Readme.txt

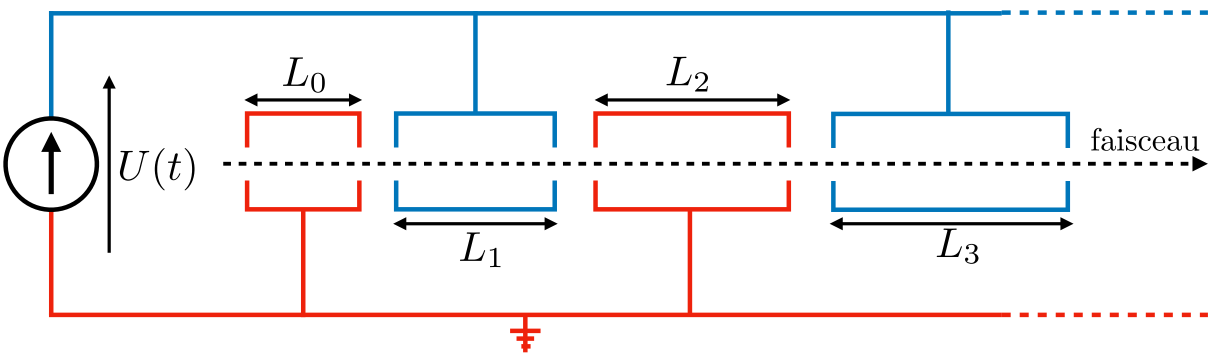
```
auteur(s) : Maxence Miguel-Brebion
contibuteur(s) :
source(s) : concours Polytechnique via E. Antoine

thème de l'exercice :
accelerateur de particule linéaire + étude de stabilité/perturbation
- La première partie est un peu technique mais abordable
- La seconde partie est franchement plus compliquée (beaucoup de notations introduites, passage
↪  de relation de recurrences à des équations différentielles en utilisant des DLs)
```

Mots clés

`champ electrique` `mécanique` `particule chargée` `PCSI` `probleme` `SUP`

1 Accélérateur de Wideröe

On peut obtenir des accélérations importantes en utilisant un champ alternatif et non constant, au moyen du dispositif représenté sur la figure suivante, connu sous le nom d'appareil de Wideroë.



La tension $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$, $U_0 > 0$, est appliquée entre des tubes de glissement, boîtes complètement fermées, à l'exception de deux petits trous percés à leurs extrémités et permettant de laisser passer le faisceau de particules. L'idée est d'accélérer les particules chargées positivement ($q = e$) lorsqu'elles passent d'un tube à l'autre. Les tubes sont supposés parfaitement conducteurs (résistances nulles).

1.1 Explication du mécanisme

1.1.1 Dimensionnement du système

1. Expliquer pourquoi on peut considérer l'accélération comme nulle à l'intérieur des tubes.
2. On note L_n , la longueur du tube n avec $n \geq 0$, v_n la vitesse d'une particule à l'intérieur de ce tube, et t_n l'instant auquel elle y entre. Expliquer qualitativement pourquoi on a intérêt à avoir $t_{n+1} - t_n \approx \pi/\omega = T/2$ (condition dite de synchronisme).

On appelle $V(t)$ le potentiel au point où se trouve la particule à un instant t. On note t'_n l'instant auquel la particule quitte le tube n.

3. Exprimer la différence de potentiel $\delta V_n = V(t_{n+1}) - V(t'_n)$ à l'aide de $U(t)$, en distinguant selon la parité de n.
4. On considère le temps de passage d'un tube à l'autre comme très petit devant la période T, et l'on suppose réalisée la condition de synchronisme de la question **??**. Montrer que dans ces conditions on a, pour tout n, une différence de potentiel δV_n indépendante de n : $\delta V_n = -U_0 \sin(\Phi_0)$ où $\Phi_0 = \omega t_0$, t_0 étant l'instant auquel la particule entre dans le tube $n = 0$. Quel est le rôle de la condition, que l'on supposera réalisée, $0 < \Phi_0 < \pi$?
5. Relier v_{n+1}^2 et v_n^2 ; en déduire v_n en fonction de n, v_0, e, U_0, Φ_0 et m. En déduire ensuite que L_n s'exprime selon la relation suivante :

$$L_n = \frac{\pi}{\omega} \sqrt{v_0^2 + n \frac{2eU_0 \sin \phi_0}{m}}$$

1.1.2 Applications numériques

6. Calculer la longueur du premier tube pour des ions césium $^{137}_{x}Cs^{+}$ en prenant pour vitesse d'injection v_0, cette dernière ayant été atteinte à l'aide d'une accélération uniforme sous une tension $U_{AB} = 750\,\text{kV}$. On donne $\omega/(2\pi) = 10\,\text{MHz}$, $m_n = 1{,}7 \times 10^{-27}\,\text{kg}$ (masse d'un neutron/proton) et $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$.
7. On donne pour la machine de Wideroë $U_0 = 100\,\text{kV}$, $\Phi_0 = \pi/3$. Pour quelle valeur de n l'énergie de la particule aura t-elle au moins doublé ? En déduire l'ordre de grandeur de la longueur totale de l'accélérateur pour atteindre une énergie double de l'énergie d'injection.
8. On injecte dans le dispositif précédent un ion de même charge e et de même vitesse v_0 mais de masse différente m'. Les valeurs des L_n , U_0 et ω sont les mêmes que précédemment, mais l'instant de l'injection τ_0 peut différer de t . On pose $\alpha_0 = \omega\tau_0$. À quelle condition sur m' existe t-il une valeur de α_0 telle que la condition de synchronisme soit réalisée ? Calculer numériquement le nombre de masse (m/m_n) maximal que peut avoir un ion pour être accéléré de manière synchrone.
9. À paramètres m, L_n , U_0 , v_0 donnés, la condition de synchronisme n'est réalisée que si la particule entre exactement à l'instant t_0, à une période près. Étudier **qualitativement**l'accélération d'une particule entrant avec la même vitesse v_0 mais légèrement en retard, à un instant τ_0 un peu postérieur à t_0. Aura-t-elle tendance à combler son retard ? On discutera suivant la valeur de Φ_0. On étudiera de même le cas d'une particule arrivant légèrement en avance. Que peut-on en conclure quant à la stabilité du mécanisme de synchronisme ? Si l'on injecte à l'entrée de l'appareil un faisceau continu, qu'observera-t-on, qualitativement, à la sortie ?

1.2 Étude de la stabilité (partie facultative)

On va maintenant étudier de façon plus quantitative la stabilité du mécanisme d'accélération dans le cas où l'augmentation de vitesse dans l'accélérateur est très petite devant la vitesse initiale v_0 (donc $(v(t) - v_0) \ll v_0$). Cela est obtenu en pratique pour U_0 faible par rapport à U_{AB}.

10. On note toujours v_n la vitesse de la particule synchrone lorsqu'elle traverse le tube n, calculée dans la question **??** de cette partie. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ au premier ordre (développement limité). On supposera v_n très peu différente de v_0.
11. On considère maintenant une particule non synchrone, de même masse, et injectée exactement avec la même vitesse v_0 , mais à un instant un peu différent τ_0 . On notera τ_n , l'instant où elle entre dans le tube n , w_n sa vitesse dans ce tube, avec par hypothèse $w_0 = v_0$. On pose $\alpha_n = \omega\tau_n - n\pi$. Que vaudrait α_n si la particule était synchrone ($\tau_n = t_n$ pour tout n) ?
    Calculer la variation de vitesse entre deux tubes, $w_{n+1} - w_n$ au premier ordre en U_0, et en fonction de e, m , α_{n+1} et v_0.
12. On pose $w_n = v_n + \epsilon_n$ où v_n désigne la vitesse de la particule synchrone, avec par hypothèse $\epsilon_0 = 0$. En utilisant les résultats des questions précédentes, en déduire que
$$\epsilon_{n+1} - \epsilon_n = \frac{eU_0}{mv_0}(\sin(\alpha_{n+1})\sin(\Phi_0))$$
13. En traitant ϵ_n comme un infiniment petit du premier ordre, c'est à dire tel que $\epsilon_n \ll v_n \simeq v_0$, établir la relation cinématique :
$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = -\frac{\pi\epsilon_n}{v_0}$$
14. Les variations de la vitesse w_n et de la phase α_n étant faibles d'un tube à l'autre, on peut traiter n comme un paramètre continu et noter indifféremment $\alpha_n = \alpha(n)$, et $\epsilon_n = \epsilon(n)$. On pose alors :
$$\frac{\mathrm{d}\epsilon(n)}{\mathrm{d}n} = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}n} = \alpha_{n+1} - \alpha_n$$
    Écrire l'équation différentielle du second ordre vérifiée $\alpha(n)$. Quelles sont les conditions initiales sur $\alpha(0)$ et $\alpha'(0)$?
15. Montrer que l'équation différentielle vérifiée $\alpha(n)$ est formellement analogue à l'équation du mouvement d'un point matériel se déplaçant sur un axe α réel, dans une énergie potentielle :
$$W(\alpha) = -\frac{\pi e U_0}{v_0^2}(\cos\alpha + \alpha\sin\phi_0)$$
    On prend $\Phi_0 \leq \pi/2$. Quels sont les extrema de $W(\alpha)$? Tracer son graphe pour $\Phi_0 = \pi/3$.

16. Montrer comment on peut déterminer graphiquement le domaine de valeurs initiales $\alpha(0)$ pour lesquelles on observe des oscillations de α autour de la phase synchrone Φ_0.