

第 6 章 IIR 数字滤波器的设计

笪邦友

中南民族大学 电子信息工程学院

2018 年 11 月 5 日

目录

① 6.1 滤波器概述

- 6.1.1 滤波器的概念
- 6.1.2 理想滤波器与实际滤波器
- 6.1.3 滤波器的分类
- 6.1.4 数字滤波器的设计

② 6.2 模拟滤波器的设计方法

- 6.2.1 模拟低通滤波器的设计
- 6.2.2 模拟低通滤波器的技术要求及逼近方法
 - LP-AF 的技术要求（技术指标）
- 6.2.3 最平响应 Butterworth Filter 设计

③ 6.3 IIR-DF 的设计—脉冲响应不变法

- 6.3.1 IIR-DF 设计的基本概念
 - 基本概念
 - 从 AF 设计 DF 的基本思想
- 6.3.2 脉冲响应不变法

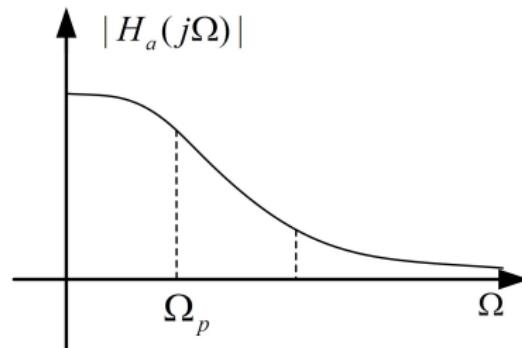
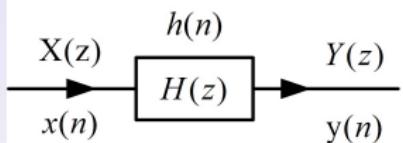
④ 6.4 IIR-DF 的设计—双线性变换法 (BLT)

- 6.4.1 双线性变换法

一、滤波器的概念

滤波器是一种对信号频率具有选择性的系统。

举例说明:

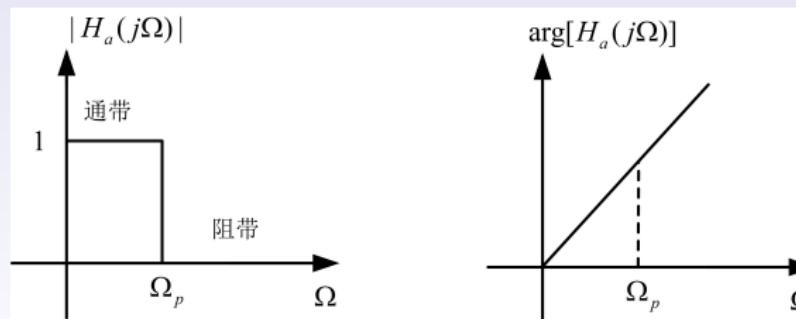


二、理想滤波器与实际滤波器

设 $H_a(j\Omega) = |H_a(j\Omega)| \cdot e^{j\arg[H_a(j\Omega)]}$

(1) 理想滤波器

$$|H_a(j\Omega)| = \begin{cases} 1, & \Omega < \Omega_p \\ 0, & \Omega > \Omega_p \end{cases}$$



理想滤波器不可能用电子部件实现，因为其单位脉冲响应是非因果，且无限长。虽然其可在计算机上实现，但存在严重问题。

(2) 实际滤波器的形状

1 实际滤波器不可能有理想的形状。

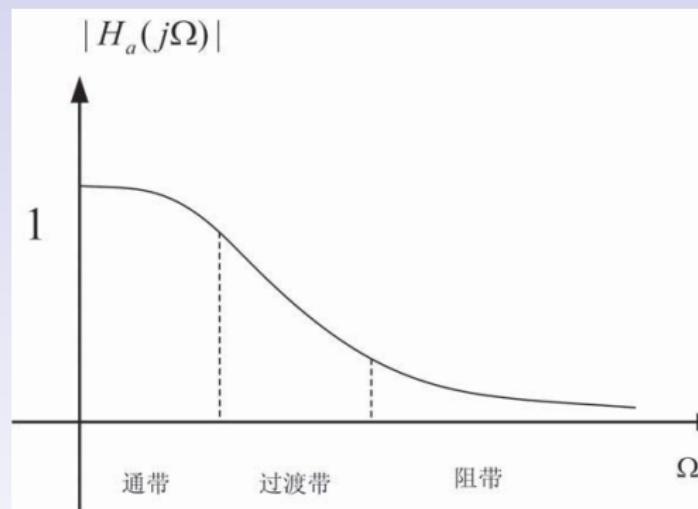


图: 实际滤波器的幅频特性可能的形状

2 三个概念

- (1) 通带: 滤波器中能使信号通过的频带;
- (2) 阻带: 滤波器中不能使信号通过的频带;
- (3) 过渡带: 介于通带和阻带之间的频带。

三、滤波器的分类

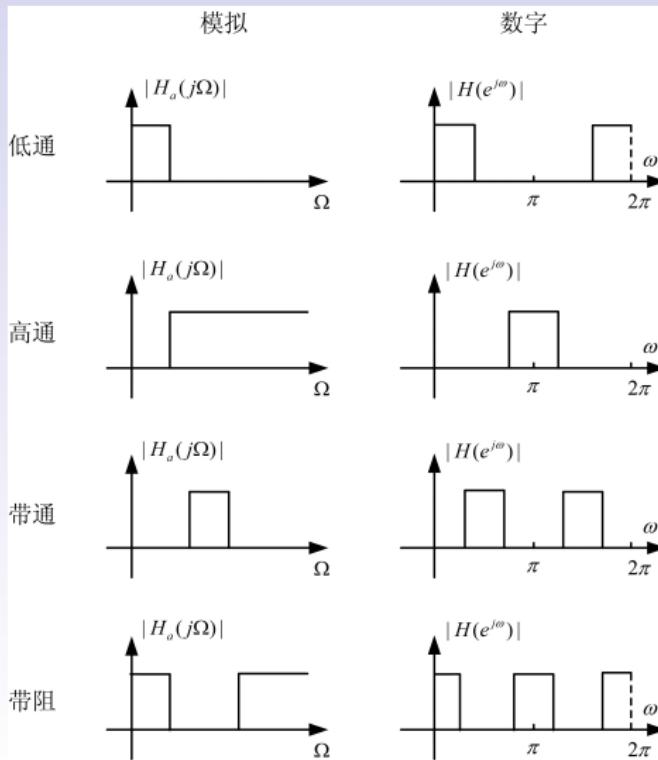
1 按处理信号的特性分：

- (1) AF—模拟滤波器
- (2) DF—数字滤波器

2 按通频带的特性分：(选频数字滤波器)

- (1) LP—低通滤波器
- (2) HP—高通滤波器
- (3) BP—带通滤波器
- (4) BS—带阻滤波器

选频滤波器示意图



四、数字滤波器的设计

一、直接法（不讲）

- 1 在时域中设计
- 2 在频域中设计

二、从 AF 设计 DF

- 1 根据 DF 技术指标要求设计模拟滤波器，得到 $H_a(s)$ (6.2 节)
- 2 利用一种映射方法，将

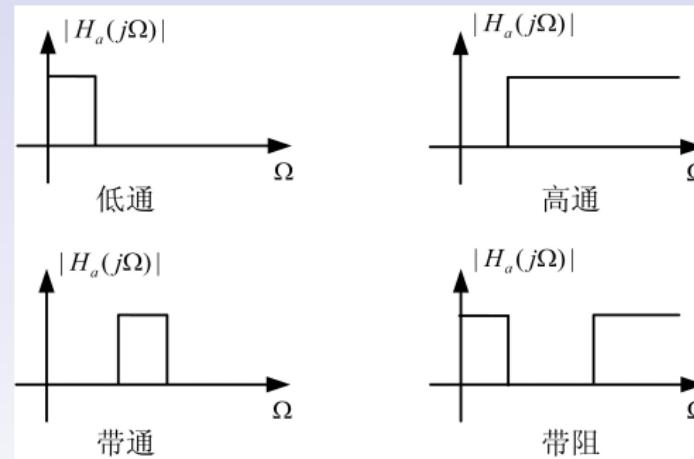
$$H_a(s) \xrightarrow{\text{映射为}} H(z)$$

映射方法

- (1) 脉冲响应不变法 (6.3 节)
- (2) 双线性变换法 (6.4 节)

一、模拟选频滤波器的概念

① 模拟选频滤波器



- ② 低通滤波器的设计是关键，其他滤波器可通过频率变换，将低通滤波器转换为相应的模拟滤波器。

二、设计方法（逼近法）

1 理想滤波器无法用模拟滤波器实现

- (1) 实际工作中，用实际滤波器 $\xrightarrow{\text{逼近}}$ 理想滤波器。
- (2) 当所涉及的实际滤波器满足技术要求时，停止逼近。

2 假设滤波器的响应函数为 $H_a(j\Omega)$ （或 $H_a(s)$ ）

- (1) 设计指标由 $|H_a(j\Omega)|$ 给出。
 - 对于典型的滤波器，其相频特性是确定的
- (2) 滤波器由 $H_a(s)$ 给出。
 - 注意 $h_a(t), H_a(j\Omega), H_a(s)$ 是对系统的等价描述

问题在于：

如何由 $|H_a(j\Omega)| \longrightarrow H_a(s)$

三、实因果系统传输函数的设计 对于实因果系统，如何由 $|H_a(j\Omega)|^2$ 得到 $H_a(s)$ 。
(注意：此处， $H_a(j\Omega)$ 与 $H_a(s)$ 可相互等价)

1 特点：设某因果系统， $h_a(t)$ 为实函数，有：

$$H_a(j\Omega) = FT[H_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$H_a(j\Omega) = |H_a(j\Omega)| \cdot e^{j\arg[H_a(j\Omega)]}$$

重要结论 (自证)

① 幅度平方函数 $|H_a(s)|^2 = H_a(s)H_a(-s)$

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega)$$

$$|H_a(s)|^2 = H_a(s)H_a(-s) \quad (H_a(j\Omega) = H_a(s)|_{s=\Omega})$$

说明：

$$|H_a(s)|^2 = H_a(s)H_a^*(s) \quad \text{只需证:} \quad H_a(-s) = H_a^*(s)$$

2 由 $|H_a(s)|^2 \rightarrow H_a(s)$

设 $|H_a(s)|^2$ 是全极点函数，有 $2N$ 个极点，则可由幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 求出系统函数。

分析：

$$|H_a(s)|^2 = H_a(s)H_a(-s)$$

- (1) 设 s_k 是 $H_a(s)$ 的任意一个极点，则 $-s_k$ 是 $H_a(-s)$ 的一个极点。

$$H(s_k) = \infty \quad \rightarrow \quad H(-(-s_k)) = \infty$$

$\therefore -s_k$ 为 $H_a(-s)$ 的极点，极点关于原点对称。

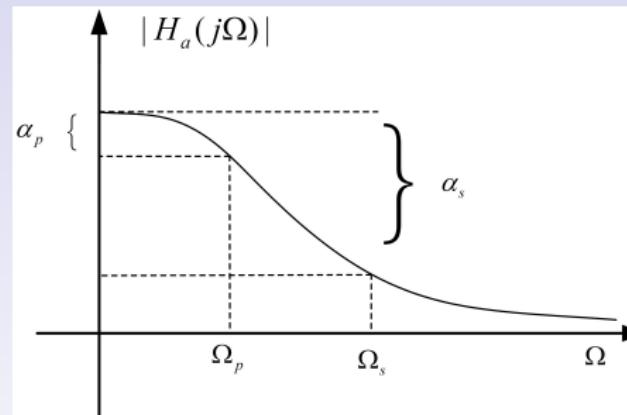
- (2) 如 $H_a(s)$ 有 N 个极点， $H_a(-s)$ 有 N 个极点，则 $|H_a(s)|^2$ 有 2N 个极点。
- (3) 2N 个极点中，S 平面左右半平面各有一半。
- (4) 设系统 $H_a(s)$ 因果稳定，则：

$$\begin{cases} H_a(s) \text{ 的 } N \text{ 个极点全部在 } S \text{ 的左半平面。} \\ H_a(-s) \text{ 的 } N \text{ 个极点全部在 } S \text{ 的右半平面。} \end{cases}$$

可由 S 左半平面的 N 个极点构造出 $H_a(s)$.

LP-AF 的技术要求

一、LP-AF 的技术要求（技术指标）



两对参数即可得到模拟滤波器的形状，也叫做片段常数特性。

- ① Ω_p : 通带边界频率
- ② α_p : 通带允许的最大衰减
- ③ Ω_s : 阻带截止频率
- ④ α_s : 阻带内允许的最小衰减

1 关于衰减的说明：

有：
$$\alpha(\Omega) = 10 \lg \left(\frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2} \right) = -10 \lg |H_a(j\Omega)|^2$$

简单证明：

$$\alpha(\Omega) = -20 \lg \left(\frac{|H_a(j\Omega)|}{|H_a(j0)|} \right)$$

设 $|H_a(j0)| = 1$

则： $\alpha(\Omega) = 10 \lg \left(\frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2} \right)$ (单位为 dB)

2 3dB 截止频率 Ω_c

即当 $|H_a(j\Omega)|$ 下降到零频分量的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时对应的频率为 Ω_c ，
此时衰减约为 3dB

$$\alpha(\Omega_c) \approx 3dB \quad \Rightarrow \quad \frac{|H_a(j\Omega_c)|}{|H_a(j0)|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

注意：

- 事实上 $\alpha(\Omega_c) = 10 \cdot \lg 2 \approx 3.0103$ ，是约等于 3。
- 另， Ω_c 与 Ω_p 是不同的概念。

二、Butterworth 逼近方法

设 $H_d(s)$ 是理想滤波器

1 任务：

设计一个实际的 LP-AF，得到其系统函数 $H_a(s)$ ，使得

$$|H_a(s)| \xrightarrow{\text{逼近}} |H_d(s)|$$

2 具体思路：

(1) 用幅度平方函数作为逼近函数，即：

$$|H_a(s)|^2 \xrightarrow{\text{逼近}} |H_d(s)|^2$$

(2) 逼近函数的表达式：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + |k(j\Omega)|^2}$$

其中 $|k(j\Omega)|^2$ 是以 Ω^2 为自变量的 N 次有理多项式。

(3) $|H_a(j\Omega)|^2 \xrightarrow{\text{得到}} H_a(j\Omega)$ (或 $H_a(s)$)

最平响应 Butterworth 系统

一、最平响应 Butterworth 系统

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + C^2\Omega^{2N}}$$

两个未知参数 C, N, 确定之即可得 $|H_a(j\Omega)|^2$

最平响应 Butterworth 滤波器设计 I

(1) 得到 $|H_a(j\Omega)|^2$

将 $|H_a(j\Omega)|^2$ 代入衰减函数:

$$\alpha(\Omega) = 10 \lg\left(\frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2}\right)$$

代入, 得:

$$\alpha(\Omega) = 10 \lg(1 + C^2 \Omega^{2N})$$

变换后可得:

$$1 + C^2 \Omega^{2N} = 10^{\frac{\alpha(\Omega)}{10}} \quad (\text{可证明 } C = \frac{1}{\Omega_c^N})$$

最平响应 Butterworth 滤波器设计 II

即：

$$1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha(\Omega)}{10}}$$

我们知道，LP-AF 由两对参数决定，即：

$$\begin{cases} \Omega_p: & \text{通带边界频率} \\ \alpha_p: & \text{通带允许的最大衰减} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_s: & \text{阻带截止频率} \\ \alpha_s: & \text{阻带内允许的最小衰减} \end{cases}$$

最平响应 Butterworth 滤波器设计 III

对右边方程: $1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha(\Omega)}{10}}$

代入 $(\Omega_p, \alpha_p), (\Omega_s, \alpha_s)$ 后可得:

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha_p}{10}} \\ 1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha_s}{10}} \end{cases}$$

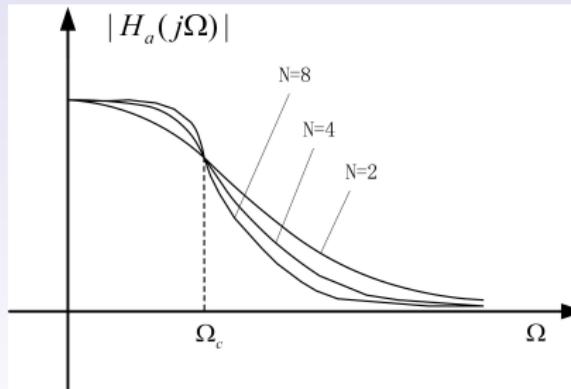
两个方程, 两个未知数, 联立求解后可得 Ω_c, N 。最后可得:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

最平响应 Butterworth 滤波器设计 IV

说明

- ① 算法相当简单，结果好。
- ② N 与幅频特性函数 $H_a(j\Omega)$ 的关系：N 越大，形状越好。



$$(2) \quad |H_a(s)|^2 \xrightarrow{\text{求得}} H_a(j\Omega) \quad (\text{或 } H_a(s))$$

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

令 $s = j\Omega$, 则有:

$$|H_a(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N}}$$

令分母为 0, 即 $s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N} = 0$, 求极点。有:

$$s^{2N} = -(j\Omega_c)^{2N} = e^{j(2k+1)\pi}(j\Omega_c)^{2N} \quad k = 0, 1, \dots, (2N-1)$$

$$s_k = e^{j\frac{(2k+1)}{2N}\pi} \cdot j \cdot \Omega_c \quad \text{注意 } j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

整理后有：

$$s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \quad k = 0, 1, \dots, (2N-1)$$

2N 个极点等间隔分布在半径为 Ω_c 的圆上。

(该圆也叫 Butterworth 圆)

前述已知：

$$|H_a(s)|^2 = H_a(s) \cdot H_a(-s)$$

$|H_a(s)|^2$ 有 $2N$ 个极点，且左右半平面各一半，其中：

$$\begin{cases} H_a(s) & \text{的 } N \text{ 个极点全在左半平面;} \\ H_a(-s) & \text{的 } N \text{ 个极点全在右半平面。} \end{cases}$$

则 $s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]}$ 的前 N 个极点全在 S 左半平面内。

举例说明，以 N=4 为例

举例说明，以 N=4 为例：

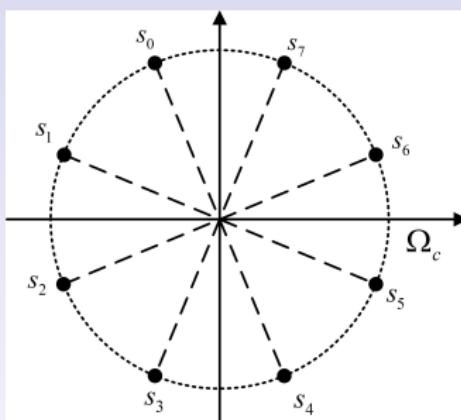
$$\begin{cases} k = 0, & s_0 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{5}{8}\pi} \\ k = 1, & s_1 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{7}{8}\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 2, & s_2 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{9}{8}\pi} \\ k = 3, & s_3 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{11}{8}\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 4, & s_4 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{13}{8}\pi} \\ k = 5, & s_5 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{15}{8}\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 6, & s_6 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{1}{8}\pi} \\ k = 7, & s_7 = \Omega_c \cdot e^{j\frac{3}{8}\pi} \end{cases}$$

极点分布图如下图所示：



可见， s_0, s_1, s_2, s_3 在 s 平面左边， s_4, s_5, s_6, s_7 在 s 平面右边， s_k 分布在半径为 Ω_c 的圆上，且以纵轴对称。

(3) 由 s 左半平面 N 个极点

$$s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \quad k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

构造出 $H_a(s)$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l} H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s - s_k)} \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \\ \text{式中: } s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \end{array} \right.$$

二、设计过程

① 由 $(\Omega_p, \alpha_p), (\Omega_s, \alpha_s)$ 得到：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

即求解 N, Ω_c

② 由 $|H_a(j\Omega)|^2 \rightarrow H_a(s)$

$$\begin{cases} \text{令: } s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} & k = 0, 1, \dots, (N-1) \\ H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)} \end{cases}$$

例题

例题

已知, $f_p = 5\text{kHz}$, $\alpha_p = 3\text{dB}$, $f_s = 10\text{kHz}$, $\alpha_s = 30\text{db}$, 按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器, 求阶数 N 。

解:

写成标准形式:

$$\begin{cases} \Omega_p = 2\pi f_p = 10\pi \times 10^3 & \text{rad/s} \\ \alpha_p = 3\text{dB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_s = 2\pi f_s = 20\pi \times 10^3 & \text{rad/s} \\ \alpha_s = 30\text{db} \end{cases}$$

代入 $1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha(\Omega)}{10}}$

可得：

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\frac{3}{10}} \\ 1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^3 \end{cases}$$

联立求解得：

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)^{2N} = \frac{10^{\frac{3}{10}} - 1}{10^3 - 1}$$

$$N = 4.98$$

又 N 必须为整数，有

$$\begin{cases} N = 5 \\ \Omega_c = 10^4 \pi \text{ rad/s} \end{cases}$$

又 N 必须为整数，有

$$\begin{cases} N = 5 \\ \Omega_c = 10^4\pi \text{ rad/s} \end{cases}$$

计算 s_k :

$$s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

$$\therefore H(s) = \frac{\Omega_c^5}{\prod_0^4(s - s_k)}$$

$$H(s) = \frac{\pi^5 \cdot 10^{20}}{(s + 10^4\pi)[s^2 + 0.618\pi \times 10^4 s + (\pi \times 10^4)^2]} \cdot \frac{1}{[s^2 + 1.618\pi \times 10^4 s + (\pi \times 10^4)^2]}$$

三、查表法

在最平响应 Butterworth 滤波器的设计中，我们总是由

$$\begin{cases} (\Omega_p, \alpha_p) \\ (\Omega_s, \alpha_s) \end{cases}$$

得到 N, Ω_c ，计算过程很复杂。

但我们发现由：

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right)^{2N} = \frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}-1}}{10^{\frac{\alpha_s}{10}-1}} \implies N$$

的过程与 Ω_c 无关，即滤波器的阶数 N 与 Ω_c 无关。

考虑：将计算过程标准化。

1 原理

令 $p = \frac{s}{\Omega_c}$ (归一化广义频率) 则：

$$s_k = \Omega_c \cdot e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \implies p_k = e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}]} \quad \text{与 } \Omega_c \text{ 无关}$$

而

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s - s_k)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}\left(\frac{s}{\Omega_c} - \frac{s_k}{\Omega_c}\right)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p - p_k)}$$

此处， $p = s/\Omega_c$, $p_k = s_k/\Omega_c$

令：

$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p - p_k)}$$

- ① $H_a(p)$ 仅与 N 有关，与 Ω_c 无关；
- ② $H_a(p)$ 称为归一化传输函数。

2 查表法设计步骤

- ① 根据指定技术指标 $(\Omega_p, \alpha_p), (\Omega_s, \alpha_s)$ ，确定 N, Ω_c 。
- ② 由 N 查表得到归一化传输函数 $H_a(p)$ 。
- ③ 去归一化。

$$H_a(s) = H_a(p)|_{p=s/\Omega_c}$$

一、基本概念

(1) 技术要求 $H(e^{j\omega})$, 即: $(\omega_p, \alpha_p), (\omega_s, \alpha_s)$

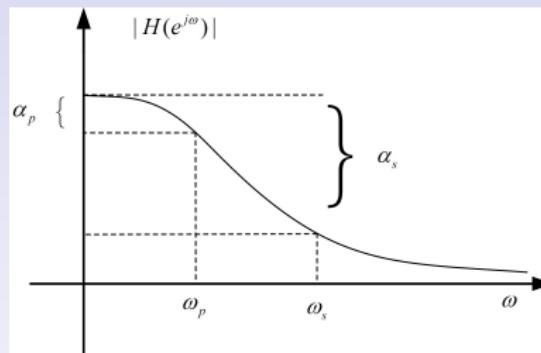


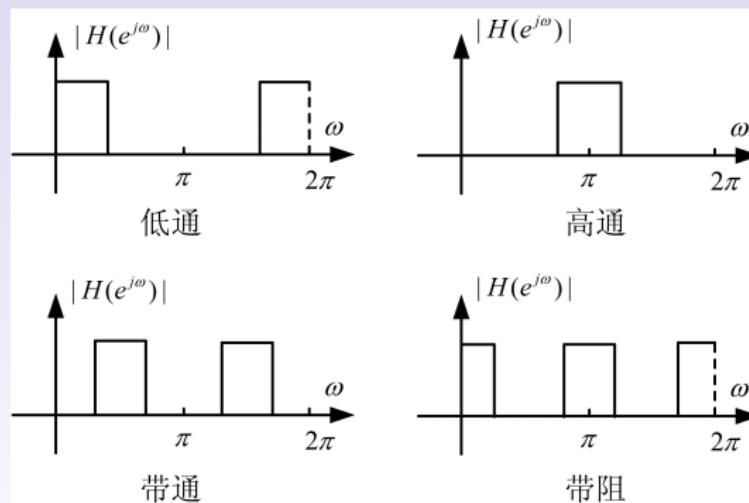
图: 数字滤波器的幅频特性指标示意图

(2) 衰减函数

$$\alpha(\omega) = -20 \lg \frac{|H(e^{j\omega})|}{|H(e^{j0})|} = 10 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega})|^2}$$

(3) $H(e^{j\omega})$ 与 $H_a(j\Omega)$ 的不同之处在于：

- ① $H(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数，且周期为 2π 。
- ② $H(e^{j\omega})$ 在 π 附近称为高频，在 $0(2\pi)$ 附近称为低频。

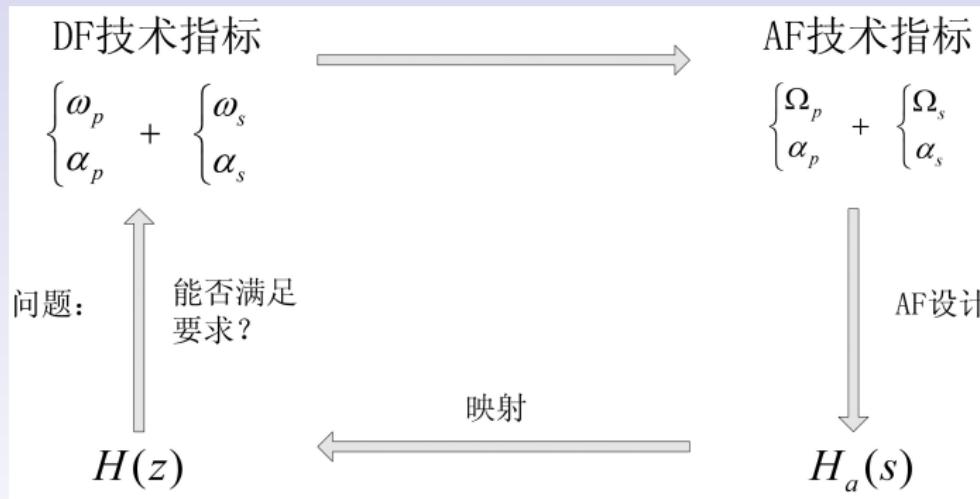


图：各种理想数字滤波器的幅频特性

二、从 AF 设计 DF 的基本思想

- 1 将数字滤波器的技术指标转化为模拟滤波器的技术指标。
- 2 设计模拟滤波器，得到其系统函数 $H_a(s)$ 。
- 3 $H_a(s) \xrightarrow{\text{映射}} H(z)$ 映射方法：
 - (1) 脉冲响应不变法
 - (2) 双线性映射法

从 AF 设计 DF 的基本思想的示意图



关键在于：找到一种映射关系，使得 $H(z)$ 满足数字滤波器的技术指标。

映射关系需要满足的条件

如何使得 $H(z)$ 满足数字滤波器的技术指标。

为此，映射关系要满足以下两条：

1 映射前后，系统的因果稳定性不变。

\Leftrightarrow s 左半平面上任何一点，映射到 z 平面单位圆内部。

2 数字滤波器的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 能模仿模拟滤波器的频率响应函数 $H_a(j\Omega)$ 。

\Leftrightarrow s 平面虚轴上的点映射到 z 平面单位圆上。

问题：已知 $H_a(s)$, 求 $H(z)$

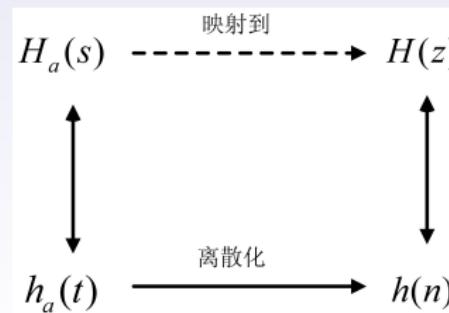
一、原理

设 $h_a(t) \longleftrightarrow H_a(s)$ 且 $h(n) \longleftrightarrow H(z)$

令 $h(n) = h_a(t)|_{t=nT}$ (脉冲响应不变)

二、推导

思路： $H_a(s) \longrightarrow h_a(t) \longrightarrow h(n) \longrightarrow H(z)$



设 $H_a(s)$ 只有单阶极点，即：

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s - s_i}$$

1 $H_a(s) \longrightarrow h_a(t)$ (利用拉氏反变换)

显然有： $h_a(t) = LT^{-1}[H_a(s)]$

且： $\frac{1}{s - s_0} \longleftrightarrow e^{s_0 t} \mu(t)$

$$h_a(t) = LT^{-1}[H_a(s)] = \sum_{i=1}^M A_i e^{s_i t} \mu(t)$$

2 $h_a(t) \longrightarrow h(n)$

前述可得：

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^M A_i e^{s_i t} \mu(t)$$

我们知道： $x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$

令 $t = nT$

则：
$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^M A_i e^{s_i nT} \mu(nT)$$

3 $h(n) \longrightarrow H(z)$

$$\begin{aligned} H(z) &= ZT[h(n)] = ZT \left[\sum_{i=1}^M A_i e^{s_i n T} \mu(nT) \right] \\ &= \sum_{i=1}^M A_i ZT \left[(e^{s_i T})^n \mu(n) \right] \end{aligned}$$

我们知道: $a^n \mu(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$

令 $a = e^{s_i T}$, 可得:

$$H(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

利用脉冲响应不变法映射的步骤

- ① $H_a(s)$ 进行因式分解，得到标准形式。

例如：

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s - s_k)} \rightarrow H_a(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s - s_i}$$

- ② 套公式。

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow H(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

三、映射关系的讨论

已知映射方式为：

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow H(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

问题在于： $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 之间的映射关系，也就是说，如何沟通 $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 。

提纲

1 $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 的关系

- (a) $H_a(s)$ 与 $\hat{H}_a(s)$
- (b) $\hat{H}_a(s)$ 与 $H(z)$

2 讨论

(a) $H_a(s)$ 与 $\hat{H}_a(s)$
设

$$h_a(t) \longleftrightarrow H_a(j\Omega)$$

$$\hat{h}_a(t) \longleftrightarrow \hat{H}_a(j\Omega)$$

根据采样定理,

$$\hat{H}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}r)$$

令 $s = j\Omega$, 可得:

$$\hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}r)$$

└ 6.3 IIR-DF 的设计—脉冲响应不变法

└ 6.3.2 脉冲响应不变法

(b) $\hat{H}_a(s)$ 与 $H(z)$

$$\begin{aligned}\hat{h}_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT)\delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\delta(t - nT)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又: } \hat{H}_a(s) &= LT[\hat{h}_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_a(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\delta(t - nT) \right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-snT} = H(z)|_{z=e^{sT}}\end{aligned}$$

说明

注意：分配函数的取样性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

令 $f(t) = e^{-st}$, $t_0 = nT$, 可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt = e^{-snT}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_a(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-snT} = H(z)|_{z=e^{sT}}\end{aligned}$$

即：

$$\hat{H}_a(s) = H(z)|_{z=e^{sT}}$$

通过上述推导可知：

$$\hat{H}_a(s) = H(z)|_{z=e^{sT}}$$

前述有： $\hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}r)$

联立两者可得：

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}r)$$

2 讨论

提纲

1 $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 的关系：

- (1) $H_a(s)$ 与 $\hat{H}_a(s)$
- (2) $\hat{H}_a(s)$ 与 $H(z)$

2 讨论：

- (1) 物理意义
- (2) 映射关系
- (3) 结论

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}r)$$

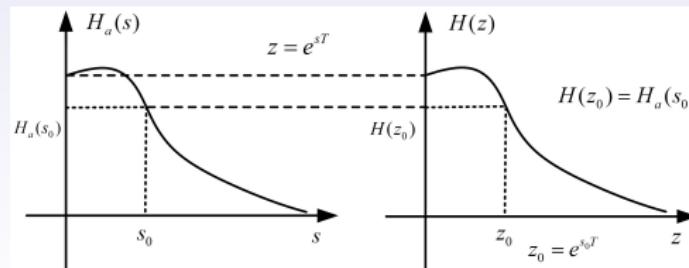
(1) 物理意义

公式揭示了在脉冲响应不变法的原则下 $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 的关系。即：

- a 先将 $H_a(s)$ 在 s 平面虚轴上，以 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 为周期延拓。
- b 再按照 $z = e^{sT}$ 关系映射到 $H(z)$

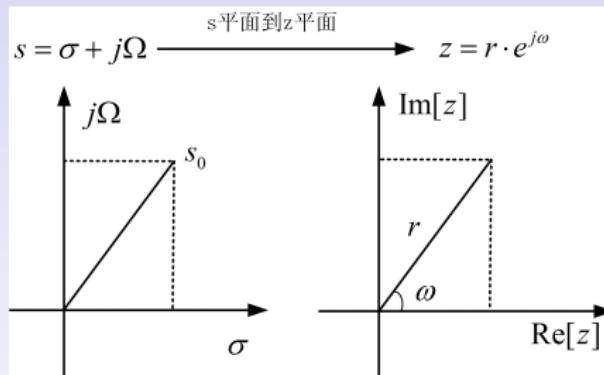
(2) 映射关系

- a 在数值上：



b 映射关系为: $z = e^{sT}$

$$\text{设 } s = \sigma + j\Omega, \quad z = r \cdot e^{j\omega}$$



注意:

映射关系为:

$$z = e^{sT}$$

Z 平面的极坐标表示方式为:

$$z = r e^{j\omega}$$

则有：

$$z = re^{j\omega} \quad \text{同时} \quad z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\Omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T}$$

对比可得：

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\omega = \Omega T$$

可以看出：

① 根据 $r = e^{\sigma T}$, 可知：

$$\begin{cases} \text{若 } \sigma < 0, \text{ 则 } r < 1 \rightarrow s \text{ 左半平面映射到 } z \text{ 平面单位圆内。} \\ \text{若 } \sigma = 0, \text{ 则 } r = 1 \rightarrow s \text{ 平面虚轴映射到 } z \text{ 平面单位圆上。} \\ \text{若 } \sigma > 0, \text{ 则 } r > 1 \rightarrow s \text{ 右半平面映射到 } z \text{ 平面单位圆外。} \end{cases}$$

② 根据 $e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j(\Omega + \frac{2\pi}{T} M)T}$, 可知：

当 σ 不变时, 模拟频率 Ω 变化 $\frac{2\pi}{T}$ 的整数倍时, 映射值不变。

(3) 结论

s 平面上任何一个宽度为 $\frac{2\pi}{T}$ 的水平横带区域都一定重复映射到全体 z 平面，且该映射为一多值映射。

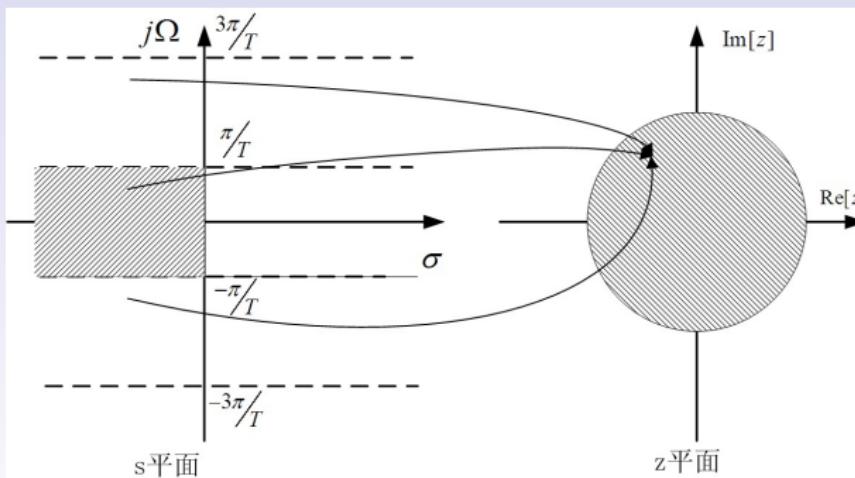


图: 脉冲响应不变法: s 平面到 z 平面映射关系示意图

四、脉冲响应不变法的频率混叠

1 原因

映射是多值映射，不是单值映射。

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}r)$$

令 $z = e^{j\omega}$, $s = j\Omega$, 可得：

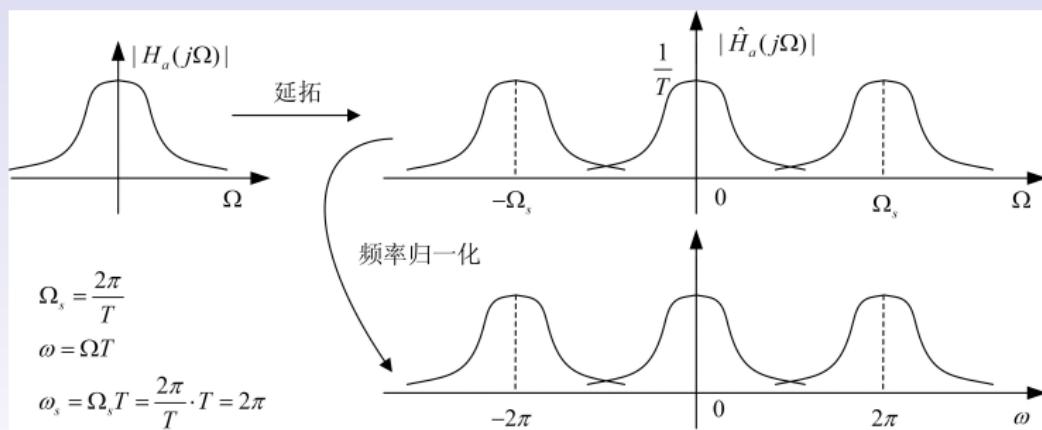
$$H(e^{j\omega})|_{e^{j\omega}=e^{j\Omega T}} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}r) \quad (1)$$

则：

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}r)$$

可见： $H(e^{j\omega})$ 是 $H_a(j\Omega)$ 以 $\frac{2\pi}{T}$ 为周期在 $j\Omega$ 轴上进行延拓后，在频率轴上归一化得到的结果。

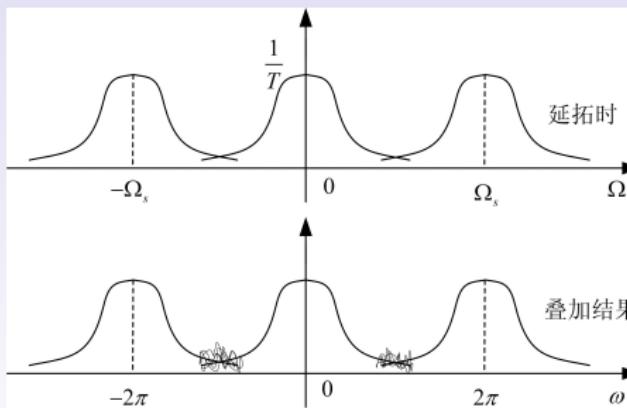
$$H_a(j\Omega) \xrightarrow{\text{延拓}} \hat{H}_a(j\Omega) \xrightarrow{\omega = \Omega T} H(e^{j\omega})$$



图：数字信号与模拟信号频谱关系示意图

2 频谱失真的含义

- (1) 若 $H_a(j\Omega)$ 为带限信号，即 $\frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_c (f_s \geq 2f_c)$ ，则无重叠，此为理想情况。
- (2) 若 $H_a(j\Omega)$ 为非带限信号，即 $f_s \leq 2f_c$ ，此时的 $H_a(j\Omega)$ 在延拓后总存在混叠现象。且在 $\frac{\pi}{T}$ 处失真最大，对于数字滤波器，即在 $\omega = \pi$ 处，失真最大。



- (3) 失真不可避免，因此频率响应不变法只能用于设计低通、带通数字滤波器的设计。不适合高通、带阻数字滤波器的设计。

五、脉冲响应不变法的优点与缺点

1 优点：

- (1) 原理简单, ($\omega = \Omega T$), ($r = e^{\sigma T}$);
- (2) 映射前后频率为线性关系。

2 缺点

非单值映射, 存在频率失真, 应用范围限制在低通和带通,
不适合高通和带阻滤波器的设计。

双线性变换法 (BLT)

- 脉冲响应不变法主要的缺点是产生了频率混叠
- 其原因为：LP-AF 不带限于 $\frac{\pi}{T}$ ，离散后在 $\omega = \pi$ 处产生了频率混叠

直观的想法：

将整个模拟轴 $\xrightarrow{\text{非线性压缩}} (-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$

一、BLT 的基本思路

① 思路：

将

连续系统的微分方程 利用数值积分方法转化为 差分方程

从而完成离散系统的设计。

② 推导：

[注：] 这里以一阶系统为例推导，这种关系在高阶系统中依然存在。

设一个一阶连续时间系统，其传输函数为：

$$H_a(s) = \frac{d}{s + c} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$H_a(s) = \frac{d}{s + c} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

化简后有：

$$\therefore s \cdot Y(s) + c \cdot Y(s) = d \cdot X(s)$$

转换为微分方程：

$$\therefore y'(t) = -c \cdot y(t) + d \cdot x(t)$$

令 $t = nT$,

$$y'(nT) = -c \cdot y(nT) + d \cdot x(nT)$$

又有,

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau + y(t_0)$$

└ 6.4 IIR-DF 的设计—双线性变换法 (BLT)

└ 6.4.1 双线性变换法

令 $t = nT, \quad t_0 = (n - 1)T$

$$y(nT) = \int_{(n-1)T}^{nT} y'(\tau) d\tau + y[(n-1)T]$$

当 T 很小时,

$$y(nT) \approx [y'(nT) + y'((n-1)T)] \frac{T}{2} + y[(n-1)T]$$

简化符号:

$$nT \rightarrow n \quad x(n) = x_a(nT) = x_a(t)|_{t=nT}$$

得:

$$\begin{cases} y'(n) = -c \cdot y(n) + d \cdot x(n) \\ y(n) = [y'(n) + y'(n-1)] \frac{T}{2} + y(n-1) \end{cases}$$

└ 6.4 IIR-DF 的设计—双线性变换法 (BLT)

└ 6.4.1 双线性变换法

联立求解，得：

$$y(n) = [-c \cdot y(n) + d \cdot x(n) - c \cdot y(n-1) + d \cdot x(n-1)] \frac{T}{2} + y(n-1)$$

等式两边做 z 变换，整理后可得：

$$H(z) = \frac{d}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + c}$$

同时有：

$$H_a(s) = \frac{d}{s + c}$$

对比，可得：

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

二、映射关系的讨论

显然有：

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

令 $z = e^{s_1 T}$, 则有：

$$\begin{cases} s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} \\ z = e^{s_1 T} \end{cases}$$

映射可以分为两步：

$$\begin{cases} 1^0 & s \longrightarrow s_1 \\ 2^0 & s_1 \longrightarrow z \end{cases}$$

└ 6.4 IIR-DF 的设计—双线性变换法 (BLT)

└ 6.4.1 双线性变换法

1 $s \rightarrow s_1$

s 平面映射到 s_1 平面。(在此仅讨论 s 虚轴上的任一点)

令 $s = j\Omega$, $s_1 = j\Omega_1$, 代入 $s = \frac{2}{T} \frac{1-e^{-s_1 T}}{1+e^{-s_1 T}}$

可得:

$$\begin{aligned} j\Omega &= \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\Omega_1 T}}{1 + e^{-j\Omega_1 T}} \\ &= \frac{2}{T} \frac{e^{-j\frac{\Omega_1}{2} T} \left[e^{j\frac{\Omega_1}{2} T} - e^{-j\frac{\Omega_1}{2} T} \right]}{e^{-j\frac{\Omega_1}{2} T} \left[e^{j\frac{\Omega_1}{2} T} + e^{-j\frac{\Omega_1}{2} T} \right]} \\ &= \frac{2}{T} \cdot j \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1}{2} T\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1}{2} T\right)$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1}{2} T\right)$$

讨论：

$$\begin{cases} \Omega = 0 & \longrightarrow \Omega_1 = 0; \\ \Omega = \infty & \longrightarrow \Omega_1 = \frac{\pi}{T}; \\ \Omega = -\infty & \longrightarrow \Omega_1 = -\frac{\pi}{T}. \end{cases}$$

即，

$$\begin{cases} \text{当 } \Omega \text{ 从 } (0 \rightarrow \infty) \text{ 变化时,} \\ \Omega_1 \text{ 从 } (0 \rightarrow \frac{\pi}{T}) \text{ 变化。} \end{cases}$$

注意，这些变换与 σ 无关，S 平面的横坐标可取任意值。也就是说可以看做是水平横带。

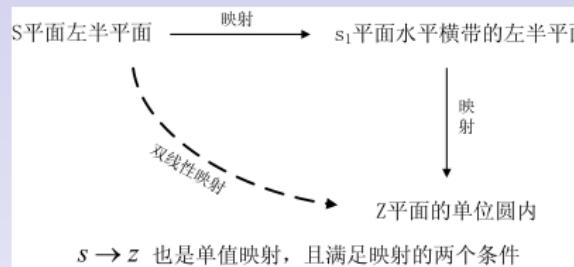
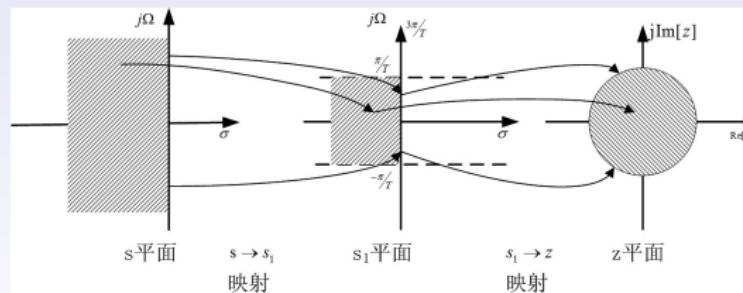
s 平面 \rightarrow 水平横带区域 (宽 $\frac{2\pi}{T}$)

└ 6.4 IIR-DF 的设计—双线性变换法 (BLT)

└ 6.4.1 双线性变换法

2 $s_1 \rightarrow z$

(单值的, 脉冲响应不变)

s 到 s_1 到 z 平面的映射示意图s 到 s_1 到 z 平面的映射示意图

① $\omega \rightarrow \Omega$ 的关系

$$\begin{cases} \Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1}{2} T\right) \\ \omega = \Omega_1 T \text{ (脉冲响应不变法)} \end{cases}$$

可得：

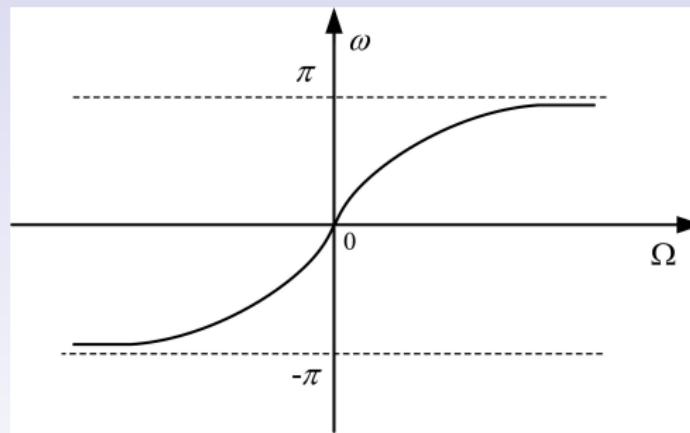
$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

说明

- ① $\omega = \Omega_1 T$ 是脉冲响应不变法得到的映射。
- ② 且有：

$$\begin{cases} \Omega : (0 \rightarrow \infty) \Rightarrow \Omega_1 : (0 \rightarrow \frac{\pi}{T}) \Rightarrow \omega : (0 \rightarrow \pi) \\ \Omega : (-\infty \rightarrow 0) \Rightarrow \Omega_1 : (-\frac{\pi}{T} \rightarrow 0) \Rightarrow \omega : (-\pi \rightarrow 0) \end{cases}$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



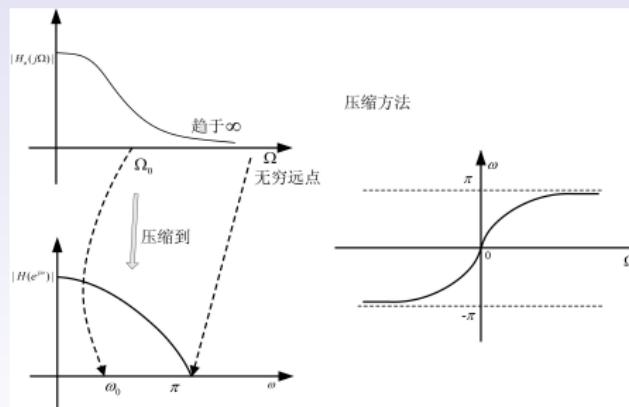
图：双线性变换频率映射关系示意图

三、BLT 的特点

- ① 优点：无频率混叠。
- ② 缺点：映射前后频率为非线性关系，直接影响到所涉及 DF 的频率响应能否逼真的模仿 AF 的频率响应。

解释：

- ① BLT 方法将 Ω 轴 $(0, \infty)$ ，压缩到 ω 轴 $(0, \pi)$ ，且为一一映射，但为非均匀压缩。



- ② 适用范围：适用于具有片段常数特性的滤波器，可设计高通、低通、带通、带阻滤波器。

LP-DF 完整设计方法

假设给定技术参数: $(\omega_p, \alpha_p), (\omega_s, \alpha_s)$,

- ① 将设计的 LP-DF 参数转变为相应的 LP-AF 的技术指标
 $(\Omega_p, \alpha_p), (\Omega_s, \alpha_s)$,
- ② 设计 LP-AF, 得到 $H_a(s)$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ 求 } N, \Omega_c \rightarrow |H_a(j\Omega)|^2 \\ 2) \text{ 查表, 得到 } H_a(p) \\ 3) \text{ 去归一化, } H_a(s) = H_a(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \end{array} \right.$$

- ③ $H_a(s) \xrightarrow{\text{映射}} H(z)$
 - 脉冲响应不变法
 - 双线性变换法

一、技术指标参数的转换

1 说明：

(a) LP-DF 指标可用三种形式给出。

$$(\omega_p, \alpha_p) \quad (\Omega_p, \alpha_p) \quad (f_p, \alpha_p)$$

(b) 数字域频率 ω 及其对应的模拟域频率的关系总是不变的。

$$\omega = \Omega T = 2\pi f T = \frac{2\pi f}{f_s}$$

注：数字域频率是模拟角频率对采样频率的归一化频率。

单位分别为：

$$\begin{cases} f & : \text{Hz} \\ \Omega & : \text{rad/s} \\ \omega & : \text{rad} \end{cases}$$

2 将设计的 LP-DF 技术指标转换为相应的 LP-AF 的技术指标时，转换的方式将由采用的映射方式决定：

在转换滤波器技术指标时，

- ① 将给定的技术指标（三种方式之一）转换为数字域频率 ω 形式，转换关系为：

$$\omega = \Omega T = 2\pi f T = \frac{2\pi f}{f_s}$$

- ② 在数字滤波器技术指标转换为模拟滤波器技术指标时，频率映射方式遵循后期系统函数的映射方式：

$$\begin{cases} \text{脉冲法} & : \quad \omega = \Omega \cdot T \\ \text{BLT 法} & : \quad \Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{cases}$$

例题

以两种不同的映射方法，将数字滤波器技术指标

$\omega_p = 0.4\pi \text{ rad}$, $\alpha_p = 3 \text{ dB}$ 转换为模拟滤波器技术指标，设

$$T = \frac{1}{2000} \text{ s}$$

解：

① 脉冲法： $\omega = \Omega \cdot T$

$$\therefore \Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = \frac{0.4\pi}{1/2000} = 800\pi \text{ rad/s}$$

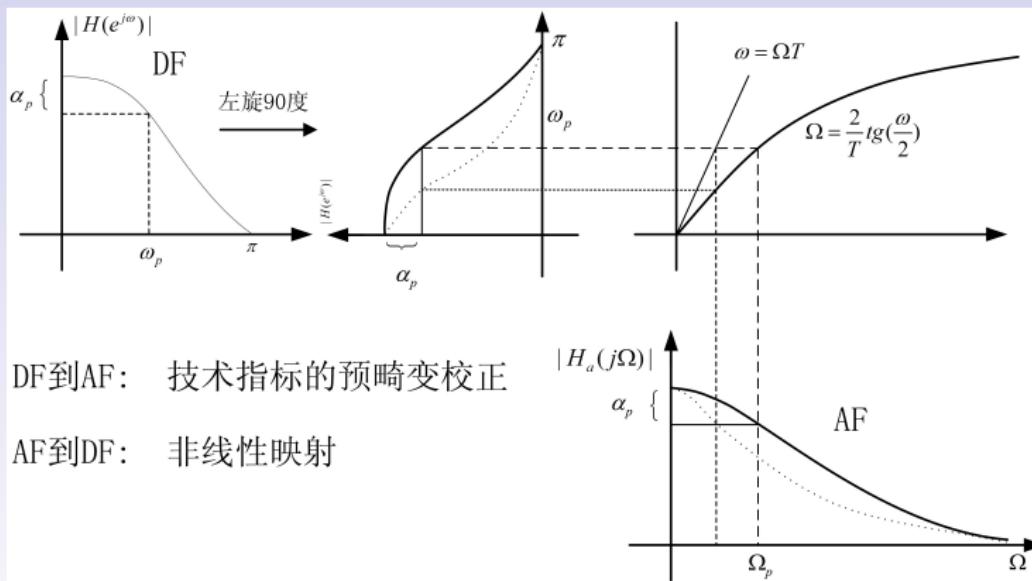
$$\text{或: } f_p = \frac{\Omega_p}{2\pi} = 400 \text{ Hz}$$

② BLT 法： $\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (预畸变)

$$\therefore \Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 4000 \operatorname{tg}(0.2\pi) = 2906 \text{ rad/s}$$

$$\text{或: } f_p = \frac{\Omega_p}{2\pi} = 463 \text{ Hz}$$

三、预畸变的解释



例题

请设计一个低通 *IIR-DF*, 要求:

- (1) 模拟滤波器采用 *Butterworth* 型, 映射方法选用双线性变换法;
- (2) 当 $0 \leq f \leq 25Hz$ 时, 衰减 $\leq 3 dB$;
- (3) 当 $0 \leq f \leq 50Hz$ 时, 衰减 $\geq 38 dB$;
- (4) 取样频率: $f_0 = 200Hz$

解: 首先, 解题步骤:

- ① 将 LP-DF 技术要求, 转化为 LP-AF 技术要求。
- ② 设计 LP-AF;
 - ① 由技术指标求 N 、 Ω_c ;
 - ② 查表得 $H_a(p)$;
 - ③ 去归一化, 得到 $H_a(s)$ 。
- ④ $H_a(s) \longrightarrow H(z)$

1⁰ 技术指标的转换：

由题意知，这里 DF 技术指标由 f_p, f_s 的形式给出，需转换为 ω_p, ω_s 的形式。

$$\begin{cases} f_p = 25 \text{Hz} \implies \omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_0} = 0.25\pi \text{ rad} \\ \alpha_p = 3 \text{dB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_s = 50 \text{Hz} \implies \omega_s = 2\pi \frac{f_s}{f_0} = 0.5\pi \text{ rad} \\ \alpha_s = 38 \text{dB} \end{cases}$$

下一步，将 DF 技术指标转换为 AF 技术指标，需根据所选的映射方法规定的映射关系转换。

对于 BLT 法：

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

则有：

$$\begin{cases} \Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 2f_0 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 400 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 165.685 \text{ rad/s} \\ \alpha_p = 3 \text{ dB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 2f_0 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 400 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 400 \text{ rad/s} \\ \alpha_s = 38 \text{ dB} \end{cases}$$

2⁰ 设计 LP-AF(1) 确定阶数 N, Ω_c ;

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)^{2N} = \frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}$$

代入上述参数, 可得:

$$\left(\frac{165.685}{400}\right)^{2N} = \frac{10^{0.3} - 1}{10^{3.8} - 1}$$

得: $N = 4.96$, 因为 N 需为整数, 取 N=5.

$$\alpha_p = 3dB \implies \Omega_c = \Omega_p = 165.685 \text{ rad/s}$$

(2) 根据, $N=5$, 查表可得:

$$H_a(p) = \frac{1}{(p^2 + 0.618p + 1)(p^2 + 1.618p + 1)(p + 1)}$$

(3) 去归一化;

$$\begin{aligned} H_a(s) &= H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \\ &= \frac{\Omega_c^5}{(s^2 + 0.618s \cdot \Omega_c + \Omega_c^2)(s^2 + 1.618s \cdot \Omega_c + \Omega_c^2)(s + \Omega_c)} \end{aligned}$$

其实不必计算出来, 后面还可以化简。

例题

例题 1

$$3^0 \quad H_a(s) \longrightarrow H(z)$$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \qquad \qquad H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$$

$$\implies H(z) = \left[H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \right]_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a(p) \Big|_{p=\frac{2}{\Omega_c T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

而:

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \implies \frac{2}{\Omega_c T} = c \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

$$\therefore H(z) = H_a(p) \Big|_{p=c \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

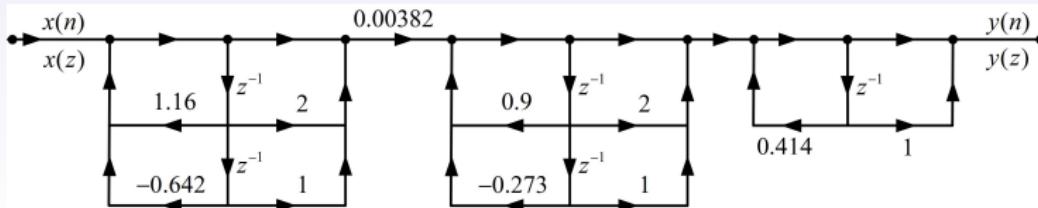
本题中:

$$\omega_c = \frac{\pi}{4} \implies p = 2.414 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$\therefore H(z) = H_a(p) \Big|_{p=2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\begin{aligned}
 H(z) &= H_a(p) \Big|_{p=2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\
 &= \frac{1}{((2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2 + 0.618(2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}) + 1)} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{((2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2 + 1.618(2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}) + 1)} \cdot \frac{1}{(2.414 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1)} \\
 &= \frac{0.00382(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.16z^{-1} + 0.642z^{-2}} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.273z^{-2}} \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.414z^{-1}}
 \end{aligned}$$

4⁰ 画出其网络结构。



例题

用脉冲响应不变法设计一个 3 阶 Butterworth 滤波器 (LP-DF),
且 $\omega_c = 1 \text{ rad}$, 采样频率 $f_0 = 2\pi \text{ kHz}$.

解:

- ① 求 N , Ω_c ; 依题意得:

$$N = 3, \quad \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = \omega_c f_0 = 2\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$$

- ② 查表得:

$$N = 3 \implies H_a(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)(p + 1)}$$

去归一化: $H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$ 代入可得 $H_a(s)$

③ 因式分解

$$\text{令: } H_a(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{ap+b}{p^2+p+1} \implies a = -1 \quad b = 0$$

$$\begin{aligned} H_a(p) &= \frac{1}{p+1} - \frac{p}{p^2+p+1} \\ &= \frac{1}{p+1} + \frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{p + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{p + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

去归一化: $H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$

$$H_a(s) = \left[\frac{1}{s + \Omega_c} + \frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{s + (\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})\Omega_c} - \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{s + (\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})\Omega_c} \right] \cdot \Omega_c$$

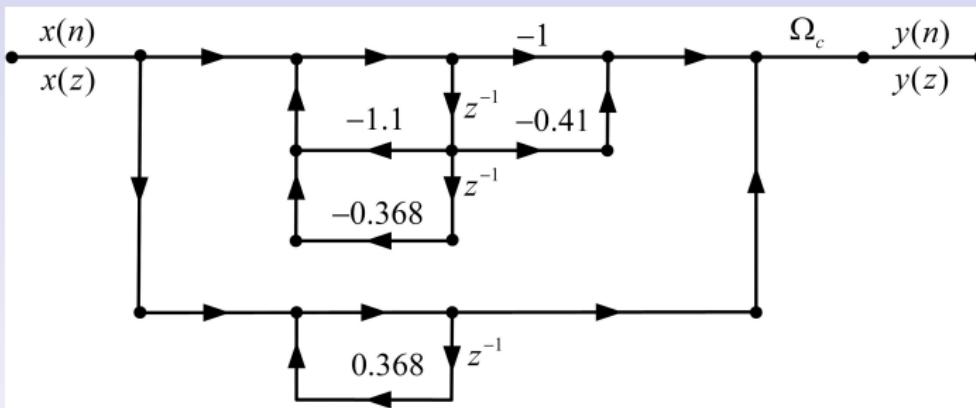
$$H(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \quad (\frac{A_i}{s - s_i} \rightarrow \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}})$$

$$H(z) = \left[\frac{1}{1 - e^{-\Omega_c T} z^{-1}} + \frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - e^{-(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})\Omega_c T} z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - e^{-(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})\Omega_c T} z^{-1}} \right] \cdot \Omega_c$$

而: $\Omega_c T = \omega_c = 1$

$$= \left[\frac{-1 - 0.41z^{-1}}{1 + 1.1z^{-1} + 0.368z^{-2}} + \frac{1}{1 - 0.368z^{-1}} \right] \cdot \Omega_c$$

① 画出网络结构图：



图：网络结构图

例题

用双线性变换法设计一个 3 阶 Butterworth 滤波器 (LP-DF),
采样频率 $f_0 = 1.2\text{kHz}$, $\omega_c = \frac{2}{3}\pi \text{ rad.}$

解:

$$\text{依题意有: } N = 3, \quad \Omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = 2.4 \times \sqrt{3} \times 10^3$$

查表得:

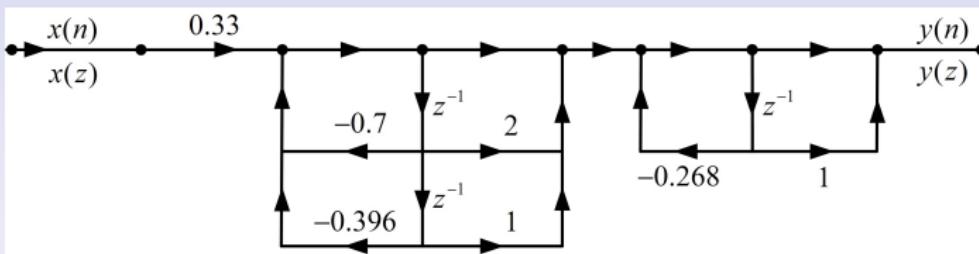
$$N = 3 \implies H_a(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)(p + 1)}$$

去归一化: $H_a(s) = H_a(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$

$$\therefore H(z) = \left[H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \right]_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a(p) \Big|_{p=ctg(\frac{\omega_c}{2}) \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\begin{aligned} \therefore H(z) &= H_a(p) \Big|_{p=\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{1}{\left[\frac{1}{3} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1 \right] \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1 \right)} \\ &= \frac{9(1+z^{-1})^2}{(4+\sqrt{3})+4z^{-1}+(4-\sqrt{3})z^{-2}} \cdot \frac{1+z^{-1}}{3+\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})z^{-1}} \\ &= \frac{0.33(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1+0.7z^{-1}+0.396z^{-2}} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1+0.268z^{-1}} \end{aligned}$$

画出网络结构图：



图：网络结构图