

第 3 章 离散傅里叶变换

笪邦友

中南民族大学 电子信息工程学院

2018 年 10 月 22 日

目录

① DFT 的定义和物理意义

- DFT 的定义
- DFT 和 Z 变换的关系
- DFT 和傅里叶变换的关系
- DFT 的隐含周期性

② DFT 的基本性质

- 线性性质
- 循环移位性质
- 循环卷积定理
- 复共轭序列的 DFT
- DFT 的共轭对称性

③ 频率域采样

④ DFT 的应用举例

- 用 DFT 计算线性卷积
- 用 DFT 对信号进行谱分析
- 用 DFT 进行谱分析的误差问题

DFT 的定义

定义

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 M ，则其 N 点 DFT 可定义为：

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

注：

- (1) 式中 M 为信号 $x(n)$ 的长度， N 为 DFT 变换区间长度。
- (2) 此处需要 $N \geq M$ 。

DFT 的定义

DFT 反变换定义为：

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

DFT 变换对可写作：

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & (0 \leq k \leq N-1) \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & (0 \leq n \leq N-1) \end{cases}$$

求反变换

问题在于求反变换：

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

证明：从右到左，将 $X(k)$ 的表达式代入可得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-n)k} \right] \end{aligned}$$

$$\text{而：} \quad \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-n)k} = \begin{cases} N, & m-n = l \cdot N \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad l \in Z$$

求反变换

因为 $0 \leq m \leq N-1$, $0 \leq n \leq N-1$,

$$\therefore -(N-1) \leq m-n \leq N-1$$

只有当 $m-n=0$, 即 $m=n$ 时, 有:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-n)k} = N$$

$$\therefore \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-n)k} \right] = \frac{1}{N} \cdot N \cdot x(n) = x(n)$$

$$\text{即: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

求反变换

记 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, 则有:

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & (0 \leq k \leq N-1) \\ x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & (0 \leq n \leq N-1) \end{cases}$$

DFT 和 Z 变换的关系

$$\therefore X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$\begin{aligned}\text{而 } X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right]_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \\ \therefore X(k) &= X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad 0 \leq k \leq N-1\end{aligned}$$

结论

$x(n)$ 的 N 点 DFT 是其 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上的 N 点等间隔采样。

DFT 和傅里叶变换的关系

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\begin{aligned}\text{而} \quad X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right]_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\end{aligned}$$

$$\therefore X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

结论

$x(n)$ 的 N 点 DFT 是其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在 ω 轴上区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样。这也是 DFT 的物理意义。

例题

由此可见, DFT 变换区间长度不同, $X(k)$ 在傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的区间 $[0, 2\pi]$ 上的采样点数不同, 其 DFT 的结果也不同

例题

设 $x(n) = R_4(n)$, 求 $x(n)$ 的 4 点, 8 点, 16 点 DFT 。

DFT 的重要性

DFT 的重要性表现于:

其实质是有限长序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的有限点离散采样, 实现了频域离散化, 从而可在频域采用数值计算方法进行数字信号处理。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

DFT 的隐含周期性

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

一、分析：

- (1) 从公式上看, $0 \leq k \leq N-1$, $X(k)$ 是有限长序列, 不可能是周期序列。
- (2) 从公式形式上看, $X(k)$ 的表达式是周期为 N 的周期函数。

几个约定的符号

设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的周期序列，是 $x(n)$ 的周期延拓，即

$$\begin{cases} \tilde{x}(n) \text{ 是 } x(n) \text{ 的周期延拓} \\ x(n) \text{ 是 } \tilde{x}(n) \text{ 的主值序列} \end{cases}$$

记做：

$$x(n) = \tilde{x}(n) \cdot R_N(n)$$

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N \quad (n \text{ 对 } N \text{ 求余})$$

或：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN)$$

举例说明

例如：

$$x((10))_8 = x(2) \quad ((1))_8 = 1 \quad ((16))_8 = 0$$

注意：

$$\underbrace{\tilde{x}(n)}_{-\infty \leq n \leq \infty} = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN)}_{0 \leq n \leq N-1}$$

DFT 和 DFS 的关系

$$\text{设: } x(n) \longleftrightarrow X(k)$$

$$\tilde{x}(n) \longleftrightarrow \tilde{X}(k)$$

则:

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & (0 \leq k \leq N-1) \\ \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & (-\infty \leq k \leq \infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (0 \leq k \leq N-1) \\ \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (-\infty \leq k \leq \infty) \end{cases}$$

显然：

(1) 公式完全一样

(2) $X(k)$ 是 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列，即 $X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k)$ 。

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的频谱完全由其 DFS 的系数 $\tilde{X}(k)$ 确定，因此 $X(k)$ 实际上是 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的频谱特性，这也是 DFT 的第二种物理意义。

(3) 由 $x(n)$ 得到 $X(k)$ 的过程为：

$$x(n) \xrightarrow{\text{延拓}} \tilde{x}(n) \xrightarrow{DFS} \tilde{X}(k) \xrightarrow{\text{取主值}} X(k)$$

DFT 理论的近似性

DFT 理论的近似性

- (1) DFT 理论的前提是 $x_a(t)$ 为有限长带限信号，即信号在时域为有限长，频域也为有限长。
- (2) 实际中不存在这种信号，时域有限和频域有限是一对矛盾，不可能同时实现。时域上有限的信号，其频域信号必定无限长。
- (3) 在工程实践中，时域有限信号容易得到，但其能量往往集中于低频段，频谱具有收敛性，在频率大于一定值后，其频谱分量近似为 0 了。通常可将其截断，从而得到有限长带限信号。

线性性质

线性性质很重要

序列的循环移位

一、序列的循环移位

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 M , $M \leq N$, 则 $x(n)$ 的循环移位定义为:

$$y(n) = x((n+m))_N \cdot R_N(n)$$

步骤

- | | |
|-------|--|
| ① 延拓 | $x(n) \longrightarrow \tilde{x}(n) = x((n))_N$ |
| ② 移位 | $\tilde{x}(n) \longrightarrow \tilde{x}(n+m) = x((n+m))_N$ |
| ③ 取主值 | $x((n+m))_N \cdot R_N(n)$ |

例题

已知 $x(n)$ 如图所示, 画出 $x((n+2))_5 \cdot R_5(n)$ 。

时域循环移位定理

二、时域循环移位定理

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 N , $X(k)$ 为其 N 点 DFT, 则有:

$$x((n+m))_N \cdot R_N(n) \longleftrightarrow W_N^{-km} \cdot X(k)$$

证明：从左到右

$$\text{DFT} \left[x((n+m))_N R_N(n) \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[x((n+m))_N R_N(n) \right] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x((n+m))_N \right] W_N^{kn} \quad (\text{主值区间})$$

令 $n' = n + m$, 则有:

$$= \sum_{n'=m}^{m+N-1} \left[x((n'))_N \right] W_N^{k(n'-m)} = W_N^{-km} \sum_{n'=m}^{m+N-1} \left[x((n'))_N \right] W_N^{kn'}$$

$$= W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} \left[x((n'))_N \right] W_N^{kn'} \quad (\text{一个周期内求和相等})$$

$$= W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') W_N^{kn'} \quad (\text{主值区间})$$

$$= W_N^{-km} X(k)$$

$$x((n+m))_N R_N(n) \longleftrightarrow W_N^{-km} X(k)$$

频域循环移位定理

三、频域循环移位定理

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 N , $X(k)$ 为其 N 点 DFT, 则有:

$$W_N^{mn} \cdot x(n) \longleftrightarrow X((k+m))_N \cdot R_N(k)$$

证明：从右到左

$$IDFT[X((k+m))_N R_N(k)]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X((k+m))_N R_N(k) \right] W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X((k+m))_N \right] W_N^{-kn} \quad (\text{主值区间})$$

令 $k' = k + m$, 则有:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{k'=m}^{m+N-1} \left[X((k'))_N \right] W_N^{-k'n} W_N^{mn} \\ &= W_N^{mn} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k'=m}^{m+N-1} \left[X((k'))_N \right] W_N^{-k'n} \\ &= W_N^{mn} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} \left[X((k'))_N \right] W_N^{-k'n} \quad (\text{一个周期内求和相等}) \\ &= W_N^{mn} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} X(k') W_N^{-kn'} \quad (\text{主值区间}) \\ &= W_N^{mn} \cdot x(n) \end{aligned}$$

$$\text{即:} \quad W_N^{mn} \cdot x(n) \longleftrightarrow X((k+m))_N \cdot R_N(k)$$

循环卷积的定义

一、循环卷积的定义

定义

设有限长序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的长度分别为 M 和 N 。则 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 L 点循环卷积定义为：

$$\begin{aligned} y_c(n) &= x(n) \otimes h(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L \right] R_L(n) \end{aligned}$$

式中 L 称为循环卷积区间长度，且有 $L \geq \{N, M\}$ 。

- | | |
|--------|--|
| ① 延拓 | $x(n) \rightarrow \tilde{x}(n) = x((n))_L$ |
| ② 线性卷积 | $h(n) * \tilde{x}(n)$ |
| ③ 取主值 | |

循环卷积计算示例

例题

设 $h(n) = R_4(n)$, $x(n) = R_4(n-2)$, 求其循环卷积, 设 $L = 8$ 。

时域循环卷积定理

二、时域循环卷积定理

定理

设长度均为 N 的有限长序列 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(k)$, $x_2(n) \leftrightarrow X_2(k)$, 则有:

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \longleftrightarrow X_1(k) \cdot X_2(k) \quad (N \text{ 点循环卷积})$$

注意

时域循环移位性质:

$$x((n+m))R_N(n) \longleftrightarrow W_N^{-km} X(k)$$

$$x((n-m))R_N(n) \longleftrightarrow W_N^{km} X(k)$$

证明:

$$DFT[x_1(n) \otimes x_2(n)]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{N-1} [x_1(n) \otimes x_2(n)] W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \right] W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_2((n-m))_N R_N(n) W_N^{kn} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \cdot DFT[x_2((n-m))_N R_N(n)] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} X_2(k) \\ &= X_1(k) \cdot X_2(k) \end{aligned}$$

频域循环卷积定理

三、频域循环卷积定理

定理

设长度均为 N 的有限长序列 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(k)$, $x_2(n) \leftrightarrow X_2(k)$, 则有:

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \longleftrightarrow \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k) \quad (N \text{ 点循环卷积})$$

注意

频域移位性质

$$W_N^{mn} \cdot x(n) \longleftrightarrow X((k+m))_N \cdot R_N(k)$$

$$W_N^{-mn} \cdot x(n) \longleftrightarrow X((k-m))_N \cdot R_N(k)$$

证明：

$$IDFT\left[\frac{1}{N}X_1(k) \otimes X_2(k)\right]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k) \right] W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) X_2((k-m))_N \right] R_N(k) W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2((k-m))_N R_N(k) W_N^{-kn} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) \cdot IDFT\left[X_2((k-m))_N R_N(k)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) W_N^{-mn} \right] \cdot x_2(n) = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k) W_N^{-kn} \right] \cdot x_2(n)$$

$$= x_1(n) \cdot x_2(n)$$

复共轭序列的 DFT

定理

设长度为 N 的有限长序列 $x(n) \leftrightarrow X(k)$, 且令 $X(N) = X(0)$, 则有:

$$x^*(n) \longleftrightarrow X^*(N-k) \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

$$x^*(N-n) \longleftrightarrow X^*(k) \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$X(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-kn} W_N^{Nn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-kn}$$

$$X^*(N-k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-kn} \right]^* = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{kn} = DFT[x^*(n)]$$

复共轭序列的 DFT

同理可证: $x^*(N-n) \longleftrightarrow X^*(k) \quad (0 \leq k \leq N-1)$

$$DFT[x^*(N-n)]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(N-n) W_N^{kn} \quad \text{令 } m = N-n \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x^*(m) W_N^{k(N-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} x^*(m) W_N^{-km} W_N^{kN} \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x^*(m) W_N^{-km} \quad \text{因为 } (W_N^{kN} = 1) \\
 &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{km} \right]^* = X^*(k)
 \end{aligned}$$

DFT 的共轭对称性

一、复习一下离散序列的分解

任何离散序列可分解为共轭对称序列和共轭反对称序列之和，也能分解为实数部分序列和虚数部分序列之和。

$$\begin{cases} x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \\ x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \\ jx_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \end{cases}$$

有限长序列的对称性

二、DFT 中也存在类似的对称性，
设 $x(n)$ 为长度为 N 的有限长序列。

1^o 记号：

$$\begin{cases} x_{ep}(n) : \text{有限长共轭对称序列} \\ x_{op}(n) : \text{有限长共轭反对称序列} \end{cases}$$

2^o 定义：

$$\begin{cases} x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n) & \text{对比: } x_e(n) = x_e^*(-n) \\ x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n) & \text{对比: } x_o(n) = -x_o^*(-n) \end{cases}$$

其实质为有限长序列 $x(n)$ 关于 $\frac{N}{2}$ 对称

其实质为有限长序列 $x(n)$ 关于 $\frac{N}{2}$ 对称。

如 N 为偶数，令 $n = \frac{N}{2} - n_0$ ，可得：

$$\begin{cases} x_{ep}\left(\frac{N}{2} - n_0\right) = x_{ep}^*\left(\frac{N}{2} + n_0\right) \\ x_{op}\left(\frac{N}{2} - n_0\right) = -x_{op}^*\left(\frac{N}{2} + n_0\right) \end{cases}$$

有限长序列的分解 I

3° 讨论:

- ① 有限长序列可分解为共轭对称序列和共轭反对称序列。

$$\text{令} \quad x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad x^*(N-n) &= x_{ep}^*(N-n) + x_{op}^*(N-n) \\ &= x_{ep}(n) - x_{op}(n) \end{aligned}$$

联立求解可得:

$$\begin{cases} x_{ep}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)] \\ x_{op}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)] \end{cases}$$

有限长序列的分解 II

② 同样，有限长序列可分解为实数部分序列和虚数部分序列。

$$\begin{cases} x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \\ jx_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \end{cases}$$

对称性讨论—实部序列和虚部部分序列的 DFT

$$(1) \text{ 设: } x(n) = x_r(n) + jx_i(n) \quad X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

$$\text{则: } x_r(n) \leftrightarrow X_{ep}(k) \quad jx_i(n) \leftrightarrow X_{op}(k)$$

证:

$$(a) \quad x_r(n) \leftrightarrow X_{ep}(k)$$

$$\because x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \quad \text{注意: } x^*(n) \leftrightarrow X^*(N-k)$$

$$DFT[x_r(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{ep}(k)$$

$$(b) \quad jx_i(n) \leftrightarrow X_{op}(k)$$

$$\because jx_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

$$DFT[jx_i(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{op}(k)$$

对称性讨论—共轭对称与共轭反对称序列的 DFT

$$(2) \text{ 设: } x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n) \quad X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$$

$$\text{则: } x_{ep}(n) \leftrightarrow X_R(k) \quad x_{op}(n) \leftrightarrow jX_I(k)$$

证:

$$(a) \quad x_{ep}(n) \leftrightarrow X_R(k)$$

$$\because x_{ep}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)] \quad \text{注意: } x^*(N-n) \leftrightarrow X^*(k)$$

$$DFT[x_{ep}(n)] = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(k)] = X_R(k)$$

$$(b) \quad x_{op}(n) \leftrightarrow jX_I(k)$$

$$\because x_{op}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)]$$

$$DFT[x_{op}(n)] = \frac{1}{2} [X(k) - X^*(k)] = jX_I(k)$$

有限长序列对称性结论

结论

- (1) 一个域的共轭对称序列对应另一个域的实数部分序列，反之亦然。
- (2) 一个域的共轭反对称序列对应另一个域的虚数部分序列，反之亦然。

实序列 $x(n)$ 的对称性讨论 I

设 $x(n) \leftrightarrow X(k)$,

因 $x(n) \in R$, 则有 $X(k) = X^*(N-k)$, 即 $X(k)$ 为共轭对称序列。

① 若 $x(n) = x(N-n)$, 即 $x(n)$ 为实偶序列。则有:

$$\begin{cases} x(n) \text{ 为实序列} & \rightarrow X(k) \text{ 为共轭对称序列} \\ & \text{即: } X(k) = X^*(N-k) \\ x(n) \text{ 为实偶序列} & \rightarrow X(k) \text{ 为实数序列} \end{cases}$$

则有 $X(k) = X^*(N-k) = X(N-k)$, 也就是说 $X(k)$ 也是实偶序列。

实序列 $x(n)$ 的对称性讨论 II

② 若 $x(n) = -x(N-n)$, 即 $x(n)$ 为实奇序列。则有:

$$\begin{cases} x(n) \text{ 为实序列} & \rightarrow X(k) \text{ 为共轭对称序列} \\ & \text{即: } X(k) = X^*(N-k) \\ x(n) \text{ 为实奇序列} & \rightarrow X(k) \text{ 为纯虚数序列} \end{cases}$$

则有 $X(k) = X^*(N-k) = -X(N-k)$, 也就是说 $X(k)$ 是纯虚奇对称序列。

应用举例：(实序列 DFT 计算量减半) I

例 1 如 $N=8$ ，求 $X(k)$ 。

利用对称性，有 $X(k) = X^*(N-k)$ ，

只需求 $X(0), X(1), X(2), X(3), X(4)$ ，则有：

$$X(5) = X^*(3), \quad X(6) = X^*(2), \quad X(7) = X^*(1)$$

应用举例：(实序列 DFT 计算量减半) II

例 2 计算一个 N 点 DFT, 同时得到两个实序列的 N 点 DFT。

设 $x_1(n), x_2(n)$ 是两个长度为 N 的实序列。

$$\text{令:} \quad x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

$$\text{则:} \quad X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

根据 DFT 对称性, 有:

$$\begin{aligned} X_1(k) = DFT[x_1(n)] &= X_{ep}(k) = \frac{1}{2} \left[X(k) + X^*(N-k) \right] \\ X_2(k) = DFT[x_2(n)] &= \frac{1}{j} X_{op}(k) = \frac{1}{2j} \left[X(k) - X^*(N-k) \right] \end{aligned}$$

频率域采样

时域采样定理指出，在一定条件下，可由时域离散采样信号恢复原来的连续信号，

问题

- ① 那么能否也由频域采样信号 $X(k)$ 恢复原连续频域函数 $X(e^{j\omega})$?
- ② 如果可以，其条件是什么?
- ③ 内插公式什么形式?

回顾 DFT 的物理意义

首先回顾一下 DFT 的物理意义

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad \text{在 } Z \text{ 平面单位圆上的 } N \text{ 点等间隔采样}$$

$$= X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad \text{在 } \omega \text{ 轴上区间 } [0, 2\pi] \text{ 上的 } N \text{ 点等间隔采样。}$$

∴ 有：

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right]_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\therefore X(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) W_N^{kn} \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

举例说明

回顾最初 DFT 的定义：

设 $x(n)$ 长度为 M , DFT 的变换区间长度为 N , 则有 DFT 为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

即： $X(k)$ 是其 Z 变换 $X(z)$ 在 Z 域单位圆上的 N 点等间隔采样。

回顾一下例子，求 $R_4(n)$ 的 8 点，16 点的 DFT。

从例子中可以看出，信号 $R_4(n)$ 的长度为 4，
而 DFT 的变换区间，也就是采样的点数为 8 点或 16 点。

问题的提出

$X(k)$ 是其 Z 变换 $X(z)$ 在 Z 域单位圆上的 N 点等间隔采样。

问题

对于 $X(k)$ 来说, 其反变换的长度为 N , 而时域序列 $x(n)$ 的长度为 M , 显然不能直接说相等。

不妨设其反变换 $IDFT[X(k)] = x_N(n)$, 那么, $x_N(n)$ 和 $x(n)$ 之间存在什么关系?

根据 DFS 和 DFT 的关系可知:

$$x_N(n) \xrightarrow{\text{延拓}} \tilde{x}(n) \xrightarrow{DFS} \tilde{X}(k) \xrightarrow{\text{取主值}} X(k)$$

同时也有:

$$X(k) \xrightarrow{\text{延拓}} \tilde{X}(k) \xrightarrow{IDFS} \tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{取主值}} x_N(n)$$

推导过程

如前所述：

$$x_N(n) = \tilde{x}(n) \cdot R_N(n)$$

$$\text{而：} \quad \tilde{x}(n) = IDFT[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) W_N^{km} \right] W_N^{-kn}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} \right]$$

推导过程

如前所述：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} \right]$$

$$\text{而：} \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} 1, & m = n + l \cdot N \\ 0, & \text{其他 } m \end{cases} \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} \right] \cdot R_N(n)$$

$$\begin{aligned} \therefore x_N(n) &= \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n + lN) \right] \cdot R_N(n) \\ &= x((n))_N \cdot R_N(n) \end{aligned}$$

结论

$$x_N(n) = \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n + lN) \right] \cdot R_N(n) = x((n))_N \cdot R_N(n)$$

说明

- ① 这说明 $X(z)$ 在单位圆上的 N 点等间隔采样 $X(k)$ 的 N 点 DFT 反变换 $x_N(n)$ 是原序列 $x(n)$ 以 N 为周期进行延拓, 再取主值得到的序列。
- ② 显然当 $N \geq M$ 时, 有 $x(n) = x_N(n)$ 。
- ③ 当 $N < M$ 时, 将出现时域混叠现象。

频域采样定律

定理

如果序列 $x(n)$ 的长度为 M ，则只有当频域采样点数 N 大于等于序列 $x(n)$ 长度 M 时，即 $N \geq M$ 时，才有：

$$x_N(n) = IDFT[X(k)] = x(n)$$

即可由频域采样 $X(k)$ 恢复原序列 $x(n)$ ，否则将产生时域混叠现象。

说明

满足频域采样定理时，频域采样序列 $X(k)$ 的 N 点 $IDFT$ 是原序列 $x(n)$ ，所以必然可以用 $X(k)$ 恢复 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 。

插值问题的提出

既然可以用 $X(k)$ 恢复 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ ，那怎么得到呢？
下面将推导用频域采样 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 的内插公式和内插函数。

设序列 $x(n)$ 长度为 M ，在频域 $[0, 2\pi]$ 上等间隔采样 N 点， $N \geq M$ ，则有：

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

当 $N \geq M$ 时，满足频域采样定理，有：

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$X(z)$ 插值公式推导过程

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} && \text{因为 } x(n) \text{ 有限长} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\frac{1 - W_N^{-kN} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned}$$

$X(z)$ 插值公式推导过程

前述推导可得：

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \right]$$

令：

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

则有：

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(z)$$

上式称为用 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 的插值公式，其中 $\varphi_k(z)$ 称为内插函数。

$X(e^{j\omega})$ 插值公式推导过程

前述推导可得：

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \right]$$

将 $z = e^{j\omega}$ 代入上式，并进行化简整理，可得：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi \left(\omega - \frac{2\pi}{N} k \right)$$

其中：

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\frac{N}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

上式称为频域内插公式， $\varphi(\omega)$ 称为频域内插函数。

$X(e^{j\omega})$ 插值公式化简过程

$$\begin{aligned}
 \varphi_k(z) &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \\
 \varphi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega} e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}} \\
 &= \frac{1}{N} \cdot \frac{e^{-j\frac{N}{2}\omega} (e^{j\frac{N}{2}\omega} - e^{-j\frac{N}{2}\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N}k)} (e^{j\frac{1}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N}k)} - e^{-j\frac{1}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N}k)})} \\
 &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\frac{N}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k)} \cdot e^{-j\frac{1}{2}(N\omega - \omega + \frac{2\pi}{N}k)} \\
 \text{令: } \varphi(\omega) &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \cdot e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}
 \end{aligned}$$

下面将验证 $\varphi(\omega - \frac{2\pi}{N}k) = \varphi_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\frac{N}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k)} \cdot e^{-j\frac{1}{2}(N\omega - \omega + \frac{2\pi}{N}k)}$

$$\begin{aligned}
 \text{设: } \varphi(\omega) &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \cdot e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})} \\
 \varphi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left((\omega - \frac{2\pi}{N}k)\frac{N}{2}\right)}{\sin\left((\omega - \frac{2\pi}{N}k)/2\right)} \cdot e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)(\frac{N-1}{2})} \\
 &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega - \pi k\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} \cdot e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega - \omega - 2\pi k + \frac{2\pi}{N}k\right)} \\
 &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right) \cos(\pi k)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} \cdot e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega - \omega + \frac{2\pi}{N}k\right)} e^{j\pi k} \\
 &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} \cdot e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega - \omega + \frac{2\pi}{N}k\right)} e^{j2\pi k} \quad (e^{j\pi k} = \cos(\pi k)) \\
 &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} \cdot e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega - \omega + \frac{2\pi}{N}k\right)} \quad (e^{j2\pi k} = 1) \\
 &= \varphi_k(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

问题: 为什么要用 DFT 计算线性卷积?

一、线性卷积与循环卷积的关系?

① 问题的背景: 为什么要用 DFT 计算线性卷积?

① 在实际应用中, 需要计算两个序列的线性卷积。

② 利用 DFT 快速算法在频域计算循环卷积将快的多。因此常利用 $DFT(FFT)$ 在频域计算循环卷积。。

② 问题在线性卷积和循环卷积的关系? 以及循环卷积与线性卷积相等的条件?

线性卷积和循环卷积的对比

二、推导

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 M , $h(n)$ 长度为 N , 则有:

(1) 线性卷积为:

$$y_l(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

且 $y_l(n)$ 长度为 $N+M-1$ 。

(2) L 点循环卷积为:

$$y_c(n) = x(n) \otimes h(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L \right] R_L(n)$$

这里 $L \geq \{N, M\}$,

且又 $\because h(n)$ 长度为 N , 上式可写为:

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x((n-m))_L \right] R_L(n)$$

2 个备用公式

公式一：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_l(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \\ \downarrow \quad n \rightarrow n + qL \\ y_l(n + qL) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n + qL - m) \end{array} \right.$$

公式二：

$$x((n))_L = \tilde{x}(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n + qL)$$

(3) 关系

$$\begin{aligned}y_c(n) &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x((n-m))_L \right] \cdot R_L(n) \\&= \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} h(m) \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n-m+qL) \right] \right\} \cdot R_L(n) \quad (\text{备用公式 2}) \\&= \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m+qL) \right] \right\} \cdot R_L(n) \\&= \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} y_l(n+qL) \right] \cdot R_L(n) \quad (\text{备用公式 1}) \\&= y_l((n))_L \cdot R_L(n)\end{aligned}$$

循环卷积与线性卷积的关系

结论

两个有限长序列的长度为 L 的循环卷积结果，等于这两个序列的线性卷积以 L 为周期延拓，然后再取主值序列得到。

$$y_l(n) \longrightarrow y_l((n))_L \longrightarrow y_c(n) = y_l((n))_L \cdot R_L(n)$$

讨论：

- ① 当 $L \geq N + M - 1$ 时，则有：

$$y_c(n) = y_l(n)$$

- ② 当 $L < N + M - 1$ 时，周期延拓会导致混叠现象。

循环卷积的两种计算方法

二、用 DFT 计算循环卷积

(1) 循环卷积的两种计算方法：

(a) 直接计算

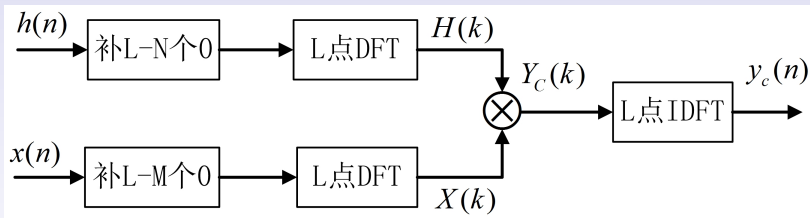
$$y_c(n) = x(n) \otimes h(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L \right] R_L(n)$$

周期延拓 \longrightarrow 线性卷积 \longrightarrow 取主值

(b) 根据卷积定理，用 DFT 计算。

设长序列 $x(n)$ 长度为 M ， $h(n)$ 长度为 N ，令 $L = N + M - 1$ ：

$$x(n) \otimes h(n) \longleftrightarrow X(k) \cdot H(k)$$



注意：这里需要做 3 次 DFT 计算，为何？因为 DFT 有快速算法 FFT ，可大大加快计算速度。

长序列卷积计算

(2) 长序列卷积计算

① 问题：

在实践中经常两个序列的长度相差很大，如 $M \gg N$ ，利用卷积定理计算时需补 0，这样造成存储空间和计算能力的浪费。

而且在某些应用中，序列长度不定或者被认为是无限长。

② 解决方法：将长序列分段计算。

长序列卷积计算的公式

设 $h(n)$ 长度为 N , $x(n)$ 无限长, 可通过分段处理, 设每段长度为 M , 可令:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n) \quad \text{则:} \quad x_k(n) = x(n) \cdot R_M(n - kM)$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = h(n) * \left[\sum_{k=0}^{\infty} x_k(n) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(n) * x_k(n)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n) \quad \text{这里: } y_k(n) = h(n) * x_k(n)$$

举例说明

例如, 设 $N = 3, M = 5, L = N + M - 1 = 7$

则: $y(n) = y_0(n) + y_1(n) + y_2(n) + \cdots y_k(n) + \cdots$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n)$$

计算过程

- 1 先后计算 $y_0(n), y_1(n), y_2(n), \cdots y_k(n), \cdots$
- 2 分别相加。

信号的谱分析

所谓信号的谱分析，就是计算信号的傅里叶变换。对于连续信号和系统，可以通过时域采样，应用 DFT 进行近似谱分析。

主要考虑以下两个问题

一、用 DFT 对连续信号进行谱分析

二、用 DFT 对序列做谱分析

用 DFT 对连续信号进行谱分析

一、用 DFT 对连续信号进行谱分析

(1) 问题

给定有限长带限信号 $x_a(t)$, 如何得到 $X_a(jf)$

(2) 谱分析的过程:

$$x_a(t) \longrightarrow x(n) \longrightarrow X(k) \longrightarrow X_a(jf)$$

(3) 采样参数的说明

用 DFT 对连续信号进行谱分析必然是近似的，其近似程度与信号带宽、采样频率和截取长度有关。因此采样参数与上述三者相关。

$$\begin{cases} f_s & : \text{采样频率} \\ T & : \text{采样间隔} \end{cases} \quad T = \frac{1}{f_s}, \quad f_s = \frac{1}{T}$$

$$\begin{cases} T_p & : \text{信号长度} \\ N & : \text{采样点数} \end{cases} \quad T_p = NT, \quad N = \frac{T_p}{T}$$

(4) 参数之间的关系

在 2.4 节中, 我们有:

$$X(e^{j\omega}) = \hat{X}_a(j\Omega)|_{\omega=\Omega T} = \hat{X}_a(jf)|_{\omega=2\pi fT}$$

数字域频率 ω 与模拟域频率对应关系为:

$$\therefore \quad \omega = \Omega T = 2\pi fT = 2\pi Tf \quad (\Omega = 2\pi f)$$

等式两边同时取微分可得:

$$\therefore \quad \Delta\omega = 2\pi T\Delta f \quad (\Delta\omega = \frac{2\pi}{N})$$

$$\therefore \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi T}\Delta\omega = \frac{1}{2\pi T} \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{1}{NT}$$

前述可得：

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi T} \Delta \omega = \frac{1}{2\pi T} \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{1}{NT}$$

定义

令 $F = \Delta f$ ，这里 F 称为频率分辨率，表示对模拟信号频谱的采样间隔。

结论：

$$F = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}$$

问题在于怎么用 $X(k)$ 表示 $X_a(jf)$

$$\because \quad X(k) = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad \text{且} \quad X(e^{j\omega}) = \hat{X}_a(j\Omega) \big|_{\omega=\Omega T}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \hat{X}_a(j\Omega) \big|_{\Omega T = \frac{2\pi}{N}k} \\ &= \hat{X}_a(j\Omega) \big|_{2\pi fT = \frac{2\pi}{N}k} \\ &= \hat{X}_a(j\Omega) \big|_{f = \frac{1}{NT}k} \\ &= \hat{X}_a(j\Omega) \big|_{f = kF} \quad \left(F = \frac{1}{NT} \right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s) \big|_{f=kF} \end{aligned}$$

接着前面的公式，继续推导，前述有：

$$\begin{aligned}X(k) &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s) \Big|_{f=kF} \\&= \frac{1}{T} X_a(j\Omega) \Big|_{f=kF} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \\&= \frac{1}{T} X_a(j2\pi f) \Big|_{f=kF} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)\end{aligned}$$

$$\text{令 } X_a(kF) = X_a(j2\pi f) \Big|_{f=kF} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$\therefore X(k) = \frac{1}{T} X_a(kF) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$\therefore X_a(kF) = T \cdot X(k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

谱分析步骤

(5) 谱分析步骤

- ① 对 $x_a(t)$ 采样, 得到有限长 $x(n)$, 长度为 N 。
- ② 计算 DFT , $x(n) \longleftrightarrow X(k)$
- ③ $X_a(kF) = T \cdot X(k) \quad 0 \leq k \leq N-1$

采样参数的选择

(6) 采样参数的选择

在对连续信号进行谱分析是，主要关心两个问题

- ① 谱分析范围： 决定信号带宽
- ② 频率分辨率： 决定信号长度

问题：

- 已知信号频率分辨率 F ，信号最高频率 f_c ，
- 确定谱分析参数。
 - (a) 最小记录时间 $T_{p\ min}$
 - (b) 最大采样周期 T_{max}
 - (c) 最小采样点数 N_{min}

谱分析参数

① 最小记录时间 $T_{p\min}$

$$F = \frac{1}{T_p} \implies T_p = \frac{1}{F} \implies T_p \geq \frac{1}{F_{\max}}$$

$$\therefore T_{p\min} = \frac{1}{F_{\max}}$$

② 最大采样周期 T_{\max}

$$f_s \geq 2f_c \implies \frac{1}{T} \geq 2f_c \implies T \leq \frac{1}{2f_c}$$

$$\therefore T_{\max} = \frac{1}{2f_c}$$

③ 最小采样点数 N_{\min}

$$\therefore N_{\min} = \frac{T_{p\min}}{T_{\max}}$$

举例说明

例题

对实信号做谱分析，要求谱分辨率 $F \leq 10Hz$ ，信号最高频率为 $f_c = 2.5kHz$ 。试确定最小记录时间 $T_{p\ min}$ ，最小记录点数 N_{min} ，最大采样周期 T_{max} 。

解：

$$T_{p\ min} = \frac{1}{F_{max}} = \frac{1}{10} = 0.1\ s$$

$$T_{max} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{5000} = 0.2\ ms$$

$$N_{min} = \frac{T_{p\ min}}{T_{max}} = \frac{0.1s}{0.2.ms} = 500$$

用 DFT 对离散序列做谱分析

二、用 DFT 对序列做谱分析

① 有限长序列

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 N , 则 $X(k)$ 是 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样, 直接得到。频率分辨率就是采样间隔 $\frac{2\pi}{N}$ 。序列的 FT 可以利用 DFT 来计算。

② 周期序列 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$

周期序列 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$

方法 1 利用公式直接得到

$$X(e^{j\omega}) = FT[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

其强度为 $\frac{2\pi}{N} \tilde{X}(k)$, 为周期为 N 的周期序列, 只需要知道 $\tilde{X}(k)$, 就可以得到 $FT[\tilde{x}(n)]$, 而 $\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)]$.

步骤:

- ① 取主值, $x(n) = \hat{x}(n)R_N(n)$
- ② 做 DFT 变换, $X(k) = DFT[x(n)]$
- ③ 延拓, $\tilde{X}(k) = X((k))_N$
- ④ 代公式

周期序列 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$

方法 2 截取 $\tilde{x}(n)$ 的整数个周期进行 DFT, 可得到其频谱结构, 达到谱分析的目的。

截取 $\tilde{x}(n)$ 的 m 个周期, 设其长度为 M , 即

$$X_M(n) = \tilde{x}(n)R_M(n) \quad (M = mN, m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{设} \quad x_M(n) \longleftrightarrow X_M(k) \quad (0 \leq k \leq mN - 1)$$

则 $X_M(k)$ 也能表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构。

下面推导 $X(k)$ 与 $X_M(k)$ 的关系。

截取 $\tilde{x}(n)$ 的 m 个周期，设其长度为 M ，即

$$X_M(n) = \tilde{x}(n)R_M(n) \quad (M = mN, m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{设} \quad x_M(n) \longleftrightarrow X_M(k) \quad (0 \leq k \leq mN - 1)$$

下面给出 $X(k)$ 与 $X_M(k)$ 的关系。

引理

$$\sum_{n=0}^{mN-1} f(n) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{n'=0}^{N-1} f(n' + rN) \quad \text{设 } f(n) \text{ 的周期为 } N$$

$$\begin{aligned}
 X_M(k) &= \sum_{n=0}^{mN-1} x_M(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} = \sum_{n=0}^{mN-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \\
 &= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n' + rN) e^{-j\frac{2\pi}{M}k(n'+rN)} \quad (n \rightarrow n' + rN) \\
 &= \sum_{r=0}^{m-1} \left[\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n' + rN) e^{-j\frac{2\pi}{M}kn'} \right] e^{-j\frac{2\pi}{M}krN} \\
 &= \sum_{r=0}^{m-1} \left[\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{k}{m}n'} \right] e^{-j\frac{2\pi}{m}kr} \quad (M = mN) \\
 &= \sum_{r=0}^{m-1} X\left(\frac{k}{m}\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{m}kr} \\
 &= X\left(\frac{k}{m}\right) \cdot \sum_{r=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}kr}
 \end{aligned}$$

下面推导 $X(k)$ 与 $X_M(k)$ 的关系。

因为：

$$X_M(k) = X\left(\frac{k}{m}\right) \cdot \sum_{r=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}kr}$$

而：

$$\sum_{r=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}kr} = \sum_{r=0}^{m-1} \left[e^{-j\frac{2\pi}{m}k} \right]^r = \begin{cases} m, & \frac{k}{m} \text{ 为整数} \\ 0, & \frac{k}{m} \text{ 不为整数} \end{cases}$$

所以有，

$$X_M(k) = \begin{cases} mX\left(\frac{k}{m}\right), & \frac{k}{m} \text{ 为整数} \\ 0, & \frac{k}{m} \text{ 不为整数} \end{cases}$$

举例说明: $X(k)$ 见板书

设 $N = 4$, 取 $m = 3$, 则 $M = mN = 12$.

$$X_M(k) = X_{12}(k) = \begin{cases} 3X\left(\frac{k}{3}\right), & \frac{k}{m} \text{ 为整数} \\ 0, & \frac{k}{m} \text{ 不为整数} \end{cases}$$

则 $X_M(k) = X_{12}(k)$ 为:

| | | |
|--|------------------|------------------|
| $X_{12}(0) = 3X\left(\frac{0}{3}\right) = 3$ | $X_{12}(1) = 0$ | $X_{12}(2) = 0$ |
| $X_{12}(3) = 3X\left(\frac{3}{3}\right) = 4.5$ | $X_{12}(4) = 0$ | $X_{12}(5) = 0$ |
| $X_{12}(6) = 3X\left(\frac{6}{3}\right) = 6$ | $X_{12}(7) = 0$ | $X_{12}(8) = 0$ |
| $X_{12}(9) = 3X\left(\frac{9}{3}\right) = 7.5$ | $X_{12}(10) = 0$ | $X_{12}(11) = 0$ |

注: 由此可见, $X_M(k)$ 也能代表 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构, 只是当 $k = rm$ 时, 有 $X_M(rm) = mX(r)$ 。因此只要截取 $\tilde{x}(n)$ 的整数倍周期做 DFT, 就可以得到它的频率结构进行谱分析。

用 DFT 进行谱分析的误差问题

实际应用中，DFT 用于对连续信号做谱分析时，需对其进行截断和采样，其必将引起某些误差。

- ① 混叠现象
- ② 栅栏效应
- ③ 截断效应

混叠现象

混叠现象

- ① 在 $x_a(t)$ 进行采样时，存在采样定理的限制，

$$f_s \geq 2f_c$$

否则将在 $\omega = \pi$ ($f = \frac{f_s}{2}$) 处存在一个频率混叠的问题。

- ② 措施：

采样之前进行预滤波，滤除高于折叠频率 $\frac{f_s}{2}$ 的频率成分，避免频率混叠现象。

栅栏效应

栅栏效应

- ① $X(k)$ 是对 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样，仅能得到连续频谱的 N 个采样点，采样点之间的频率看不到。这种现象称为栅栏效应。
- ② 措施：
为使得栅栏变细，可加大采样点数，对有限长序列来说，可在原序列尾部补 0。

截断效应

截断效应 (自己看)

- ① 泄露
- ② 谱间干扰