

第 7 章 FIR 数字滤波器的设计

笪邦友

中南民族大学 电子信息工程学院

2018 年 11 月 26 日

目录

- ① 绪论
- ② 线性相位 FIR 数字滤波器的条件与特点
 - 线性相位 FIR 数字滤波器
 - 具有第一类线性相位结构的 FIR-DF
 - 具有第二类线性相位结构的 FIR-DF
 - 线性相位 FIR-DF 的零点分布特性
- ③ 用窗函数法设计 FIR-DF
 - 概述
 - 窗函数法设计原理
 - $h(n)$ 的幅度特性与截断效应
- ④ 频率采样法
 - 频率域采样回顾
- ⑤ IIR 和 FIR 数字滤波器的比较
 - 频率域采样回顾

7.1 绪论

一、IIR 数字滤波器的设计

IIR-DF 的设计方法是：

$$AF \xrightarrow{\text{映射}} DF$$

1 优点：

利用模拟滤波器设计成熟的理论、设计图表，保留了其优良的幅度特性；

2 缺点：

只考虑了幅度特性，没有考虑相位特性。（一般非线性）

二、FIR 数字滤波器设计

- (1) $FIR - DF$ 在保证幅度特性的同时，很容易做到严格的线性相位。
- (2) 对于 $FIR - DF$:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \\ &= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots + h(N-1)z^{-(N-1)} \\ &= \frac{h(0)z^{N-1} + h(1)z^{N-2} + \cdots + h(N-1)}{z^{N-1}} \end{aligned}$$

可见： $H(z)$ 在 z 平面上有 $N-1$ 个零点，仅在 $z=0$ 处有一个 $N-1$ 阶极点。所以， $H(z)$ 永远稳定。

结论：稳定和线性相位是 FIR-DF 最突出的优点。

三、设计方法

- 1 窗函数法
- 2 频率采样法
- 3 等波纹逼近法

本章仅讲述窗函数法。

7.2 线性相位 FIR 数字滤波器的条件与特点

7.2.1 线性相位 FIR 数字滤波器

7.2.2 具有第一类线性相位结构的 $FIR - DF$

7.2.3 具有第二类线性相位结构的 $FIR - DF$

7.2.4 线性相位 FIR-DF 的零点分布特性

7.2.1 线性相位 FIR 数字滤波器

一、FIR-DF 的特点

对于数字系统，其表达方式有：

① 差分方程：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

② 系统函数：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

对于 FIR-DF，没有回馈支路， $H(z)$ 分母为 1。

即：

$$\begin{cases} y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \\ H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \end{cases}$$

对比 Z 变换定义：

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

有：

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

二、线性相位 FIR 数字滤波器的相位特性

设 $h(n)$ 长度为 N , 则:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

前面讲过,

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{幅频特性函数}} \cdot \underbrace{e^{j\varphi(\omega)}}_{\text{相频特性函数}}$$

此处引入新的概念，

$$\text{令} \quad H(e^{j\omega}) = H_g(\omega) \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

其中：

$$\begin{cases} H_g(\omega) : \text{幅度特性} \\ \theta(\omega) : \text{相位特性} \end{cases}$$

注意：

- $H_g(\omega)$ 是 ω 的实函数，可能取负值
- $|H(e^{j\omega})|$ 总为正值

线性相位 FIR-DF 指的是： $\theta(\omega)$ 是 ω 的线性函数，即：

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\tau \cdot \omega & \text{第一类线性相位} \\ \theta(\omega) = \theta_0 - \tau \cdot \omega & \text{第二类线性相位} \end{cases} \quad \left(\text{一般 } \theta_0 = -\frac{\pi}{2} \right)$$

前面第五章曾指出：

如 FIR-DF 具有线性相位结构，则：

$$h(n) = \pm h(N-1-n)$$

且，

$$\begin{cases} + : \text{第一类线性相位结构} \\ - : \text{第二类线性相位结构} \end{cases}$$

下面就来证明这一点：

$$\text{FIR-DF 具有线性相位} \iff h(n) = \pm h(N-1-n)$$

7.2.2 具有第一类线性相位的 FIR-DF

为使滤波器对实信号的处理结果仍为实信号，一般要求 $h(n)$ 为实序列。

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega) \cdot e^{j\theta(\omega)} \quad \text{其中, } \theta(\omega) = -\tau\omega$$

两个问题：

- (1) 该型 FIR-DF 的 $h(n)$ 满足什么条件？(时域约束条件)
- (2) $H_g(\omega)$ 具有什么特点？

一、 $h(n)$ 需满足的时域约束条件

$$h(n) = h(N-1-n)$$

证明：

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n) - j \cdot \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \theta(\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)} \right] = -\tau\omega$$

$$\therefore \theta(\omega) = -tg^{-1} \left[\frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)} \right] = -\tau\omega$$

消去负号后，两边同时取 \tan 函数，可得：

$$\frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)} = tg(\tau\omega) = \frac{\sin(\tau\omega)}{\cos(\tau\omega)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left[\sin(\omega n) \cos(\omega\tau) - \cos(\omega n) \sin(\omega\tau) \right] \cdot h(n) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega(n - \tau)) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega(n - \tau)) = 0$$

分析：

显然，函数 $h(n) \sin(\omega(n - \tau))$ 关于求和区间的中心 $(N-1)/2$ 奇对称是其一组解。

(a) $\sin(\omega(n - \tau))$ 关于 $n = \tau$ 奇对称；

(b) 我们猜想，如果取 $\tau = \frac{N-1}{2}$ ， $h(n)$ 要关于 $\frac{N-1}{2}$ 偶对称。

下面，令 $\tau = \frac{N-1}{2}$ ，则有：

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left(\omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left(\omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right) = 0$$

展开公式有：

$$\begin{aligned} \text{左边} &= h(0) \sin\left(\frac{N-1}{2}\omega\right) + h(1) \sin\left(\frac{N-3}{2}\omega\right) + h(2) \sin\left(\frac{N-5}{2}\omega\right) + \cdots \\ &\quad - h(N-1) \sin\left(\frac{N-1}{2}\omega\right) - h(N-2) \sin\left(\frac{N-3}{2}\omega\right) - \cdots \\ &= (h(0) - h(N-1)) \sin\left(\frac{N-1}{2}\omega\right) + (h(1) - h(N-2)) \sin\left(\frac{N-3}{2}\omega\right) + \cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴ 必有：

$$\begin{cases} h(0) = h(N-1) \\ h(1) = h(N-2) \\ \dots \quad \dots \end{cases}$$

我们看最后的讨论结果：

$$\begin{cases} h(0) = h(N-1) \\ h(1) = h(N-2) \\ h(2) = h(N-3) \\ h(3) = h(N-4) \\ \dots \quad \dots \end{cases}$$

即：

$$h(n) = h(N-1-n)$$

所以， $h(n)$ 关于 $\frac{N-1}{2}$ 偶对称。

二、幅度特性 $H_g(\omega)$

当

$$h(n) = h(N-1-n)$$

分两种情况讨论：

$$\begin{cases} N = \text{偶数} \\ N = \text{奇数} \end{cases}$$

(1) N 为奇数： $h(n) = h(N-1-n)$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

则：

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z)|_{z=e^{j\omega}} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \left[e^{-j\omega n} + e^{-j(N-1-n)\omega} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left[\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \left[e^{-j\omega(n-\frac{N-1}{2})} + e^{j\omega(n-\frac{N-1}{2})} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right] \\ &= \underbrace{\left[2 \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right]}_{\text{实数}} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}}_{\text{相位}} \\ &= H_g(\omega) \cdot e^{j\theta(\omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= H_g(\omega) \cdot e^{j\theta(\omega)} \\
 &= \underbrace{\left[2 \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right]}_{\text{实数}} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}}_{\text{相位}}
 \end{aligned}$$

则有：

$$\begin{cases}
 H_g(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \\
 \theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega \quad (\text{即 } \tau = \frac{N-1}{2})
 \end{cases}$$

(2) N 为偶数:

$$h(n) = h(N - 1 - n)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)} \right]$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[e^{-j\omega n} + e^{-j(N-1-n)\omega} \right]$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left[2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \right]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left[2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \right]$$

对比可得：

$$\begin{cases} H_g(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \cos \left[\omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right] \\ \theta(\omega) = -\frac{N-1}{2} \omega \end{cases}$$

结论：

$$\text{FIR-DF 具有第一类线性相位} \iff h(n) = h(N-1-n)$$

(1) N 为奇数:

$$\begin{cases} H_g(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \\ \theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega \end{cases}$$

(2) N 为偶数:

$$\begin{cases} H_g(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] \\ \theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega \end{cases}$$

三、幅度特性： $H_g(\omega)$ 的对称性

① 第一类线性相位结构，N 为奇数

$$H_g(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \cos \left[\omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

特点： $H_g(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 偶对称。

证明：只需证：

$$H_g(\pi + \omega) = H_g(\pi - \omega)$$

即可，令 $k = \frac{N-1}{2} - n$

只需证：

$$\cos(k(\pi + \omega)) = \cos(k(\pi - \omega))$$

而

$$\cos(k\pi - \theta) = (-1)^k \cdot \cos\theta \quad (\text{略})$$

② 第一类线性相位结构, N 为偶数

特点: 与情况 1 不同的是: $H_g(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 奇对称。

$$H_g(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \cos \left[\omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right]$$

只需证:

$$\cos \left(\left(\frac{N}{2} - n - \frac{1}{2} \right) \omega \right) \quad \text{的对称性}$$

只需证:

$$\cos \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \omega \right) \quad \text{的对称性}$$

只需往证:

$$\cos \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) (\pi + \theta_0) \right] = -\cos \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) (\pi - \theta_0) \right] \quad \text{自证}$$

7.2.3 第二类线性相位结构的 FIR-DF

同上述分析过程：

$$\text{FIR-DF 具有第二类线性相位} \iff h(n) = -h(N-1-n)$$

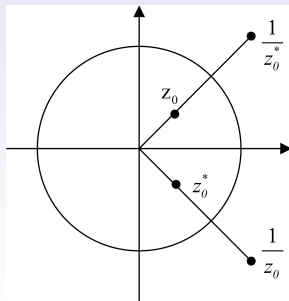
7.2.4 线性相位 FIR-DF 的零点分布特性

见第五章讲义。

对于实 $h(n)$ ，线性相位结构 FIR 数字滤波器的零点以

$$z_0, \quad \frac{1}{z_0}, \quad z_0^*, \quad \frac{1}{z_0^*}$$

成组成对的形式出现，有一个是零点，其余的都是零点。



例题

某一 FIR-DF, $H(z) = \frac{1}{10}(1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4})$

(1) 判断其是否具有线性相位;

(2) 求出 $H_g(\omega), \theta(\omega)$ 。

(3) 画出其直接型网络结构以及线性相位网络结构。

解：

(1) 依题意，有 $h(n) = \frac{1}{10}\{1, 2, 4, 2, 1\}$,

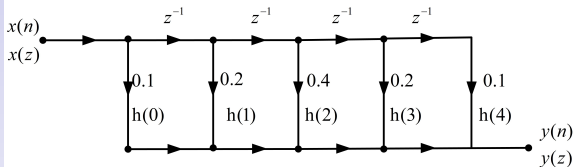
即 $N=5$, $h(n) = h(N-1-n)$, 为第一类线性相位结构。

(2)

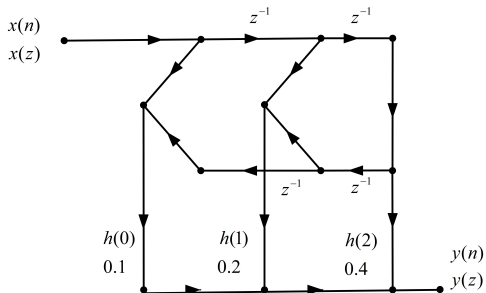
$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= H(z)|_{z=e^{j\omega}} \\
 &= \frac{1}{10} \left(1 + 2e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} + e^{-j4\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{10} e^{-j2\omega} \left(e^{j2\omega} + 2e^{j\omega} + 4 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{10} e^{-j2\omega} \left[4 + 4\cos(\omega) + 2\cos(2\omega) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H_g(\omega) = \frac{1}{10} [4 + 4\cos(\omega) + 2\cos(2\omega)] \\ \varphi(\omega) = -2\omega \quad \left(\tau = \frac{N-1}{2} \right) \end{cases}$$

直接型：



线性相位型



7.3 用窗函数法设计 FIR-DF

7.3.1 概述

在 IIR-DF 设计方法中，我们

- 用实际滤波器 逼近 理想滤波器。

- 当所涉及的实际滤波器满足技术要求时，停止逼近。

在 FIR-DF 设计中，我们希望设计长度为 N 的 $h(n)$ ，希望：

- ① 具有线性相位
- ② 能逼近理想 DF

不同的是，我们将直接对理想滤波器进行处理得到。

7.3.2 窗函数法设计原理

一、理想滤波器

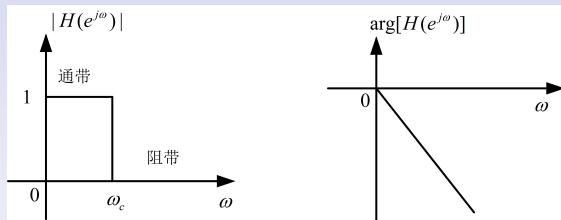


图: 理想滤波器的幅频特性与相频特性

则线性相位理想低通滤波器为:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

二、求 $h_d(n)$

线性相位理想低通滤波器为：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & , \quad \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{令：} \quad h_d(n) \longleftrightarrow H_d(e^{j\omega})$$

$$\begin{cases} H_{dg}(\omega) = 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ \theta(\omega) = -\alpha\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} \\ h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$

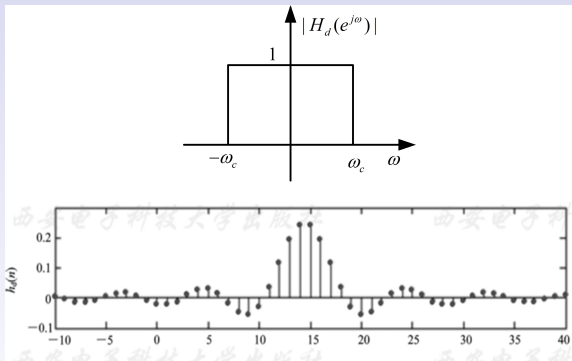
显然，可通过直接对 $H_d(e^{j\omega})$ 做反变换求 $h_d(n)$ 。

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

则有：

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)} \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(n-\alpha)] \end{aligned}$$

$$h_d(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(n - \alpha)]$$



显然 $h_d(n)$ 无限长，非因果。

三、用窗函数法设计 FIR-DF 的方法：

- ① 对 $h_d(n)$ 截取一段，得到 $h(n)$
- ② 使得 $h(n)$ 具有线性相位。（条件： $h(n) = h(N-1-n)$ ）
- ③ 必须令 $\alpha = \frac{N-1}{2}$

四、问题：

$h(n)$ 是对 $h_d(n)$ 截取得到得到，必定存在误差。

表现为：吉布斯效应。这种吉布斯效应是由于将 $h_d(n)$ 截断引起的，也叫截断效应。

7.3.3 $h(n)$ 的幅度特性与截断效应

显然有

$$h(n) = h_d(n)R_N(n) \qquad h(n) \longleftrightarrow H(e^{j\omega})$$

1 幅度特性

$$\text{令:} \quad H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)}$$

$$\text{设:} \quad h_d(n) \longleftrightarrow H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)}$$

$$R_N(n) \longleftrightarrow R_N(e^{j\omega}) = R_{Ng}(\omega)e^{j\varphi_3(\omega)}$$

下面推导 $h(n)$ 对应的 $H_g(\omega)$ 的特性。

因：
$$h(n) = h_d(n)R_N(n)$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * R_N(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) R_N(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

(a) 窗函数傅里叶变换 $R_N(e^{j\omega})$ 的幅度特性与相位特性

$$R_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n) e^{-j\omega n} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\sin(\frac{N}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

$$\therefore \quad R_{Ng}(\omega) = \frac{\sin(\frac{N}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})} \quad \varphi_3(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega = -\alpha\omega$$

(b) 理想滤波器 $H_d(e^{j\omega})$ 的幅度特性与相位特性

设：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

显然有：

$$H_{dg}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\therefore \varphi_2(\omega) = -\alpha\omega$$

将 (a), (b) 的结果代入公式 (*) 得:

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[H_{dg}(\theta) e^{j\varphi_2(\theta)} \right] \left[R_{Ng}(\omega - \theta) e^{j\varphi_3(\omega - \theta)} \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[H_{dg}(\theta) e^{-j\alpha\theta} \right] \left[R_{Ng}(\omega - \theta) e^{-j\alpha(\omega - \theta)} \right] d\theta \\
 &= e^{-j\alpha\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) R_{Ng}(\omega - \theta) d\theta \\
 &= e^{-j\alpha\omega} \left[\frac{1}{2\pi} H_{dg}(\omega) * R_{Ng}(\omega) \right] \\
 \begin{cases} H_g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) R_{Ng}(\omega - \theta) d\theta \\ \varphi_1(\omega) = -\alpha\omega \end{cases}
 \end{aligned}$$

即: $h(n)$ 的幅度特性 $H_g(\omega)$ 是窗函数幅度特性 $R_{Ng}(\omega)$ 与理想滤波器幅度特性 $H_{dg}(\omega)$ 的卷积

2 截断效应的产生：

即： $H_{dg}(\omega) * R_{Ng}(\omega)$ 形成 $H_g(\omega)$ 的过程。

p223 $(a) * (b) \longrightarrow (f)$ 的过程

(1) $\omega = 0$

$$H_g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) R_{Ng}(\omega - \theta) d\theta|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} R_{Ng}(\theta) d\theta$$

即为 $R_{Ng}(\omega)$ 在 $(-\omega_c, \omega_c)$ 之间的积分，在 $\omega_c \gg \frac{2\pi}{N}$ 时，相当于 $(-\pi, \pi)$ 之间的积分。

将 $H_g(0)$ 归一化为 1，下面设 $\omega_c \gg \frac{2\pi}{N}$ 。

$$(2) \quad \omega = \omega_c$$

$$H_g(\omega_c) \approx \frac{1}{2} H_g(0) = 0.5$$

即为 $R_{Ng}(\omega)$ 在 $(-\omega_c, \omega_c)$ 之间的积分的一半

$$(3) \quad \omega = \omega_c - \frac{2\pi}{N} \text{ 时,}$$

$$H_g(\omega_c - \frac{2\pi}{N}) = 1 + 0.0895 \quad (\text{即为 } H_g(\omega) \text{ 的最大值。})$$

$$(4) \quad \omega = \omega_c + \frac{2\pi}{N} \text{ 时,}$$

$$H_g(\omega_c + \frac{2\pi}{N}) = 1 - 0.0895 \quad (\text{即为 } H_g(\omega) \text{ 的最小值。})$$

3 吉布斯效应（截断效应）

① 吉布斯效应现象：

- ① 在理想特性不连续点 $\omega = \omega_c$ 附近形成过渡带。过渡带的宽度等于 $R_{dg}(\omega)$ 主瓣宽度 $\frac{4\pi}{N}$ ，其近似精确值为： $1.8\pi/N$
- ② 通带内产生波纹，最大的峰值在 $\omega_c - 2\pi/N$ 处，阻带内产生了余振，最大的负峰在 $\omega_c + 2\pi/N$ 处。

② 吉布斯效应产生的原因

- $H_d(e^{j\omega})$ 是一个以 2π 为周期的函数，可以展开为傅里叶级数：

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-j\omega n}$$

傅里叶系数为 $h_d(n)$ ，也就是 $H_d(e^{j\omega})$ 对应的单位脉冲响应。这里 $h_d(n)$ 是非因果其无限长的。

窗函数法实际上是以用 N 项傅里叶级数去近似无穷项傅里叶级数，这样必定会在频率不连续点附近引起误差，这个误差就是所谓的吉布斯效应，也叫截断效应。

4 措施

① 增大 N

可改善过渡带宽度，但对通带阻带的波纹改善甚微。

② 窗函数的选择

选择合适的窗函数，可有效地减少通带内波动及增大阻带衰减。

三、窗函数法设计 FIR-DF 步骤

1⁰ 根据已知条件, 求出 $h_d(n)$

如, 已知:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

参数为: (α, ω_c) 得到:

$$H_d(n) = \frac{\sin[\omega_c(n - \alpha)]}{\pi(n - \alpha)}$$

2⁰ $h_d(n) \longrightarrow h(n)$ (通过截断)

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \implies N = 2\alpha + 1$$

3⁰ $h(n) = h_d(n)R_N(n)$

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\alpha\omega} = H_g(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

例题

利用窗函数法设计线性相位 *FIR* 数字低通滤波器，逼近理想滤波器，设理想滤波器为：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| \leq 0.25\pi \\ 0, & 0.25\pi < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

采用矩形窗，要求滤波器 $\alpha = 2$ 。

(1) 求所设计的 *FIR* 滤波器的长度为 N ，以及滤波器的单位采样响应。

(2) 设滤波器频率响应为 $H(e^{j\omega}) = H_g(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ ，求滤波器的幅度特性 $H_g(\omega)$ 与相位函数 $\varphi(\omega)$ 的表达式。

(3) 画出其直接型网络结构以及线性相位网络结构。

解：

(1) 因为设计的 FIR-DF 具有线性相位，而 $\alpha = \frac{N-1}{2} = 2$ ，有：

$$N = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$\therefore h_d(n) = IFT[H_d(e^{j\omega})] = \frac{\sin(0.25\pi(n-2))}{\pi(n-2)}$$

$$\therefore h(n) = h_d(n) \cdot R_5(n) = \frac{\sin(0.25\pi(n-2))}{\pi(n-2)}, \quad 0 \leq n \leq 4$$

$h(0) = h(4) = \frac{1}{2\pi}$, $h(1) = h(3) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}$, $h(2) = 0.25$
即 $N=5$, $h(n) = h(N-1-n)$, 为第一类线性相位结构。

(2)

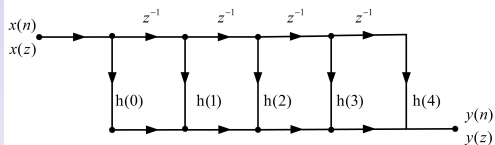
$$\begin{aligned} H(z) &= ZT[h(n)] \\ &= h(0)(1 + z^{-4}) + h(1)(z^{-1} + z^{-3}) + h(2)(1 + z^{-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= h(0)(1 + e^{-j4\omega}) + h(1)(e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}) + h(2)e^{-j2\omega} \\ &= e^{-j2\omega}[2h(0)\cos(2\omega) + 2h(1)\cos(\omega) + h(2)] \end{aligned}$$

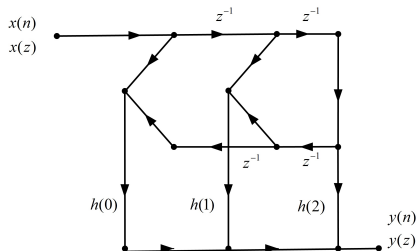
$$\begin{cases} H_g(\omega) = 2h(0)\cos(2\omega) + 2h(1)\cos(\omega) + h(2) \\ \varphi(\omega) = -2\omega \quad (\tau = \frac{N-1}{2}) \end{cases}$$

(3) 直接型网络结构以及线性相位网络结构

直接型：



线性相位型



提出问题

问题

这两种滤波器各自有什么特点，在实际应用中应该如何去选择它们呢？

从性能上来看

① IIR 滤波器的特点

- IIR 滤波器系统函数的极点可位于单位圆内的任何地方，因此零点与极点相结合，可用较低的阶数获得较高的选择性，所用的存储单元少，计算量小，所以经济高效。
- 这个高效率是以相位的非线性为代价的。

② FIR 滤波器特点

- FIR 数字滤波器可以得到严格的线性相位。
- 但 FIR 滤波器系统函数的极点固定在原点，而只能用较高的阶数达到高的选择性。对于同样的幅频特性指标，FIR 滤波器所要求的阶数一般比 IIR 数字滤波器高 5-10 倍。使得成本较高，信号延时较大。

③ 综合考虑选择性和线性相位要求

- IIR 滤波器必须加全通网络进行相位校正。从而大大增加滤波器的阶数和复杂性。

从结构上看

① IIR 滤波器的特点

- IIR 滤波器必须采用递归结构，极点位置必须在单位圆内，否则系统不稳定。
- 这种结构中，由于运算过程中对序列的舍入处理得到的有限字长效应有时会引起寄生震荡。

② FIR 滤波器的特点

- FIR 滤波器主要采用非递归结构，不存在稳定性问题。
- FIR 滤波器可以采用 FFT 算法实现，在相同阶数的情况下，运算速度可以大大提高。

从设计工具上看