第 5 章　数字滤波器的基本网络结构

笪邦友

中南民族大学　电子信息工程学院

2018 年 11 月 1 日

目录

引言

对于时域离散系统，其描述方式包括：

- 差分方程
- 单位脉冲响应 $h(n)$
- 系统函数 $H(z)$

差分方程

如果系统输入输出满足 N 阶差分方程：

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_ix(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_iy(n-i)$$

则其系统函数 $H(z)$ 为：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_iz^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N}a_iz^{-i}}$$

简单的推导如下：对差分方程两边取 ZT 可得：

$$ZT[y(n)] = ZT\left[\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)\right] - ZT\left[\sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)\right]$$

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i} Y(z)$$

$$Y(z)\left(1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}\right) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} X(z)$$

$$\therefore \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

对于同一数字系统，其差分方程与系统函数是等价的。

系统函数与网络结构

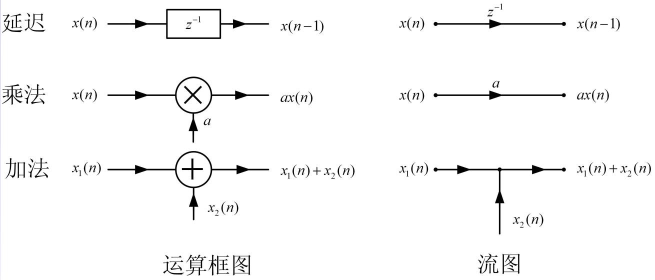
对于时域离散系统，一个重要的问题是：
已知系统函数 $H(z)$，如何得到一种算法，以实现该系统。

(1) 给定一个系统函数，有多种实现算法
- 不同的算法直接影响系统的运算误差、运算速度以及系统的复杂度和成本等问题

(2) 网络结构可用于表示具体算法，
- 网络结构实际表示的是一种运算结构，而同一个系统对应多种网络结构（运算结构）

三种基本运算的流图表示

数字信号处理中有三种基本运算，即乘法、加法和单位延迟。



1. z^{-1} 和系数 a 作为支路增益写在支路箭头旁边，箭头表示信号流动方向。
2. 两个信号相加，用一个圆点表示，称为网络节点。

用信号流图表示网络结构 I

基本信号流图

(1) 信号流图中所有支路都是基本支路，即支路增益是常数或 z^{-1}

(2) 流图环路中必须存在延迟支路；

(3) 节点和支路的数目是有限的。

例题

设

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

试画出其基本信号流图。

用信号流图表示网络结构 II

根据 $H(z)$ 的表达式，有：

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) \frac{X(z)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

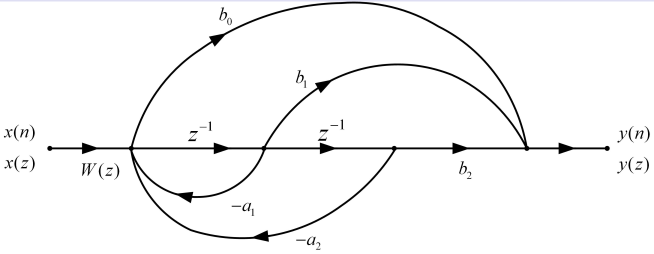
令： $$W(z) = \frac{X(z)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

有： $$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) W(z)$$

变换 $W(z)$ 后有：

$$W(z) = X(z) - a_1 W(z) z^{-1} - a_2 W(z) z^{-2}$$

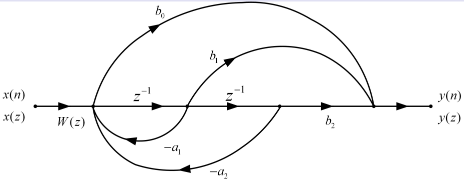
$$W(z) = X(z) - a_1 W(z) z^{-1} - a_2 W(z) z^{-2}$$
$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) W(z)$$



1. 输入 $x(n)$ 的节点称源节点或输入节点，输出 $y(n)$ 称为吸收节点或输出节点。
2. 每个节点处的信号称节点变量，**节点变量等于所有输入支路信号之和。**

H(z) 的标准形式

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$



说明：

(1) $H(z)$ 的标准形式为：
- ❶ 分子、分母均为 z^{-1} 的多项式。
- ❷ 分母中常数项为 1。

(2) $H(z)$ 的分子代表前馈支路，分母代表反馈支路，且分母中各项系数在图中取负号。

(3) 流图中没有标明增益的，其增益为 1。

数字滤波器的分类

1、根据数字滤波器的单位取样响应 $h(n)$ 的长度分类

$$\begin{cases} \text{FIR：有限长单位脉冲响应滤波器} \\ \text{IIR：无限长单位脉冲响应滤波器} \end{cases}$$

2、根据数字滤波器的实现方式分类

$$\begin{cases} \text{递归型：（有反馈）} \\ \text{非递归型：（无反馈）} \end{cases}$$

FIR-DF(有限长单位脉冲响应数字滤波器)

差分方程 $$y(n)=\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)$$

系统函数 $$H(z)=\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}$$

也就是系统函数的分母为 1，而

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

有： $$h(n)=\begin{cases} b_n, & 0\le n\le M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

重要特点：不存在输出对输入的反馈支路。

IIR-DF 无限长单位脉冲响应数字滤波器

其系统函数的分母不总是为 1。

举例说明：

例题

设 $y(n)=x(n)+ay(n-1)$，且为因果系统，求 $h(n)$.

解：
显然有：

$$y(n)=x(n)+\underbrace{ay(n-1)}_{\text{对应反馈项}} \qquad \text{（因果）}$$

$$\therefore \qquad Y(z)=X(z)+az^{-1}Y(z)$$

注意，对于一般系统的差分方程：

$$y(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)}_{\text{前馈项}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)}_{\text{反馈项}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

又因为系统为因果，可知 $|z| > |a|$

所以可得

$$h(n) = a^n u(n)$$

只要有反馈，总对应无限长响应滤波器（IIR-DF）

根据数字滤波器的实现方式分类

$$\begin{cases} \text{递归型：（有反馈）} \\ \text{非递归型：（无反馈）} \end{cases}$$

非递归型

在网络图中无反馈。

例题

$$y(n) = x(n) + ax(n-1)$$

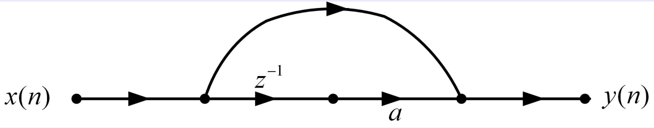


图: 非递归型数字滤波器的信号流图

递归型

在网络图中有反馈。

例题

$$H(z)=\frac{z}{z-a}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

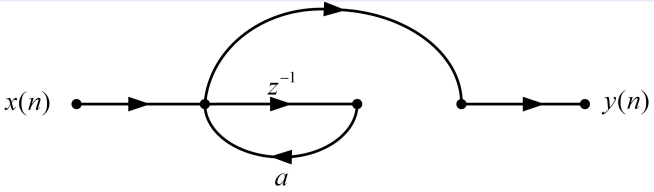


图: 递归型数字滤波器的信号流图

滤波器的分类

目前有了两种分类方法：

$$\begin{cases} \text{递归型} \quad \text{和} \quad \text{非递归型} \\ \text{FIR} \quad \text{和} \quad \text{IIR} \end{cases}$$

但其关系为：

$$\begin{cases} \text{1）} \quad \text{非递归型一定是 FIR} \\ \text{2）} \quad \text{IIR 一定是递归型结构} \end{cases}$$

滤波器的分类

因为有一些 FIR-DF 也能用递归型网络结构实现，如例

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} \qquad 为\ \text{FIR}$$

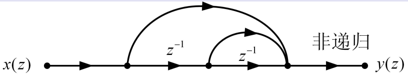


图: 非递归型信号流图

$$H(z) = \frac{1 - z^{-3}}{1 - z^{-1}} \qquad 为\ \text{FIR}$$

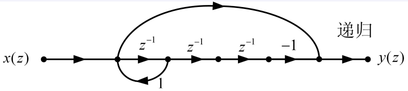


图: 递归型信号流图

一、直接 I 型

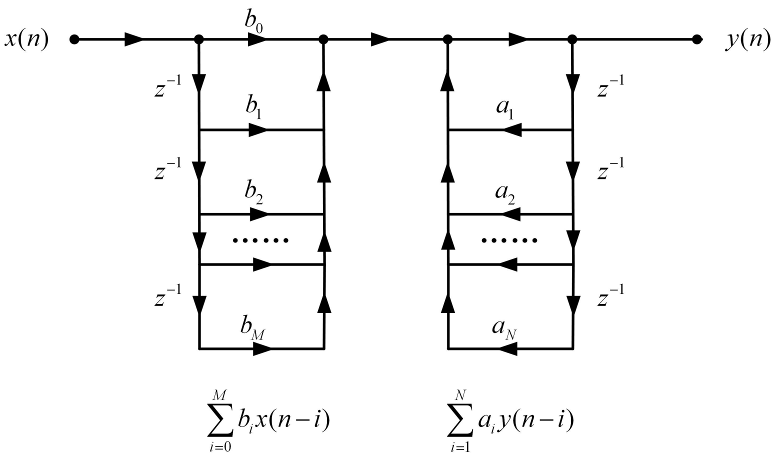
其 N 阶差分方程重写如下：

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i) \\
&= [b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M) \\
&\qquad + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N)]
\end{aligned} \tag{1}
$$

对应系统函数为：

$$
H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}
$$

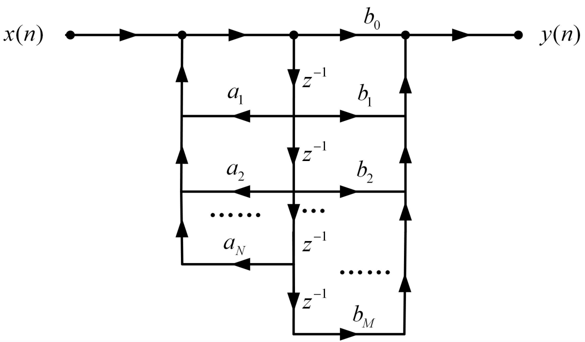
直接 I 型结构流图如下:



二、直接 II 型

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = H_2(z) \cdot H_1(z)$$

直接 I 型的流图中左右两部分可交换位置，延时支路可以合并，以简化流图结构。直接 II 型结构流图如下：



例题

设 IIR 数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 为：

$$H(z) = \frac{8z^3 - 4z^2 + 11z - 2}{(z - 0.25)(z^2 - z + 0.5)}$$

画出该滤波器的直接型网络结构

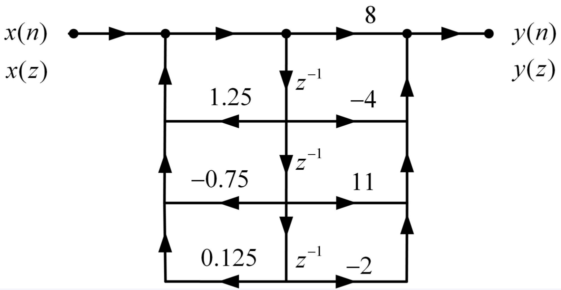
解：
$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}}$$

可化为差分方程对比一下。

$$\begin{aligned} y(n) = 8x(n) - 4x(n-1) + 11x(n-2) - 2x(n-3) \\ + 1.25y(n-1) - 0.75y(n-2) + 0.125y(n-3) \end{aligned}$$

例题的直接 II 型结构流图

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}}$$



注意：

1. $H(z)$ 的分子代表前馈支路，分母代表反馈支路，且分母中各项系数在图中取负号。

IIR-DF 的级联型网络结构

系统函数 $H(z)$ 可分解为一阶或二阶的子系统函数积的形式：

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot \cdots \cdot H_k(z)$$

而子系统阶数为 1 或 2，子系统均采用直接型网络结构。

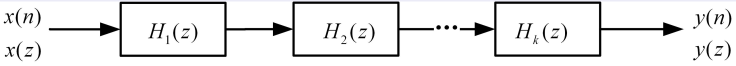


图: 级联型结构示意图

IIR-DF 的并联型网络结构

系统函数 $H(z)$ 可分解为一阶或二阶的子系统函数和的形式：

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_k(z)$$

而子系统阶数为 1 或 2，子系统均采用直接型网络结构。

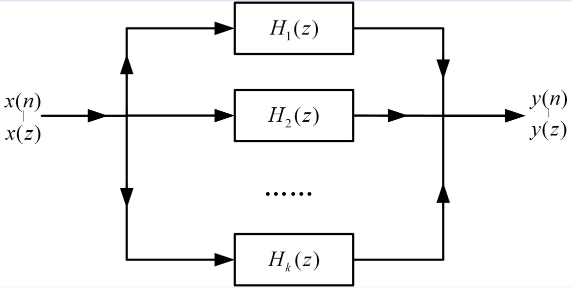


图: 并联型结构示意图

例题

设系统函数 $H(z)$ 为：

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}}$$

分别画出其串联型网络结构和并联型网络结构。

解：(1) 串联型结构

对其进行因式分解，可得：

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(2-0.379z^{-1})(4-1.24z^{-1}+5.26z^{-2})}{(1-0.25z^{-1})(1-z^{-1}+0.5z^{-2})} \\ &= \frac{2-0.379z^{-1}}{1-0.25z^{-1}} \cdot \frac{4-1.24z^{-1}+5.26z^{-2})}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} \end{aligned} \tag{2}$$

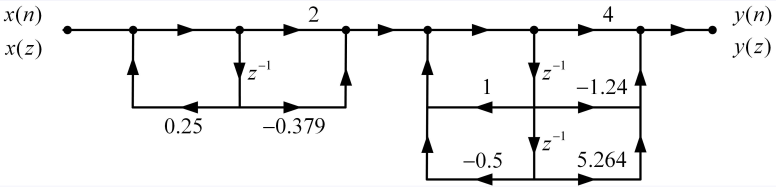


图: 例题的级联型结构示意图

(2) 并联型结构

对其进行因式分解得:

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

(2) 并联型结构

对其进行因式分解得:

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

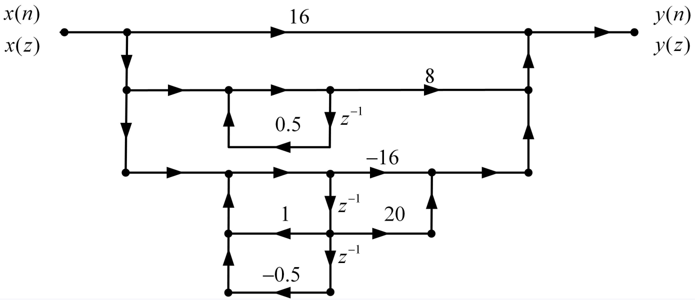


图: 例题的并联型结构示意图

FIR 系统的基本网络结构的特点

FIR 网络结构特点是：
没有反馈支路，即没有环路。所以，其单位脉冲响应 $h(n)$ 必定是有限长。

设其长度为 N，则其系统函数为：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=n_1}^{n_2}h(n)z^{-n}$$

第二章曾经指出，有限长序列的 z 变换，当 $n_1\geq 0, n_2>0$ 时，其收敛域为 $0<|z|\leq\infty$。可见其收敛域必然包括单位圆。

FIR 系统的基本网络结构的特点

FIR 网络结构特点是：
没有反馈支路，即没有环路。所以，其单位脉冲响应 $h(n)$ 必定是有限长。

设其长度为 N，则其系统函数为：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{n_2} h(n) z^{-n}$$

第二章曾经指出，有限长序列的 z 变换，当 $n_1 \geq 0, n_2 > 0$ 时，其收敛域为 $0 < |z| \leq \infty$。可见其收敛域必然包括单位圆。

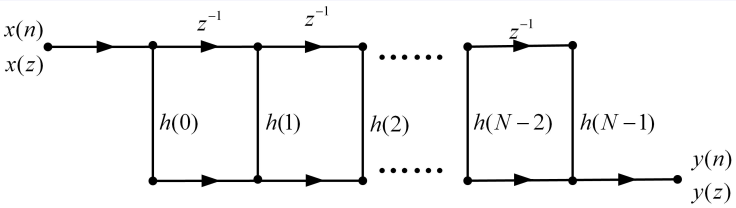
FIR-DF 必定是稳定的，*FIR-DF* 的设计不必考虑其稳定性。

直接型网络结构（卷积型）

FIR-DF 的差分方程为：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$
$$= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + H(N-1)x(n-(N-1))$$

其网络结构如下图所示：

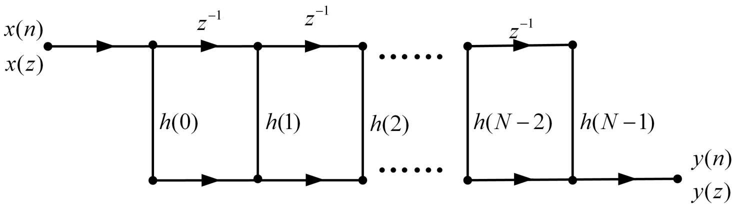


直接型网络结构（卷积型）

也可通过其系统函数理解，FIR-DF 的系统函数为：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$
$$=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+\cdots+H(N-1)z^{-(N-1)}$$

同样可以画出流图。



级联型网络结构（串联型）

将系统函数 $H(z)$ 因式分解为一阶或二阶的因子，每一个因式都用直接型实现。

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdots H_k(z)$$

例题

已知：$H(z) = 0.96 + 2z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$，画出其卷积型与级联型网络结构。

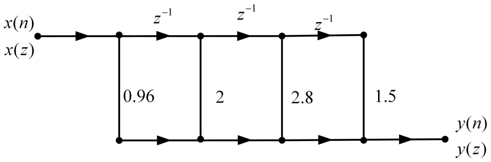
（1）卷积型网络结构

例题

已知：$H(z) = 0.96 + 2z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$，画出其卷积型与级联型网络结构。

解：

卷积型网络结构为



（2）级联型网络结构

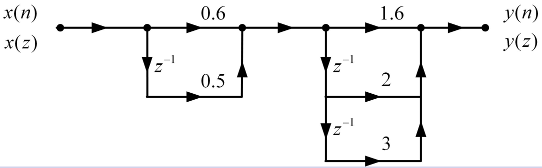
例题

已知：$H(z) = 0.96 + 2z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$，画出其卷积型与级联型网络结构。

解：

因式分解可得：

$$H(z) = (0.6 + 0.5z^{-1})(1.6 + 2z^{-1} + 3z^{-2}) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$



线性相位结构

1. 线性相位结构是 FIR 系统的直接型结构的简化，特点是网络具有线性相位特性，比直接型结构节约了近一半的乘法器。
2. FIR-DF 的频率响应特性较易于设计为线性相位结构。

线性相位结构的概念

我们知道，一个滤波器的描述方式有三种：

$$\underbrace{h(n)}_{\text{单位脉冲响应}} \Longleftrightarrow \underbrace{H(z)}_{\text{系统函数}} \Longleftrightarrow \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{频率响应函数}}$$

且有：

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

同时有：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$ 称为幅频特性函数。
$\varphi(\omega)$ 称为相频特性函数。
所谓线性相位，就是指 $\varphi(\omega)$ 是 ω 的线性函数。

线性相位结构 FIR-DF 的单位脉冲响应 $h(n)$ 的特点

可以证明，如果一个 FIR-DF 具有线性相位结构，其单位脉冲响应 $h(n)$ 应满足下面公式：

$$h(n) = \pm h(N-1-n)$$

式中
“+”代表第一类线性相位结构，
“-”代表第二类线性相位结构。

(1) 设 N 为偶数，且 $h(n) = h(N-1-n)$

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-n} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-m) z^{-(N-1-m)}}_{\text{令 } m = N-1-n}
\end{aligned}
$$

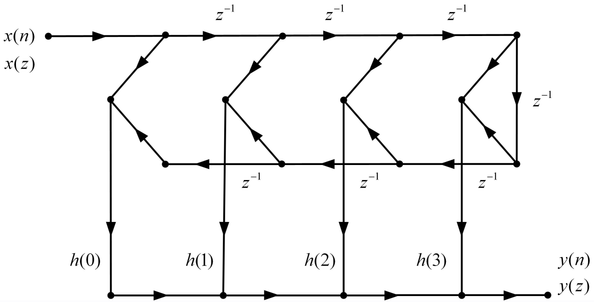
(1) 设 N 为偶数，且 $h(n)=h(N-1-n)$

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-n)z^{-(N-1-n)}}_{\text{将 m 换为 n 之后}} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-(N-1-n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}\right]
\end{aligned}
$$

可见，乘法次数减半，结构更优化。

例如，当 N=8，则

$$H(z) = \sum_{n=0}^{3} h(n)\left[z^{-n} + z^{-(7-n)}\right]$$
$$= h(0)(z^{0} + z^{-7}) + h(1)(z^{-1} + z^{-6}) + h(2)(z^{-2} + z^{-5})$$
$$+ h(3)(z^{-3} + z^{-4})$$



(2) 当 N 为偶数，且 $h(n) = -h(N-1-n)$

显然有：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} - z^{-(N-1-n)} \right]$$

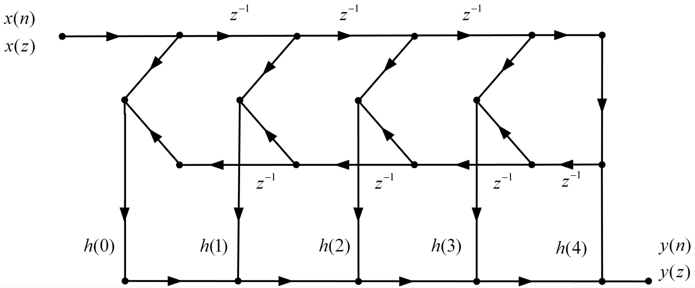
(3) 当 N 为奇数，且 $h(n) = h(N-1-n)$

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}
\end{aligned}
$$

例题

当 N=9，则

$$H(z) = h(0)(z^0 + z^{-8}) + h(1)(z^{-1} + z^{-7}) + h(2)(z^{-2} + z^{-6}) \\ + h(3)(z^{-3} + z^{-5}) + h(4)z^{-4}$$



(4) 当 N 为奇数，且 $h(n) = -h(N-1-n)$

当 N 为奇数，且 $h(n) = -h(N-1-n)$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[z^{-n} - z^{-(N-1-n)}\right] + h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}}$$

线性相位结构的零点分布特性

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} h(N-1-m) z^{-(N-1-m)} && (\text{令 } m = N-1-n) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n) z^{-[(N-1)-n]} && (\text{将 m 换为 n}) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-(N-1)} \cdot z^{n} && (h(n) = h(N-1-n) \quad)
\end{aligned}
$$

线性相位结构的零点分布特性

以第一类线性相位为例：设 $h(n) = h(N-1-n)$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} h(n) (z^{-1})^{-n} \right] z^{-(N-1)} \\ &= H(z^{-1}) \cdot z^{-(N-1)} \end{aligned}$$

即： $$H(z) = z^{-(N-1)} \cdot H(z^{-1})$$

讨论

(1) 对于线性相位结构，其零点关于倒数成对出现。

设 $z = z_0$ 是 $H(z)$ 的任一零点，显然有 $H(z_0) = 0$ 又，

$$H(z) = z^{-(N-1)} \cdot H(z^{-1})$$

$$\therefore \qquad H(z_0^{-1}) = 0$$

$\therefore$, $\qquad z_0^{-1}$ 也是 $H(z)$ 的零点。
对于线性相位结构，其零点关于倒数成对出现。

讨论

(2) 对于线性相位结构，假设 $h(n)$ 是实数，则其零点一定是共轭成对出现。

$$H(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)(z^*)^{-n} = \underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}\right]^*}_{h(n)\text{ 是实数}} = [H(z)]^*$$

如 $H(z_0) = 0$，则：

$$H(z_0^*) = 0$$

结论

对于实 $h(n)$，线性相位结构数字滤波器的零点以

$$z_0, \quad \frac{1}{z_0}, \quad z_0^*, \quad \frac{1}{z_0^*}$$

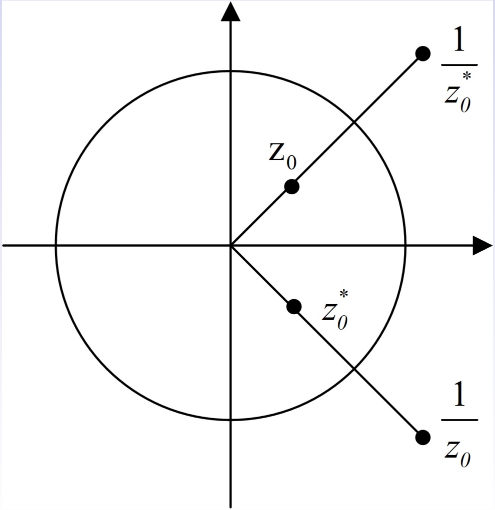
成组成对的形式出现，有一个是零点，其余的都是零点。

零点分布的特点

设 $z_0 = a + bi$，则

1. $z_0^* = a - bi$，　与 z_0 关于实轴对称。
2. 有：
$$\frac{1}{z_0} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a^2+b^2}(a-bi) = \frac{z_0^*}{a^2+b^2}$$
$\frac{1}{z_0}$ 与 z_0^* 同向，如 z_0^* 在单位圆内，则 $\frac{1}{z_0}$ 在单位圆内外。
3. 又有：
$$\frac{1}{z_0^*} = \frac{1}{a-bi} = \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{z_0}{a^2+b^2}$$
所以，与 $\frac{1}{z_0^*}$ 与 z_0 同向，在单位圆外。

线性相位结构的零点分布图



进一步讨论

进一步讨论

1. 一般情况下，4 个零点的位置均不同；
2. 如 z_0 为实数，且 z_0 在横坐标上，只有两个零点；
3. 如 z_0 为虚数，且在单位圆上，只有 2 个零点；
4. 如 z_0 为实数，且在单位圆上，只有 1 个零点；