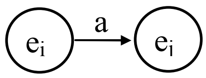
AUTOMATAS FINITOS

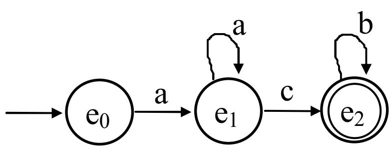
Un autómata finito es un modelo matemático de una máquina que acepta cadenas de un lenguaje definido sobre un alfabeto A. Consiste en un conjunto finito de estados y un conjunto de transiciones entre esos estados, que dependen de los símbolos de la cadena de entrada. El autómata finito acepta una cadena x si la secuencia de transiciones correspondientes a los símbolos de x conduce desde el estado inicial a un estado final.
Si para todo estado del autómata existe como máximo una transición definida para cada símbolo del alfabeto, se dice que el autómata es determinístico (AFD). Si a partir de algún estado y para el mismo símbolo de entrada, se definen dos o más transiciones se dice que el autómata es no determinístico (AFND).
Formalmente un autómata finito se define como una 5-upla
$M = <E, A, \delta, e_0, F>$ donde
E: conjunto finito de estados
A: alfabeto o conjunto finito de símbolos de entrada
δ: función de transición de estados, que se define como
- $\delta: E \times A \rightarrow E$ si el autómata es determinístico
- $\delta: E \times A \rightarrow P(E)$ si el autómata es no determinístico (P(E) es el conjunto potencia de E, es decir el conjunto de todos los subconjuntos de E)

e_0: estado inicial; $e_0 \in E$
F: conjunto de estados finales o estados de aceptación; $F \subseteq E$

Generalmente se asocia con cada autómata un grafo dirigido, llamado diagrama de transición de estados. Cada nodo del grafo corresponde a un estado. El estado inicial se indica mediante una flecha que no tiene nodo origen. Los estados finales se representan con un círculo doble. Si existe una transición del estado e_i al estado e_j para un símbolo de entrada a, existe entonces un arco rotulado a desde el nodo e_i al nodo e_j; es decir que $\delta(e_i, a) = e_j$, se representa en el diagrama



Ejemplo 1:
Autómata finito determinístico que acepta el lenguaje
$L_1 = \{a^n cb^m / n > 0 \text{ y } m \geq 0\}$
$M_{1D} = < \{e_0, e_1, e_2\}, \{a, b, c\}, \delta_{1D}, e_0, \{e_2\}>$
δ_{1D} está definida por el siguiente diagrama de transición de estados

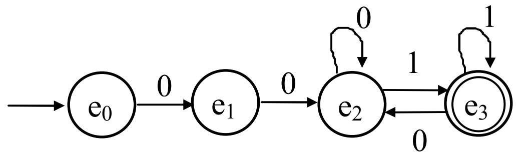


Ejemplo 2:
Autómata finito determinístico que acepta el lenguaje

$L_2 = \{00x1 / x \in \{0, 1\}^* \}$

$M_{2D} = < \{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{0, 1\}, \delta_{2D}, e_0, \{e_3\} >$

δ_{2D} está definida por el siguiente diagrama de transición de estados



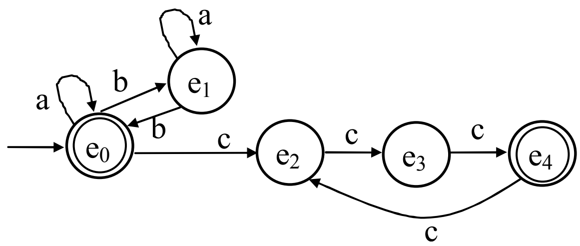
Ejemplo 3:

Autómata finito determinístico que acepta el lenguaje

$L_3 = \{xc^{3m} / x \in \{a, b\}^*$ y la cantidad de b's es par y $m \geq 0\}$

$M_{3D} = < \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}, \{a, b, c\}, \delta_{3D}, e_0, \{e_0, e_4\} >$

δ_{3D} está definida por el siguiente diagrama de transición de estados



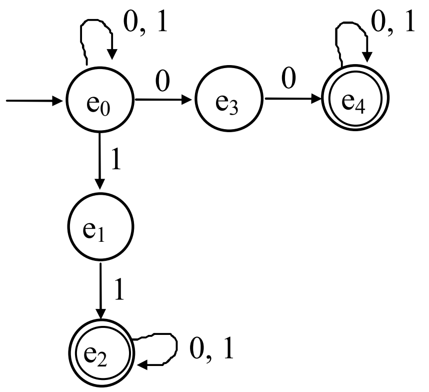
Ejemplo 4:

Autómata finito no determinístico que acepta el lenguaje

$L_4 = \{ x / x \in \{0, 1\}^*$ y x contiene la subcadena 00 ó x contiene la subcadena 11$\}$

$M_{4ND} = < \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}, \{0, 1\}, \delta_{4ND}, e_0, \{e_2, e_4\} >$

δ_{4ND} está definida por el siguiente diagrama de transición de estados



Función de transición para cadenas

Se define además una función $\delta^*: E \times A^* \rightarrow E$, tal que $\delta^*(e_i, x)$ es el estado en que estará el autómata después de leer la cadena x comenzando en el estado e_i.

1) $\delta^*(e_i, \varepsilon) = e_i$

2) $\delta^*(e_i, xa) = \delta(\delta^*(e_i, x), a)$ siendo x una cadena y a un símbolo del alfabeto A.

La diferencia entre δ y δ^* es que δ se define desde un estado y un símbolo del alfabeto, y δ^* se define desde un estado y una cadena de símbolos.

El lenguaje aceptado por un autómata finito $M = <E, A, \delta, e_0, F>$ es:

$L(M) = \{ x \in A^* \ / \ \delta^* (e_0, x) \in F \}$

Los lenguajes aceptados por autómatas finitos se denominan lenguajes regulares.

Equivalencia entre AFD y AFND

Para cada AFND, existe un AFD que acepta el mismo lenguaje.

Dado el autómata finito no determinístico $M_{ND} = \langle E_{ND}, A, \delta_{ND}, e_{0ND}, F_{ND} \rangle$, se define el autómata finito determinístico correspondiente $M_D = \langle E_D, A, \delta_D, e_{0D}, F_D \rangle$ como sigue:

- $E_D = P(E_{ND})$ (conjunto potencia de E_{ND}). Cada elemento de E_D se representa como $[e_1, e_2, ..., e_i]$ donde $e_1, e_2, ..., e_i$ están en E_{ND}. Se debe notar que $[e_1, e_2, ..., e_i]$ es un único estado de M_D que corresponde a un conjunto de estados de M_{ND}.
- A: alfabeto
- δ_D: $E_D \times A \rightarrow E_D$, se define como

  $\delta_D([e_1, e_2, ..., e_i], a) = [e_l, e_m, ..., e_k]$ sii

  $\delta_{ND}(\{e_1, e_2, ..., e_i\}, a) = \delta^G (\{e_1, e_2, ..., e_i\}, a) = \{e_l, e_m, ..., e_k\}$,

donde δ^G se define como $\delta^G (C, a) = \bigcup_{p \in C} \delta (p, a)$ y $\delta^G (\varnothing, a) = \varnothing$ (C: conj. de estados)

Es decir que δ_D aplicada a un elemento $[e_1, e_2, ..., e_i]$ de E_D se calcula aplicando δ_{ND} a cada estado de E_{ND} representado por $[e_1, e_2, ..., e_i]$.

- $e_{0D} = [e_{0ND}]$
- F_D: conjunto de todos los estados de E_D que contienen al menos un estado final de M_{ND}.

<u>Ejemplo 5</u>: Construcción del autómata finito determinístico correspondiente al autómata finito no determinístico del ejemplo 4.

El AFD M_{4D} correspondiente al AFND M_{4ND} se define como

$M_{4D} = \langle E_{4D}, \{0, 1\}, \delta_{4D}, [e_0], F_{4D} \rangle$

La función de transición δ_{4D} se calcula como:

δ_{4D}	0	1
$[e_0]$	$[e_0, e_3]$	$[e_0, e_1]$
$[e_0, e_3]$	$[e_0, e_3, e_4]$	$[e_0, e_1]$
$[e_0, e_1]$	$[e_0, e_3]$	$[e_0, e_1, e_2]$
$[e_0, e_3, e_4]$	$[e_0, e_3, e_4]$	$[e_0, e_1, e_4]$
$[e_0, e_1, e_2]$	$[e_0, e_2, e_3]$	$[e_0, e_1, e_2]$
$[e_0, e_1, e_4]$	$[e_0, e_3, e_4]$	$[e_0, e_1, e_2, e_4]$
$[e_0, e_2, e_3]$	$[e_0, e_2, e_3, e_4]$	$[e_0, e_1, e_2]$
$[e_0, e_1, e_2, e_4]$	$[e_0, e_2, e_3, e_4]$	$[e_0, e_1, e_2, e_4]$
$[e_0, e_2, e_3, e_4]$	$[e_0, e_2, e_3, e_4]$	$[e_0, e_1, e_2, e_4]$

Como $\delta_{4ND}(e_0, 0) = \{e_0, e_3\}$, entonces $\delta_{4D}([e_0], 0) = [e_0, e_3]$.

Como $\delta_{4ND}(\{e_0, e_3\}, 0)= \delta^G(\{e_0, e_3\}, 0)=\delta_{4ND}(e_0, 0) \cup \delta_{4ND}(e_3, 0)=\{e_0, e_3\} \cup \{e_4\} = \{e_0, e_3, e_4\}$ entonces $\delta_{4D}([e_0, e_3], 0) = [e_0, e_3, e_4]$.

De la misma forma se calcula δ_{4D} para el resto de los estados.

Se debe notar que se ha calculado δ_{4D} para únicamente aquellos estados alcanzables desde el estado inicial y a partir de los cuales se puede alcanzar un estado final. Por lo tanto, el conjunto de estados E_{4D} es

$E_{4D} = \{[e_0], [e_0, e_3], [e_0, e_1], [e_0, e_3, e_4], [e_0, e_1, e_2], [e_0, e_1, e_4], [e_0, e_2, e_3], [e_0, e_1, e_2, e_4], [e_0, e_2, e_3, e_4].\}$

El conjunto de estados finales F_{4D} está formado por aquellos estados de E_{4D} que contienen al menos un estado final de M_{4ND}. Entonces

$F_{4D} = \{[e_0, e_3, e_4], [e_0, e_1, e_2], [e_0, e_1, e_4], [e_0, e_2, e_3], [e_0, e_1, e_2, e_4], [e_0, e_2, e_3, e_4]\}$

Renombrando los estados correspondientes al AFD:

$[e_0] \to q_0$

$[e_0, e_3] \to q_1$

$[e_0, e_1] \to q_2$

$[e_0, e_3, e_4] \to q_3$

$[e_0, e_1, e_2] \to q_4$

$[e_0, e_1, e_4] \to q_5$

$[e_0, e_2, e_3] \to q_6$

$[e_0, e_1, e_2, e_4] \to q_7$

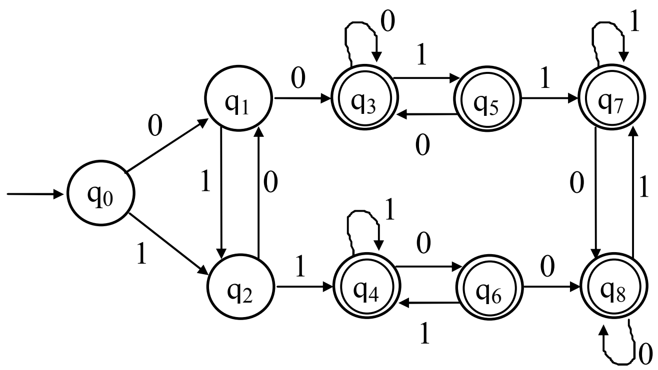
$[e_0, e_2, e_3, e_4] \to q_8$

la función de transición δ_{4D} se puede reescribir como:

δ_{4D}	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_3	q_2
q_2	q_1	q_4
q_3	q_3	q_5
q_4	q_6	q_4
q_5	q_3	q_7
q_6	q_8	q_4
q_7	q_8	q_7
q_8	q_8	q_7

Entonces $M_{4D} = <\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{0, 1\}, \delta_{4D}, q_0, \{q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}>$

El diagrama de transición de estados correspondiente a este autómata es:



Minimización de AFD

Para cada AFD existe un AFD con cantidad mínima de estados que acepta el mismo lenguaje. El algoritmo de minimización divide el conjunto de estados del AFD en clases de equivalencia. Los pasos a seguir son los siguientes:

1) Eliminar los estados no alcanzables desde el estado inicial.
2) Eliminar los estados desde los cuales no es posible alcanzar un estado final.
3) Construir una partición Π_0 del conjunto de estados, que consiste en dos grupos: estados finales y estados no finales.
4) Sea K = 0.
5) Definir Π_{K+1} de la siguiente manera: para cada grupo G de una partición Π_K, dividir a G en subgrupos tales que dos estados s y t están en el mismo grupo sí y sólo sí para todo símbolo a del alfabeto de entrada, los estados s y t van al mismo grupo de Π_K.
6) K = K + 1.
7) Si $\Pi_K \neq \Pi_{K-1}$ volver al paso 5. En caso contrario, terminar.

<u>Ejemplo 6</u>: Minimización del AFD resultante del ejemplo 5.

- No existen estados no alcanzables desde el estado inicial.
- No existen estados desde los cuales no es posible alcanzar un estado final.

- Como q_0, q_1, q_2 son estados no finales y q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8 son estados finales
  $\Pi_0 = \{ \overline{q_0\ q_1\ q_2},\ \overline{q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ q_7\ q_8} \}$

- Grupo $\overline{q_0\ q_1\ q_2}$. Como
  - desde q_0 con 0 se pasa al grupo $\overline{q_0\ q_1\ q_2}$
  - desde q_1 con 0 se pasa al grupo $\overline{q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ q_7\ q_8}$
  - desde q_2 con 0 se pasa al grupo $\overline{q_0\ q_1\ q_2}$

se debe separar el estado q_1 de los estados q_0 y q_2.

Para ver si q_0 y q_2 pueden quedar en el mismo grupo, se debe analizar qué ocurre con el símbolo 1:
- desde q_0 con 1 se pasa al grupo $\overline{q_0\ q_1\ q_2}$
- desde q_1 con 1 se pasa al grupo $\overline{q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ q_7\ q_8}$

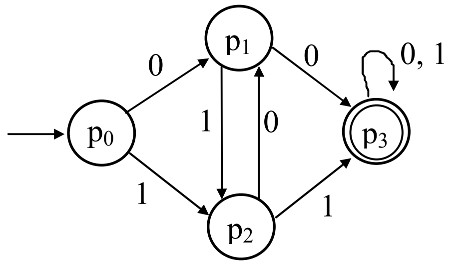
Entonces, como con 1 van a distintos grupos se deben separar también.
- Después de realizar un análisis similar para el grupo $\overline{q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ q_7\ q_8}$, la partición resultante es: $\Pi_1 = \{ \overline{q_0}, \overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ q_7\ q_8} \}$

- Analizando Π_1 se puede concluir que no hay manera de seguir particionando, ya que $\Pi_2 = \Pi_1$.

Renombrando los estados:

$\overline{q_0} \rightarrow p_0$
$\overline{q_1} \rightarrow p_1$
$\overline{q_2} \rightarrow p_2$
$\overline{q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ q_7\ q_8} \rightarrow p_3$

el AFD mínimo se define como $M_{4Dmin} = < \{ p_0, p_1, p_2, p_3 \}, \{0, 1\}, \delta, p_0, \{p_3\} >$, donde δ está definida por el siguiente diagrama de transición de estados



De los ejemplos 4, 5 y 6 se puede concluir que:

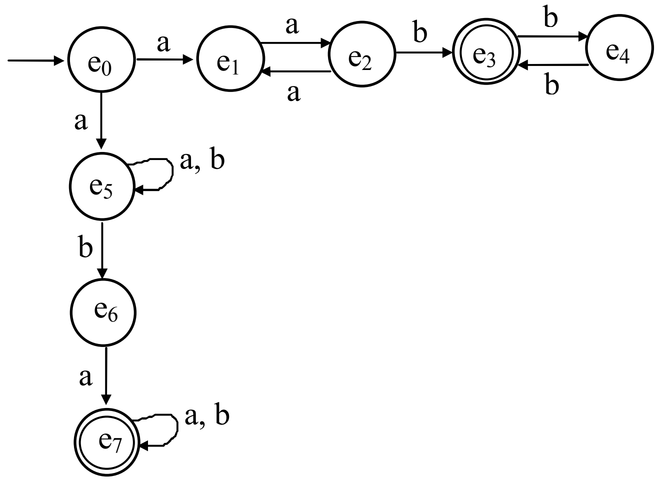
$L(M_{4ND}) = L(M_{4D}) = L(M_{4Dmin}) = L_4$

<u>Ejemplo 7</u>:
Autómata finito no determinístico que acepta el lenguaje

$L_7 = \{ a^{2n}b^{2k+1} / n \geq 1 \text{ y } k \geq 0\} \cup \{ax / x \in \{a, b\}^* \text{ y x contiene la subcadena ba}\}$

$M_{7ND} = < \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}, \{a, b\}, \delta_{7ND}, e_0, \{e_3, e_7\}>$

δ_{7ND} está definida por el siguiente diagrama de transición de estados



El autómata finito determinístico M_{7D} correspondiente al AFND M_{7ND} se define como
$M_{7D} = < E_{7D}, \{a, b\}, \delta_{7D}, [e_0], F_{7D}>$
La función de transición δ_{7D} se calcula como:

δ_{7D}	a	b
$[e_0]$	$[e_1, e_5]$	-
$[e_1, e_5]$	$[e_2, e_5]$	$[e_5, e_6]$
$[e_2, e_5]$	$[e_1, e_5]$	$[e_3, e_5, e_6]$
$[e_5, e_6]$	$[e_5, e_7]$	$[e_5, e_6]$
$[e_3, e_5, e_6]$	$[e_5, e_7]$	$[e_4, e_5, e_6]$
$[e_5, e_7]$	$[e_5, e_7]$	$[e_5, e_6, e_7]$
$[e_4, e_5, e_6]$	$[e_5, e_7]$	$[e_3, e_5, e_6]$
$[e_5, e_6, e_7]$	$[e_5, e_7]$	$[e_5, e_6, e_7]$

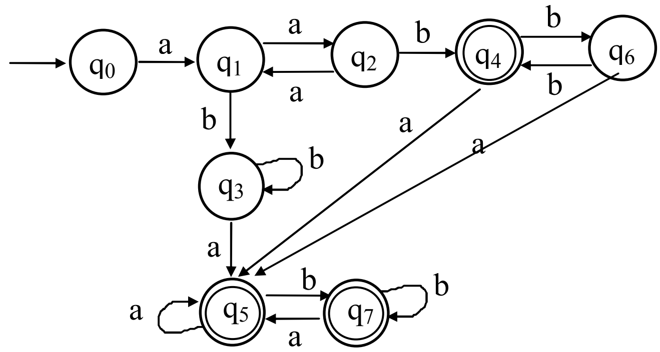
Como $\delta_{7ND}(e_0, a) = \{e_1, e_5\}$, entonces $\delta_{7D}([e_0], a) = [e_1, e_5]$.
Como $\delta_{7ND}(\{e_1, e_5\}, a)= \delta^G(\{e_1, e_5\}, a)=\delta_{7ND}(e_1, a) \cup \delta_{7ND}(e_5, a)=\{e_2\} \cup \{e_5\} = \{e_2, e_5\}$ entonces $\delta_{7D}([e_1, e_5], a) = [e_2, e_5]$.
De la misma forma se calcula δ_{7D} para el resto de los estados.
Se debe notar que se ha calculado δ_{7D} para únicamente aquellos estados alcanzables desde el estado inicial y a partir de los cuales se puede alcanzar un estado final. Por lo tanto, el conjunto de estados E_{7D} es $E_{7D} = \{[e_0], [e_1, e_5], [e_2, e_5], [e_3, e_5, e_6], [e_4, e_5, e_6], [e_5, e_6], [e_5, e_7], [e_5, e_6, e_7]\}$
El conjunto de estados finales F_{7D} está formado por aquellos estados de E_{7D} que contienen al menos un estado final de M_{7ND}. Entonces
$F_{7D} = \{[e_5, e_7], [e_3, e_5, e_6], [e_5, e_6, e_7]\}$

Renombrando los estados correspondientes al AFD:
$[e_0] \rightarrow q_0$
$[e_1, e_5] \rightarrow q_1$
$[e_2, e_5] \rightarrow q_2$
$[e_5, e_6] \rightarrow q_3$
$[e_3, e_5, e_6] \rightarrow q_4$
$[e_5, e_7] \rightarrow q_5$
$[e_4, e_5, e_6] \rightarrow q_6$
$[e_5, e_6, e_7] \rightarrow q_7$

la función de transición δ_{7D} se puede reescribir como:

δ_{7D}	a	b
q_0	q_1	-
q_1	q_2	q_3
q_2	q_1	q_4
q_3	q_5	q_3
q_4	q_5	q_6
q_5	q_5	q_7
q_6	q_5	q_4
q_7	q_5	q_7

Entonces $M_{7D} = <\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}, \{a, b\}, \delta_{7D}, q_0, \{q_4, q_5, q_7\}>$
El diagrama de transición de estados correspondiente a este autómata es:



El autómata finito determinístico mínimo correspondiente al autómata M_{7D} se calcula como sigue:
- No existen estados no alcanzables desde el estado inicial.
- No existen estados desde los cuales no es posible alcanzar un estado final.

- Como q_0, q_1, q_2, q_3 y q_6 son estados no finales y q_4, q_5 y q_7 son estados finales
  $\Pi_0 = \{ \overline{q_0\, q_1\, q_2\, q_3\, q_6},\ \overline{q_4\, q_5\, q_7} \}$

- Grupo $\overline{q_0\, q_1\, q_2\, q_3\, q_6}$. Como
 - desde q_0 con a se pasa al grupo $\overline{q_0\, q_1\, q_2\, q_3\, q_6}$
 - desde q_1 con a se pasa al grupo $\overline{q_0\, q_1\, q_2\, q_3\, q_6}$
 - desde q_2 con a se pasa al grupo $\overline{q_0\, q_1\, q_2\, q_3\, q_6}$
 - desde q_3 con a se pasa al grupo $\overline{q_4\, q_5\, q_7}$
 - desde q_6 con a se pasa al grupo $\overline{q_4\, q_5\, q_7}$

los estados q_3 y q_6 se deben separar de los estados q_0, q_1 y q_2.
Para ver si q_0, q_1 y q_2 pueden quedar en el mismo grupo, se debe analizar qué ocurre con el símbolo b:
- desde q_0 con b no hay transiciones definidas
- desde q_1 con b se pasa al grupo $\overline{q_0\, q_1\, q_2\, q_3\, q_6}$
- desde q_2 con b se pasa al grupo $\overline{q_4\, q_5\, q_7}$

Como con b van a distintos grupos se deben separar.
Para ver si q_3 y q_6 pueden quedar en el mismo grupo, se debe analizar qué ocurre con el símbolo b:
- desde q_3 con b se pasa al grupo $\overline{q_0\, q_1\, q_2\, q_3\, q_6}$
- desde q_6 con b se pasa al grupo $\overline{q_4\, q_5\, q_7}$

Entonces, como con b van a distintos grupos se deben separar también.
- Después de realizar un análisis similar para el grupo $\overline{q_4\, q_5\, q_7}$, la partición resultante es:

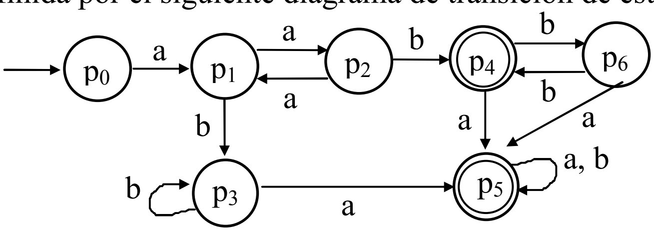
$\Pi_1 = \{ \overline{q_0}, \overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{q_3}, \overline{q_4}, \overline{q_6}, \overline{q_5\, q_7} \}$

- Analizando Π_1 se puede concluir que no hay manera de seguir particionando, ya que $\Pi_2 = \Pi_1$.

Renombrando los estados:

$\overline{q_0} \to p_0$
$\overline{q_1} \to p_1$
$\overline{q_2} \to p_2$
$\overline{q_3} \to p_3$
$\overline{q_4} \to p_4$
$\overline{q_6} \to p_6$
$\overline{q_5\, q_7} \to p_5$

el AFD mínimo se define como $M_{7Dmin} = \langle \{ p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}, \{a, b\}, \delta, p_0, \{p_4, p_5\}\rangle$, donde δ está definida por el siguiente diagrama de transición de estados



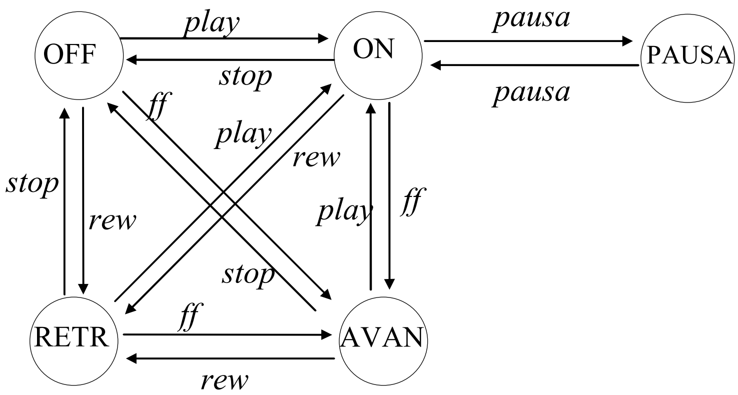
Se puede concluir que $L(M_{7ND}) = L(M_{7D}) = L(M_{7Dmin}) = L_7$

Autómata finito: Modelo
Un autómata finito M que se utiliza como modelo es simplemente un autómata finito que se define como una 3-upla $M_M = \langle E, A, \delta \rangle$.

Notar que no existe estado inicial e_0 , ni el conjunto de estados finales F, ya que solo se utiliza para modelar el funcionamiento de un proceso.

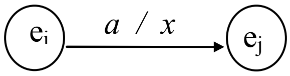
Donde
E: Conjunto finito de *estados*,
A: Alfabeto o conjunto finito de símbolos de entrada,
δ: Es la *función de transición de estados* definida $\delta: E \times A \rightarrow E$

<u>Ejemplo 8</u>:
Se muestra el modelo de funcionamiento de un grabador "tipo"
E ={OFF, ON, PAUSA, AVAN., RETR.}
A={play, pausa, stop, rew, ff}
δ:



Autómata Finito Traductor
Un autómata finito traductor M_T es simplemente un autómata finito que se define como una 7-upla $M_T = \langle E, A, \delta, e_0, F, S, \gamma \rangle$.
Donde
E: Conjunto finito de *estados*,
A: Alfabeto o conjunto finito de símbolos de entrada,
δ: Es la *función de transición de estados* definida $\delta: E \times A \rightarrow E$
e_0: *Estado inicial* $e_0 \in E$.
F: Conjunto de *estados finales o estados de aceptación.* $F \subseteq E$.
S: Alfabeto o conjunto finito de símbolos de salida
γ: Es la *función de traducción* definida $\gamma: E \times A \rightarrow S^*$
Ambas funciones $\delta: E \times A \rightarrow E$ y $\gamma: E \times A \rightarrow S^*$ están definidas sobre E x *A*.
Si existen $\delta(e_i, a) = e_j$ y
$\gamma(e_i, a) = x$ donde $e_i, e_j \in E$; $a \in A$; $x \in S^*$

en el diagrama de transición de estados el valor de la traducción x se agrega sobre los arcos.



<u>Función de traducción para cadenas</u>

La extensión de la función de traducción γ^*: E x A* $\rightarrow$ S*, tal que $\gamma^*(e_i, \omega)$ es la cadena que traducirá el autómata, luego de leer la cadena ω en la cinta de entrada y comenzando en el estado e_i, se define como:

1) $\gamma^*(e_i, \varepsilon) = \varepsilon$

2) $\gamma^*(e_i, \omega a) = \gamma^*(e_i, \omega).\ \gamma(\delta^*(e_i, \omega), a)$ donde $a \in A,\ \omega \in A^*,\ e_i \in E$

La diferencia entre γ y γ^* es que γ se define desde un estado y un símbolo del alfabeto, y γ^* se define desde un estado y una cadena de símbolos.

Nota: El autómata solo define la traducción, si el autómata finito reconocedor subyacente "acepta" la cadena. Es decir, la traducción $T(\omega)$: $A^* \rightarrow S^*$ asociada a M_T está definida como:

$T(\omega) = \gamma^*(e_0, \omega) \Leftrightarrow \delta^*(e_0, \omega) \in F$ donde $\omega \in A^*$

<u>Ejemplo 9</u>:

En cierta oficina, una máquina expendedora distribuye dos tipos de bebidas en lata: gaseosa y agua mineral. El precio por unidad es \$1. La máquina acepta monedas de \$0.25, \$0.50 y \$1; y devuelve el cambio necesario. Para comprar una bebida se deben introducir las monedas, y luego apretar el botón G para solicitar una gaseosa, o bien el botón M para solicitar Agua Mineral.

Para esta máquina se modela el siguiente Autómata Finito AFM = <E, A, δ, S, γ>

La función de traducción γ, indica el dinero que se entrega como cambio por la adquisición de la bebida, seguido por el tipo de bebida que se ha seleccionado.

El conjunto de estados E = { e_0, e_1, e_2, e_3, e_4}, donde el estado e_k de la máquina, para k = 0, 1, 2, 3, 4, recuerda la inserción de un total de k * \$0.25.

A = {0.25, 0.50, 1, G, M}

S = {0.25, 0.50, 1, g, m} donde g indica lata de gaseosa y m agua mineral

δ	0.25	0.50	1	G	M
e_0	e_1	e_2	e_4	e_0	e_0
e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_1
e_2	e_3	e_4	e_4	e_2	e_2
e_3	e_4	e_4	e_4	e_3	e_3
e_4	e_4	e_4	e_4	e_0	e_0

γ	0.25	0.50	1	G	M
e_0	ε	ε	ε	ε	ε
e_1	ε	ε	0.25	ε	ε
e_2	ε	ε	0.50	ε	ε
e_3	ε	0.25	0.25 0.50	ε	ε
e_4	0.25	0.50	1	g	m

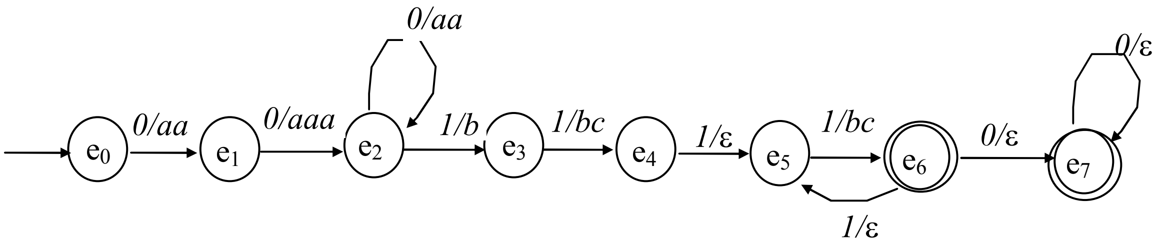
Ejemplo 10:
Sea L = $\{0^n 1^{2m} 0^k$ / n ≥2 y m ≥2 y k≥0}

Traducir las cadenas de L:

$0^n 1^{2m} 0^k$ como $a^{2n+1} b(bc)^m$ para n ≥2, m ≥2, k≥0

$M_{T1} = <\{e_0,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}, \{0,1\}, \delta, e_0, \{e_6,e_7\}, \{a,b,c\}, \gamma >$

δ y γ



Para la cadena de entrada 001111 = $0^2 1^4$
$T(0^2 1^4) = \gamma^*(e_0 , 0^2 1^4) \Leftrightarrow \delta^*(e_0 , 0^2 1^4) \in F$
$T(0^2 1^4) = a^5 b^2 (bc)^2 \Leftrightarrow e_6 \in F$

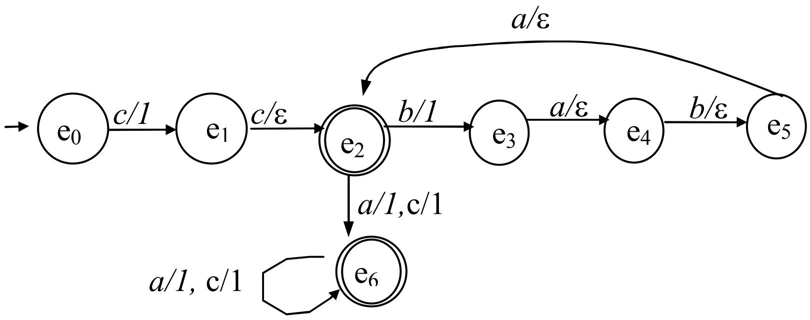
Para la cadena de entrada $0^5 1^6 0^3$
$T(0^5 1^6 0^3) = \gamma^*(e_0 , 0^5 1^6 0^3) \Leftrightarrow \delta^*(e_0 , 0^5 1^6 0^3)$
$T(0^5 1^6 0^3) = a^{11} b(bc)^3 \Leftrightarrow e_7 \in F$

Para la cadena de entrada $01^4 0^2$
$T(01^4 0^2) = \gamma^*(e_0 , 01^4 0^2) \Leftrightarrow \delta^*(e_0 , 01^4 0^2)$
$T(01^4 0^2)$ no es válida porque $e_1 \notin F$

Ejemplo 11:
Sea L = {cc $(ba)^{2k}$x / k≥0 y x∈ {a,c}*}

Traducir las cadenas de L:
$cc(ba)^{2k}x$ como $1^{k+1} 1^m$ para k≥0 y m=|x|
$M_{T1} = <\{e_0,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}, \{0,1\}, \delta, e_0, \{e_2, e_6\}, \{1\}, \gamma >$

δ y γ:



Para la cadena de entrada cc

$\gamma^*(e_0 , cc)=1 \Leftrightarrow \delta^*(e_0 , cc) \in F$

Para la cadena de entrada $cc(ba)^4acca$

$\gamma^*(e_0 , cc(ba)^4acca)= 1^3 1^4 =1^7 \Leftrightarrow \delta^*(e_0 , cc(ba)^4acca) \in F$

Para la cadena de entrada ccaaaacacc

$\gamma^*(e_0 , ccaaaacacc)= 1^9 \Leftrightarrow \delta^*(e_0 , ccaaaacacc) \in F$

Para la cadena de entrada ccc

$\gamma^*(e_0 , ccc)= 1^2 \Leftrightarrow \delta^*(e_0 , ccc) \in F$