第 1 章　时域离散信号与时域离散系统

笪邦友

中南民族大学　电子信息工程学院

2018 年 10 月 4 日

目录

信号的分类

广义上讲，信号是某种随时间（或空间）变化的物理量，通常可认为是一个或几个自变量的函数。

信号可分为两大类：

1. 随机信号：给定某一时间值，其函数值不确定，仅知道此信号取某一数值的概率
2. 确定信号：给定某一时间值，可以确定一相应的函数值。确定信号中又分为：
    - 模拟信号：在时间上和幅度上都是连续的。
    - 数字信号：在时间上是离散的，在幅值上也是离散的。
    - 离散信号：在时间上是离散的，幅度上是连续的。

实际上，离散信号和数字信号之间的差别仅在于数字信号存在量化误差。

信号的特性

1. 时域特性：
   也叫时间特性，包含了信号的全部信息量。其表示确定信号的时间函数，即信号随时间变化快慢的特性。所谓变化的快慢，则其表现为：
   1. 同一形状的波形重复出现的周期短或长
   2. 信号波形本身变化速率的不同
2. 频域特性：
   也叫频率特性，信号可以用傅里叶变换分解为许多不同频率的正弦分量，每一个正弦分量则以它的幅值和相位来表征，频谱同样也包含了信号的全部信息量。

两种特性之间的关系：

信号的时间函数和信号频谱都是信号的表现形式，都包含了信号的全部信息，二者是等价的，是同一事物的不同表现形式。

时域离散信号的定义

定义

对模拟信号 $x_a(t)$ 进行等间隔采样，采样间隔为 T，得到采样信号 $\hat{x}_a(t)$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT) \qquad -\infty < n < \infty$$

这里 n 取整数。

将 n 值代入 $x_a(nT)$ 中，则可得到一个有序的数字序列，例如：
$\cdots x_a(-3T), x_a(-2T), x_a(-T), x_a(0), x_a(T), x_a(2T), x_a(3T), \cdots$

时域离散信号

在实际数字信号处理中，这些需要按顺序存放在存储器中，此时 nT 代表的仅是前后顺序，不代表具体采样时刻。

该数字序列即为时域离散信号

为简单起见，可将公式：

$$\cdots x_a(-3T), x_a(-2T), x_a(-T), x_a(0), x_a(T), x_a(2T), x_a(3T), \cdots$$

简化为：

$$\cdots x(-3), x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), x(3), \cdots$$

简化后的序列用集合 $x(n)(-\infty < n < \infty)$ 表示。

区分三个不同层次的概念

这里存在着三个不同层次的概念：

(1) 模拟信号 $x_a(t)$

(2) 模拟信号的采样信号 $x_a(nT)$

- 此时为模拟信号采样点的值，且有 $x_a(nT) = x_a(t)|_{t=nT}$，此时它仍是一个时间 t 的函数，只是其函数值仅在离散的时间值 $t = 0, \pm T, \pm 2T, \cdots$ 等处被定义。

(3) 从更抽象的层次看，时域离散信号可看作一个序列，这时有 $x(n) = x_a(nT)$，从更一般的情况来看，n 可以只代表顺序，而不仅仅局限于时间变量。

几点说明

需要说明几点：

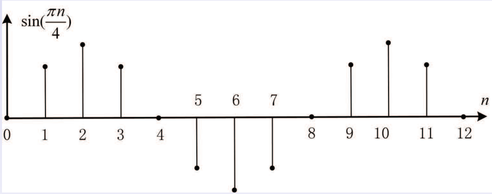
- n 取整数值，对于非整数 n，序列 $x(n)$ 无意义。（但并不为 0）
- 在数值上，有：

$$x(n) = x_a(nT) = x_a(t)|_{t=nT}$$

  这一点非常重要，以后多次用到。
- 离散序列是从负无穷到正无穷的。即：$-\infty < n < \infty$

时域离散信号的表示方法

1. 公式法：如 $x(n) = sin(\omega n)$ 表示一正弦离散信号。
2. 图示法：用图形表示序列，是一种很直观的方法。



3. 集合法：因为时域离散信号是一个有序的数的集合。用集合符号表示，可用集合符号表示。如

$$x(n) = \{\cdots, 0, \underline{1}, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, \cdots\}$$

集合中有下划线的元素表示 n=0 时刻的采样点。

序列的运算

(1) **乘法**：同序号的序列值逐项对应相乘，表示为：

$$y(n) = x(n) \cdot h(n)$$

(2) **加法**：同序号的序列值逐项对应相加，表示为：

$$y(n) = x(n) + h(n)$$

(3) **卷积和**：设两序列为 $x(n)$ 和 $h(n)$，则 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和

定义为：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

- 卷积和是求离散线性时不变系统输出响应（零状态响应）的主要方法。
- 卷积和的运算可分为四步：翻转、移位、相乘、相加。

序列的变换

1. 移位（延迟）:
   对序列 $x(n)$，当 m 为正整数时，
   则 $x(n-m)$ 是指序列 $x(n)$ 逐项依次延时（右移）m 位。而 $x(n+m)$ 是指序列 $x(n)$ 逐项依次超前（左移）m 位。
2. 翻转:
   如果序列为 $x(n)$，则 $x(-n)$ 是以 $n=0$ 的纵轴为对称轴将序列 $x(n)$ 加以翻转。
3. 尺度变换:
   对序列 $x(n)$，其时间尺度变换序列为 $x(mn)$ 或 $x(\frac{n}{m})$，其中 m 为正整数。前者称为抽取，后者称为插值
   - 注意：离散信号的尺度变化与模拟信号的尺度变换有较大不同，离散信号的尺度实际为抽取或插值，跟原序列相比，是两个不同的序列。

常见的典型序列

(1) 单位采样序列 $\delta(n)$

(2) 单位阶跃序列 $u(n)$

(3) 矩形序列 $R_N(n)$

(4) 实指数序列

(5) 正弦序列

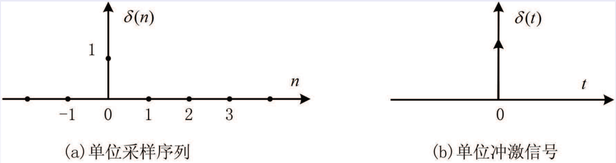
(6) 复指数序列

单位脉冲序列 $\delta(n)$

定义

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

也称为单位脉冲序列，与模拟信号中的单位冲击函数 $\delta(t)$ 相对应，不同处在于，$\delta(n)$ 是一个普通函数，而 $\delta(t)$ 是一个奇异函数。



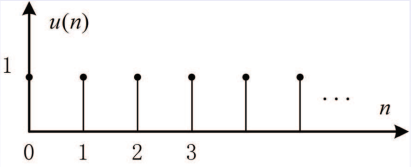
注意: 单位采样序列的长度是从 $-\infty$ 到 ∞，仅 $x(0)=1$，其余处值为 0。

单位阶跃序列 $u(n)$

定义

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

单位阶跃信号类似于模拟信号中的单位阶跃函数 $u(t)$，其图形如下：



单位阶跃序列

因为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

显然有：

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

令 $m = n - k$，代入上式得到：

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$$

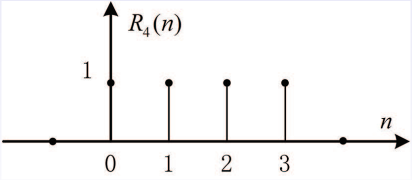
矩形序列 $R_N(n)$

定义

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

上式中 N 称为矩形序列的长度。

例如，当 $N=4$ 时，$R_N(n)$ 的波形如下图所示。



显然有 $\qquad R_N(n) = u(n) - u(n-N)$

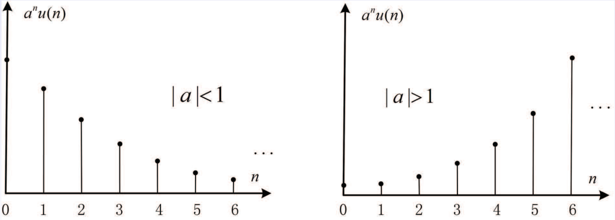
实指数序列

定义

$$x(n) = a^n u(n), \qquad a \in R$$

如果 $|a| < 1$，$x(n)$ 为收敛序列，如 $|a| > 1$，$x(n)$ 为发散序列。

其波形如下所示。



- 注意：当 $n < 0$ 时，$x(n) = 0$。

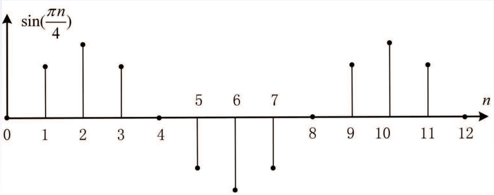
正弦序列

定义

$$x(n) = sin(\omega n)$$

式中 ω 为正弦序列的数字域频率，单位为弧度。表示序列变化的速率，或两个相邻序列值之间变化的弧度数。

如 $$x(n) = sin(\frac{\pi}{4}n) \qquad \omega = \frac{\pi}{4}$$



数字频率 ω 和模拟信号中的角频率 Ω 的关系

假设 $x(n)=sin(\omega n)$ 是由模拟信号 $x_a(t)=sin(\Omega t)$ 采样得到的，这里 Ω 为模拟角频率，单位是：弧度/秒。

因为： $$x(n)=x_a(nT)=x_a(t)|_{t=nT}$$

所以： $$x(n)=sin(\Omega t)|_{t=nT}=sin(\Omega nT)$$

与 $x(n)=sin(\omega n)$ 进行对比，可得：

$$\omega=\Omega T=\frac{\Omega}{f_s}$$

- 这里 T 是采样间隔，$f_s=\frac{1}{T}$ 是采样频率

即：数字域频率是模拟角频率对采样频率 f_s 的归一化频率。

结论

设 $x(n) = sin(\omega n)$ 是由模拟信号 $x_a(t) = sin(\Omega t)$ 采样得到，则：

$$\omega = \Omega T = \frac{\Omega}{f_s}$$

- 这里 T 是采样间隔，$f_s = \frac{1}{T}$ 是采样频率

即：数字域频率是模拟角频率对采样频率 f_s 的归一化频率。

今后

(1) ω 表示数字频率

(2) Ω 或 f 表示模拟角频率或模拟频率。

正弦序列在数字信号处理学科中具有重要的地位，同学们需要熟练掌握正弦序列的相关知识。

复指数序列

定义

复指数序列用下式表示：

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}$$

式中，ω_0 为数字域频率。

特别，当 $\sigma=0$ 时，有

$$x(n)=e^{j\omega_0 n}$$

由于 n 取整数，显然：

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}=e^{(\sigma+j(\omega_0+2\pi M))n}$$

即：复指数序列的频率 ω 以 2π 为周期，研究该序列频率特性时，只需考虑 2π 范围内即可。

序列的周期性

周期性是信号的一个重要特性，有必要单独考察离散信号序列的周期性。

定义

如

$$x(n) = x(n+N) \qquad -\infty < n < \infty$$

且 N 是满足该式的最小正整数，则称 $x(n)$ 是以 N 为周期的周期序列。

例如：

$$x(n) = sin(n\pi/4) = sin\left(\frac{\pi}{4}(n+8)\right)$$

是以 8 为周期的周期序列。

正弦序列的周期性

在各种周期序列中，正弦序列具有最重要的地位。
因此，我们下面详细讨论一下正弦序列的周期性。

1. 对于模拟信号 $sin(x)$ 来说，其总是一个周期信号
2. 但对其采样后，得到的离散正弦序列并不总是满足周期性。

问题：什么情况下正弦序列是周期函数呢？

正弦序列的周期性

一般正弦序列如下：

$$x(n) = sin(\omega n) = sin(\omega(n + \frac{2\pi}{\omega}))$$

结论

(1) 若 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为整数，则 $T = \frac{2\pi}{\omega}$。
例如序列 $x(n) = sin(\frac{\pi}{4}n)$，其周期为 $\frac{2\pi}{\pi/4} = 8$

(2) 若 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为有理数，且 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{P}{Q}$，这里 P 与 Q 互为素数的整数，则周期为 $T = P$。例如：$x(n) = sin(6\pi n/7)$，
$2\pi/(6\pi/7) = 7/3$，其周期为 7。

(3) 若 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为无理数，则其为非周期序列。

正弦序列周期举例

例题

$x(n) = sin(\frac{\pi}{8}n)$	$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/8} = 16$	$T = 16$
$x(n) = sin(8\pi n)$	$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{8}$	$T = 1$
$x(n) = sin(\frac{5\pi}{2}n)$	$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5\pi/2} = \frac{4}{5}$	$T = 4$
$x(n) = sin(5n)$	$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$	非周期序列

用单位采样序列来表示任意序列

任意序列利用单位采样序列的移位加权和表示，即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

这种任意序列的表示方法，在信号分析中是个非常有用的公式。

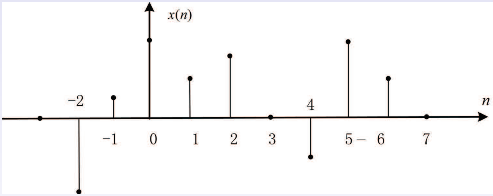
用单位采样序列来表示任意序列

例如

对于如下离散信号序列 $x(n)$:

$$x(n) = \{\cdots, 0, -2, 0.5, \underline{2}, 1, 1.5, 0, -1, 2, 1, 0, \cdots\}$$

其图像表示如下：



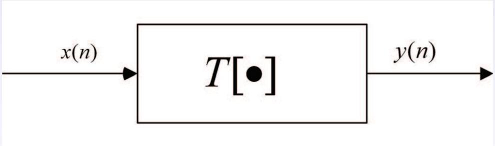
显然，$x(n)$ 可用上述公式表示为：

$$x(n) = -2\delta(n+2) + 0.5\delta(n+1) + 2\delta(n) + \delta(n-1) + 1.5\delta(n-2)$$
$$-\delta(n-4) + 2\delta(n-5) + \delta(n-6)$$

时域离散系统

设时域离散系统的输入为 $x(n)$，经过规定的运算，系统输出序列用 $y(n)$ 表示，运算关系用 $T[\cdot]$ 表示，输入与输出之间的关系用下式表示：

$$y(n) = T[x(n)]$$



线性系统

定义

系统的输入输出之间满足线性叠加原理的系统称为线性系统。设 $y_1(n) = T[x_1(n)]$，$y_2(n) = T[x_2(n)]$，则线性系统必满足以下两个公式。

$$T\big[x_1(n) + x_2(n)\big] = y_1(n) + y_2(n)$$

$$T\big[ax_1(n)\big] = ay_1(n)$$

也可将两个公式结合起来，写作：

$$T\big[ax_1(n) + bx_2(n)\big] = aT\big[x_1(n)\big] + bT\big[x_2(n)\big]$$

式中，a，b 为任意常数。
简单的说，就是和的输出等于输出的和

时不变系统

定义

设 $y(n)=T[x(n)]$，若 $y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$，则系统称为时不变系统。

时不变系统对输入信号的响应与输入信号加于系统的时间无关，或者说，系统的运算 $T[\cdot]$ 不随时间变化。

例题

设 $y(n)=4x(n)+3$，说明其是否为线性时不变系统。

解：

1. 线性

$aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=4ax_1(n)+3a+4bx_2(n)+3b$

$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=4ax_1(n)+4bx_2(n)+3$

$T[ax_1(n)+bx_2(n)]\neq aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$

因此，该系统不是线性系统。

2. 时不变性

$y(n)=4x(n)+3$

$y(n-n_0)=4x(n-n_0)+3$

$T[x(n-n_0)]=4x(n-n_0)+3$

$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$

因此该系统是时不变系统。

例题

检查 $y(n)=nx(n)$ 所代表的系统是否为线性时不变系统。

解：

1. 线性

   $aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=anx_1(n)+bnx_2(n)$
   $T[ax_1(n)+bx_2(n)]=n(ax_1(n)+bx_2(n))$
   $T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$
   因此，该系统是线性系统。

2. 时不变性

   $y(n)=nx(n)$
   $y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)$ （代入 n）
   $T[x(n-n_0)]=nx(n-n_0)$ （代入 $x(n)$ ）
   $y(n-n_0)\neq T[x(n-n_0)]$
   因此该系统不是时不变系统。

时域离散系统的输入输出响应

1. 时域离散系统的输入输出响应
   - 零输入响应：仅由 n_0 时刻的初始状态或历史输入信号引起的响应称为零输入响应。
   - 零状态响应：仅由当前输入信号引起的响应称为零状态响应。
   - 混合响应：零输入响应和零状态响应之和称为系统的完全响应。
2. 单位脉冲响应 $h(n)$
   - 系统对于单位脉冲信号 $\delta(n)$ 的零状态响应称为单位脉冲响应，可用公式表示为：

$$h(n) = T\left[\delta(n)\right]$$

   - $h(n)$ 与模拟系统中的单位冲激响应相对应，代表系统的时域特性。

线性时不变系统输入与输出之间的关系

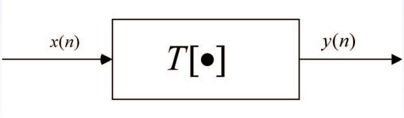
问题

已知线性时不变系统的单位取样响应 $h(n)$，以及系统的输入信号 $x(n)$，求系统的输出 $y(n)$

一、单位取样响应

$h(n)$ 是系统对 $\delta(n)$ 的零状态响应，代表了系统的时域特性。

$$h(n) = T[\delta(n)]$$



二、卷积关系

(1) 系统输入 $x(n)$ 可表示成单位采样序列的移位加权和：

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

(2) 那么系统输出为：

$$\begin{aligned} y(n) = T[x(n)] &= T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, T[\delta(n-m)] \qquad \text{（线性）} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \qquad \text{（时不变性）} \\ &= x(n) * h(n) \end{aligned}$$

线性时不变系统输入与输出之间的关系

三、结论

线性时不变系统的输出 $y(n)$ 等于输入序列 $x(n)$ 和系统的单位取样响应 $h(n)$ 的卷积，该卷积称作线性卷积。

卷积的计算

1. 回忆一下模拟信号卷积公式：

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

离散信号卷积公式：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

2. 计算方法

与模拟系统中的连续卷积计算很类似，即反褶（翻转）、移位、相乘、相加。

例题

设 $x(n)=R_4(n)$，$h(n)=R_3(n)$，求 $y(n)=x(n)*h(n)$。

计算过程：反褶（翻转）、移位、相乘、相加。

1. 翻转：$h(m)\rightarrow h(-m)$
2. 移位：固定一个 n 的值，$h(-m)\rightarrow h(n-m)$
3. 相乘：$x(m)\cdot h(n-m)$
4. 相加：$\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

卷积的性质

(1) 卷积服从交换律、结合律、分配律，即：

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$$

$$x(n) * \big(y(n) * \omega(n)\big) = \big(x(n) * y(n)\big) * \omega(n)$$

$$x(n) * \big(y(n) + \omega(n)\big) = x(n) * y(n) + x(n) * \omega(n)$$

卷积的性质

(2) 关于系统级联与并联的等效系统

1. 两个系统级联，其单位取样响应相当于两个系统各自单位取样响应卷积。
2. 两个系统并联，其单位取样响应相当于两个系统各自单位取样响应求和。
3. 但该结论仅限于线性时不变系统，对于非线性或时变系统，这些结论不成立。

卷积的性质

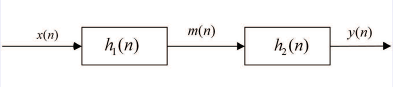
(3) 序列与 $\delta(n-n_0)$ 的线性卷积

序列与移位的单位取样响应 $\delta(n-n_0)$ 的线性卷积相当于将序列本身移位 n_0，如下式所示：

$$x(n-n_0)=x(n)*\delta(n-n_0)$$

例题

在下图中，$h_1(n)$ 系统与 $h_2(n)$ 系统级联，设，$x(n) = u(n)$，$h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-4)$，$h_2(n) = a^n u(n) \quad (|a| < 1)$，求系统的输出 $y(n)$.



解：先求第一级的输出 $m(n)$，再求 $y(n)$。

$$
\begin{aligned}
m(n) &= x(n) * h_1(n) = u(n) * [\delta(n) - \delta(n-4)] \\
&= u(n) * \delta(n) - u(n) * \delta(n-4) = u(n) - u(n-4) \\
&= R_4(n)
\end{aligned}
$$

然后有：

$$
y(n) = m(n) * h_2(n) = R_4(n) * a^n u(n)
$$

系统的因果性

定义

如果系统在第 n 时刻的输出，仅取决于 n 时刻及以前的输入序列，而和 n 时刻以后的输入序列无关，则称该系统具有因果性质，或称该系统为因果系统。因果性实际上是指系统的可实现性。

系统的因果性

定理

线性时不变系统具有因果性的充要条件为：

$$\text{系统因果} \Longleftrightarrow \quad h(n) = 0, \quad n < 0$$

证明

充分性:（$\Leftarrow$）假设 $h(n)=0, n<0$，往证系统因果。

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)$$

令 $n=n_0$，则

$$y(n_0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n_0-m)$$

又，$h(n)=0, n<0$，则有

$$y(n_0)=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)x(n_0-m)$$

显然：$n_0-m\leqslant n_0$　　由定义知，系统是因果的。

证明

必要性（$\Rightarrow$）假设系统因果，往证 $h(n) = 0, n < 0$。

$$\because \qquad y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$\therefore \qquad y(n_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n_0-m)$$

$$\therefore \quad y(n_0) = \sum_{m=-\infty}^{-1} h(m)x(n_0-m) + \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n_0-m)$$

分析：

若系统为因果，当 $m < 0$ 时，$x(n_0-m)$ 在 $y(n_0)$ 之后发生，与系统因果性定义矛盾，此时必有 $h(n) = 0, n < 0$，才不令此情况发生。

$$\therefore \qquad h(n) = 0,\, n < 0$$

线性时不变系统具有因果性充要条件的证明

说明

1. 因果序列

$$x(n)\ \text{是因果序列} \Longleftrightarrow \quad x(n)=0, \quad n<0$$

2. 因果系统的单位取样响应是必是因果序列

系统稳定的定义

定义

所谓稳定系统，指系统输入有界，则系统输出也有界，即:

$$\text{若}|x(n)| < \infty \quad \Longrightarrow \quad |y(n)| < \infty$$

线性时不变系统稳定的充要条件

定理

线性时不变系统稳定的充要条件

系统稳定 $\Longleftrightarrow$ 系统的单位取样响应绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

1. 充分性（$\Longleftarrow$）

证明

设输入序列为 $x(n)$，输出序列为 $y(n)$，则有：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

$$|y(n)|\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)||x(n-k)|$$

因为输入序列 $x(n)$ 有界，即必存在某一常数 B，使得
$|x(n)|<B,\quad -\infty<n<\infty$，因此：

$$|y(n)|\leq B\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty$$

如果系统的单位取样响应 $h(n)$ 满足上式，那么输出 $y(n)$ 一定也是有界的，即：$y(n)<\infty$.

2. 必要性 ($\Longrightarrow$)

证明

如果 $h(n)$ 不满足原条件。既 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\infty$，那么总可以找到一个有界的输入引起无界的输出。
例如，我们可以构造一个输入序列使得输出无界。

$$x(n)=\begin{cases}\frac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, & h(n)\neq 0\\ 0, & h(n)=0\end{cases}$$

则有：
$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

令 $n=0$,

$$y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(0-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\frac{h^*(k)}{|h(k)|}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\infty$$

上式说明 $n=0$ 时刻的输出为无穷大，系统不稳定，从而证明了其必要性。

例题

设线性时不变系统的单位取样响应 $h(n) = a^n u(n)$，式中 a 是实常数，试分析该系统的因果稳定性。

解：

1. 因果性
   由于 $n < 0$ 时，$h(n) = 0$，所以系统是因果系统。
2. 稳定性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} |a|^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-|a|^N}{1-|a|}$$

只有当 $|a| < 1$ 时，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \frac{1}{1-|a|}$$

因此系统稳定的条件是 $|a| < 1$

模拟信号的数字处理方法

为利用计算机对模拟信号进行处理，人们需要将模拟信号经过采样和量化形成数字信号，通过数字信号处理方法处理完毕后，在转换为模拟信号。这种方法称为模拟信号的数字处理方法。

在此过程中，一个关键问题就是对模拟信号的采样过程。

问题

1. 理想采样信号频谱与原模拟信号频谱的关系是什么？
2. 为了使得采样信号能不失真的恢复原模拟信号，采样角频率 Ω_s 与信号最高频率 Ω_c 的关系是什么？

采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的得到

设 $x_a(t)$ 为模拟信号，$\hat{x}_a(t)$ 为采样信号，$p_\delta(t)$ 为单位冲击串。

采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 可看做模拟信号 $x_a(t)$ 和单位冲击串 $p_\delta(t)$ 相乘

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p_\delta(t)$$

$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \text{且仅在 } t = nT \text{ 处有非 0 值。}$$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \cdot \delta(t - nT)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

推导

设： $x_a(t) \leftrightarrow X_a(j\Omega)$

$p_\delta(t) \leftrightarrow P_\delta(j\Omega)$

则： $x_a(t) \cdot p_\delta(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P_\delta(j\Omega)$

$$P_\delta(j\Omega) = FT\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

注意这里 $\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$

推导

$$\begin{aligned}
\hat{X}_a(j\Omega) &= FT[\hat{x}_a(t)] = FT[x_a(t)\cdot p_\delta(t)] \\
&= \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P_\delta(j\Omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s - \theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta)\cdot\delta(\Omega - k\Omega_s - \theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) \qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - k\Omega_s)$$

说明

说明：

1. 理想采样信号的频谱是原信号的频谱沿频率轴每间隔采样角频率 Ω_s 重复出现一次，并叠加形成的周期函数。

假设信号 $f(t)$ 是一个带限信号，Ω_c 是信号的最高频率，则：

- 当 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$ 时，频谱没有混叠现象，可恢复原信号。
- 当 $\Omega_s < 2\Omega_c$ 时，频谱存在混叠现象，不可能恢复原信号。

2. 实际的信号不可能为有限带宽，总存在一定的频率混叠现象。
此时可对信号做预处理，将高于 $\frac{\Omega_s}{2}$ 的高频信号滤去。