

# 第 6 章 IIR 数字滤波器的设计

笪邦友

中南民族大学 电子信息工程学院

2018 年 11 月 12 日

# 目录

## ① 6.1 滤波器概述

- 6.1.1 滤波器的概念
- 6.1.2 理想滤波器与实际滤波器
- 6.1.3 滤波器的分类
- 6.1.4 数字滤波器的设计

## ② 6.2 模拟滤波器的设计方法

- 6.2.1 模拟低通滤波器的设计
- 6.2.2 模拟低通滤波器的技术要求及逼近方法
- 6.2.3 最平响应 Butterworth Filter 设计

## ③ 6.3 IIR-DF 的设计—脉冲响应不变法

- 6.3.1 IIR-DF 设计的基本概念
- 6.3.2 脉冲响应不变法

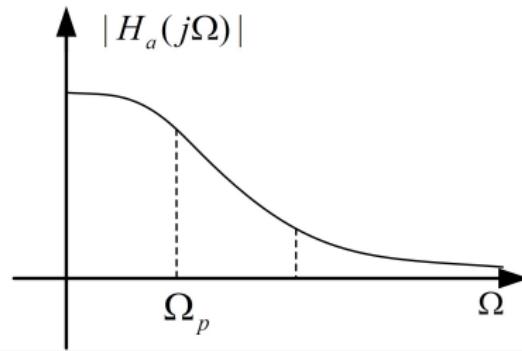
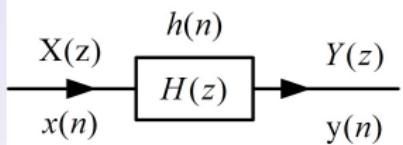
## ④ 6.4 IIR-DF 的设计—双线性变换法 (BLT)

- 6.4.1 双线性变换法
- 6.4.2 LP-DF 完整设计方法
- 6.4.3 其他需要注意的问题

## 一、滤波器的概念

滤波器是一种对信号频率具有选择性的系统。

举例说明:

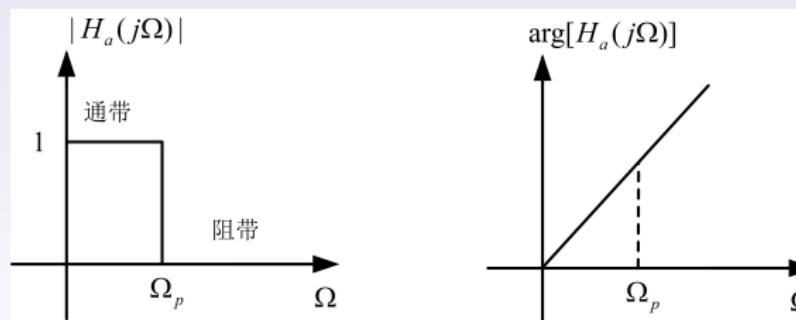


## 二、理想滤波器与实际滤波器

$$\text{设} \quad H_a(j\Omega) = |H_a(j\Omega)| \cdot e^{j\arg[H_a(j\Omega)]}$$

### (1) 理想滤波器

$$|H_a(j\Omega)| = \begin{cases} 1, & \Omega < \Omega_p \\ 0, & \Omega > \Omega_p \end{cases}$$



理想滤波器不可能用电子部件实现，因为其单位脉冲响应是非因果，且无限长。虽然其可在计算机上实现，但存在严重问题。

## (2) 实际滤波器的形状

1 实际滤波器不可能有理想的形状。

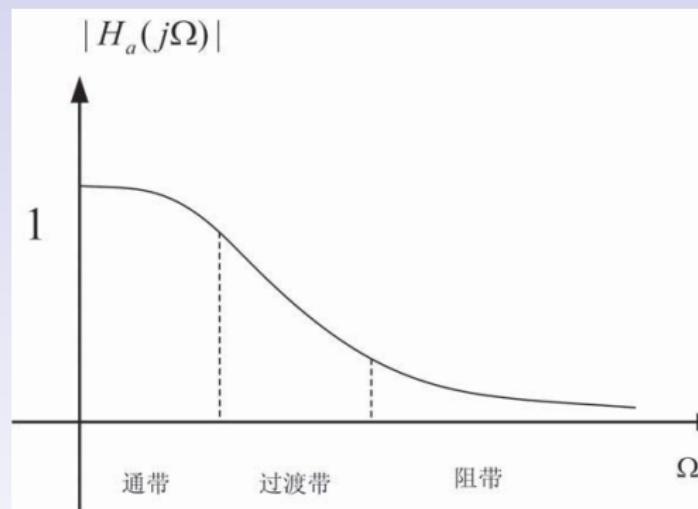


图: 实际滤波器的幅频特性可能的形状

## 2 三个概念

- (1) 通带: 滤波器中能使信号通过的频带;
- (2) 阻带: 滤波器中不能使信号通过的频带;
- (3) 过渡带: 介于通带和阻带之间的频带。

### 三、滤波器的分类

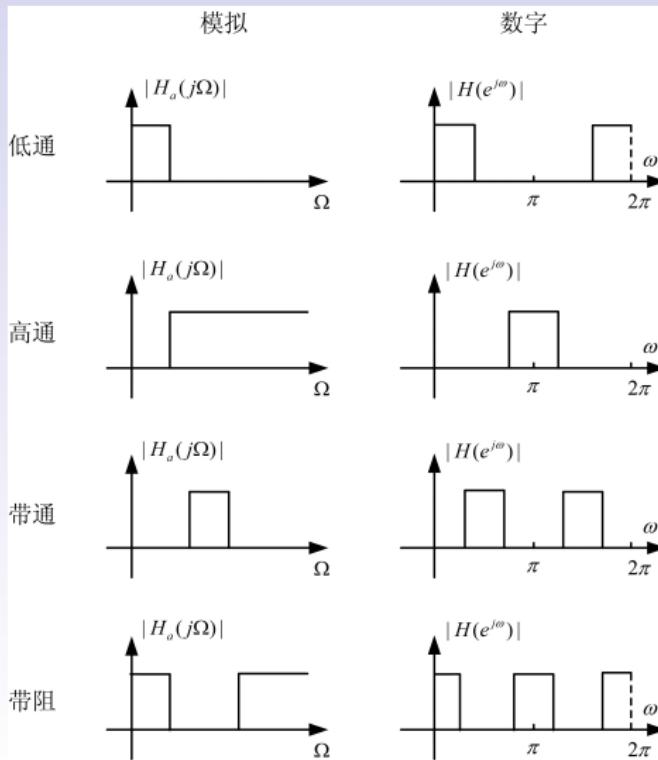
1 按处理信号的特性分：

- (1) AF—模拟滤波器
- (2) DF—数字滤波器

2 按通频带的特性分：(选频数字滤波器)

- (1) LP—低通滤波器
- (2) HP—高通滤波器
- (3) BP—带通滤波器
- (4) BS—带阻滤波器

## 选频滤波器示意图



## 四、数字滤波器的设计

1、直接法（不讲）

(1) 在时域中设计

(2) 在频域中设计

2、从 AF 设计 DF

(1) 根据 DF 技术指标要求设计模拟滤波器，得到  $H_a(s)$  (6.2 节)

(2) 利用一种映射方法，将

$$H_a(s) \xrightarrow{\text{映射为}} H(z)$$

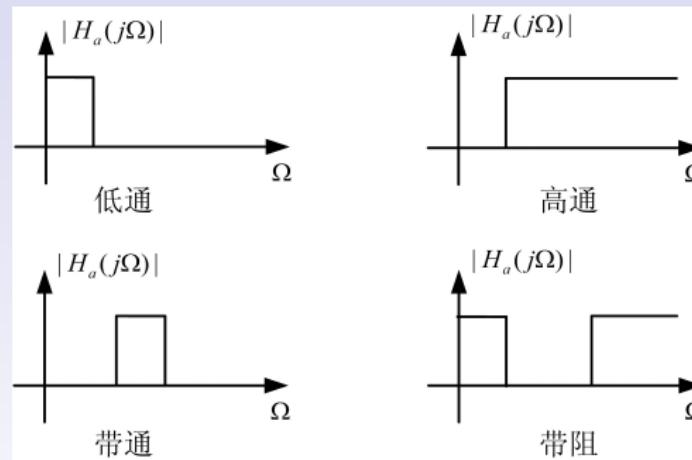
映射方法

(a) 脉冲响应不变法 (6.3 节)

(b) 双线性变换法 (6.4 节)

## 一、模拟选频滤波器的概念

### ① 模拟选频滤波器



- ② 低通滤波器的设计是关键，其他滤波器可通过频率变换，将低通滤波器转换为相应的模拟滤波器。

## 二、设计方法（逼近法）

1 理想滤波器无法用模拟滤波器实现

(1) 实际工作中, 用实际滤波器  $\xrightarrow{\text{逼近}}$  理想滤波器。

(2) 当所涉及的实际滤波器满足技术要求时, 停止逼近。

2 假设滤波器的响应函数为  $H_a(j\Omega)$  (或  $H_a(s)$ )

(1) 设计指标由  $|H_a(j\Omega)|$  给出。

- 对于典型的滤波器, 其相频特性是确定的

(2) 滤波器由  $H_a(s)$  给出。

- 注意  $h_a(t), H_a(j\Omega), H_a(s)$  是对系统的等价描述

问题在于:

如何由  $|H_a(j\Omega)| \longrightarrow H_a(s)$

### 三、实因果系统传输函数的设计

对于实因果系统，如何由  $|H_a(j\Omega)|^2$  得到  $H_a(s)$ 。

1 特点：设某因果系统， $h_a(t)$  为实函数，有：

$$H_a(j\Omega) = FT[H_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$H_a(j\Omega) = |H_a(j\Omega)| \cdot e^{j\arg[H_a(j\Omega)]}$$

注意

注意：此处， $H_a(j\Omega)$  与  $H_a(s)$  可相互等价

## 重要结论 (自证)

① 幅度平方函数  $|H_a(s)|^2 = H_a(s)H_a(-s)$

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega)$$

$$|H_a(s)|^2 = H_a(s)H_a(-s) \quad (H_a(j\Omega) = H_a(s)|_{s=\Omega})$$

说明：

$$|H_a(s)|^2 = H_a(s)H_a^*(s) \quad \text{只需证:} \quad H_a(-s) = H_a^*(s)$$

2 由  $|H_a(s)|^2 \rightarrow H_a(s)$

假设  $|H_a(s)|^2$  是全极点函数，有  $2N$  个极点，则可由幅度平方函数  $|H_a(j\Omega)|^2$  求出系统函数。

分析：

$$|H_a(s)|^2 = H_a(s)H_a(-s)$$

- (1) 设  $s_k$  是  $H_a(s)$  的任意一个极点，则  $-s_k$  是  $H_a(-s)$  的一个极点。

$$H(s_k) = \infty \quad \rightarrow \quad H(-(-s_k)) = \infty$$

$\therefore -s_k$  为  $H_a(-s)$  的极点，极点关于原点对称。

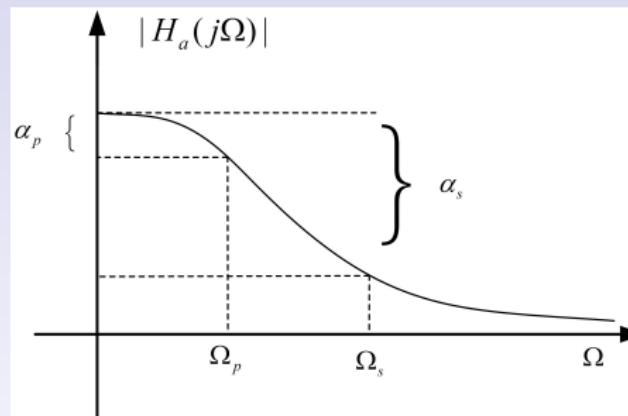
- (2) 如  $H_a(s)$  有 N 个极点， $H_a(-s)$  有 N 个极点，则  $|H_a(s)|^2$  有 2N 个极点。
- (3) 2N 个极点中，S 平面左右半平面各有一半。
- (4) 设系统  $H_a(s)$  因果稳定，则：

$$\begin{cases} H_a(s) \text{ 的 } N \text{ 个极点全部在 } S \text{ 的左半平面。} \\ H_a(-s) \text{ 的 } N \text{ 个极点全部在 } S \text{ 的右半平面。} \end{cases}$$

可由 S 左半平面的 N 个极点构造出  $H_a(s)$ .

# LP-AF 的技术要求

## 一、LP-AF 的技术要求（技术指标）



两对参数即可得到模拟滤波器的形状，也叫做片段常数特性。

- ①  $\Omega_p$ : 通带边界频率
- ②  $\alpha_p$ : 通带允许的最大衰减
- ③  $\Omega_s$ : 阻带截止频率
- ④  $\alpha_s$ : 阻带内允许的最小衰减

## 1 关于衰减的说明：

有： 
$$\alpha(\Omega) = 10 \lg \left( \frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2} \right) = -10 \lg |H_a(j\Omega)|^2$$

简单证明：

$$\alpha(\Omega) = -20 \lg \left( \frac{|H_a(j\Omega)|}{|H_a(j0)|} \right)$$

设  $|H_a(j0)| = 1$

则：  $\alpha(\Omega) = 10 \lg \left( \frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2} \right)$  (单位为 dB)

## 2 3dB 截止频率 $\Omega_c$

即当  $|H_a(j\Omega)|$  下降到零频分量的  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  时对应的频率为  $\Omega_c$ ，  
此时衰减约为 3dB

$$\alpha(\Omega_c) \approx 3dB \quad \Rightarrow \quad \frac{|H_a(j\Omega_c)|}{|H_a(j0)|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

注意：

- 事实上  $\alpha(\Omega_c) = 10 \cdot \lg 2 \approx 3.0103$ ，是约等于 3。
- 另， $\Omega_c$  与  $\Omega_p$  是不同的概念。

## 二、Butterworth 逼近方法

设  $H_d(s)$  是理想滤波器

### 1 任务:

设计一个实际的 LP-AF, 得到其系统函数  $H_a(s)$ , 使得

$$|H_a(s)| \xrightarrow{\text{逼近}} |H_d(s)|$$

### 2 具体思路:

(1) 用幅度平方函数作为逼近函数, 即:

$$|H_a(s)|^2 \xrightarrow{\text{逼近}} |H_d(s)|^2$$

(2) 逼近函数的表达式:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + |k(j\Omega)|^2}$$

其中  $|k(j\Omega)|^2$  是以  $\Omega^2$  为自变量的 N 次有理多项式。

(3)  $|H_a(j\Omega)|^2 \xrightarrow{\text{得到}} H_a(j\Omega)$ (或  $H_a(s)$ )

# 最平响应 Butterworth 系统

## 一、最平响应 Butterworth 系统

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + C^2\Omega^{2N}}$$

两个未知参数 C, N, 确定之即可得  $|H_a(j\Omega)|^2$

# 最平响应 Butterworth 滤波器设计 I

(1) 得到  $|H_a(j\Omega)|^2$

将  $|H_a(j\Omega)|^2$  代入衰减函数:

$$\alpha(\Omega) = 10 \lg\left(\frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2}\right)$$

代入, 得:

$$\alpha(\Omega) = 10 \lg(1 + C^2 \Omega^{2N})$$

变换后可得:

$$1 + C^2 \Omega^{2N} = 10^{\frac{\alpha(\Omega)}{10}} \quad (\text{可证明 } C = \frac{1}{\Omega_c^N})$$

## 最平响应 Butterworth 滤波器设计 II

即：

$$1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha(\Omega)}{10}}$$

我们知道，LP-AF 由两对参数决定，即：

$$\begin{cases} \Omega_p: & \text{通带边界频率} \\ \alpha_p: & \text{通带允许的最大衰减} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_s: & \text{阻带截止频率} \\ \alpha_s: & \text{阻带内允许的最小衰减} \end{cases}$$

## 最平响应 Butterworth 滤波器设计 III

对右边方程:  $1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha(\Omega)}{10}}$

代入  $(\Omega_p, \alpha_p), (\Omega_s, \alpha_s)$  后可得:

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha_p}{10}} \\ 1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha_s}{10}} \end{cases}$$

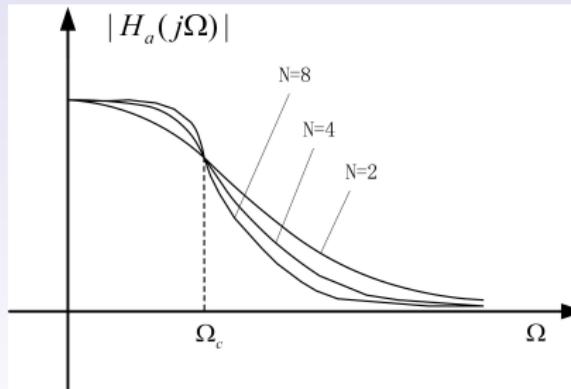
两个方程, 两个未知数, 联立求解后可得  $\Omega_c, N$ 。最后可得:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

# 最平响应 Butterworth 滤波器设计 IV

## 说明

- ① 算法相当简单，结果好。
- ② N 与幅频特性函数  $H_a(j\Omega)$  的关系：N 越大，形状越好。



$$(2) \quad |H_a(s)|^2 \xrightarrow{\text{求得}} H_a(j\Omega) \quad (\text{或 } H_a(s))$$

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

令  $s = j\Omega$ , 则有:

$$|H_a(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N}}$$

令分母为 0, 即  $s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N} = 0$ , 求极点。有:

$$s^{2N} = -(j\Omega_c)^{2N} = e^{j(2k+1)\pi}(j\Omega_c)^{2N} \quad k = 0, 1, \dots, (2N-1)$$

$$s_k = e^{j\frac{(2k+1)}{2N}\pi} \cdot j \cdot \Omega_c \quad \text{注意 } j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

整理后有：

$$s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \quad k = 0, 1, \dots, (2N-1)$$

2N 个极点等间隔分布在半径为  $\Omega_c$  的圆上。

(该圆也叫 Butterworth 圆)

前述已知：

$$|H_a(s)|^2 = H_a(s) \cdot H_a(-s)$$

$|H_a(s)|^2$  有  $2N$  个极点，且左右半平面各一半，其中：

$$\begin{cases} H_a(s) & \text{的 } N \text{ 个极点全在左半平面;} \\ H_a(-s) & \text{的 } N \text{ 个极点全在右半平面。} \end{cases}$$

则  $s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]}$  的前  $N$  个极点全在 S 左半平面内。

举例说明，以 N=4 为例

举例说明，以 N=4 为例：

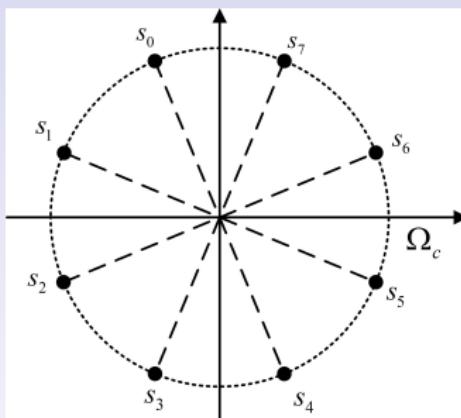
$$\begin{cases} k = 0, & s_0 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{5}{8}\pi} \\ k = 1, & s_1 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{7}{8}\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 2, & s_2 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{9}{8}\pi} \\ k = 3, & s_3 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{11}{8}\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 4, & s_4 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{13}{8}\pi} \\ k = 5, & s_5 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{15}{8}\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 6, & s_6 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{1}{8}\pi} \\ k = 7, & s_7 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{3}{8}\pi} \end{cases}$$

极点分布图如下图所示：



可见， $s_0, s_1, s_2, s_3$  在  $s$  平面左边， $s_4, s_5, s_6, s_7$  在  $s$  平面右边， $s_k$  分布在半径为  $\Omega_c$  的圆上，且关于原点对称。

(3) 由 s 左半平面 N 个极点

$$s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \quad k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

构造出  $H_a(s)$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l} H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s - s_k)} \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \\ \text{式中: } s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \end{array} \right.$$

## 二、设计过程

① 由  $(\Omega_p, \alpha_p), (\Omega_s, \alpha_s)$  得到：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

即求解  $N, \Omega_c$

② 由  $|H_a(j\Omega)|^2 \rightarrow H_a(s)$

$$\begin{cases} \text{令: } s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} & k = 0, 1, \dots, (N-1) \\ H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)} \end{cases}$$

# 例题

## 例题

已知,  $f_p = 5\text{kHz}$ ,  $\alpha_p = 3\text{dB}$ ,  $f_s = 10\text{kHz}$ ,  $\alpha_s = 30\text{db}$ , 按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器, 求阶数  $N$ 。

解:

写成标准形式:

$$\begin{cases} \Omega_p = 2\pi f_p = 10\pi \times 10^3 & \text{rad/s} \\ \alpha_p = 3\text{dB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_s = 2\pi f_s = 20\pi \times 10^3 & \text{rad/s} \\ \alpha_s = 30\text{db} \end{cases}$$

代入

$$1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha(\Omega)}{10}}$$

可得：

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{3}{10}} \\ 1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^3 \end{cases}$$

联立求解得：

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)^{2N} = \frac{10^{\frac{3}{10}} - 1}{10^3 - 1}$$

$$N = 4.98$$

但  $N$  为阶数，必须为整数。

因为  $N$  必须为整数，有

$$\begin{cases} N = 5 \\ \Omega_c = 10^4\pi \text{ rad/s} \end{cases}$$

计算  $s_k$ :

$$s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

$$\therefore H(s) = \frac{\Omega_c^5}{\prod_0^4(s - s_k)}$$

$$H(s) = \frac{\pi^5 \cdot 10^{20}}{(s + 10^4\pi)[s^2 + 0.618\pi \times 10^4 s + (\pi \times 10^4)^2]} \cdot \frac{1}{[s^2 + 1.618\pi \times 10^4 s + (\pi \times 10^4)^2]}$$

### 三、查表法

在最平响应 Butterworth 滤波器的设计中，我们总是由

$$\begin{cases} (\Omega_p, \alpha_p) \\ (\Omega_s, \alpha_s) \end{cases}$$

得到  $N, \Omega_c$ ，计算过程很复杂。

但我们发现由：

$$\left( \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right)^{2N} = \frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}-1}}{10^{\frac{\alpha_s}{10}-1}} \implies N$$

的过程与  $\Omega_c$  无关，即滤波器的阶数  $N$  与  $\Omega_c$  无关。

考虑：将计算过程标准化。

## 1 原理

令  $p = \frac{s}{\Omega_c}$  (归一化广义频率) 则：

$$s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \implies p_k = \frac{s_k}{\Omega_c} = e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \text{ 与 } \Omega_c \text{ 无关}$$

而

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s - s_k)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}\left(\frac{s}{\Omega_c} - \frac{s_k}{\Omega_c}\right)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p - p_k)}$$

此处， $p = s/\Omega_c$ ,  $p_k = s_k/\Omega_c$

令：

$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p - p_k)}$$

- ①  $H_a(p)$  仅与  $N$  有关，与  $\Omega_c$  无关；
- ②  $H_a(p)$  称为归一化传输函数。

## 2 查表法设计步骤

- ① 根据指定技术指标  $(\Omega_p, \alpha_p), (\Omega_s, \alpha_s)$ ，确定  $N, \Omega_c$ 。
- ② 由  $N$  查表得到归一化传输函数  $H_a(p)$ 。
- ③ 去归一化。

$$H_a(s) = H_a(p)|_{p=s/\Omega_c}$$

## 一、基本概念

(1) 技术要求  $H(e^{j\omega})$ , 即:  $(\omega_p, \alpha_p), (\omega_s, \alpha_s)$

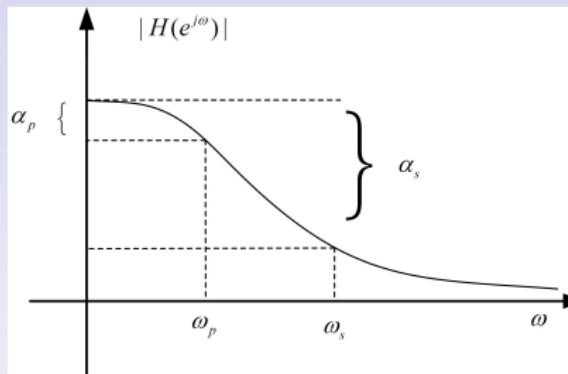


图: 数字滤波器的幅频特性指标示意图

(2) 衰减函数

$$\alpha(\omega) = -20 \lg \frac{|H(e^{j\omega})|}{|H(e^{j0})|} = 10 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega})|^2}$$

(3)  $H(e^{j\omega})$  与  $H_a(j\Omega)$  的不同之处在于:

- ①  $H(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的周期函数, 且周期为  $2\pi$ 。
- ②  $H(e^{j\omega})$  在  $\pi$  附近称为高频, 在  $0(2\pi)$  附近称为低频。

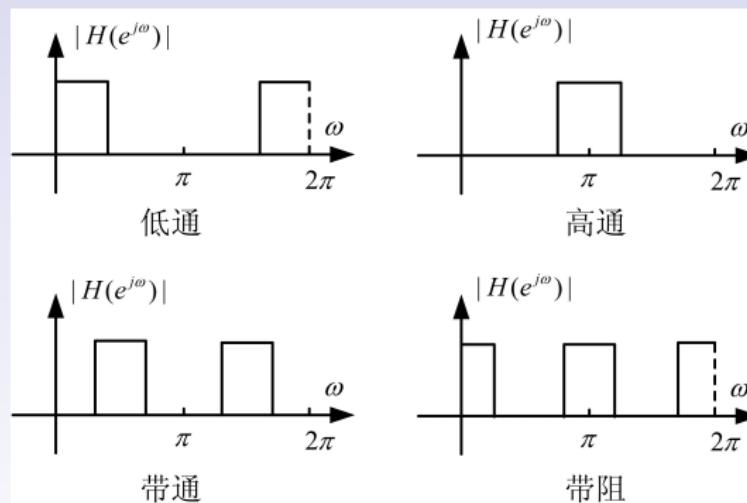


图: 各种理想数字滤波器的幅频特性

## 二、从 AF 设计 DF 的基本思想

1 将数字滤波器的技术指标转化为模拟滤波器的技术指标。

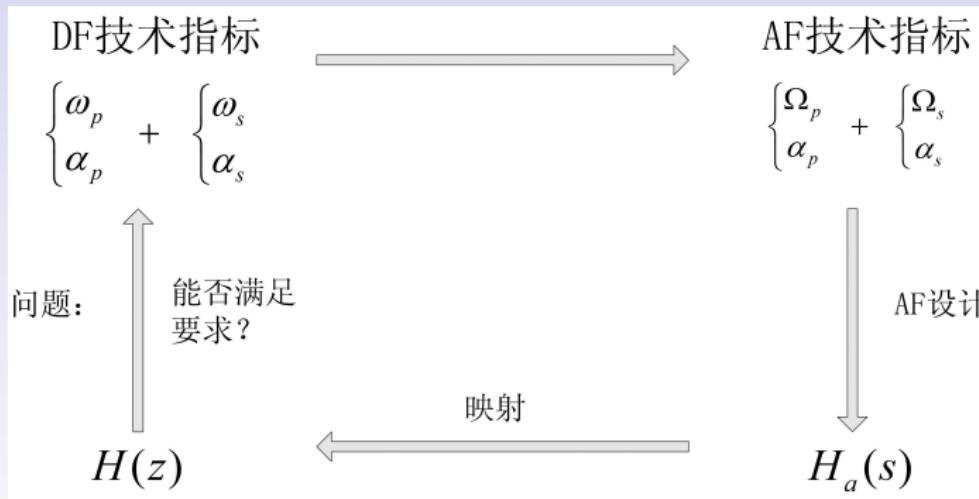
2 设计模拟滤波器，得到其系统函数  $H_a(s)$ 。

3  $H_a(s) \xrightarrow{\text{映射}} H(z)$  映射方法：

(1) 脉冲响应不变法

(2) 双线性映射法

## 从 AF 设计 DF 的基本思想的示意图



关键在于：找到一种映射关系，使得  $H(z)$  满足数字滤波器的技术指标。

## 映射关系需要满足的条件

如何使得  $H(z)$  满足数字滤波器的技术指标。

为此，映射关系要满足以下两条：

1 映射前后，系统的因果稳定性不变。

$\Leftrightarrow$  s 左半平面上任何一点，映射到 z 平面单位圆内部。

2 数字滤波器的频率响应函数  $H(e^{j\omega})$  能模仿模拟滤波器的频率响应函数  $H_a(j\Omega)$ 。

$\Leftrightarrow$  s 平面虚轴上的点映射到 z 平面单位圆上。

问题：已知  $H_a(s)$ , 求  $H(z)$

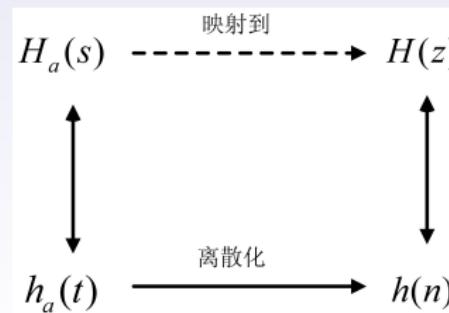
### 一、原理

设  $h_a(t) \longleftrightarrow H_a(s)$  且  $h(n) \longleftrightarrow H(z)$

令  $h(n) = h_a(t)|_{t=nT}$  (脉冲响应不变)

### 二、推导

思路： $H_a(s) \longrightarrow h_a(t) \longrightarrow h(n) \longrightarrow H(z)$



设  $H_a(s)$  只有单阶极点，即：

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s - s_i}$$

1  $H_a(s) \longrightarrow h_a(t)$  (利用拉氏反变换)

显然有：  $h_a(t) = LT^{-1}[H_a(s)]$

且：  $\frac{1}{s - s_0} \longleftrightarrow e^{s_0 t} \mu(t)$

$$h_a(t) = LT^{-1}[H_a(s)] = \sum_{i=1}^M A_i e^{s_i t} \mu(t)$$

2  $h_a(t) \longrightarrow h(n)$

前述可得：

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^M A_i e^{s_i t} \mu(t)$$

我们知道：  $x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$

令  $t = nT$

则： 
$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^M A_i e^{s_i nT} \mu(nT)$$

3  $h(n) \longrightarrow H(z)$

$$\begin{aligned} H(z) &= ZT[h(n)] = ZT \left[ \sum_{i=1}^M A_i e^{s_i n T} \mu(nT) \right] \\ &= \sum_{i=1}^M A_i ZT \left[ (e^{s_i T})^n \mu(n) \right] \end{aligned}$$

我们知道:  $a^n \mu(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$

令  $a = e^{s_i T}$ , 可得:

$$H(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

## 利用脉冲响应不变法映射的步骤

- ①  $H_a(s)$  进行因式分解，得到标准形式。

例如：

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s - s_k)} \rightarrow H_a(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s - s_i}$$

- ② 套公式。

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow H(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

### 三、映射关系的讨论

已知映射方式为：

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s - s_i} \longrightarrow H(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

问题在于： $H_a(s)$  与  $H(z)$  之间的映射关系，也就是说，如何沟通  $H_a(s)$  与  $H(z)$ 。

## 提纲

1  $H_a(s)$  与  $H(z)$  的关系

- (a)  $H_a(s)$  与  $\hat{H}_a(s)$
- (b)  $\hat{H}_a(s)$  与  $H(z)$

2 讨论

(a)  $H_a(s)$  与  $\hat{H}_a(s)$   
设

$$h_a(t) \longleftrightarrow H_a(j\Omega)$$

$$\hat{h}_a(t) \longleftrightarrow \hat{H}_a(j\Omega)$$

根据采样定理,

$$\hat{H}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}r)$$

令  $s = j\Omega$ , 可得:

$$\hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}r)$$

## └ 6.3 IIR-DF 的设计—脉冲响应不变法

## └ 6.3.2 脉冲响应不变法

(b)  $\hat{H}_a(s)$  与  $H(z)$ 

$$\begin{aligned}\hat{h}_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT)\delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\delta(t - nT)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又: } \hat{H}_a(s) &= LT[\hat{h}_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_a(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\delta(t - nT) \right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-snT} = H(z)|_{z=e^{sT}}\end{aligned}$$

## 说明

注意：分配函数的取样性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

令  $f(t) = e^{-st}$ ,  $t_0 = nT$ , 可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt = e^{-snT}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_a(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-snT} = H(z)|_{z=e^{sT}}\end{aligned}$$

即：

$$\hat{H}_a(s) = H(z)|_{z=e^{sT}}$$

通过上述推导可知：

$$\hat{H}_a(s) = H(z)|_{z=e^{sT}}$$

前述有：  $\hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}r)$

联立两者可得：

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}r)$$

## 2 讨论

### 提纲

1  $H_a(s)$  与  $H(z)$  的关系：

- (1)  $H_a(s)$  与  $\hat{H}_a(s)$
- (2)  $\hat{H}_a(s)$  与  $H(z)$

2 讨论：

- (1) 物理意义
- (2) 映射关系
- (3) 结论

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}r)$$

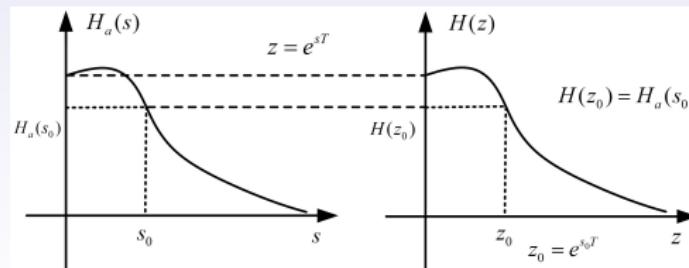
## (1) 物理意义

公式揭示了在脉冲响应不变法的原则下  $H_a(s)$  与  $H(z)$  的关系。即：

- a 先将  $H_a(s)$  在 s 平面虚轴上，以  $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$  为周期延拓。
- b 再按照  $z = e^{sT}$  关系映射到  $H(z)$

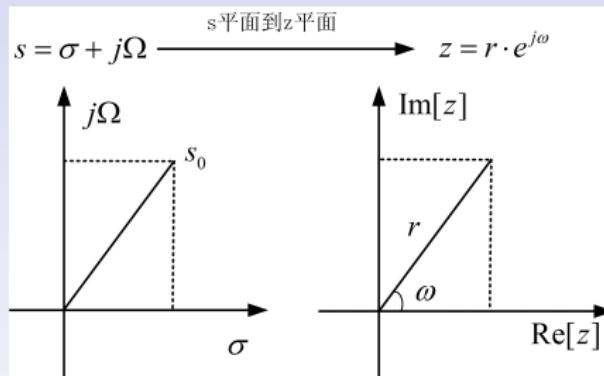
## (2) 映射关系

- a 在数值上：



b 映射关系为:  $z = e^{sT}$

$$\text{设 } s = \sigma + j\Omega, \quad z = r \cdot e^{j\omega}$$



注意:

映射关系为:

$$z = e^{sT}$$

$Z$  平面的极坐标表示方式为:

$$z = r e^{j\omega}$$

则有：

$$z = re^{j\omega} \quad \text{同时} \quad z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\Omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T}$$

对比可得：

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\omega = \Omega T$$

可以看出：

① 根据  $r = e^{\sigma T}$ , 可知：

$$\begin{cases} \text{若 } \sigma < 0, \text{ 则 } r < 1 \rightarrow s \text{ 左半平面映射到 } z \text{ 平面单位圆内。} \\ \text{若 } \sigma = 0, \text{ 则 } r = 1 \rightarrow s \text{ 平面虚轴映射到 } z \text{ 平面单位圆上。} \\ \text{若 } \sigma > 0, \text{ 则 } r > 1 \rightarrow s \text{ 右半平面映射到 } z \text{ 平面单位圆外。} \end{cases}$$

② 根据  $e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j(\Omega + \frac{2\pi}{T} M)T}$ , 可知：

当  $\sigma$  不变时, 模拟频率  $\Omega$  变化  $\frac{2\pi}{T}$  的整数倍时, 映射值不变。

## (3) 结论

$s$  平面上任何一个宽度为  $\frac{2\pi}{T}$  的水平横带区域都一定重复映射到全体  $z$  平面，且该映射为一多值映射。

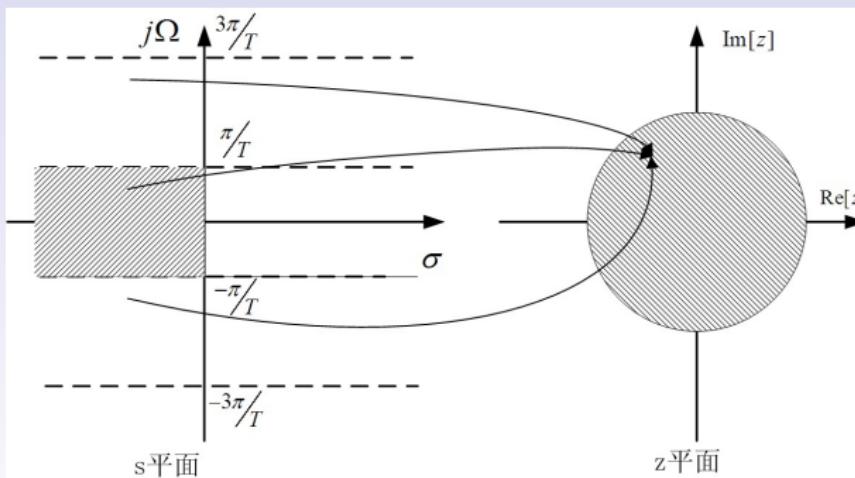


图: 脉冲响应不变法:  $s$  平面到  $z$  平面映射关系示意图

## 四、脉冲响应不变法的频率混叠

### 1 原因

映射是多值映射，不是单值映射。

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}r)$$

令  $z = e^{j\omega}$  ,  $s = j\Omega$ , 可得：

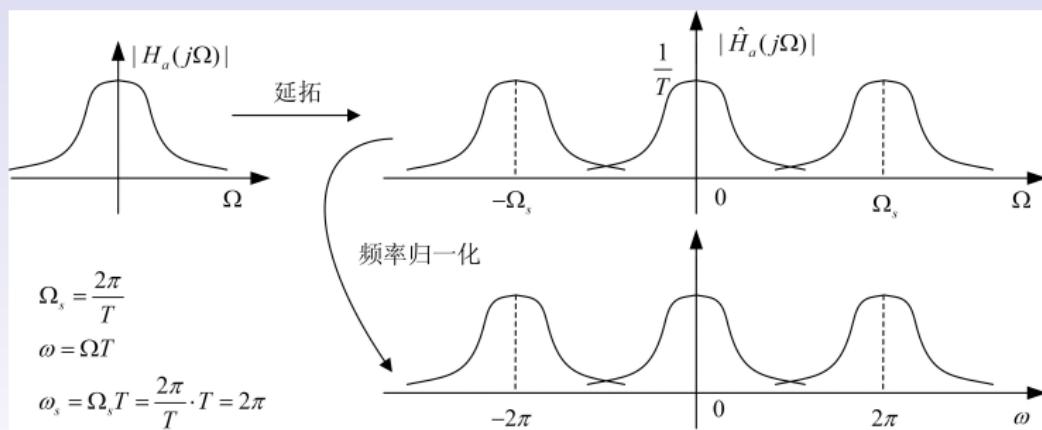
$$H(e^{j\omega})|_{e^{j\omega}=e^{j\Omega T}} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}r) \quad (1)$$

则：

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}r)$$

可见： $H(e^{j\omega})$  是  $H_a(j\Omega)$  以  $\frac{2\pi}{T}$  为周期在  $j\Omega$  轴上进行延拓后，在频率轴上归一化得到的结果。

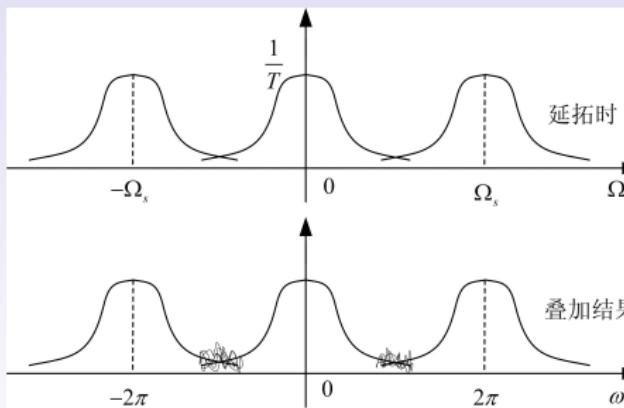
$$H_a(j\Omega) \xrightarrow{\text{延拓}} \hat{H}_a(j\Omega) \xrightarrow{\omega = \Omega T} H(e^{j\omega})$$



图：数字信号与模拟信号频谱关系示意图

## 2 频谱失真的含义

- (1) 若  $H_a(j\Omega)$  为带限信号，即  $\frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_c (f_s \geq 2f_c)$ ，则无重叠，此为理想情况。
- (2) 若  $H_a(j\Omega)$  为非带限信号，即  $f_s \leq 2f_c$ ，此时的  $H_a(j\Omega)$  在延拓后总存在混叠现象。且在  $\frac{\pi}{T}$  处失真最大，对于数字滤波器，即在  $\omega = \pi$  处，失真最大。



- (3) 失真不可避免，因此频率响应不变法只能用于设计低通、带通数字滤波器的设计。不适合高通、带阻数字滤波器的设计。

## 五、脉冲响应不变法的优点与缺点

### 1 优点：

- (1) 原理简单, ( $\omega = \Omega T$ ), ( $r = e^{\sigma T}$ );
- (2) 映射前后频率为线性关系。

### 2 缺点

非单值映射, 存在频率失真, 应用范围限制在低通和带通,  
不适合高通和带阻滤波器的设计。

## 双线性变换法 (BLT)

- 脉冲响应不变法主要的缺点是产生了频率混叠
- 其原因为：LP-AF 不带限于  $\frac{\pi}{T}$ ，离散后在  $\omega = \pi$  处产生了频率混叠

直观的想法：

将整个模拟轴  $\xrightarrow{\text{非线性压缩}} (-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$

## 一、BLT 的基本思路

① 思路：

将

连续系统的微分方程 利用数值积分方法转化为 差分方程

从而完成离散系统的设计。

② 推导：

[注：] 这里以一阶系统为例推导，这种关系在高阶系统中依然存在。

设一个一阶连续时间系统，其传输函数为：

$$H_a(s) = \frac{d}{s + c} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$H_a(s) = \frac{d}{s + c} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

化简后有：

$$\therefore s \cdot Y(s) + c \cdot Y(s) = d \cdot X(s)$$

转换为微分方程：

$$\therefore y'(t) = -c \cdot y(t) + d \cdot x(t)$$

令  $t = nT$ ,

$$y'(nT) = -c \cdot y(nT) + d \cdot x(nT)$$

又有,

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau + y(t_0)$$

## └ 6.4 IIR-DF 的设计—双线性变换法 (BLT)

## └ 6.4.1 双线性变换法

令  $t = nT, \quad t_0 = (n - 1)T$

$$y(nT) = \int_{(n-1)T}^{nT} y'(\tau) d\tau + y[(n-1)T]$$

当  $T$  很小时,

$$y(nT) \approx [y'(nT) + y'((n-1)T)] \frac{T}{2} + y[(n-1)T]$$

简化符号:

$$nT \rightarrow n \quad x(n) = x_a(nT) = x_a(t)|_{t=nT}$$

得:

$$\begin{cases} y'(n) = -c \cdot y(n) + d \cdot x(n) \\ y(n) = [y'(n) + y'(n-1)] \frac{T}{2} + y(n-1) \end{cases}$$

## └ 6.4 IIR-DF 的设计—双线性变换法 (BLT)

## └ 6.4.1 双线性变换法

联立求解，得：

$$y(n) = [-c \cdot y(n) + d \cdot x(n) - c \cdot y(n-1) + d \cdot x(n-1)] \frac{T}{2} + y(n-1)$$

等式两边做 z 变换，整理后可得：

$$H(z) = \frac{d}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + c}$$

同时有：

$$H_a(s) = \frac{d}{s + c}$$

对比，可得：

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

## 二、映射关系的讨论

显然有：

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

令  $z = e^{s_1 T}$ , 则有：

$$\begin{cases} s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} \\ z = e^{s_1 T} \end{cases}$$

映射可以分为两步：

$$\begin{cases} 1^0 & s \longrightarrow s_1 \\ 2^0 & s_1 \longrightarrow z \end{cases}$$

## └ 6.4 IIR-DF 的设计—双线性变换法 (BLT)

## └ 6.4.1 双线性变换法

1  $s \rightarrow s_1$

$s$  平面映射到  $s_1$  平面。(在此仅讨论  $s$  虚轴上的任一点)

令  $s = j\Omega$ ,  $s_1 = j\Omega_1$ , 代入  $s = \frac{2}{T} \frac{1-e^{-s_1 T}}{1+e^{-s_1 T}}$

可得:

$$\begin{aligned} j\Omega &= \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\Omega_1 T}}{1 + e^{-j\Omega_1 T}} \\ &= \frac{2}{T} \frac{e^{-j\frac{\Omega_1}{2} T} \left[ e^{j\frac{\Omega_1}{2} T} - e^{-j\frac{\Omega_1}{2} T} \right]}{e^{-j\frac{\Omega_1}{2} T} \left[ e^{j\frac{\Omega_1}{2} T} + e^{-j\frac{\Omega_1}{2} T} \right]} \\ &= \frac{2}{T} \cdot j \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1}{2} T\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1}{2} T\right)$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1}{2} T\right)$$

讨论：

$$\begin{cases} \Omega = 0 & \longrightarrow \Omega_1 = 0; \\ \Omega = \infty & \longrightarrow \Omega_1 = \frac{\pi}{T}; \\ \Omega = -\infty & \longrightarrow \Omega_1 = -\frac{\pi}{T}. \end{cases}$$

即，

$$\begin{cases} \text{当 } \Omega \text{ 从 } (0 \rightarrow \infty) \text{ 变化时,} \\ \Omega_1 \text{ 从 } (0 \rightarrow \frac{\pi}{T}) \text{ 变化。} \end{cases}$$

注意，这些变换与  $\sigma$  无关，S 平面的横坐标可取任意值。也就是说可以看做是水平横带。

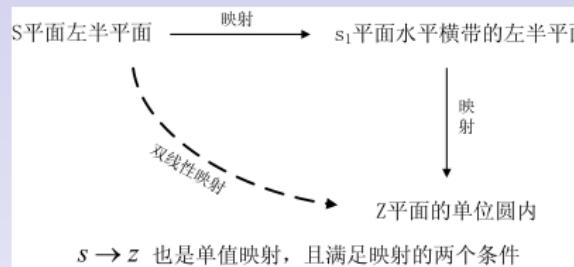
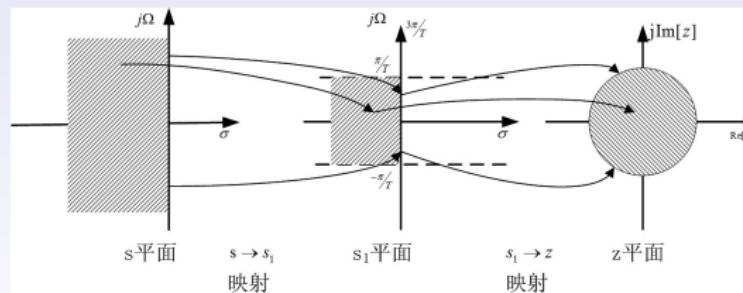
s 平面  $\rightarrow$  水平横带区域 (宽  $\frac{2\pi}{T}$ )

## └ 6.4 IIR-DF 的设计—双线性变换法 (BLT)

## └ 6.4.1 双线性变换法

**2**  $s_1 \rightarrow z$ 

(单值的, 脉冲响应不变)

s 到  $s_1$  到 z 平面的映射示意图s 到  $s_1$  到 z 平面的映射示意图

①  $\omega \rightarrow \Omega$  的关系

$$\begin{cases} \Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1}{2} T\right) \\ \omega = \Omega_1 T \text{ (脉冲响应不变法)} \end{cases}$$

可得：

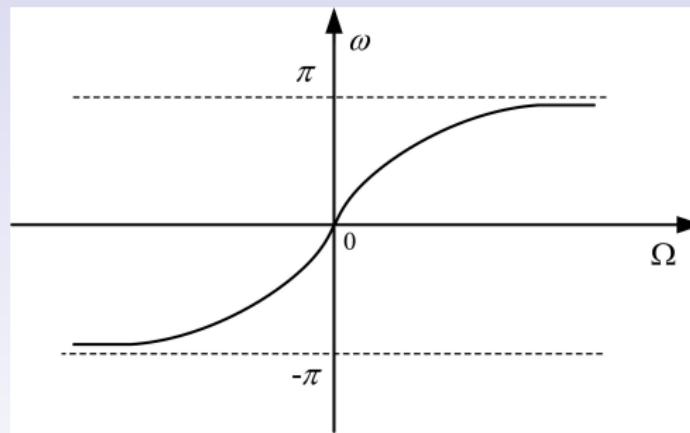
$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

说明

- ①  $\omega = \Omega_1 T$  是脉冲响应不变法得到的映射。
- ② 且有：

$$\begin{cases} \Omega : (0 \rightarrow \infty) \Rightarrow \Omega_1 : (0 \rightarrow \frac{\pi}{T}) \Rightarrow \omega : (0 \rightarrow \pi) \\ \Omega : (-\infty \rightarrow 0) \Rightarrow \Omega_1 : (-\frac{\pi}{T} \rightarrow 0) \Rightarrow \omega : (-\pi \rightarrow 0) \end{cases}$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



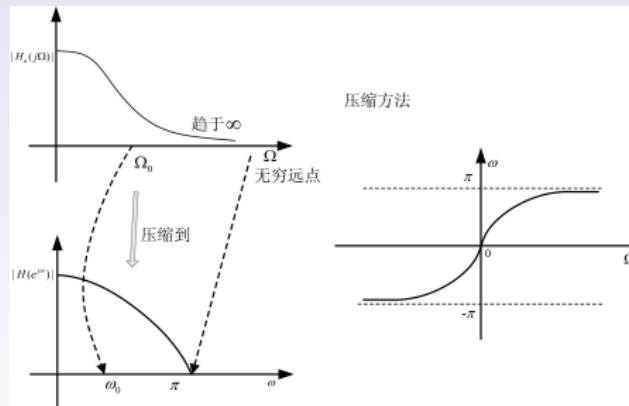
图：双线性变换频率映射关系示意图

### 三、BLT 的特点

- ① 优点：无频率混叠。
- ② 缺点：映射前后频率为非线性关系，直接影响到所涉及 DF 的频率响应能否逼真的模仿 AF 的频率响应。

解释：

- ① BLT 方法将  $\Omega$  轴  $(0, \infty)$ ，压缩到  $\omega$  轴  $(0, \pi)$ ，且为一一映射，但为非均匀压缩。



- ② 适用范围：适用于具有片段常数特性的滤波器，可设计高通、低通、带通、带阻滤波器。

# LP-DF 完整设计方法

假设给定技术参数:  $(\omega_p, \alpha_p), (\omega_s, \alpha_s)$ ,

- ① 将设计的 LP-DF 参数转变为相应的 LP-AF 的技术指标  
 $(\Omega_p, \alpha_p), (\Omega_s, \alpha_s)$ ,
- ② 设计 LP-AF, 得到  $H_a(s)$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ 求 } N, \Omega_c \rightarrow |H_a(j\Omega)|^2 \\ 2) \text{ 查表, 得到 } H_a(p) \\ 3) \text{ 去归一化, } H_a(s) = H_a(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \end{array} \right.$$

- ③  $H_a(s) \xrightarrow{\text{映射}} H(z)$ 
  - 脉冲响应不变法
  - 双线性变换法

# 一、技术指标参数的转换

## 1 说明：

(a) LP-DF 指标可用三种形式给出。

$$(\omega_p, \alpha_p) \quad (\Omega_p, \alpha_p) \quad (f_p, \alpha_p)$$

(b) 数字域频率  $\omega$  及其对应的模拟域频率的关系总是不变的。

$$\omega = \Omega T = 2\pi f T = \frac{2\pi f}{f_s}$$

注：数字域频率是模拟角频率对采样频率的归一化频率。

单位分别为：

$$\begin{cases} f & : \text{Hz} \\ \Omega & : \text{rad/s} \\ \omega & : \text{rad} \end{cases}$$

2 将设计的 LP-DF 技术指标转换为相应的 LP-AF 的技术指标时，转换的方式将由采用的映射方式决定：

在转换滤波器技术指标时，

- ① 将给定的技术指标（三种方式之一）转换为数字域频率  $\omega$  形式，转换关系为：

$$\omega = \Omega T = 2\pi f T = \frac{2\pi f}{f_s}$$

- ② 在数字滤波器技术指标转换为模拟滤波器技术指标时，频率映射方式遵循后期系统函数的映射方式：

$$\begin{cases} \text{脉冲法} & : \quad \omega = \Omega \cdot T \\ \text{BLT 法} & : \quad \Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{cases}$$

## 例题

以两种不同的映射方法，将数字滤波器技术指标

$\omega_p = 0.4\pi \text{ rad}$ ,  $\alpha_p = 3 \text{ dB}$  转换为模拟滤波器技术指标，设

$$T = \frac{1}{2000} \text{ s}$$

解：

① 脉冲法：  $\omega = \Omega \cdot T$

$$\therefore \Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = \frac{0.4\pi}{1/2000} = 800\pi \text{ rad/s}$$

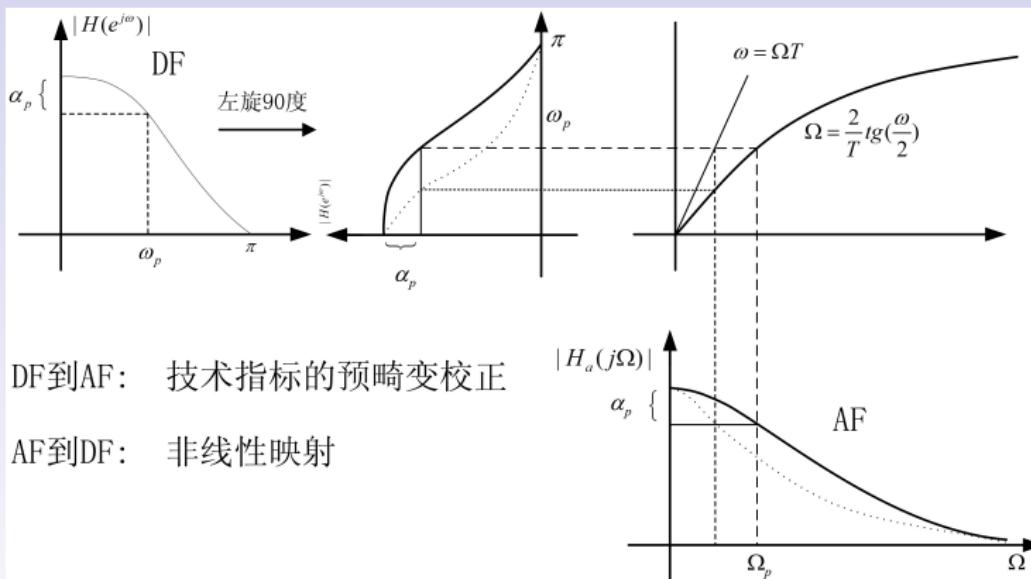
$$\text{或: } f_p = \frac{\Omega_p}{2\pi} = 400 \text{ Hz}$$

② BLT 法：  $\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  (预畸变)

$$\therefore \Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 4000 \operatorname{tg}(0.2\pi) = 2906 \text{ rad/s}$$

$$\text{或: } f_p = \frac{\Omega_p}{2\pi} = 463 \text{ Hz}$$

### 三、预畸变的解释



## 例题

请设计一个低通 *IIR-DF*, 要求:

- (1) 模拟滤波器采用 *Butterworth* 型, 映射方法选用双线性变换法;
- (2) 当  $0 \leq f \leq 25\text{Hz}$  时, 衰减  $\leq 3 \text{ dB}$ ;
- (3) 当  $0 \leq f \leq 50\text{Hz}$  时, 衰减  $\geq 38 \text{ dB}$ ;
- (4) 取样频率:  $f_0 = 200\text{Hz}$

解: 首先, 解题步骤:

- ① 将 LP-DF 技术要求, 转化为 LP-AF 技术要求。
- ② 设计 LP-AF;
  - ① 由技术指标求  $N$ 、 $\Omega_c$ ;
  - ② 查表得  $H_a(p)$ ;
  - ③ 去归一化, 得到  $H_a(s)$ 。
- ④  $H_a(s) \longrightarrow H(z)$

## 1<sup>0</sup> 技术指标的转换:

由题意知, 这里 DF 技术指标由  $f_p, f_s$  的形式给出, 需转换为  $\omega_p, \omega_s$  的形式。

$$\begin{cases} f_p = 25 \text{Hz} \implies \omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_0} = 0.25\pi \text{ rad} \\ \alpha_p = 3 \text{dB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_s = 50 \text{Hz} \implies \omega_s = 2\pi \frac{f_s}{f_0} = 0.5\pi \text{ rad} \\ \alpha_s = 38 \text{dB} \end{cases}$$

下一步，将 DF 技术指标转换为 AF 技术指标，需根据所选的映射方法规定的映射关系转换。

对于 BLT 法：

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

则有：

$$\begin{cases} \Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 2f_0 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 400 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 165.685 \text{ rad/s} \\ \alpha_p = 3 \text{ dB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 2f_0 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 400 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 400 \text{ rad/s} \\ \alpha_s = 38 \text{ dB} \end{cases}$$

2<sup>0</sup> 设计 LP-AF(1) 确定阶数 N,  $\Omega_c$ ;

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)^{2N} = \frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}$$

代入上述参数, 可得:

$$\left(\frac{165.685}{400}\right)^{2N} = \frac{10^{0.3} - 1}{10^{3.8} - 1}$$

得:  $N = 4.96$ , 因为 N 需为整数, 取 N=5.

$$\alpha_p = 3dB \implies \Omega_c = \Omega_p = 165.685 \text{ rad/s}$$

(2) 根据,  $N=5$ , 查表可得:

$$H_a(p) = \frac{1}{(p^2 + 0.618p + 1)(p^2 + 1.618p + 1)(p + 1)}$$

(3) 去归一化;

$$\begin{aligned} H_a(s) &= H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \\ &= \frac{\Omega_c^5}{(s^2 + 0.618s \cdot \Omega_c + \Omega_c^2)(s^2 + 1.618s \cdot \Omega_c + \Omega_c^2)(s + \Omega_c)} \end{aligned}$$

其实不必计算出来, 后面还可以化简。

例题

例题 1

$$3^0 \quad H_a(s) \longrightarrow H(z)$$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \qquad \qquad H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$$

$$\implies H(z) = \left[ H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \right]_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a(p) \Big|_{p=\frac{2}{\Omega_c T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

而:

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \implies \frac{2}{\Omega_c T} = c \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

$$\therefore H(z) = H_a(p) \Big|_{p=c \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

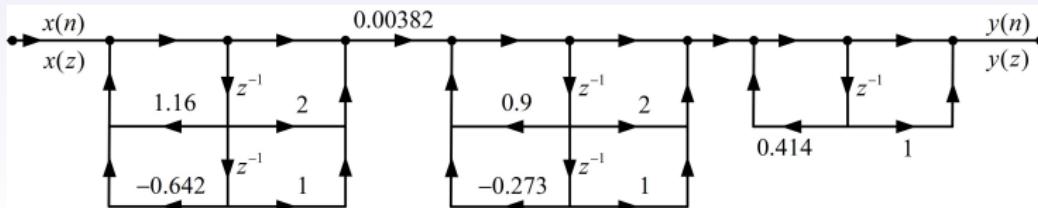
本题中:

$$\omega_c = \frac{\pi}{4} \implies p = 2.414 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$\therefore H(z) = H_a(p) \Big|_{p=2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\begin{aligned}
 H(z) &= H_a(p) \Big|_{p=2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\
 &= \frac{1}{((2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2 + 0.618(2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}) + 1)} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{((2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2 + 1.618(2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}) + 1)} \cdot \frac{1}{(2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1)} \\
 &= \frac{0.00382(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.16z^{-1} + 0.642z^{-2}} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.273z^{-2}} \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.414z^{-1}}
 \end{aligned}$$

4<sup>0</sup> 画出其网络结构。



## 例题

用脉冲响应不变法设计一个 3 阶 Butterworth 滤波器 (LP-DF),  
且  $\omega_c = 1 \text{ rad}$ , 采样频率  $f_0 = 2\pi \text{ kHz}$ .

解:

- ① 求  $N$ ,  $\Omega_c$ ; 依题意得:

$$N = 3, \quad \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = \omega_c f_0 = 2\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$$

- ② 查表得:

$$N = 3 \implies H_a(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)(p + 1)}$$

去归一化:  $H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$  代入可得  $H_a(s)$

### ③ 因式分解

$$\text{令: } H_a(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{ap+b}{p^2+p+1} \implies a = -1 \quad b = 0$$

$$\begin{aligned} H_a(p) &= \frac{1}{p+1} - \frac{p}{p^2+p+1} \\ &= \frac{1}{p+1} + \frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{p + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{p + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

去归一化:  $H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$

$$H_a(s) = \left[ \frac{1}{s + \Omega_c} + \frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{s + (\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})\Omega_c} - \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{s + (\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})\Omega_c} \right] \cdot \Omega_c$$

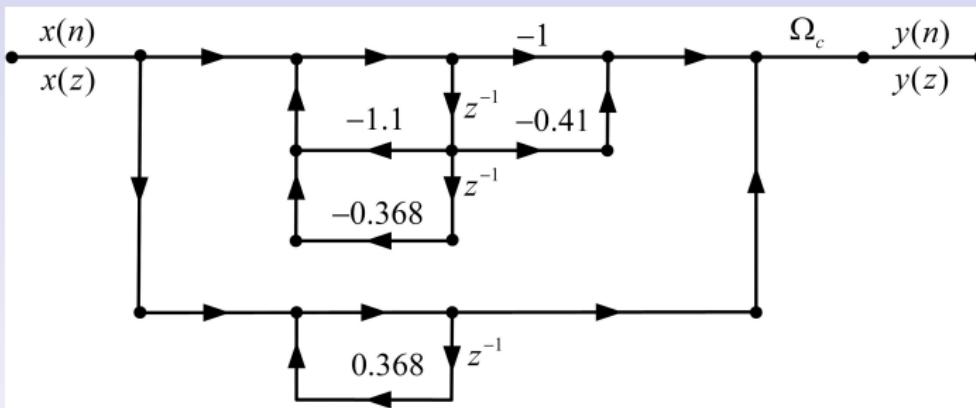
$$H(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \quad (\frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}})$$

$$H(z) = \left[ \frac{1}{1 - e^{-\Omega_c T} z^{-1}} + \frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - e^{-(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})\Omega_c T} z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - e^{-(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})\Omega_c T} z^{-1}} \right] \cdot \Omega_c$$

而:  $\Omega_c T = \omega_c = 1$

$$= \left[ \frac{-1 - 0.41z^{-1}}{1 + 1.1z^{-1} + 0.368z^{-2}} + \frac{1}{1 - 0.368z^{-1}} \right] \cdot \Omega_c$$

① 画出网络结构图：



图：网络结构图

## 例题

用双线性变换法设计一个 3 阶 Butterworth 滤波器 (LP-DF),  
采样频率  $f_0 = 1.2\text{kHz}$ ,  $\omega_c = \frac{2}{3}\pi \text{ rad.}$

解:

$$\text{依题意有: } N = 3, \quad \Omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = 2.4 \times \sqrt{3} \times 10^3$$

查表得:

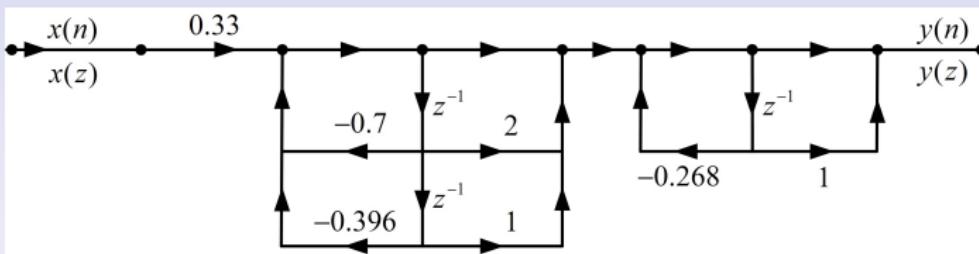
$$N = 3 \implies H_a(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)(p + 1)}$$

去归一化:  $H_a(s) = H_a(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$

$$\therefore H(z) = \left[ H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \right]_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a(p) \Big|_{p=ctg(\frac{\omega_c}{2}) \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\begin{aligned} \therefore H(z) &= H_a(p) \Big|_{p=\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{1}{\left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1 \right] \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1 \right)} \\ &= \frac{9(1+z^{-1})^2}{(4+\sqrt{3})+4z^{-1}+(4-\sqrt{3})z^{-2}} \cdot \frac{1+z^{-1}}{3+\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})z^{-1}} \\ &= \frac{0.33(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1+0.7z^{-1}+0.396z^{-2}} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1+0.268z^{-1}} \end{aligned}$$

画出网络结构图：



图：网络结构图