (-1)^k$

## 第3章 离散傅里叶变换

└ 频域抽取法 (DIF-FFT)

└ 频域抽取法 (DIF-FFT)

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{\frac{N}{2}k} W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ x(n) + W_N^{\frac{N}{2}k} x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn} \quad (0 \leq k \leq N-1) \end{aligned}$$

对频率  $k$  奇偶分

$$\begin{cases} k = 2m \\ k = 2m + 1 \end{cases}$$

则：

$$X(2m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2mn}$$

$$X(2m+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{(2m+1)n}$$

而：

$$W_N^{(2m+1)n} = W_{\frac{N}{2}}^{mn} W_N^n$$

最后得到：

$$\begin{cases} X(2m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{mn} & (0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1) \\ X(2m+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ \left( x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^n \right] W_N^{mn} \end{cases}$$

令，

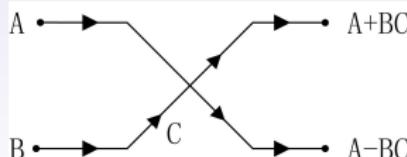
$$\begin{cases} x_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) & (0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1) \\ x_2(n) = \left[ x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{cases}$$

$$\text{令 } DFT[x_1(n)] = X_1(k) \quad DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

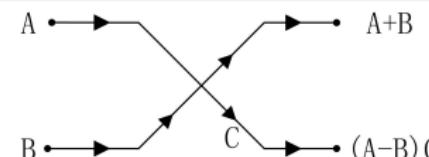
则有：

$$\begin{cases} X_1(k) = X(2k) & (0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1) \\ X_2(k) = X(2k + 1) \end{cases}$$

DIF-FFT 蝶形运算符号：

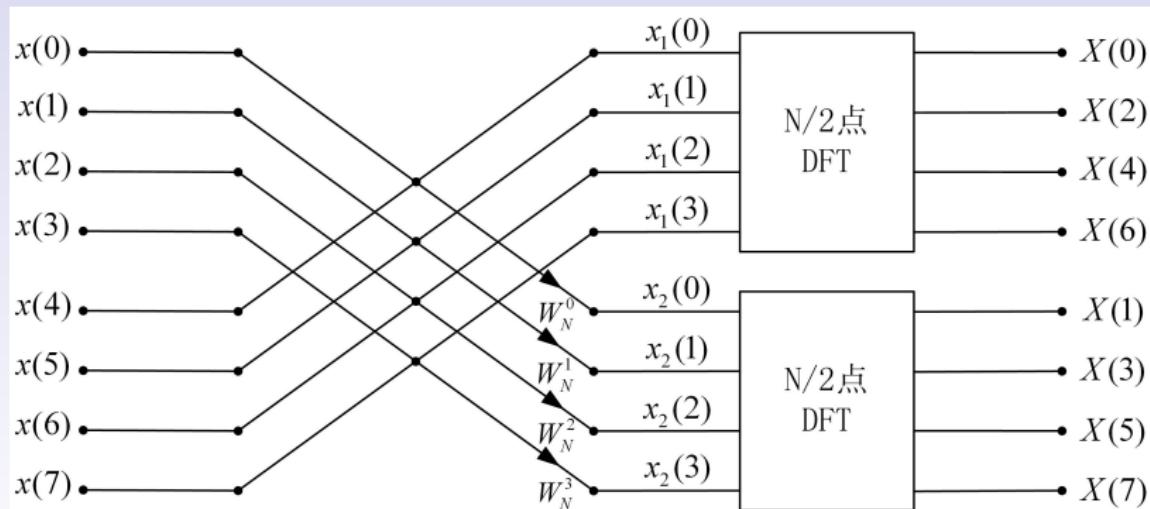


DIT-FFT蝶形运算

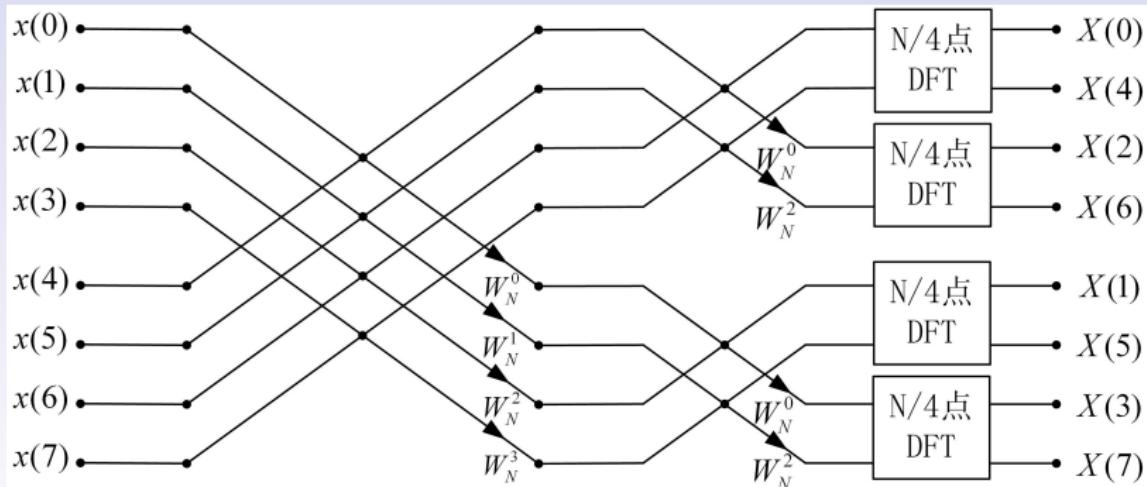


DIF-FFT蝶形运算

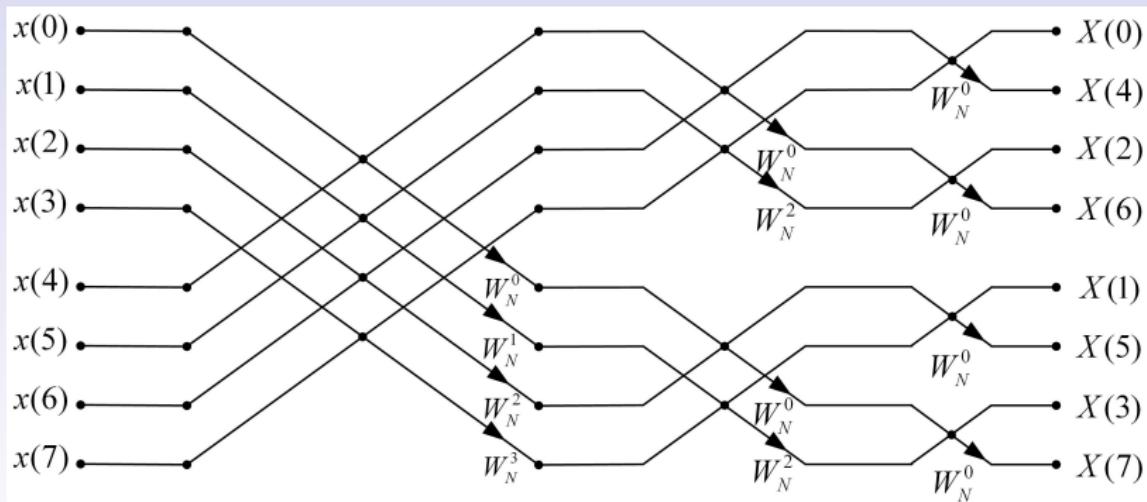
## 8点 DIF-DFT 一次时域分解运算流图



## 8点 DIF-DFT 二次时域分解运算流图



## 8点 DIF-DFT 三次时域分解运算流图



# IDFT 的快速算法

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad (0 \leq k \leq N-1) \\ x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad (0 \leq n \leq N-1) \end{cases}$$

- 方法一：

将  $X(k)$  作为输入,  $p \rightarrow -p$ , 最后的结果除以  $N$ 。

# IDFT 的快速算法

- 方法二：

$$\begin{aligned}x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \\&= \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{kn} \right]^* \\&= \frac{1}{N} [DFT[X^*(k)]]^*\end{aligned}\tag{1}$$

将  $X(k)$  取共轭，做  $DFT$  变换，再将结果取共轭，最后除以  $N$ 。