第 3 章 离散傅里叶变换

笪邦友

中南民族大学 电子信息工程学院

2018 年 10 月 11 日

目录

DFT 的定义

定义

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 M，则其 N 点 DFT 可定义为：

$$X(k) = DFT\left[x(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (0 \le k \le N-1)$$

注:

(1) 式中 M 为信号 $x(n)$ 的长度，N 为 DFT 变换区间长度。
(2) 此处需要 $N \ge M$。

DFT 的定义

DFT 反变换定义为：

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (0 \le n \le N-1)$$

DFT 变换对可写作：

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & (0 \le k \le N-1) \\ x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & (0 \le n \le N-1) \end{cases}$$

求反变换

问题在于求反变换：

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\qquad(0\le n\le N-1)$$

证明：从右到左，将 $X(k)$ 的表达式代入可得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn}&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\\&=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\left[\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-n)k}\right]\end{aligned}$$

而：
$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-n)k}=\begin{cases}N, & m-n=l\cdot N\qquad l\in Z\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求反变换

因为 $0 \leqslant m \leqslant N-1$，$0 \leqslant n \leqslant N-1$，

$$\therefore \qquad -(N-1) \leqslant m-n \leqslant N-1$$

只有当 $m-n=0$，即 $m=n$ 时，有：

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-n)k} = N$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-n)k}\right] = \frac{1}{N}\cdot N\cdot x(n) = x(n)$$

即： $$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (0 \le n \le N-1)$$

求反变换

记 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$，则有：

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn} & (0 \le k \le N-1) \\ x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{-kn} & (0 \le n \le N-1) \end{cases}$$

DFT 和 Z 变换的关系

$$\because \quad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\text{而} \quad X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}\right]_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$\therefore X(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

结论

$x(n)$ 的 N 点 DFT 是其 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上的 N 点等间隔采样。

DFT 和傅里叶变换的关系

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

而
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$
$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right]_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$\therefore \quad X(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \qquad (0 \le k \le N-1)$$

结论

$x(n)$ 的 N 点 DFT 是其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在 ω 轴上区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样。这也是 DFT 的物理意义。

例题

由此可见，DFT 变换区间长度不同，$X(k)$ 在傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的区间 $[0, 2\pi]$ 上的采样点数不同，其 DFT 的结果也不同

例题

设 $x(n) = R_4(n)$，求 $x(n)$ 的 *4* 点，*8* 点，*16* 点 DFT。

DFT 的重要性

DFT 的重要性表现于:

其实质是有限长序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的有限点离散采样，实现了频域离散化，从而可在频域采用数值计算方法进行数字信号处理。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn} \qquad (0 \le k \le N-1)$$

DFT 的隐含周期性

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,W_N^{kn}\qquad\qquad (0\le k\le N-1)$$

一、分析：

(1) 从公式上看，$0\le k\le N-1$，$X(k)$ 是有限长序列，不可能是周期序列。

(2) 从公式形式上看，$X(k)$ 的表达式是周期为 N 的周期函数。

几个约定的符号

设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的周期序列，是 $x(n)$ 的周期延拓，即

$$\begin{cases} \tilde{x}(n)\text{是 } x(n) \text{ 的周期延拓} \\ x(n)\text{是 } \tilde{x}(n) \text{ 的主值序列} \end{cases}$$

记做：

$$x(n) = \tilde{x}(n) \cdot R_N(n)$$

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N \qquad (n \text{ 对 } N \text{ 求余})$$

或：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN)$$

举例说明

例如：

$$x((10))_8 = x(2) \qquad ((1))_8 = 1 \qquad ((16))_8 = 0$$

注意:

$$\underbrace{\tilde{x}(n)}_{-\infty\leq n\leq\infty} = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN)}_{0\leq n\leq N-1}$$

DFT 和 DFS 的关系

设： $x(n) \longleftrightarrow X(k)$

$$\tilde{x}(n) \longleftrightarrow \tilde{X}(k)$$

则：

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & (0 \leq k \leq N-1) \\ \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & (-\infty \leq k \leq \infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] & = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (0 \le k \le N-1) \\ \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] & = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (-\infty \le k \le \infty) \end{cases}$$

显然：

(1) 公式完全一样

(2) $X(k)$ 是 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列，即 $X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k)$。
周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的频谱完全由其 DFS 的系数 $\tilde{X}(k)$ 确定，因此 $X(k)$ 实际上是 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的频谱特性，这也是 DFT 的第二种物理意义。

(3) 由 $x(n)$ 得到 $X(k)$ 的过程为：

$$x(n) \xrightarrow{\text{延拓}} \tilde{x}(n) \xrightarrow{DFS} \tilde{X}(k) \xrightarrow{\text{取主值}} X(k)$$

DFT 理论的近似性

DFT 理论的近似性

(1) DFT 理论的前提是 $x_a(t)$ 为有限长带限信号，即信号在时域为有限长，频域也为有限长。

(2) 实际中不存在这种信号，时域有限和频域有限是一对矛盾，不可能同时实现。时域上有限的信号，其频域信号必定无限长。

(3) 在工程实践中，时域有限信号容易得到，但其能量往往集中于低频段，频谱具有收敛性，在频率大于一定值后，其频谱分量近似为 0 了。通常可将其截断，从而得到有限长带限信号。

线性性质

线性性质很重要

序列的循环移位

一、序列的循环移位

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 M，$M \leq N$，则 $x(n)$ 的循环移位定义为：

$$y(n) = x((n+m))_N \cdot R_N(n)$$

步骤

1. 延拓 $x(n) \longrightarrow \tilde{x}(n) = x((n))_N$
2. 移位 $\tilde{x}(n) \longrightarrow \tilde{x}(n+m) = x((n+m))_N$
3. 取主值 $x((n+m))_N \cdot R_N(n)$

例题

已知 $x(n)$ 如图所示，画出 $x((n+2))_5 \cdot R_5(n)$。

时域循环移位定理

二、时域循环移位定理

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 N，$X(k)$ 为其 N 点 DFT，则有：

$$x((n+m))_N \cdot R_N(n) \longleftrightarrow W_N^{-km} \cdot X(k)$$

证明：从左到右

$$DFT\left[x((n+m))_N R_N(n)\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\left[x((n+m))_N R_N(n)\right] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x((n+m))_N\right] W_N^{kn} \quad (主值区间)$$

令$n' = n+m$，则有：

$$= \sum_{n'=m}^{m+N-1}\left[x((n'))_N\right] W_N^{k(n'-m)} = W_N^{-km}\sum_{n'=m}^{m+N-1}\left[x((n'))_N\right] W_N^{kn'}$$

$$= W_N^{-km}\sum_{n'=0}^{N-1}\left[x((n'))_N\right] W_N^{kn'} \quad (一个周期内求和相等)$$

$$= W_N^{-km}\sum_{n'=0}^{N-1} x(n')\, W_N^{kn'} \qquad (主值区间)$$

$$= W_N^{-km} X(k)$$

$$x((n+m))_N R_N(n) \longleftrightarrow W_N^{-km} X(k)$$

频域循环移位定理

三、频域循环移位定理

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 N，$X(k)$ 为其 N 点 DFT，则有：

$$W_N^{km} \cdot x(n) \longleftrightarrow X((k+m))_N \cdot R_N(k)$$

证明：从右到左

$IDFT\big[X((k+m))_N R_N(k)\big]$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big[X((k+m))_N R_N(k)\Big] W_N^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big[X((k+m))_N\Big] W_N^{-kn} \quad (\text{主值区间})$$

令$k' = k+m$, 则有：

$$= \frac{1}{N}\sum_{k'=m}^{m+N-1}\Big[X((k'))_N\Big] W_N^{-k'n} W_N^{km}$$

$$= W_N^{km}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k'=m}^{m+N-1}\Big[X((k'))_N\Big] W_N^{-k'n}$$

$$= W_N^{km}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k'=0}^{N-1}\Big[X((k'))_N\Big] W_N^{-k'n} \quad (\text{一个周期内求和相等})$$

$$= W_N^{km}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k'=0}^{N-1} X(k')\, W_N^{-kn'} \qquad (\text{主值区间})$$

$$= W_N^{km}\cdot x(n)$$

即：$W_N^{km}\cdot x(n) \longleftrightarrow X((k+m))_N\cdot R_N(k)$

循环卷积的定义

一、循环卷积的定义

定义

设有限长序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的长度分别为 M 和 N。则 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 L 点循环卷积定义为：

$$\begin{aligned} y_c(n) &= x(n) \otimes h(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L \right] R_L(n) \end{aligned}$$

式中 L 称为循环卷积区间长度，且有 $L \geq \{N, M\}$。

1. 延拓 $x(n) \longrightarrow \tilde{x}(n) = x((n))_L$
2. 线性卷积 $h(n) * \tilde{x}(n)$
3. 取主值

循环卷积计算示例

例题

设 $h(n)=R_4(n)$，$x(n)=R_4(n-2)$，求其循环卷积，设 $L=8$。

时域循环卷积定理

二、时域循环卷积定理

定理

设长度均为 N 的有限长序列 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(k)$，$x_2(n) \leftrightarrow X_2(k)$，则有：

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \longleftrightarrow X_1(k) \cdot X_2(k) \qquad (N\text{ 点循环卷积})$$

注意

时域循环移位性质：

$$x((n+m))R_N(n) \longleftrightarrow W_N^{-km}X(k)$$

$$x((n-m))R_N(n) \longleftrightarrow W_N^{km}X(k)$$

证明：

$DFT\left[x_1(n) \otimes x_2(n)\right]$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_1(n) \otimes x_2(n)\right] W_N^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n)\right] W_N^{kn} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_2((n-m))_N R_N(n)\, W_N^{kn}\right] \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) DFT\left[x_2((n-m))_N R_N(n)\right] \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\, W_N^{km} X_2(k) \\
&= X_1(k) \cdot X_2(k)
\end{aligned}
$$

频域循环卷积定理

三、频域循环卷积定理

定理

设长度均为 N 的有限长序列 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(k)$，$x_2(n) \leftrightarrow X_2(k)$，则有：

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \longleftrightarrow \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k) \qquad (N \text{ 点循环卷积})$$

注意

频域移位性质

$$W_N^{km} \cdot x(n) \longleftrightarrow X((k+m))_N \cdot R_N(k)$$

$$W_N^{-km} \cdot x(n) \longleftrightarrow X((k-m))_N \cdot R_N(k)$$

证明：

$IDFT\left[\frac{1}{N}X_1(k)\otimes X_2(k)\right]$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}X_1(k)\otimes X_2(k)\right]W_N^{-kn} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X_1(m)X_2((k-m))_N\right]R_N(k)\,W_N^{-kn} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X_1(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_2((k-m))_N R_N(k)\,W_N^{-kn}\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X_1(m)\cdot IDFT\Big[X_2((k-m))_N R_N(k)\Big] \\
&= \left[\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X_1(m)\,W_N^{-km}\right]x_2(n) \\
&= x_1(n)\cdot x_2(n)
\end{aligned}
$$

复共轭序列的 DFT

定理

设长度为 N 的有限长序列 $x(n) \leftrightarrow X(k)$，且令 $X(N) = X(0)$，则有：

$$x^*(n) \longleftrightarrow X^*(N-k) \qquad \big(0 \le k \le N-1\big)$$

$$x^*(N-n) \longleftrightarrow X^*(k) \qquad \big(0 \le k \le N-1\big)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn}$$

$$X(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{-kn}\, W_N^{Nn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{-kn}$$

$$X^*(N-k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{-kn}\right]^* = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)\, W_N^{kn} = DFT\big[x^*(n)\big]$$

复共轭序列的 DFT

同理可证： $x^*(N-n) \longleftrightarrow X^*(k) \qquad \left(0 \le k \le N-1\right)$

$$DFT\left[x^*(N-n)\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(N-n)\, W_N^{kn} \qquad \text{令} m = N-n$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x^*(m)\, W_N^{k(N-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} x^*(m)\, W_N^{-km}\, W_N^{kN}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x^*(m)\, W_N^{-km} \qquad \text{因为}\left(W_N^{kN} = 1\right)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, W_N^{km}\right]^* = X^*(k)$$

DFT 的共轭对称性

一、复习一下离散序列的分解

任何离散序列可分解为共轭对称序列和共轭反对称序列之和，也能分解为实数部分序列和虚数部分序列之和。

$$\begin{cases} x_e(n) = \dfrac{1}{2}\left[x(n) + x^*(-n)\right] \\ x_o(n) = \dfrac{1}{2}\left[x(n) - x^*(-n)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_r(n) = \dfrac{1}{2}\left[x(n) + x^*(n)\right] \\ jx_i(n) = \dfrac{1}{2}\left[x(n) - x^*(n)\right] \end{cases}$$

有限长序列的对称性

二、DFT 中也存在类似的对称性，
设 $x(n)$ 为长度为 N 的有限长序列。
1^o 记号：

$$\begin{cases} x_{ep}(n): \text{有限长共轭对称序列} \\ x_{op}(n): \text{有限长共轭反对称序列} \end{cases}$$

2^o 定义：

$$\begin{cases} x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n) & \text{对比：} x_e(n) = x_e^*(-n) \\ x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n) & \text{对比：} x_o(n) = -x_o^*(-n) \end{cases}$$

其实质为有限长序列 $x(n)$ 关于 $\frac{N}{2}$ 对称

其实质为有限长序列 $x(n)$ 关于 $\frac{N}{2}$ 对称。

如 N 为偶数，令 $n=\frac{N}{2}-n_0$，可得：

$$\begin{cases} x_{ep}(\frac{N}{2}-n_0) = \quad x_{ep}^*(\frac{N}{2}+n_0) \\ x_{op}(\frac{N}{2}-n_0) = -x_{op}^*(\frac{N}{2}+n_0) \end{cases}$$

有限长序列的分解

3^o 讨论:

1. 有限长序列可分解为共轭对称序列和共轭反对称序列。

令
$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$
则
$$\begin{aligned} x^*(N-n) &= x_{ep}^*(N-n) + x_{op}^*(N-n) \\ &= x_{ep}(n) - x_{op}(n) \end{aligned}$$

联立求解可得:

$$\begin{cases} x_{ep}(n) = \dfrac{1}{2}\left[x(n) + x^*(N-n)\right] \\ x_{op}(n) = \dfrac{1}{2}\left[x(n) - x^*(N-n)\right] \end{cases}$$

2. 同样，有限长序列可分解为实数部分序列和虚数部分序列。

$$\begin{cases} x_r(n) = \dfrac{1}{2}\left[x(n) + x^*(n)\right] \\ jx_i(n) = \dfrac{1}{2}\left[x(n) - x^*(n)\right] \end{cases}$$

对称性讨论—实部序列和虚部部分序列的 DFT

(1) 设: $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$ $\qquad X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$

则: $x_r(n) \leftrightarrow X_{ep}(k)$ $\qquad jx_i(n) \leftrightarrow X_{op}(k)$

证:

(a) $x_r(n) \leftrightarrow X_{ep}(k)$

$$\because \quad x_r(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*(n)\right] \qquad \left(x^*(n) \leftrightarrow X^*(N-k)\right)$$

$$DFT\left[x_r(n)\right] = \frac{1}{2}\left[X(k) + X^*(N-k)\right] = X_{ep}(k)$$

(b) $jx_i(n) \leftrightarrow X_{op}(k)$

$$\because \quad jx_i(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) - x^*(n)\right] \qquad \left(x^*(n) \leftrightarrow X^*(N-k)\right)$$

$$DFT\left[jx_i(n)\right] = \frac{1}{2}\left[X(k) - X^*(N-k)\right] = X_{op}(k)$$

对称性讨论—共轭对称与共轭反对称序列的 DFT

(2) 设: $x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n) \qquad X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$

则: $x_{ep}(n) \leftrightarrow X_R(k) \qquad x_{op}(n) \leftrightarrow jX_I(k)$

证:

(a) $x_{ep}(n) \leftrightarrow X_R(k)$

$$\because \quad x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \qquad \left(x^*(N-n) \leftrightarrow X^*(k)\right)$$

$$DFT[x_{ep}(n)] = \frac{1}{2}\left[X(k) + X^*(k)\right] = X_R(k)$$

(b) $x_{op}(n) \leftrightarrow jX_I(k)$

$$\because \quad x_{op}(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) - x^*(N-n)\right] \qquad \left(x^*(N-n) \leftrightarrow X^*(k)\right)$$

$$DFT[x_{op}(n)] = \frac{1}{2}\left[X(k) - X^*(k)\right] = jX_I(k)$$

有限长序列对称性结论

结论

(1) 一个域的共轭对称序列对应另一个域的实数部分序列，反之亦然。

(2) 一个域的共轭反对称序列对应另一个域的虚数部分序列，反之亦然。

实序列 $x(n)$ 的对称性讨论 I

设 $x(n) \leftrightarrow X)k)$，因为 $x(n) \in R$，

则有 $X(k) = X^*(N-k)$，即 $X(k)$ 为共轭对称序列。

1. 若 $x(n) = x(N-n)$，即 $x(n)$ 为实偶序列。则有：

$$\begin{cases} x(n)\text{为实序列} & \rightarrow \quad X(k)\text{为共轭对称序列} \\ & \qquad \text{即}:X(k) = X^*(N-k) \\ x(n)\text{为实偶序列} & \rightarrow \quad X(k)\text{为实数序列} \end{cases}$$

则有 $X(k) = X^*(N-k) = X(N-k)$，也就是说 $X(k)$ 也是实偶序列。

实序列 $x(n)$ 的对称性讨论 II

2. 若 $x(n) = -x(N-n)$，即 $x(n)$ 为实奇序列。则有：

$$\begin{cases} x(n)\text{为实序列} & \rightarrow \quad X(k)\text{为共轭对称序列} \\ & \qquad \text{即}:X(k) = X^*(N-k) \\ x(n)\text{为实奇序列} & \rightarrow \quad X(k)\text{为纯虚数序列} \end{cases}$$

则有 $X(k) = X^*(N-k) = -X(N-k)$，也就是说 $X(k)$ 是纯虚奇对称序列。

应用举例：(实序列 DFT 计算量减半) I

例 1 如 $N=8$，求 $X(k)$。

利用对称性，有 $X(k)=X^*(N-k)$，

只需求 $X(0)$,$X(1)$,$X(2)$,$X(3)$,$X(4)$，则有：

$$X(5)=X^*(3),\qquad X(6)=X^*(2),\qquad X(7)=X^*(1)$$

应用举例：(实序列 DFT 计算量减半) II

例 2 计算一个 N 点 DFT，同时得到两个实序列的 N 点 DFT。

设 $x_1(n)$,$x_2(n)$ 是两个长度为 N 的实序列。

令: $x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$

则: $X(k) = X_{ep}(k) + Xop(k)$

根据 DFT 对称性，有：

$$X_1(k) = DFT\big[x_1(n)\big] = X_{ep}(k) = \frac{1}{2}\Big[X(k) + X^*(N-k)\Big]$$

$$X_2(k) = DFT\big[x_2(n)\big] = \frac{1}{j}X_{op}(k) = \frac{1}{2j}\Big[X(k) - X^*(N-k)\Big]$$

频率域采样

时域采样定理指出，在一定条件下，可由时域离散采样信号恢复原来的连续信号，

问题

1. 那么能否也由频域采样信号 $X(k)$ 恢复原来的信号 $x(n)$，或原频域连续函数 $X(e^{j\omega})$？
2. 如果可以，其条件是什么？
3. 内插公式什么形式？

回顾 DFT 的物理意义

首先回顾一下 DFT 的物理意义

$$X(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \qquad \text{在 } Z \text{ 平面单位圆上的 } N \text{ 点等间隔采样}$$

$$= X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \qquad \text{在 } \omega \text{ 轴上区间 } [0, 2\pi] \text{ 上的 } N \text{ 点等间隔采样。}$$

$\therefore$ 有：

$$X(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}\right]_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\therefore \quad X(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) W_N^{kn} \qquad (0 \le k \le N-1)$$

举例说明 Z

回顾一下例子，求 $R_4(n)$ 的 8 点，16 点的 DFT。

从例子中可以看出，$R_4(n)$ 的长度为 4，而 DFT 的的点数，也就是采样的点数为 8，和 16.

则有：

设 $x(n)$ 长度为 M, DFT 的变换区间长度为 N，则有 DFT 为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

即：$X(k)$ 是其 Z 变换 $X(z)$ 在 Z 域单位圆上的 N 点等间隔采样。

问题的提出

$X(k)$ 是其 Z 变换 $X(z)$ 在 Z 域单位圆上的 N 点等间隔采样。

问题

对于 $X(k)$ 来说，其反变换长度为 N，而时域序列 $x(n)$ 的长度为 M，显然不能直接说相等，不妨设 $IDFT[X(k)] = x_N(n)$，那么，$x_N(n)$ 和 $x(n)$ 之间存在什么关系？

根据 DFS 和 DFT 的关系可知：

$$x_N(n) \xrightarrow{\text{延拓}} \tilde{x}(n) \xrightarrow{DFS} \tilde{X}(k) \xrightarrow{\text{取主值}} X(k)$$

同时也有：

$$X(k) \xrightarrow{\text{延拓}} \tilde{X}(k) \xrightarrow{IDFS} \tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{取主值}} x_N(n)$$

推导过程

$$
\begin{aligned}
x_N(n) &= \tilde{x}(n)\cdot R_N(n) = IDFT\left[\tilde{X}(k)\right]\cdot R_N(n) \\
&= \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\,W_N^{-kn}\right]\cdot R_N(n) \\
&= \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\,W_N^{km}\right]W_N^{-kn}\right]\cdot R_N(n) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(m-n)}\right]\cdot R_N(n)
\end{aligned}
$$

而：
$$
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} 1, & m = n + l\cdot N \qquad l \in Z \\ 0, & \text{其他 m} \end{cases}
$$

推导过程

$$\therefore \quad x_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} \right] \cdot R_N(n)$$

$$\therefore \quad x_N(n) = \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n+lN) \right] \cdot R_N(n)$$

说明

1. 这说明 $X(z)$ 在单位圆上的 N 点等间隔采样 $X(k)$ 的 N 点 *DFT* 反变换 $x_N(n)$ 是原序列 *x(n)* 以 N 为周期进行延拓，再取主值得到的序列。
2. 显然当 $N \geq M$ 时，有 $x(n) = x_N(n)$。
3. 当 $N < M$ 时，将出现时域混叠现象。

频域采样定律

定理

如果序列 $x(n)$ 的长度为 M，则只有当频域采样点数 N 大于等于序列 $x(n)$ 长度 M 时，即 $N \geq M$ 时，才有：

$$x_N(n) = IDFT[X(k)] = x(n)$$

即可由频域采样 $X(k)$ 恢复原序列 $x(n)$，否则将产生时域混叠现象。

说明

满足频域采样定理时，频域采样序列 $X(k)$ 的 N 点 $IDFT$ 是原序列 $x(n)$，所以必然可以用 $X(k)$ 恢复 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$.

插值问题的提出

既然可以用 $X(k)$ 恢复 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$，那怎么得到呢？
下面将推导用频域采样 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 的内插公式和内插函数。

设序列 $x(n)$ 长度为 M，在频域 $[0, 2\pi]$ 上等间隔采样 N 点，$N \geq M$，则有。

$$\begin{aligned} X(k) &= X(z)\ \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \\ &= X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \end{aligned}$$

当 $N \geq M$ 时，满足频域采样定理，有：

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{-kn}$$

$X(z)$ 插值公式推导过程

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right] z^{-n} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} z^{-n} \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\frac{1 - W_N^{-kN} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \right]
\end{aligned}
$$

$X(z)$ 插值公式推导过程

前述推导可得：

$$X(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}\right]$$

令：

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

则有：

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(z)$$

上式称为用 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 的插值公式，其中 $\varphi_k(z)$ 称为内插函数。

$X(e^{j\omega})$ 插值公式推导过程

前述推导可得：

$$X(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\left[\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}\right]$$

将 $z = e^{j\omega}$ 代入上式，并进行化简整理，可得：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\varphi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

其中：

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{N}\frac{\sin(\omega N/2)}{sin(\omega/2)}e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

上式称为频域内插公式，$\varphi(\omega)$ 称为频域内插函数。

$X(e^{j\omega})$ 插值公式化简过程

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$\varphi_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\cdot\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad = \quad \frac{1}{N}\cdot\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)}}$$

$$= \frac{1}{N}\cdot\frac{e^{-j\frac{N}{2}\omega}\left(e^{j\frac{N}{2}\omega}-e^{-j\frac{N}{2}\omega}\right)}{e^{-j\frac{1}{2}(\omega-\frac{2\pi}{N}k)}\left(e^{j\frac{1}{2}(\omega-\frac{2\pi}{N}k)}-e^{-j\frac{1}{2}(\omega-\frac{2\pi}{N}k)}\right)}$$

$$= \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}\cdot e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega-\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

令： $$\varphi(\omega) = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\cdot e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

下面将验证 $\varphi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right) = \varphi_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}\cdot e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega-\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)}$

$$\text{设：}\varphi(\omega)=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\cdot e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)&=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)/2\right)}\cdot e^{-j\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)}\\
&=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega-\pi k\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}\cdot e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega-\omega-2\pi k+\frac{2\pi}{N}k\right)}\\
&=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)\cos(\pi k)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}\cdot e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega-\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)}e^{j\pi k}\\
&=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}\cdot e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega-\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)}e^{j2\pi k}\quad\left(e^{j\pi k}=\cos(\pi k)\right)\\
&=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}\cdot e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega-\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)}\qquad\left(e^{j2\pi k}=1\right)\\
&=\varphi_k(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

问题: 为什么要用 *DFT* 计算线性卷积?

一、线性卷积与循环卷积的关系?

1. 问题的背景：为什么要用 *DFT* 计算线性卷积?
    1. 在实际应用中，需要计算两个序列的线性卷积。
    2. 利用 *DFT* 快速算法在频域计算循环卷积将快的多。因此常利用 *DFT*(*FFT*) 在频域计算循环卷积。。
2. 问题在线性卷积和循环卷积的关系？以及循环卷积与线性卷积相等的条件?

线性卷积和循环卷积的对比

二、推导

设有限长序列 $x(n)$ 长度为 M，$h(n)$ 长度为 N，则有：

(1) 线性卷积为：

$$y_l(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

且 $y_l(n)$ 长度为 $N+M-1$。

(2) L 点循环卷积为：

$$y_c(n) = x(n) \otimes h(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L\right] R_L(n)$$

这里 $L \geq \{N, M\}$，

且又 $\because$ $h(n)$ 长度为 N，上式可写为：

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x((n-m))_L\right] R_L(n)$$

2 个备用公式

公式一 ：

$$\begin{cases} y_l(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \\ \downarrow \quad n \to n+qL \\ y_l(n+qL) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n+qL-m) \end{cases}$$

公式二 ：

$$x((n))_L = \tilde{x}(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n+qL)$$

(3) 关系

$$
\begin{aligned}
y_c(n) &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x((n-m))_L\right] \cdot R_L(n) \\
&= \left\{\sum_{m=0}^{N-1} h(m)\left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n-m+qL)\right]\right\} \cdot R_L(n) \quad (\text{备用公式 } 2) \\
&= \left\{\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m+qL)\right]\right\} \cdot R_L(n) \\
&= \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} y_l(n+qL)\right] \cdot R_L(n) \quad (\text{备用公式 } 1) \\
&= y_l((n))_L \cdot R_L(n)
\end{aligned}
$$

循环卷积与线性卷积的关系

结论

两个有限长序列的长度为 L 的循环卷积结果，等于这两个序列的线性卷积以 L 为周期延拓，然后再取主值序列得到。

$$y_l(n) \longrightarrow y_l((n))_L \longrightarrow y_c(n) = y_l((n))_L \cdot R_L(n)$$

讨论：

1. 当 $L \geq N + M - 1$ 时，则有:
$$y_c(n) = y_l(n)$$
说明： 公式本身是有 $y_l(n)$ 得到 $y_c(n)$ 的过程，且在 $L \leq N + M - 1$ 时两者相等，而实际应用中是利用循环卷积计算线性卷积。
2. 当 $L < N + M - 1$ 时，周期延拓会导致混叠现象。

循环卷积的两种计算方法

二、用 DFT 计算循环卷积

（1）循环卷积的两种计算方法：

(a) 直接计算

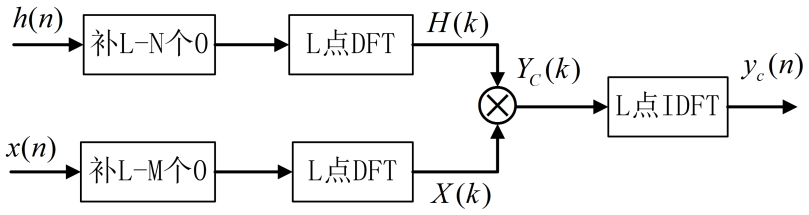
$$y_c(n) = x(n) \otimes h(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L \right] R_L(n)$$

周期延拓 $\longrightarrow$ 线性卷积 $\longrightarrow$ 取主值

(b) 根据卷积定理，用 DFT 计算。

设长序列 $x(n)$ 长度为 M，$h(n)$ 长度为 N，令 $L = N + M - 1$：

$$x(n) \otimes h(n) \longleftrightarrow X(k) \cdot Hk)$$



注意：这里需要做 3 次 DFT 计算，为何？因为 DFT 有快速算法 FFT，可大大加快计算速度。

长序列卷积计算

（2）长序列卷积计算

1. 问题：
   在实践中经常两个序列的长度相差很大，如 $M \gg N$，利用卷积定理计算时需补 0，这样造成存储空间和计算能力的浪费。
   而且在某些应用中，序列长度不定或者被认为是无限长。
2. 解决方法：将长序列分段计算。

长序列卷积计算的公式

设 $h(n)$ 长度为 N，$x(n)$ 无限长，可通过分段处理，设每段长度为 M，可令：

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n) \quad \text{则：} \qquad x_k(n) = x(n) \cdot R_M(n - kM)$$

$$\begin{aligned} y(n) = h(n) * x(n) &= h(n) * \left[\sum_{k=0}^{\infty} x_k(n) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(n) * x_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n) \qquad \text{这里：} \; y_k(n) = h(n) * x_k(n) \end{aligned}$$

举例说明

例如，设 $N = 3, M = 5, L = N + M - 1 = 7$

则：
$$\begin{aligned} y(n) &= y_0(n) + y_1(n) + y_2(n) + \cdots y_k(n) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n) \end{aligned}$$

计算过程

1. 先后计算 $y_0(n), y_1(n), y_2(n), \cdots y_k(n), \cdots$
2. 分别相加。

信号的谱分析

所谓信号的谱分析，就是计算信号的傅里叶变换。对于连续信号和系统，可以通过时域采样，应用 DFT 进行近似谱分析。

一、用 DFT 对连续信号进行谱分析

用 DFT 对连续信号进行谱分析必然是近似的，其近似程度与信号带宽、采样频率和截取长度有关。

用 DFT 对连续信号进行谱分析

(1) 问题
给定有限长带限信号 $x_a(t)$，如何得到 $X_a(jf)$

(2) 谱分析的过程：

$$x_a(t) \longrightarrow x(n) \longrightarrow X(k) \longrightarrow X_a(jf)$$

(3) 采样参数的说明

用 DFT 对连续信号进行谱分析必然是近似的，其近似程度与信号带宽、采样频率和截取长度有关。因此采样参数与上述三者相关。

$$\left.\begin{array}{ll} T & \text{：采样间隔} \\ f_s & \text{：采样频率} \end{array}\right\} \qquad T=\frac{1}{f_s},\quad f_s=\frac{1}{T}$$

$$\left.\begin{array}{ll} N & \text{：采样点数} \\ T_p & \text{：信号长度} \end{array}\right\} \qquad T_p=NT,\quad N=\frac{T_p}{T}$$

(4) 参数之间的关系

在 2.4 节中，我们有 $X(e^{j\omega}) = \hat{X}_a(j\Omega)\big|_{\omega=\Omega T}$，则有：

$$X(e^{j\omega}) = X_a(j\Omega)\big|_{\omega=\Omega T} = X_a(jf)\big|_{\omega=2\pi fT}$$

$$\because \qquad \omega = \Omega T = 2\pi fT = 2\pi Tf \qquad (\Omega = 2\pi f)$$

$$\therefore \qquad \Delta\omega = 2\pi T\Delta f \qquad \left(\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}\right)$$

$$\therefore \qquad \Delta f = \frac{1}{2\pi T}\Delta\omega = \frac{1}{2\pi T}\cdot\frac{2\pi}{N} = \frac{1}{NT}$$

令 $F = \Delta f$，这里 F 称为频率分辨率，表示对模拟信号频谱的采样间隔。

结论： $$F = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}$$

问题在于怎么用 $X(k)$ 表示 $X_a(jf)$

$$\because \quad X(k) = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad 且 \quad X\left(e^{j\omega}\right) = \hat{X}_a(j\Omega)\Big|_{\omega=\Omega T}$$

$$\begin{aligned}
X(k) &= \hat{X}_a(j\Omega)\Big|_{\Omega T=\frac{2\pi}{N}k} \\
&= \hat{X}_a(j\Omega)\Big|_{2\pi f T=\frac{2\pi}{N}k} \\
&= \hat{X}_a(j\Omega)\Big|_{f=\frac{1}{NT}k} \\
&= \hat{X}_a(j\Omega)\Big|_{f=kF} \qquad (F=\frac{1}{NT}) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\Omega - jm\Omega_s\right)\Big|_{f=kF}
\end{aligned}$$

接着前面的公式，继续推导，前述有：

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\Omega - jm\Omega_s\right)\Big|_{f=kF} \\ &= \frac{1}{T} X_a\left(j\Omega\right)\Big|_{f=kF} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \\ &= \frac{1}{T} X_a\left(j2\pi f\right)\Big|_{f=kF} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令} X_a(kf) &= X_a\left(j2\pi f\right)\Big|_{f=kF} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \\ \therefore \quad X(k) &= \frac{1}{T} X_a(kf) \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \\ \therefore \quad X_a(kf) &= T \cdot X(k) \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \end{aligned}$$

谱分析步骤

(5) 谱分析步骤

1. 对 $x_a(t)$ 采样，得到有限长 $x(n)$，长度为 N。
2. 计算 DFT， $x(n) \longleftrightarrow X(k)$
3. $X_a(kf) = T \cdot X(k) \qquad 0 \leq k \leq N-1$

采样参数的选择

(6) 采样参数的选择

在对连续信号进行谱分析是，主要关心两个问题

1. 谱分析范围：　决定信号带宽
2. 频率分辨率：　决定信号长度

问题：

- 已知信号频率分辨率 F，信号最高频率 f_c，
- 确定谱分析参数。
  - (a) 最小记录时间 $T_{p\ min}$
  - (b) 最大采样周期 T_{max}
  - (c) 最小采样点数 N_{min}

谱分析参数

1. 最小记录时间 $T_{p\,min}$

$$F = \frac{1}{T_p} \quad \Longrightarrow \quad T_p = \frac{1}{F} \quad \Longrightarrow \quad T_p \geq \frac{1}{F_{max}}$$

$$\therefore \qquad T_{p\,min} = \frac{1}{F_{max}}$$

2. 最大采样周期 T_{max}

$$f_s \geq 2f_c \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{T} \geq 2f_c \quad \Longrightarrow \quad T \leq \frac{1}{2f_c}$$

$$\therefore \qquad T_{max} = \frac{1}{2f_c}$$

3. 最小采样点数 N_{min}

$$\therefore \qquad N_{min} = \frac{T_{p\,min}}{T_{max}}$$

举例说明

例题

对实信号做谱分析，要求谱分辨率 $F \leq 10Hz$，信号最高频率为 $f_c = 2.5kHz$。试确定最小记录时间 $T_{p\ min}$，最小记录点数 N_{min}，最大采样周期 T_{max}。

解：

$$T_{p\ min} = \frac{1}{F_{max}} = \frac{1}{10} = 0.1\ s$$

$$T_{max} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{5000} = 0.2\ ms$$

$$N_{min} = \frac{T_{p\ min}}{T_{max}} = \frac{0.1s}{02.ms} = 500$$

用 DFT 对离散序列做谱分析

二、用 DFT 对序列做谱分析

1. 有限长序列

   设有限长序列 $x(n)$ 长度为 N，则 $X(k)$ 是 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样，直接得到。频率分辨率就是采样间隔 $\frac{2\pi}{N}$。序列的 FT 可以利用 DFT 来计算。
2. 周期序列 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$

周期序列 $\tilde{x}(n)=x((n))_N$

方法 1 利用公式直接得到

$$X(e^{j\omega})=FT[\tilde{x}(n)]=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k)\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

其强度为 $\frac{2\pi}{N}\tilde{X}(k)$，为周期为 N 的周期序列，只需要知道 $\tilde{X}(k)$，就可以得到 $FT[\tilde{x}(n)]$，而 $\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]$。

步骤：

1. 取主值，$x(n)=x(n)R_N(n)$
2. 做 DFT 变换，$X(k)=DFT[x(n)]$
3. 延拓，$\tilde{X}(k)=X((n))_N$
4. 代公式

周期序列 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$

方法 2 截取 $\tilde{x}(n)$ 的整数个周期进行 DFT，可得到其频谱结构，达到谱分析的目的。

截取 $\tilde{x}(n)$ 的 m 个周期，设其长度为 M，即

$$X_M(n) = \tilde{x}(n)R_M(n) \qquad (M = mN, m \in Z)$$

设 $$x_M(n) \longleftrightarrow X_M(k) \qquad (0 \leq k \leq mN - 1)$$

则 $X_M(k)$ 也能表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构。

下面推导 $X(k)$ 与 $X_M(k)$ 的关系。

截取 $\tilde{x}(n)$ 的 m 个周期，设其长度为 M，即

$$X_M(n) = \tilde{x}(n) R_M(n) \qquad (M = mN, m \in Z)$$

设 $$x_M(n) \longleftrightarrow X_M(k) \qquad (0 \le k \le mN-1)$$

下面给出 $X(k)$ 与 $X_M(k)$ 的关系。

引理

$$\sum_{n=0}^{mN-1} f(n) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{n'=0}^{N-1} f(n'+rN)$$ 设 $f(n)$ 的周期为 N

$$
\begin{aligned}
X_M(k) &= \sum_{n=0}^{mN-1} x_M(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \qquad = \sum_{n=0}^{mN-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \\
&= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n'+rN) e^{-j\frac{2\pi}{M}k(n'+rN)} \qquad \left(n \to n'+rN\right) \\
&= \sum_{r=0}^{m-1} \left[\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n'+rN) e^{-j\frac{2\pi}{M}kn'}\right] e^{-j\frac{2\pi}{M}krN} \\
&= \sum_{r=0}^{m-1} \left[\sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{k}{m}n'}\right] e^{-j\frac{2\pi}{m}kr} \qquad (M = mN) \\
&= \sum_{r=0}^{m-1} X\left(\frac{k}{m}\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{m}kr} \\
&= X\left(\frac{k}{m}\right) \cdot \sum_{r=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}kr}
\end{aligned}
$$

下面推导 $X(k)$ 与 $X_M(k)$ 的关系。

因为：

$$X_M(k) = X\left(\frac{k}{m}\right) \cdot \sum_{r=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}kr}$$

而：

$$\sum_{r=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}kr} = \sum_{r=0}^{m-1} \left[e^{-j\frac{2\pi}{m}k}\right]^r = \begin{cases} m, & \frac{k}{m} \text{ 为整数} \\ 0, & \frac{k}{m} \text{ 不为整数} \end{cases}$$

所以有，

$$X_M(k) = \begin{cases} mX\left(\frac{k}{m}\right), & \frac{k}{m} \text{ 为整数} \\ 0, & \frac{k}{m} \text{ 不为整数} \end{cases}$$

举例说明：$x(n)$

设 $N=4$，取 $m=3$，则 $M=mN=12.$

$$X_M(k)=X_{12}(k)=\begin{cases} 3X\left(\frac{k}{3}\right), & \frac{k}{m}\ \text{为整数} \\ 0, & \frac{k}{m}\ \text{不为整数} \end{cases}$$

则 $X_M(k)=X_{12}(k)$ 为：

$$\begin{array}{lll} X_{12}(0)=3X(\frac{0}{3})=3 & X_{12}(1)=0 & X_{12}(2)=0 \\ X_{12}(3)=3X(\frac{3}{3})=4.5 & X_{12}(4)=0 & X_{12}(5)=0 \\ X_{12}(6)=3X(\frac{6}{3})=6 & X_{12}(7)=0 & X_{12}(8)=0 \\ X_{12}(9)=3X(\frac{9}{3})=7.5 & X_{12}(10)=0 & X_{12}(11)=0 \end{array}$$

注：由此可见，$X_M(k)$ 也能代表 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构，只是当 $k=rm$ 时，有 $X_M(rm)=mX(r)$。因此只要截取 $\tilde{x}(n)$ 的整数倍周期做 *DFT*，就可以得到它的频率结构进行谱分析。

用 DFT 进行谱分析的误差问题

实际应用中，DFT 用于对连续信号做谱分析时，需对其进行截断和采样，其必将引起某些误差。

1. 混叠现象
2. 栅栏效应
3. 截断效应

混叠现象

混叠现象

1. 在 $x_a(t)$ 进行采样时，存在采样定理的限制，

$$f_s \geq 2f_c$$

否则将在 $\omega = \pi \quad (f = \frac{f_s}{2})$ 处存在一个频率混叠的问题。

2. 措施：
采样之前进行预滤波，滤除高于折叠频率 $\frac{f_s}{2}$ 的频率成分，避免频率混叠现象。

栅栏效应

栅栏效应

1. N 点 DFT$X(k)$ 是对 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0,2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样，仅能得到连续频谱的 N 个采样点，采样点之间的频率看不到。这种现象称为栅栏效应。
2. 措施：
   为使得栅栏变细，可加大采样点数，对有限长序列来说，可在原序列尾部补 0。采样之前进行预滤波，滤除高于折叠频率 $\frac{f_s}{2}$ 的频率成分，避免频率混叠现象。

截断效应

截断效应 (自己看)

1. 泄露
2. 谱间干扰