第 2 章　时域离散信号和系统的频域分析

笪邦友

中南民族大学　电子信息工程学院

2018 年 9 月 28 日

目录

傅里叶变换的回顾

回顾一下模拟信号的傅里叶变换

(1) 周期连续信号的傅里叶级数
(2) 非周期连续信号的傅里叶变换

傅里叶变换的回顾

回顾一下模拟信号的傅里叶变换

(1) 周期连续信号的傅里叶级数
(2) 非周期连续信号的傅里叶变换

问题

对于离散信号，是否有傅里叶变换和傅里叶级数的相关概念？

傅里叶变换的回顾

回顾一下模拟信号的傅里叶变换

(1) 周期连续信号的傅里叶级数
(2) 非周期连续信号的傅里叶变换

问题

对于离散信号，是否有傅里叶变换和傅里叶级数的相关概念？

1. 非周期离散信号的傅里叶变换
2. 周期离散信号的傅里叶级数和傅里叶变换

时域离散信号的傅里叶变换的定义

定义

设序列 $x(n)$ 满足绝对可和条件，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$，则定义

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

为序列的傅里叶变换，可用 FT 表示，即 $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$。

时域离散信号的傅里叶变换的定义

定义

设序列 $x(n)$ 满足绝对可和条件，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$，则定义

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

为序列的傅里叶变换，可用 FT 表示，即 $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$。

显然有：

(1) $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续函数，被称为信号 $x(n)$ 的频谱密度函数，其含义与连续信号的频谱密度函数相同。

(2) $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数，周期为 $T=2\pi$。

问题：FT 的反变换

已知序列 $x(n)$ 的傅里叶变换为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

求 $X(e^{j\omega})$ 的反变换 $x(n)$ 的表达式。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega$$

证明: I

1 因为 $X(e^{j\omega})$ 为连续函数，且 $T=2\pi$，用 $e^{j\omega m}$ 乘以定义式两边，并在 $(-\pi,\pi)$ 内对 ω 进行积分，这里 $m,n\in Z$，可得：

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,e^{j\omega m}\,d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,e^{-j\omega n}\right] e^{j\omega m}\,d\omega$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}\,d\omega$$

2 显然，关键是下式

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}\,d\omega$$

的求解。

证明: II

显然有

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega = 2\pi\delta(n-m) = \begin{cases} 2\pi, & n=m \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

简单说明:

(1) 当 $m-n=0$ 时，显然有

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega\cdot 0}d\omega = 2\pi$$

(2) 当 $m-n\neq 0$ 时，不妨令 $m-n=k$，k 为整数，有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega k}d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} cos(\omega k)d\omega + j\int_{-\pi}^{\pi} sin(\omega k)d\omega = 0\end{aligned}$$

证明: III

3 那么有:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega m}\, d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega m}\, d\omega \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega (m-n)}\, d\omega \\
&= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(n-m) \\
&= 2\pi \cdot x(m)
\end{aligned}
$$

因此:

$$
x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega m}\, d\omega
$$

证明: IV

前述有:

$$x(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega m}\, d\omega$$

4 将 m 换为 n, 则可得到:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

上式即为傅里叶变换的逆变换,

FT 成立的充分条件

注意

FT 成立的充分条件为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

有些序列并不满足上述绝对可和条件，如周期函数，但如果引入冲激函数 $\delta(\cdot)$，则其傅里叶变换也可得到。

例题

设 $x(n) = R_N(n)$，求 $x(n)$ 的傅里叶变换。

解：

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\
&= \frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\
&= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \quad \cdot \quad \frac{sin(\omega N/2)}{sin(\omega/2)}
\end{aligned}
$$

一般有 $$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \left|\frac{sin(\omega N/2)}{sin(\omega/2)}\right|$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \varphi_2(\omega)$$

其中: $$\varphi_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \frac{sin(\omega N/2)}{sin(\omega/2)} > 0 \\ \pi, & \frac{sin(\omega N/2)}{sin(\omega/2)} < 0 \end{cases}$$

周期序列展开为离散傅里叶级数

1. DFS 正变换
2. DFS 反变换
3. 几点说明

1、DFS 正变换

定理

设 $\tilde{x}(n)$ 是以 N 为周期的离散序列，其必能展开为离散傅里叶级数，记做：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

式中 a_k 是傅里叶级数的系数。

问题在于得到系数 a_k 的表达式。

系数 a_k 的求解 I

(1) 等式两边同时乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$，并对 n 在一个周期内求和，且 $0 \leqslant m \leqslant N-1$，这里 $m, k \in Z$，则有：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} \right]
\end{aligned}$$

系数 a_k 的求解 II

(2) 式中

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = N\cdot\delta(k-m) = \begin{cases} N, & k=m \\ 0, & k\neq m \end{cases}$$

简单说明：

(a) 当 $m-k=0$ 时，显然成立，代入即可。
(b) 当 $m-k\neq 0$ 时，不妨令 $k-m=p$，p 为整数，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}pn} \\ &= \frac{1-\left[e^{j\frac{2\pi}{N}p}\right]^N}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}p}} = \frac{1-e^{j2\pi p}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}pn}} = 0\end{aligned}$$

系数 a_k 的求解 III

(3) 所以有

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot N \cdot \delta(k-m) = a_m \cdot N$$

所以：

$$a_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

最后，将 m 替换为 k，即有：

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-1$$

DFS 正变换

令 $\tilde{X}(k) = N \cdot a_k$，则有

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad -\infty < k < \infty$$

记做：

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$\tilde{X}(k)$ 也是以 N 为周期的周期序列，称为周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数系数，用 DFS 表示。记为 $DFS[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$

2、DFS 反变换

用 $a_k = \frac{1}{N}\tilde{X}(k)$ 代入上式，可得：

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= IDFS[\tilde{X}(k)]\end{aligned}$$

结论：*DFS* 变换的表达式

上述两个公式可重写为：

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & (-\infty < k < \infty) \\ \tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & (-\infty < n < \infty) \end{cases}$$

3、几点说明

(1) 若将 n 视为时间变量，k 视为频率变量，则 DFS 表示时域 $\rightarrow$ 频域的变换，$IDFS$ 表示从频域 $\rightarrow$ 时域的变换。

(2) $\tilde{x}(n)$ 与 $\tilde{X}(k)$ 均是周期序列，且周期均为 N

(a) 周期序列虽然是无限长的，但只要知道一个周期数据，则整个序列的值可知。

(b) 周期序列与有限长序列有着本质联系。实际处理的序列均为有限长序列，设长度为 N，如以 N 为周期进行周期延拓，则可得到一个周期序列 $\tilde{x}(n)$。

(3) 物理意义：

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

表明周期序列可分解为 N 次谐波，第 k 个谐波频率为 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$，幅度为 $\frac{1}{N}\tilde{X}(k)$，$k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$。

前言：周期序列的傅里叶变换

严格说，周期序列是不存在傅里叶变换的，因为周期序列不满足绝对可和条件，但引入冲激函数后，傅里叶变换条件可以放松，周期序列的傅里叶变换存在。

关键在于指数函数 $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 的傅里叶变换

我们再来看一下 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS 公式。

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$FT\left[\tilde{x}(n)\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}(k)FT\left[e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right]$$

显然，想要得到 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶变换，关键在于得到指数函数 $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 的傅里叶变换。

一、复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换

教材讲授思路：

1 类比

在模拟系统中，$x_a(t)=e^{j\Omega_0 t}$ 的傅里叶变换是在 $\Omega=\Omega_0$ 处的单位冲激函数，强度是 2π，即

$$X_a(j\Omega)=FT[x_a(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\Omega_0 t}e^{-j\Omega t}dt=2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$$

即： $$e^{j\Omega_0 t}\longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$$

2、假设

对于时域离散系统，暂时假定 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$ 傅里叶变换形式与模拟系统中的类似，可写作：

$$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

但 $e^{j\omega_0 n}$ 为周期函数，有：

$$e^{j\omega_0 n}=e^{j(\omega_0+2\pi r)n} \qquad (r\in Z, \quad -\infty<r<\infty)$$

那么，其傅里叶变换也应该是一个个冲激的叠加。即为：

$$X(e^{j\omega_0})=FT[e^{j\omega_0 n}]=\sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)$$

即：复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换为在 ω_0 处强度为 2π 的冲激函数，且以 2π 为周期延拓而成。

3、验证

上述推测给出，复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换为在 ω_0 处强度为 2π 的冲激函数，且以 2π 为周期延拓而成。

如果这种假设如果成立，则要求其反变换必须成立且唯一，并等于 $e^{j\omega_0 n}$，即验证：$IFT[X(e^{j\omega})] = e^{j\omega_0 n}$ 即：

$$
\begin{aligned}
x(n) &= IFT[X(e^{j\omega})] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega \qquad (\text{在 } (-\pi,\pi) \text{ 之间}) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega = e^{j\omega_0 n}
\end{aligned}
$$

2 推导 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换

教材讲授思路较直观，这里将直接推导 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换，可与教材相互印证。思路如下

(1) 将 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ 代入傅里叶变换公式：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)n}$$

(2) 讨论：可分两种情况讨论。

- (a) 当 $\omega_0 - \omega \neq 2\pi r$ 时，r 是整数。
- (b) 当 $\omega_0 - \omega = 2\pi r$ 时，r 是整数。
  1. 考察 $X(e^{j\omega})$ 的形式
  2. 考察 $X(e^{j\omega})$ 的强度。

(3) 结论。

讨论：求解等比数列求和问题

可分两种情况讨论。

(a) 当 $\omega_0 - \omega \neq 2\pi r$ 时，r 是整数。

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0-\omega)n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{0} e^{j(\omega_0-\omega)n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{j(\omega_0-\omega)n} - 1 \\
(\text{令左边}n=-n) \qquad &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j(\omega_0-\omega)n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{j(\omega_0-\omega)n} - 1 \\
&= \frac{1}{1-e^{-j(\omega_0-\omega)}} + \frac{1}{1-e^{j(\omega_0-\omega)}} - 1 \\
&= \frac{e^{j(\omega_0-\omega)}}{e^{j(\omega_0-\omega)}-1} + \frac{-1}{e^{j(\omega_0-\omega)}-1} - 1 \\
&= \frac{e^{j(\omega_0-\omega)}-1}{e^{j(\omega_0-\omega)}-1} - 1 = 0
\end{aligned}
$$

讨论：求解等比数列求和问题

(b) 当 $\omega_0 - \omega = 2\pi r$ 时，r 是整数。

1. 考察 $X(e^{j\omega})$ 的形式：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0-\omega)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$$

   可见，$X(e^{j\omega})$ 是一个间隔等于 2π 的冲激序列，而冲激出现在频率 $\omega = \omega_0 - 2r\pi$ 上。

2. 考察 $X(e^{j\omega})$ 每个冲激的强度。可得到结论：
   $X(e^{j\omega})$ 在 $\omega - \omega_0 = 2\pi r$ 处出现的都是强度为 2π 的冲激。

说明：$X(e^{j\omega})$ 在 $\omega-\omega_0=2\pi r$ 处冲激强度

对 $X(e^{j\omega})$ 在 ω_0 附近的一个周期 $(-\pi,\pi)$ 中求积分，可得：

$$
\begin{aligned}
\int_{\omega_0-\pi}^{\omega_0+\pi} X(e^{j\omega})\,d\omega &= \int_{\omega_0-\pi}^{\omega_0+\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0-\omega)n}\,d\omega \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\omega_0-\pi}^{\omega_0+\pi} e^{j(\omega_0-\omega)n}\,d\omega \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega' n}\,d\omega' \quad (\text{令}\omega'=\omega_0-\omega)
\end{aligned}
$$

我们知道：$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega' n}\,d\omega' = 2\pi\delta(n) = \begin{cases} 2\pi, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$

$$
\therefore \quad \int_{\omega_0-\pi}^{\omega_0+\pi} X(e^{j\omega})\,d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(n) = 2\pi
$$

这说明 $X(e^{j\omega})$ 在 $\omega-\omega_0=2\pi r, -\infty<r<\infty$ 处出现的都是强度为 2π 的冲激。

推导 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换

(3) 结论：
所以 $X(e^{j\omega})$ 是一个周期性为 2π，强度为 2π 的冲激序列，即：

$$FT[e^{j\omega_0 n}] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)$$

二、一般周期序列的傅里叶变换

(1) 公式

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$FT[\tilde{x}(n)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, FT\left[e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right]$$

又因为: $FT\left[e^{j\omega_0 n}\right] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)$

令 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}k$

$$FT[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r)$$

公式的化简

显然，一般周期序列的傅里叶变换如下：

$$FT[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r)$$

公式还可以化简化简后，有：

$$FT[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k)\delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

公式化简过程

1. 引理：设序列 $\tilde{x}(n)$ 周期为 N，则有

$$\sum_{n=0}^{mN-1}\tilde{x}(n)=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{n'=0}^{N-1}\tilde{x}(n'+rN) \quad \text{其中 } 0\leqslant n'\leqslant N-1$$

理解：很简单，周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的 m 个周期的和，等于每个周期的和，再乘以周期的个数（m）。

公式化简过程

引理: $$\sum_{n=0}^{mN-1} \tilde{x}(n) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n'+rN) \quad \text{其中 } 0 \leqslant n' \leqslant N-1$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k)\delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) &= \frac{2\pi}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=0}^{N-1} \tilde{X}(k'+rN)\delta(\omega - \frac{2\pi}{N}(k'+rN)) \\
&= \frac{2\pi}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=0}^{N-1} \tilde{X}(k')\delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k' - 2\pi r) \\
&= \frac{2\pi}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} \tilde{X}(k') \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k' - 2\pi r) \\
(\text{将} k' \rightarrow k) \qquad &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r)
\end{aligned}$$

求 $\tilde{x}(n)$ 傅里叶变换的过程

求 $\tilde{x}(n)$ 傅里叶变换的过程：

1. 求其离散傅里叶级数 $\tilde{X}(k)$
2. 套公式。

$$FT[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k)\delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

FT 的周期性

在 FT 的定义式中，n 取整数，显然有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi M)n}$$

成立，式中 M 为整数，显然 $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数，且周期为 2π.

线性

设 $X_1(e^{j\omega}) = FT[x_1(n)]$，$X_2(e^{j\omega}) = FT[x_2(n)]$，那么

$$FT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

式中 a, b 为常数。

时移与频移性质

设 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$，那么，

$$FT[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$
$$FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

说明

1. 信号在时域的延时和在频域中的移相相对应，对信号的幅度不产生影响。
2. 信号在时域乘以因子 $e^{j\omega_0 n}$，等于在频域中将整个频谱向频率增加方向搬移了 ω_0。

时移定理的证明

$$FT[x(n-n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0) \cdot e^{-j\omega n}$$

令 $n - n_0 = m$，则有

$$\begin{aligned}
FT[x(n-n_0)] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot e^{-j\omega(n_0+m)} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot e^{-j\omega n_0} \cdot e^{-j\omega m} \\
&= e^{-j\omega n_0} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot e^{-j\omega m} \\
&= e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

频移定理的证明

从左到右，有

$$
\begin{aligned}
FT[e^{j\omega_0 n}x(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{j\omega_0 n}\cdot e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-j(\omega-\omega_0)n} \\
&= X(e^{j(\omega-\omega_0)})
\end{aligned}
$$

共轭对称序列与共轭反对称序列

定义

(1) 共轭对称序列

如序列 $x_e(n)$ 满足：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

则称 $x_e(n)$ 为共轭对称序列.

(2) 共轭反对称序列

如序列 $x_o(n)$ 满足：

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

则称 $x_o(n)$ 为共轭反对称序列.

共轭对称序列的性质

(1) 共轭对称序列的实部是偶函数，而虚部是奇函数。

证明：将序列 $x_e(n)$ 用实部与虚部表示：

$$x_e(n) = x_{er}(n) + jx_{ei}(n)$$

则有：
$$x_e^*(-n) = x_{er}(-n) - jx_{ei}(-n)$$

根据共轭对称序列的定义式，有：

$$\begin{cases} x_{er}(n) = x_{er}(-n) \\ x_{ei}(n) = -x_{ei}(-n) \end{cases}$$

共轭对称序列的性质

(1) 共轭对称序列的实部是偶函数，而虚部是奇函数。
证明：将序列 $x_e(n)$ 用实部与虚部表示：

$$x_e(n) = x_{er}(n) + jx_{ei}(n)$$

则有：
$$x_e^*(-n) = x_{er}(-n) - jx_{ei}(-n)$$

根据共轭对称序列的定义式，有：

$$\begin{cases} x_{er}(n) = x_{er}(-n) \\ x_{ei}(n) = -x_{ei}(-n) \end{cases}$$

(2) 共轭反对称序列的实部是奇函数，而虚部是偶函数。
证明：将序列 $x_o(n)$ 用实部与虚部表示：

$$x_o(n) = x_{or}(n) + jx_{oi}(n)$$

同理可得：
$$\begin{cases} x_{or}(n) = -x_{or}(-n) \\ x_{oi}(n) = x_{oi}(-n) \end{cases}$$

序列可分解为共轭对称序列与共轭反对称序列之和

可假设

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

将上式中的 n 用 $-n$ 代替，可得

$$x^*(-n) = x_e^*(-n) + x_o^*(-n) = x_e(n) - x_o(n)$$

对上述两个方程联立求解可得：

$$\begin{cases} x_e(n) = \dfrac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \\ x_o(n) = \dfrac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \end{cases}$$

序列可分解为实部序列和虚部序列之和

可设：

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

则有：

$$x^*(n) = x_r(n) - jx_i(n)$$

联立求解上述方程组，则实部序列 $x_r(n)$ 和虚部序列 $x_i(n)$ 总能用原序列表示为：

$$\begin{cases} x_r(n) = \dfrac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \\ jx_i(n) = \dfrac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \end{cases}$$

FT 对称性的讨论

(1) 时域离散序列 $x(n)$ 可分解为实部序列与虚部序列之和，同时也能分解为共轭对称序列与共轭反对称序列之和。

(2) 序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 同样可分解为实部序列与虚部序列之和，也同时也能分解为共轭对称序列与共轭反对称序列之和。

问题

那么，他们之间的关系如何呢？我们将从下面几个方面考虑。

1. 实序列与虚序列的傅里叶变换
2. 共轭对称序列与共轭反对称序列的傅里叶变换

时域序列的实数部分的傅里叶变换

问题

前述时域序列可分解为实部序列与虚部序列之和，即：

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n) \qquad 且有：X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$$

那么，实部序列 $x_r(n)$ 的傅里叶变换，对应 $X(e^{j\omega})$ 那个部分呢？

前述有： $x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$

$$FT[x_r(n)] = \frac{1}{2}(FT[x(n)] + FT[x^*(n)])$$

而

$$FT[x^*(n)]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(-\omega)n}\right]^* = X^*(e^{-j\omega})$$

时域序列的实数部分的傅里叶变换

那么

$$
\begin{aligned}
FT[x_r(n)] &= \frac{1}{2}(FT[x(n)] + FT[x^*(n)]) \\
&= \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\right] \\
&= X_e(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

结论

时域序列的实部部分的傅里叶变换，对应其频域序列的共轭对称部分，即：

$$x_r(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X_e(e^{j\omega})$$

时域序列的虚部部分的傅里叶变换

同理，有：

$$\begin{aligned} FT[jx_i(n)] &= \frac{1}{2}(FT[x(n)] - FT[x^*(n)]) \\ &= \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\right] \\ &= X_o(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

结论

时域序列的虚数部分的傅里叶变换，对应其频域序列的共轭反对称部分，即：

$$jx_i(n) \Longleftrightarrow X_o(e^{j\omega})$$

时域序列的共轭对称部分的傅里叶变换

问题

序列 $x(n)$ 总可分为共轭对称部分 $x_e(n)$ 和共轭反对称部分 $x_o(n)$ 之和，即：

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \qquad \text{且有：} X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$$

那么，共轭对称序列 $x_e(n)$ 和共轭反对称序列 $x_o(n)$ 的傅里叶变换，对应 $X(e^{j\omega})$ 那个部分呢？

前述有： $x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$,

$$FT[x_e(n)] = \frac{1}{2}(FT[x(n)] + FT[x^*(-n)])$$

$$FT[x^*(-n)]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n)e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(m)e^{j\omega m} \quad (\text{令 } m = -n)$$

$$= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m}\right]^* = X^*(e^{j\omega})$$

时域序列的共轭对称部分的傅里叶变换

那么

$$FT[x_e(n)] = \frac{1}{2}(FT[x(n)] + FT[x^*(-n)]) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})\right]$$
$$= X_R(e^{j\omega})$$

结论

时域序列的共轭对称部分的傅里叶变换，对应其频域序列的实部部分，即：

$$x_e(n) \Longleftrightarrow X_R(e^{j\omega})$$

时域序列的共轭反对称部分的傅里叶变换

同理，有：

$$
\begin{aligned}
FT[x_o(n)] &= \frac{1}{2}(FT[x(n)] - FT[x^*(-n)]) \\
&= \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})\right] \\
&= jX_I(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

结论

时域序列的共轭反对称部分的傅里叶变换对应其频域序列的虚部部分，即：

$$x_o(n) \Longleftrightarrow jX_I(e^{j\omega})$$

结论

1. 一个域的实信号，对应另一个域的共轭对称信号，反之亦然;
2. 一个域的虚信号，对应另一个域的共轭反对称信号，反之亦然。

分析实序列 $h(n)$ 的傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 的特性。

(1) $\because$ $h(n)$ 为实序列.

$\therefore$ $H(e^{j\omega})$ 为共轭对称序列，即：$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$

设： $$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

则：$H_R(e^{j\omega})$ 为偶函数，而 $H_I(e^{j\omega})$ 为奇函数。

设： $$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\therefore \quad |H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right)$$

显然 $|H(e^{j\omega})|$ 是偶函数，而 $\theta(\omega)$ 为奇函数。

(2) 结论：

实函数的幅频函数是偶函数，相频函数是奇函数，与模拟系统有相同的结论。

时域卷积定理

定理

时域两信号卷积，转换到频域服从相乘关系，即设

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

则有

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

证明：显然：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

$$Y(e^{j\omega}) = FT[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \right] e^{-j\omega n}$$

交换求和序：

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m)e^{-j\omega n} \right]$$

而 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m)e^{-j\omega n} = FT[h(n-m)] = e^{-j\omega m} \cdot H(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m} \cdot H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

频域卷积定理

定理

频域卷积定理：时域两信号相乘，转换到频域服从卷积关系，即，设

$$y(n) = h(n) \cdot x(n)$$

则：

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta = \frac{1}{2\pi} H(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega})$$

证明：

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\right]e^{-j\omega n} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega-\theta)n}\right]d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}H(e^{j\theta}) * X(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

帕斯维尔 (Parseval) 定理—非周期序列的表达方式

1. 设 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$，则有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

2. 物理意义：信号在时域的总能量等于其在频域的总能量。

证明:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right]^* d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega
\end{aligned}
$$

帕斯维尔 (Parseval) 定理—周期序列的表达方式

1. 对于周期序列 $\tilde{x}(n)$ 而言，则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{X}(k)|^2$$

2. 物理意义：周期序列在时域中一个周期的总能量等于其频域中一个周期的总能量。

证明：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}(n)|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\tilde{x}^*(n) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right]^* \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}^*(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}^*(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}^*(k)\tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{X}(k)|^2
\end{aligned}
$$

作业

作业：

1,2,3,5,6,7,10,11,12,13,14,16, 17,18,24,27,28,29

例题

求 $u(n)$ 的傅里叶变化 $U(e^{j\omega}))$.

解：

令： $x(n) = u(n) - \frac{1}{2}$, 　　则： $x(n-1) = u(n-1) - \frac{1}{2}$

$x(n) - x(n-1) = u(n) - u(n-1) = \delta(n)$ 　　(注意$\delta(n) \leftrightarrow 1$)

(时移定律) $X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) = 1 \implies X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$

$$\therefore \quad U(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + FT[\frac{1}{2}]$$

$$FT[e^{j\omega_0 n}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

当 $\omega_0 = 0$ 时 $$FT[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$\therefore \quad U(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \cdot \delta(\omega - 2\pi k)$$

例题

例题

设 $\tilde{x}(n) = cos(\omega_0 n); \omega_0 = \pi/2$，求 $\tilde{x}(n)$ 的 FT。

解：

$$\tilde{x}(n) = cos(\omega_0 n) = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

$$\begin{aligned} FT[cos(\omega_0 n)] &= \frac{1}{2} FT[e^{j\omega_0 n}] + \frac{1}{2} FT[e^{-j\omega_0 n}] \\ &= \pi \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \pi \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r) \end{aligned}$$

例题

例题

设 $x(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1$，求 $FT[x(n)]$.

解：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \\ = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad |a| < 1 \tag{1}$$

例题

试证明 $FT[nx(n)] = j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

证：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\frac{X(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot -j\cdot ne^{-j\omega n}$$

$$j\cdot\frac{X(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\cdot x(n)e^{-j\omega n} = FT[n\cdot x(n)]$$

即 $FT[nx(n)] = j\cdot\dfrac{X(e^{j\omega})}{d\omega}$

离散序列的傅里叶变换与模拟信号傅里叶变换的关系

在滤波器设计的学习中将对这一节内容做详细的讲述。

这里我们将首先给出相关结论。

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$$

离散序列的傅里叶变换与模拟信号傅里叶变换的关系

一般说来，$x(n)$ 可被认为是从模拟信号 $x_a(t)$ 采样得到，这个过程如下所示：

$$x_a(t) \quad \longrightarrow \quad \hat{x}_a(t) \quad \longrightarrow \quad x(n)$$

通俗的讲，前者是一个采样的过程，后者是一个抽象的过程。

问题

那么，$x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 与 $x_a(t)$ 的傅里叶变换 $X_a(j\Omega)$ 之间，有什么样的联系和区别，这是一个值得研究的问题。

推导：

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_a(j\Omega) &= FT[\hat{x}_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-j\Omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-j\Omega t} dt \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \left[e^{-j\Omega nT} \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j(\Omega T)n}
\end{aligned}
$$

推导

又因为：$x(n) = x_a(nT)$，且令 $\omega = \Omega T$，所以有：

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_a(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-j(\Omega T)n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\Omega T)n} \\
&= X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}
\end{aligned}
$$

结论

$$\hat{X}_a(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$$

离散序列的傅里叶变换与模拟信号傅里叶变换的关系

又根据采样定理有：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - k\Omega_s) \qquad (\Omega_s = \frac{2\pi}{T})$$

所以有：

结论

$$X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\Omega T} = \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - k\Omega_s)$$

序列的 Z 变换

1. 在模拟信号和系统中，傅里叶变换用于频域分析，拉氏变换用于复频域分析，其实质为傅里叶变换的推广。
2. 类似，时域离散信号与系统中，Z 变换为序列傅里叶变换的推广，用于对序列进行复频域分析。

Z 变换在数字信号处理中起着很重要的作用，本节讨论其定义、收敛域、逆 Z 变换，性质等四个主要问题。

Z 变换的定义

定义

序列 $x(n)$ 的 Z 变换定义为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad \text{双边 } Z \text{ 变换}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad \text{单边 } Z \text{ 变换}$$

式中 z 是一个复变量，它所在的平面称为 z 平面。对于因果序列，两者都一样。本书均使用双边 Z 变换定义。

Z 变换存在的充要条件

(1) Z 变换实际上为一个罗朗级数，其存在条件为该级数绝对收敛，也就是满足：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

- 满足罗朗级数收敛的 z 值取值范围称为 $X(z)$ 的收敛域

Z 变换收敛域的概念

(2) 一般 $X(z)$ 的收敛域为环状域，即：$R_{x-} < |z| < R_{x+}$，也就是说:

- 收敛域是以 R_{x-} 和 R_{x+} 为收敛半径的两个圆形成的环状域。
- R_{x-} 可以小到 0，R_{x+} 可以大到无穷大。

Z 变换的零极点的概念

常用的 Z 变换是一个有理函数，可用两个多项式之比表示。

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$P(z) = 0$ 的根，称为 $X(z)$ 的零点。
$Q(z) = 0$ 的根，称为 $X(z)$ 的极点。

注意

$X(z)$ 的性质主要取决于极点，在极点处 Z 变换不存在。

序列 Z 变换与傅里叶变换的关系

对比 Z 变换和傅里叶变换的公式：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

对比可得：$z = e^{j\omega}$，也就是说：

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

即，单位圆上的 Z 变换就是序列的傅里叶变换。

说明

1. Z 变换的收敛域必须包括 Z 平面的单位圆。
2. 傅里叶变换是 Z 变换的特例。

例题

求 $x(n)=u(n)$ 的 Z 变换。

解:

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^{n}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

1. 显然，$X(z)$ 的极点为 $z=1$
2. $X(z)$ 存在的条件是： $|z^{-1}|<1$ 即 $|z|>1$
3. Z 变换收敛域不包含单位圆，其傅里叶变换也不存在
4. 引入冲激函数后，可得到其傅里叶变换。

Z 变换收敛域的讨论

使得 Z 变换存在，也就是使得洛朗级数绝对可和的 z 变换取值范围，为 Z 变换的收敛域。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\cdots+x(-1)z+x(0)+x(1)z^{-1}+\cdots$$

1. 有限长序列
2. 右序列
3. 左序列
4. 双边序列

有限长序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & n_1 \leqslant n \leqslant n_2(\text{不全为 } 0) \\ 0, & \text{其他} \qquad (\text{全为 } 0) \end{cases}$$

有限项级数求和必定收敛。仅需考虑 0 点，及 ∞ 两点情况。
可分四种情况讨论

1^0 $n_2 > n_1 \geqslant 0$, 仅存在负幂级数，$0 < |z| \leqslant \infty$ (因果序列)

2^0 $n_1 < n_2 \leqslant 0$, 仅存在正幂级数，$0 \leqslant |z| < \infty$

3^0 $n_1 < 0, n_2 > 0$, 存在正负幂级数，$0 < |z| < \infty$

4^0 $n_1 = 0, n_2 = 0$, 整个 Z 平面。

有限长序列

例题

求 $x(n)=R_N(n)$ 的 Z 变换.

解:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}(z^{-1})^n=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$X(z)$ 为有限长级数求和，必定收敛，只需考虑 $z=0, z=\infty$ 两点。

显然有： $0<|z|\leqslant\infty$。

右序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & n \geqslant n_1 \\ 0, & n \leqslant n_1 \end{cases}$$

右边序列收敛域为 Z 平面上以原点为圆心的某个园外。
可分两种情况讨论：

1. $n_1 < 0$ 时，存在正幂级数，$|z|$ 不能为 ∞，
此时有：$R_{x-} < |z| < \infty$
2. $n_1 \geqslant 0$ 时，为因果序列。有： $R_{x-} < |z| \leqslant \infty$

注意

显然，当 $x(n)$ 为因果序列时，其收敛域包含无穷远点。

左序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & n \leqslant n_2 \\ 0, & n > n_2 \end{cases}$$

左边序列收敛域为 Z 平面上以原点为圆心的某个园内。
可分两种情况讨论：

1. $n_2 > 0$ 时，包含负项级数，收敛区不包括 0 点，此时有：$0 < |z| < R_{x+}$
2. $n_2 \leqslant 0$ 时，仅存在负项级数，此时有： $0 \leqslant |z| < R_{x+}$

双边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

1. 可见双边序列由因果序列和反因果序列组成，两者的收敛域分别为：$R_{x-}<|z|$ 和 $|z|<R_{x+}$。
2. 双边序列取两者的交集，收敛域为：$R_{x-}<|z|<R_{x+}$，其为一环状区域。
3. 如收敛域无交集，则 ZT 不存在。

例题

求 $x(n) = a^n u(n)$ 的 Z 变换及收敛域.（因果序列）

解:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

收敛域为:　　$|z| > |a|$

例题

求 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ 的 Z 变换及收敛域.（反因果序列）

解:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

注意 $$\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x(-n) z^{n}$$

$$X(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^{n} = -\frac{\frac{z}{a}}{1-\frac{z}{a}} = \frac{z}{z-a}$$

收敛域为: $|z| < |a|$

对于指数序列 ZT 的小结

小结

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a| \qquad \text{因果序列}$$

$$-a^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a| \qquad \text{反因果序列}$$

说明

不同的 $x(n)$，其 Z 变换表达式可能相同，所以 Z 变换 $X(z)$ 与收敛域联系在一起才有意义。即：

$$X(z) \quad + \quad \text{收敛域} \quad \Longleftrightarrow x(n)$$

例题

设 $x(n) = a^{|n|}$,$a \in R$，求 $x(n)$ 的 Z 变换并给出收敛域.

解:

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n} z^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} z^{-n} \\
&= \frac{az}{1-az} + \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}
\end{aligned}
$$

收敛域需同时满足 $|az| < 1, |az^{-1}| < 1$, 即 $|a| < |z| < |\frac{1}{a}|$，这意味着必须有 $|a| < 1$，如果 $|a| > 1$, 则无公共收敛域，$X(z)$ 不存在。

逆 Z 变换

已知 $X(z)$ 及收敛域，求 $x(n)$。

部分分式法

步骤：

1. 分解因式

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{m=1}^{N} \frac{A_m}{z - z_m} \qquad \text{部分分式和}$$

其中系数为：$A_m = \left[\frac{X(z)}{z}(z - z_m) \right]_{z=z_m}$

2. 套公式。

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a| \qquad \text{因果序列}$$

$$-a^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a| \qquad \text{反因果序列}$$

例题

设

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}, \qquad 2<|z|<3$$

解：

收敛域为圆环，显然 $x(n)$ 为双边序列。

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{5z^{-2}}{1+z^{-1}-6z^{-2}} = \frac{5}{z^2+z-6} = \frac{5}{(z+3)(z-2)}$$
$$= \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1 = \left[\frac{X(z)}{z}(z-2)\right]_{z=2} = \frac{5}{z+3}\Big|_{z=2} = 1$$
$$A_2 = \left[\frac{X(z)}{z}(z+3)\right]_{z=-3} = \frac{5}{z-2}\Big|_{z=-3} = -1$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3} \qquad \Longrightarrow \qquad X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z+3}$$

我们知道：

$$\begin{cases} a^n u(n) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a} & |z| > |a| & \text{因果序列} \\ -a^n u(-n-1) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a} & |z| < |a| & \text{反因果序列} \end{cases}$$

套公式：

$$\begin{aligned} x(n) &= 2^n u(n) - (-(-3)^n u(-n-1)) \\ &= 2^n u(n) + (-3)^n u(-n-1) \end{aligned}$$

留数法—逆 Z 变换 I

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

则有：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

证明：此处引入柯西积分定理（引入，不做证明）

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{m-1}dz=\begin{cases}1, & m=0\\ 0, & m\neq 0\end{cases}$$

留数法—逆 Z 变换 II

这里 C 为一个逆时针封闭曲线，那么：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{k-1}dz &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}z^{k-1}\right]dz \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n+k-1}\right]dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-n+k-1}dz\right]\end{aligned}$$

显然，仅当 $k=n$ 时，有：

$$x(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{k-1}dz$$

留数法—逆 Z 变换 III

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{k-1}dz$$

交换符号 $k \to n$，有：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

显然，给出反变换的公式后，关键在于求解这个围线积分。围线积分的直接求解非常麻烦。

直接计算围线积分非常麻烦，可利用留数定理得到。

留数法——留数定理

定理

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)\,dz = \sum Res\left[F(z)\right]_{C\text{ 内诸极点}}$$

利用留数定理求逆 Z 变换

已知逆 Z 变换公式为：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}\,dz$$

令 $F(z) = X(z)\cdot z^{n-1}$，则有

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)\,dz$$

如 $F(z)$ 在围线 C 内的极点为 z_k，则根据留数定理，有：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)\,dz = \sum_k Res\left[F(z), z_k\right]$$

即：　$x(n)$ 是围线 C 内所有极点的留数之和。

留数法——留数的求法

1. 对于单阶极点：$z = z_0$，有

$$Res\left[F(z), z_0\right] = F(z)(z - z_0)\Big|_{z=z_0}$$

2. 对于 m 阶高阶极点：$z = z_0$，有

$$Res\left[X(z) \cdot z^{n-1}, z_0\right] =$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[F(z)(z - z_0)^m\right]_{z=z_0}$$

留数法——留数辅助定理

对于高阶极点，一般难于求解，往往利用留数辅助定理。

定理

设被积函数 $F(z) = X(z) \cdot z^{n-1}$ 是有理函数，分母多项式的最高阶次大于等于分子多项式最高阶次 2 次以上，则有：

$$\oint_{C\to\infty} F(z)\,dz = 0$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{2\pi j}\oint_{C\to\infty} F(z)\,dz = 0$$

即在整个 Z 平面内，该围线积分积分结果为 0。

留数法——留数辅助定理

如果在 $X(z)$ 收敛域内选取一个围线 C，显然有：

$$\sum Res\left[X(z)z^{n-1}\right]_{\text{C 内极点}} + \sum Res\left[X(z)z^{n-1}\right]_{\text{C 外极点}} = 0$$

在用留数法求 $x(n)$ 时，如果围线 C 内存在高阶极点，可通过求围线外的一阶极点的留数，再取反即可。

留数法——留数辅助定理成立条件

成立条件：

- 留数辅助定理成立的条件是:$F(z) = X(z) \cdot z^{n-1}$ 的分母多项式的阶次大于等于分子阶次 2 次以上。

$$\text{设：}\quad X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\to M\text{次}}{\to N\text{次}} \Longrightarrow N - (M + n - 1) \geqslant 2$$

即： $n < N - M$ 注意：此即为判断依据

例题

设

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{1 + z^{-1} - 6z^{-2}}, \quad 2 < |z| < 3, \quad 求 x(n)$$

解：

(1) $X(z) = \frac{5z}{z^2+z-6} \qquad 2 < |z| < 3,$

收敛域为圆环，显然 $x(n)$ 为双边序列。

$$F(z) = X(z)z^{n-1} = \frac{5z^n}{z^2 + z - 6} = \frac{5z^n}{(z-2)(z+3)}$$

(2) 确定收敛区域，确定围线 C;

(3) 对不同的 n 进行讨论

(a) $n \geqslant 0$，显然极点为 $z=2$ ，$z=-3$，
但围线 C 内只有极点 $z=2$，依留数定理，有

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \sum_{k} Res\left[X(z)z^{n-1}, z_0 = 2\right] \\
&= \left[X(z)z^{n-1}(z-z_0)\right]_{z_0=2} \\
&= \left[\frac{5\cdot z^{n}}{(z+3)}\right]_{z=2} = 2^{n}
\end{aligned}
$$

(b) 当 $n<0$ 时，C 内有极点 $z=0$，$z=2$，C 外有极点 $z=-3$，
且 $z=0$ 处的极点为高阶极点，这时有：

$$
X(z) = \frac{5z}{z^2+z-6} = \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\rightarrow M = 1次}{\rightarrow N = 2次}
$$

有：　$n < N - M = 1$　适用于留数辅助定理

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \sum Res\left[X(z)z^{n-1}\right]_{\text{C 内诸极点}} \\
&= -\sum Res\left[X(z)z^{n-1}\right]_{\text{C 外诸极点}} \\
&= \sum Res\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=0,z=2} \\
&= -\sum Res\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=-3} \\
&= -\left[\frac{5\cdot z^n}{(z-2)}\right]_{z=-3} = (-3)^n
\end{aligned}
$$

$$
\therefore x(n) = \begin{cases} 2^n, & n \geqslant 0 \\ (-3)^n, & n < 0 \end{cases}
$$

$$
\therefore \qquad x(n) = 2^n u(n) + (-3)^n u(-n-1)
$$

例题

已知

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|, \text{求} x(n)$$

解:

(1) 因:

$$X(z) = \frac{z}{z - a}, \qquad |z| > |a|$$

收敛域为圆外，显然 $x(n)$ 为因果序列。

$$F(z) = X(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{z - a}$$

(2) 确定收敛区域，围线 C;

(3) 显然有 $n \geqslant 0$，仅有极点 $z = a$。

$$x(n) = \sum_k Res\left[\frac{z^n}{z-a}, z=a\right] = \left[\frac{z^n}{z-a}(z-a)\right]_{z=a} = a^n$$

$$\therefore \qquad x(n) = a^n u(n)$$

例题

设

$$X(z)=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-\frac{a}{z})},\quad |a|<|z|<\left|\frac{1}{a}\right|,\quad 求 x(n)$$

解：

(1) 收敛域为圆环，$|a|<|z|<\left|\frac{1}{a}\right|$，显然 $x(n)$ 为双边序列。令

$$F(z)=\frac{(1-a^2)\cdot z^n}{-a(z-\frac{1}{a})(z-a)}$$

(2) 确定收敛区域，围线 C

(3) 对不同的 n 进行讨论

(a) $n \geqslant 0$，显然 C 内有极点 $z=a$，有

$$x(n) = \sum_k Res\left[F(z), z=a\right]$$
$$= \frac{(1-a^2)\cdot z^n}{-a(z-\frac{1}{a})(z-a)}(z-a)\Big|_{z=a} = a^n$$

(b) 当 $n<0$ 时，C 内有极点 $z=0$，$z=a$，C 外有极点 $z=\frac{1}{a}$，且 $z=0$ 处的极点为高阶极点，这时可利用留数辅助定理。首先看是否满足条件：

有：$$X(z) = \frac{(1-a^2)z}{(1-az)(z-a)} \; \frac{\rightarrow M = 1\text{次}}{\rightarrow N = 2\text{次}}$$

则：$n < N - M = 1$适用于留数辅助定理

应用留数辅助定理可得：

$$\begin{aligned} x(n) &= -\sum Res\left[X(z)z^{n-1}\right]_{\mathrm{C}\text{ 外诸极点}} \\ &= -\frac{(1-a^2)\cdot z^n}{-a(z-\frac{1}{a})(z-a)}(z-\frac{1}{a})\Big|_{z=\frac{1}{a}} \\ &= a^{-n} \end{aligned}$$

综合上述分析可得：

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geqslant 0 \\ a^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \qquad x(n) = a^{|n|}$$

移位性质

设： $x(n) \leftrightarrow X(z)$，　则： $x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$

证明

$$ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n-n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n}$$

令： $m = n - n_0$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m}$$

$$= z^{-n_0}X(z)$$

序列乘以指数序列的性质

设：$x(n) \leftrightarrow X(z), R_{x^-} < |a^{-1}z| < R_{x^+} \quad y(n) = a^n x(n) \quad a \in R$

则：$a^n x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z) \qquad |a|R_{x^-} < |z| < |a|R_{x^+}$

证明

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n}$$

$$= X(a^{-1}z)$$

又 $\because R_{x^-} < |a^{-1}z| < R_{x^+} \quad \therefore |a|R_{x^-} < |z| < |a|R_{x^+}$

序列乘以 n 的 ZT

设： $x(n) \leftrightarrow X(z),$ 则： $nx(n) \leftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

证明

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) n z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x(n) z^{-n}$$

$$= -z^{-1} ZT[nx(n)]$$

$$\therefore \quad ZT[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

复共轭序列的 ZT

设：　$x(n) \longleftrightarrow X(z)$,　　则：$x^*(n) \longleftrightarrow X^*(z^*)$

证明

$$ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$ZT[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x(n)(z^*)^{-n}\right]^*$$

$$= X^*(z^*)$$

初值定理

设 $x(n)$ 是因果序列，$x(n) \leftrightarrow X(z)$，则有

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

证明

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \cdots$$

$$\therefore \; x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

终值定理

设 $x(n)$ 是因果序列，其 Z 变换的极点，除可以有一个一阶极点在 $z=1$ 上，其他极点都在单位园内，则：

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

证明：

$$\begin{aligned}
(z-1)X(z) &= zX(z) - X(z) \\
&= ZT[x(n+1)] - ZT[x(n)] \qquad \text{根据移位性质} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n} \\
&\because x(n) \quad \text{因果} \therefore x(n) = 0, n < 0
\end{aligned}$$

$$(z-1)X(z) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=-1}^{n} x(m+1)z^{-m} - \sum_{m=0}^{n} x(m)z^{-m}\right]$$

终值定理

$$(z-1)X(z)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=-1}^{n}x(m+1)z^{-m}-\sum_{m=0}^{n}x(m)z^{-m}\right]$$

$\because (z-1)X(z)$在单位圆上无极点，上式两端对 $z=1$ 取极限

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=-1}^{n}x(m+1)-\sum_{m=0}^{n}x(m)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[(x(0)+x(1)+\cdots+x(n+1))\right.\\&\qquad\left.-(x(0)+x(1)+\cdots+x(n))\right]\\&=\lim_{n\to\infty}x(n+1)\\&=\lim_{n\to\infty}x(n)\end{aligned}$$

如 $X(z)$ 在单位圆上没有极点，则 $x(\infty)=0$

时域卷积定理

设

$$X(n) \leftrightarrow X(z)$$

$$h(n) \leftrightarrow H(z)$$

$$y(n) \leftrightarrow Y(z)$$

如

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

则有：

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

时域卷积定理

证明

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\right] z^{-n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)z^{-n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot z^{-k}\cdot H(z) \\
&= H(z)\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot z^{-k} \qquad = X(z)\cdot H(z)
\end{aligned}$$

传输函数与系统函数

1. 传输函数
   $h(n)$ 为系统的单位脉冲响应，即为系统对单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的零状态响应：

$$令： \quad H(e^{j\omega}) = FT[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$= |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

   这里 $|H(e^{j\omega})|$ 称为幅频特性函数，$\varphi(\omega)$ 称为相频特性函数。

2. 系统函数

$$h(n) \leftrightarrow H(z) \qquad : H(z)称为系统函数$$

系统函数 $H(z)$ 与差分方程

已知 $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$, 求其对应的 $H(z)$.

对方程两边进行 Z 变换，设：$x(n) \leftrightarrow X(z)$,$y(n) \leftrightarrow Y(z)$, 可得：

$$ZT\left[\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)\right] = ZT\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

系统对于单频复指数信号 $e^{j\omega n}$ 的响应 I

如系统输入信号为 $x(n)=e^{j\omega n}$，则输出信号为：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{j\omega(n-m)}$$

$$=e^{j\omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\omega m}=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

即： $y(n)=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}=|H(e^{j\omega})|e^{j(\omega n+\varphi(\omega))}$

可见，系统的输入为单频复指数函数 $e^{j\omega n}$ 时，输出仍为单频复指数函数，只不过幅度放大 $|H(e^{j\omega})|$ 倍，相移 $\varphi(\omega)$。

系统对于单频复指数信号 $e^{j\omega n}$ 的响应 II

所以，$H(e^{j\omega})$ 表示系统对特征序列 $e^{j\omega n}$ 的响应特性，这也是 $H(e^{j\omega})$ 的物理意义。

系统对正弦信号 $x(n) = cos(\omega n)$ 的响应

$$x(n) = cos(\omega n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega n} + e^{-j\omega n})$$

$$\begin{aligned}
y(n) &= x(n) * h(n) \\
&= \frac{1}{2}\left(H(e^{j\omega})e^{j\omega n} + H(e^{j(-\omega)})e^{-j\omega n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega n} + |H(e^{-j\omega})|e^{j\varphi(-\omega)}e^{-j\omega n}\right)
\end{aligned}$$

$$\text{设} h(n) \in R \quad H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$$

$$\therefore |H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})| \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}|H(e^{j\omega})|\left(e^{j(\varphi(\omega)+\omega n)} + e^{-j(\varphi(\omega)+\omega n)}\right) \\
&= |H(e^{j\omega})|cos(\omega n + \varphi(\omega))
\end{aligned}$$

系统对正弦信号 $x(n) = cos(\omega n)$ 的响应

对比：

$$
\begin{aligned}
x(n) = cos(\omega n) &= \frac{1}{2}(e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}) \\
y(n) &= \frac{1}{2}|H(e^{j\omega})| \left(e^{j(\varphi(\omega)+\omega n)} + e^{-j(\varphi(\omega)+\omega n)} \right) \\
&= |H(e^{j\omega})| cos(\omega n + \varphi(\omega))
\end{aligned}
$$

可见，线性时不变系统对单频正弦信号 $cos(\omega n)$ 的响应为同频正弦信号，其幅度放大 $|H(e^{j\omega n})|$ 倍，相移增加 $\varphi(\omega)$

说明

对于一般序列 $x(n)$，可通过傅立叶变换分解为一系列正弦函数的加权和。此时可通过 $H(e^{j\omega n})$ 对不同的频率成分进行加权处理。

因果系统的收敛域特点

1. 回顾：

$$\text{系统因果} \Longleftrightarrow h(n)=0, n<0 \quad (\text{第一章讨论过})$$

2. 从 Z 变换的角度看，则有

$$\text{系统因果} \longleftrightarrow H(z) \text{ 的收敛域包含 } \infty \text{ 点，或 } |z|>R_{x-}$$

即极点在某个圆内，收敛域在圆外

证明 I

1 充分性　($\Longleftarrow$)，设 $H(z)$ 在 $z=\infty$ 处收敛，往证系统因果。

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \\
&= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} h(n) z^{-n}}_{\text{正项级数}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}}_{\text{负项级数}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

如 $z=\infty$ 处收敛，则必有 $n \leqslant -1$ 时，$h(n)=0$
即：$n<0$ 时，$h(n)=0$, 所以系统因果。

证明 II

2 必要性　($\Longrightarrow$)，设系统因果，往证 $H(z)$ 在 $z=\infty$ 处收敛。因系统因果，则有 $h(n)=0, n<0$,

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}=h(0)+h(1) z^{-1}+h(2) z^{-2}+h(3) z^{-3}+\cdots$$

显然，在 $z=\infty$ 处，$H(z)$ 收敛。

系统稳定的收敛域的特点 I

1. 回顾：

$$\text{系统稳定} \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad \text{也是 } H(e^{j\omega}) \text{ 存在的条件}$$

2. 从 Z 变换的角度看，则有

$$\text{系统稳定} \Longleftrightarrow H(z)\text{的收敛域包含单位圆}$$

证明

1 充分性 $(\Longleftarrow)$，已知 $H(z)$ 收敛域包含单位圆，往证系统因果。

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

令 $z = 1$，则有

$$H(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) < \infty$$

$$\therefore y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

$\because x(n)$为有界输入， $\therefore |x(n)| < B$

$$\therefore y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) \leqslant B \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) < \infty$$

$\therefore$ 系统稳定

证明

2 必要性　($\Longrightarrow$)，已知系统稳定，往证 $H(z)$ 收敛域包含单位圆。

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|\cdot|e^{-j\omega n}| \qquad (\text{显然 } |e^{-j\omega n}|=1)\\ &\geqslant \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}\right| = \left|\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}\right]\right|_{z=e^{j\omega}}\\ &= |H(z)|_{z=e^{j\omega}}\end{aligned}$$

$$\because \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty \qquad\qquad \therefore |H(z)|_{z=e^{j\omega}}|<\infty$$

$H(z)$ 在单位圆上收敛，即 $|z|=1$ 是收敛域的一部分。

因果稳定系统的收敛域、极点分布特点

系统因果 $\Rightarrow r < |z|$　收敛域在某个圆外 (或收敛域包含无穷远点)

系统稳定 $\Rightarrow 0 < r < 1$,　收敛域包含单位圆

系统因果稳定，将等价于下面两个条件

(1) $|z| > r$　且 $0 < r < 1$ 。

(2) $H(z)$ 的极点全部在单位圆内部。