Chương 3:
BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

Bài 1 BIẾN ĐỔI FOURIER

Bài 2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

Bài 3 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI Z & F

Bài 4 BIỂU DIỄN HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ

Bài 5 LẤY MẪU & KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

BÀI 1 BIẾN ĐỔI FOURIER

1. ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI FOURIER:

- **Biến đổi Fourier của x(n):**

$$\boxed{X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}}$$

Trong đó: **ω** - tần số của tín hiệu rời rạc, **$\omega = \Omega T_s$**

Ω - tần số của tín hiệu liên tục

T_s - chu kỳ lấy mẫu

- **Ký hiệu:**

$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ hay $X(\omega) = F\{x(n)\}$

$X(\omega) \xleftrightarrow{F^{-1}} x(n)$ hay $x(n) = F^{-1}\{X(\omega)\}$

- X(ω) biểu diễn dưới dạng modun & argument:

$$X(\omega)=\left|X(\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

Trong đó:

$$\begin{cases}\left|X(\omega)\right| & \text{- phổ biên độ của x(n)}\\ \varphi(\omega)=\arg[X(\omega)] & \text{- phổ pha của x(n)}\end{cases}$$

- Nhận thấy X(ω) tuần hoàn với chu kỳ 2π, thật vậy:

$$X(\omega+2\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=X(\omega)$$

Áp dụng kết quả:

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{jk}dk=\begin{cases}2\pi: k=0\\ 0: \ k\neq 0\end{cases}\Rightarrow$$

Biểu thức biến đổi F ngược:

$$\boxed{x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)e^{j\omega n}d\omega}$$

Ví dụ 1: Tìm biến đổi F của các dãy:

$$x_1(n) = a^n u(n) : |a| < 1 \qquad x_2(n) = -a^n u(-n-1) : |a| > 1$$

Giải:

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n \boxed{= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}}$$

$$X_2(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \left(a^{-1}e^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1}e^{j\omega}\right)^m = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1}e^{j\omega}\right)^m + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}e^{j\omega}} \boxed{= \frac{1}{1-a\,e^{-j\omega}}}$$

2. ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI BIẾN ĐỔI FOURIER

$$\left|X(\omega)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|\left|e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|$$

Vậy, để **X(ω)** hội tụ thì điều kiện cần là: $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right| < \infty}$

- Các tín hiệu thỏa mãn điều kiện hội tụ là **tín hiệu năng lượng,** thật vậy**:**

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 \leq \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|\right]^2$$

Nếu: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right| < \infty \Rightarrow E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 < \infty$

Ví dụ 2: Xét sự tồn tại biến đổi F của các dãy:

$$x_1(n) = (0.5)^n u(n) \quad x_2(n) = 2^n u(n)$$

$$x_3(n) = u(n) \quad x_4(n) = rect_N(n)$$

Giải:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|(0.5)^n u(n)\right| = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|2^n u(n)\right| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \infty \Rightarrow$$ $X_2(\omega)$ không tồn tại

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)| = \infty \Rightarrow$$ $X_3(\omega)$ không tồn tại

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_4(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |rect_N(n)| = \sum_{n=0}^{N-1} |rect_N(n)| = N$$

BÀI 2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

a) **Tuyến tính**

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$

b) **Dịch theo thời gian**

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $x(n - n_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(\omega)$

<u>Ví dụ 1</u>: Tìm biến đổi F của dãy: $\delta(n); \delta(n-2)$

<u>Giải</u>:

$$x(n) = \delta(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} = 1$$

Áp dụng tính chất dịch theo thời gian:

$$\delta(n-2) = x(n-2) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\omega} X(\omega) = 1e^{-j2\omega}$$

c) <u>Liên hiệp phức</u>

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $x^*(n) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$

d) Đảo biến số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$

Ví dụ 2: Tìm biến đổi F của dãy: $y(n) = 2^n u(-n)$

Giải:

Theo ví dụ 1 Bài 1, có kết quả:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{1-(1/2)e^{-j\omega}}$$ suy ra:

$$y(n) = x(-n) = (2)^n u(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega) = \boxed{\frac{1}{1-(1/2)e^{j\omega}}}$$

e) Vi phân trong miền tần số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $nx(n) \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$

Ví dụ 3: Tìm biến đổi F của: $g(n) = na^n u(n); |a| < 1$

Giải:

Theo ví dụ 1 Bài 1:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}; |a| < 1$$

Suy ra:

$$g(n) = nx(n) \xleftrightarrow{F} G(\omega) = j\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \boxed{\frac{ae^{-j\omega}}{\left(1 - ae^{-j\omega}\right)^2}}; |a| < 1$$

f) Dịch theo tần số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $e^{j\omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$

Ví dụ 4: Tìm biến đổi F của: $y(n) = a^n \cos(\omega_0 n) u(n); |a| < 1$

Giải:

Theo ví dụ 1 Bài 1:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}; |a| < 1$$

$$y(n) = a^n u(n) \cos(\omega_0 n) = a^n u(n) \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$= \frac{1}{2} x(n)\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$\xleftrightarrow{F} \quad Y(\omega)=\frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\boxed{Y(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-ae^{-j(\omega-\omega_0)})}+\frac{1}{(1-ae^{-j(\omega+\omega_0)})}\right]}$$

g) <u>Tích 2 dãy</u>

Nếu: $x_1(n)\xleftrightarrow{F}X_1(\omega) \qquad x_2(n)\xleftrightarrow{F}X_2(\omega)$

Thì: $x_1(n).x_2(n)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(\omega')X_2(\omega-\omega')d\omega'$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_2(\omega')X_1(\omega-\omega')d\omega'$$

g) Tích chập 2 dãy

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $\quad$ $x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) X_2(\omega)$

Ví dụ 5: Tìm y(n)=x(n)*h(n), biết: **x(n)=h(n)=δ(n+2)+δ(n-2)**

Giải:

Theo ví dụ 1, có kết quả:

$$X(\omega) = H(\omega) = e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})^2 = e^{j4\omega} + 2 + e^{-j4\omega}$$

$$\Rightarrow y(n) = x(n) * h(n) = F^{-1}[Y(\omega)]$$

$$\boxed{y(n) = \delta(n+4) + 2\delta(n) + \delta(n-4)}$$

g) Quan hệ Parseval

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $\quad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega \quad \boxed{(*)}$$

Biểu thức (*) còn gọi là **quan hệ Parseval**

Nhận xét:

Nếu: $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$

Theo quan hệ Parseval, ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

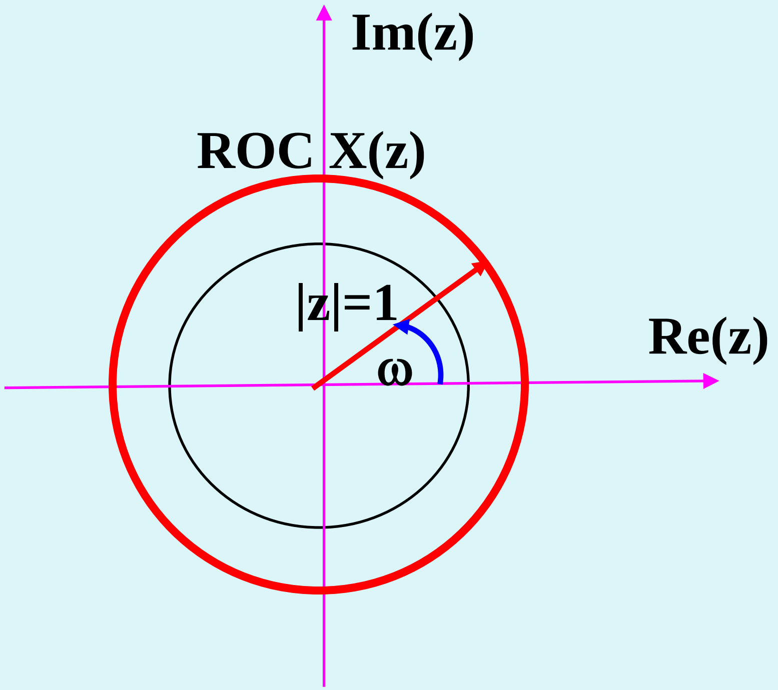
Với: $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$ **- gọi là phổ mật độ năng lượng**

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI F

x(n)	X(ω)
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$
$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(\omega)$
$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega-\omega_0)$
$nx(n)$	$jdX(\omega)/d\omega$
$x(-n)$	$X(-\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(\omega')X_2(\omega-\omega')d\omega'$
	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)x_2^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$

BÀI 3 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & Z

$$\left.\begin{aligned} x(n) &\xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ x(n) &\xleftrightarrow{F} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{X(\omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}}$$



Hay biến đổi Fourier chính là biến đổi Z được lấy trên vòng tròn đơn vị theo biến số ω

- **Nếu ROC[X(z)] có chứa |z|=1**

⇒X(ω)=X(z) với $z=e^{j\omega}$

- **Nếu ROC[X(z)] không chứa |z|=1**

⇒X(ω) không hội tụ

Ví dụ 1: Tìm biến đổi Z & F của các dãy:

$$x_1(n) = (0.5)^n u(n) \quad x_2(n) = 2^n u(n)$$

Giải:

- $$X_1(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}; |z| > 0.5$$

Do ROC[$X_1(z)$] có chứa /z/=1, nên:

$$X_1(\omega) = X_1(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

- $$X_2(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}; |z| > 2$$

Do ROC[$X_2(z)$] không chứa |z|=1, nên $X_2(\omega)$ không tồn tại

BÀI 4. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG TTBB RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ

1. Định nghĩa đáp ứng tần số

Miền n: $x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)=x(n)*h(n)$

$\Big\updownarrow F$

Miền ω: $X(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$

$h(n) \xleftrightarrow{F} H(\omega)=Y(\omega)/X(\omega)$: ***gọi là đáp ứng tần số hệ thống***

Nếu **H(ω)** biểu diễn dạng môđun và pha:

$$\mathbf{H}(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)|e^{j\phi(\omega)} \qquad \begin{cases} |H(\omega)| & \text{- Đáp ứng biên độ} \\ \phi(\omega) & \text{- Đáp ứng pha} \end{cases}$$

<u>Ví dụ: 1</u>: Tìm H(ω), vẽ đáp ứng biên độ & pha, biết:

$$\mathbf{h(n)=rect_3(n)}$$

<u>Giải</u>:

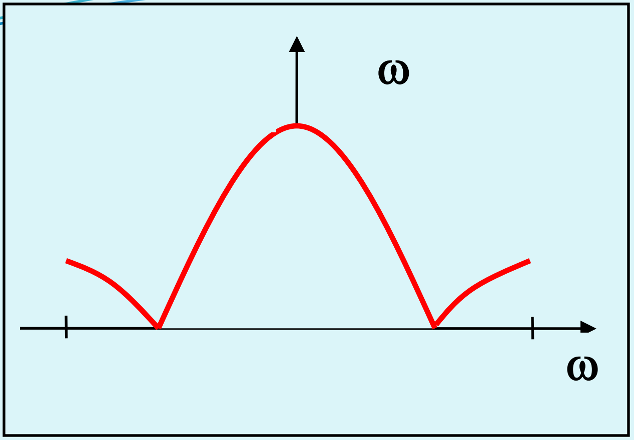
Biến đổi Fourier của **h(n)**:

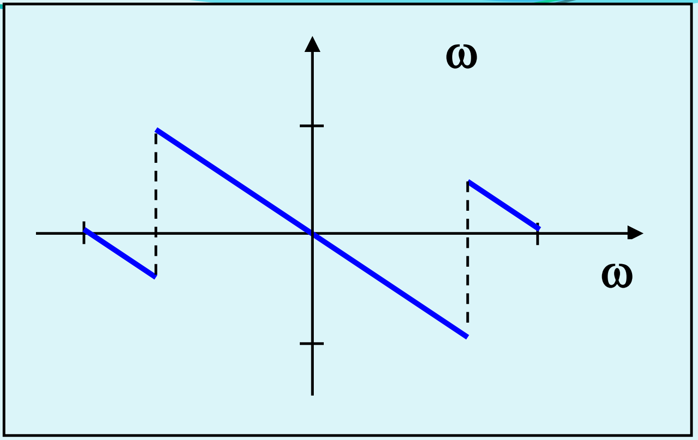
$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} rect_3(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{2} e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j3\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j3\omega/2}(e^{j3\omega/2}-e^{-j3\omega/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})}=\frac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega}$$

$$|H(\omega)|=\left|\frac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

$$\phi(\omega)=\begin{cases}-\omega : A(\omega)>0\\ -\omega+\pi : A(\omega)<0\end{cases}$$ **Với** $$A(\omega)=\frac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$


ω
ω


ω
ω

2. Đáp ứng tần số của các hệ thống ghép nối

a. Ghép nối tiếp

- Miền n:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow \boxed{h_2(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$\equiv$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)=h_1(n)*h_2(n)} \longrightarrow y(n)$$

Theo tính chất tích chập: $h_1(n)*h_2(n) \xleftrightarrow{F} H_1(\omega)H_2(\omega)$

- Miền ω :

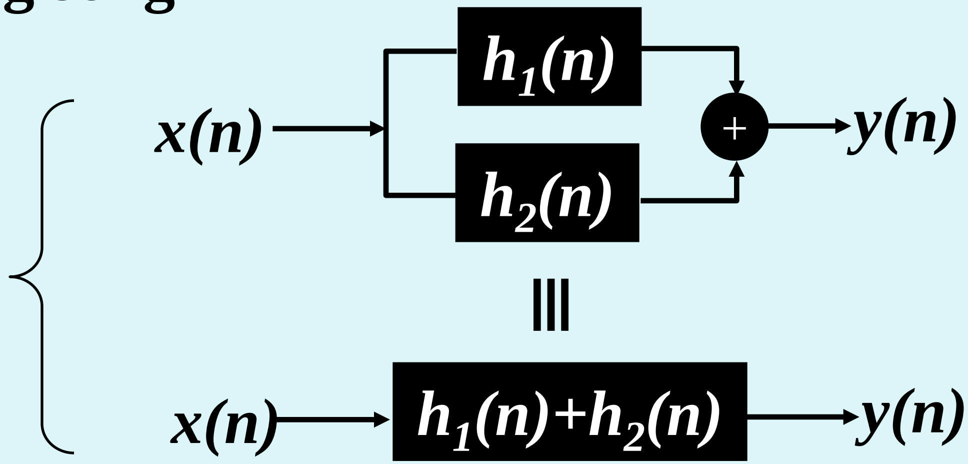
$$X(\omega) \longrightarrow \boxed{H_1(\omega)} \longrightarrow H_2(\omega) \longrightarrow Y(\omega)$$

$$\equiv$$

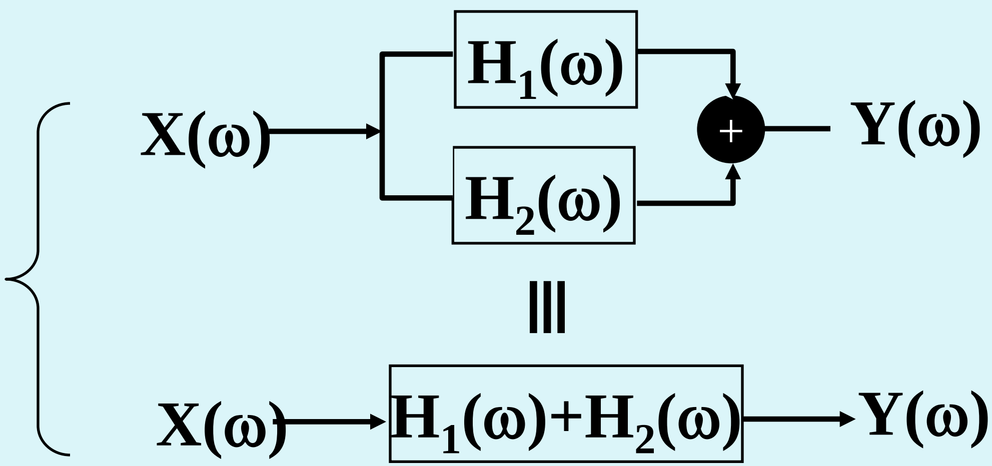
$$X(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)} \longrightarrow Y(\omega)$$

b. Ghép song song

- Miền n:



- Miền ω:



3. Đáp ứng ra hệ thống với tín hiệu vào hàm mũ phức

Xét tín hiệu vào có dạng mũ phức: **x(n)=Ae^jωn^** $x(n)=Ae^{j\omega n}$

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)Ae^{j\omega(n-m)} = Ae^{j\omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} = x(n)H(\omega)$$

<u>Ví dụ: 2</u>: Tìm y(n) biết: $x(n) = 2e^{j\frac{\pi}{3}n}$ $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$y(n) = x(n)H(\omega) = 2e^{j\frac{\pi}{3}n}\left.\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)\right|_{\omega=\frac{\pi}{3}} = 2\frac{e^{j\frac{\pi}{3}n}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}}$$

4. Đáp ứng ra hệ thống với tín hiệu vào hàm cos, sin

Xét tín hiệu vào có dạng hàm cos:

$$\mathbf{x(n) = A\cos(\omega_0 n) = \frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)}$$

Biểu diễn đáp ứng tần số dưới dạng môđun & pha:

$$\mathbf{H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}}$$

$$\mathbf{y(n) = x(n)H(\omega_0) = \frac{A}{2}\left[H(\omega_0)e^{j\omega_0 n} + H(-\omega_0)e^{-j\omega_0 n}\right]}$$

$$\mathbf{y(n) = \frac{A}{2}\left[H(\omega_0)e^{j\omega_0 n} + H^*(\omega_0)e^{-j\omega_0 n}\right] = A.Re\left\{H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}\right\}}$$

$$\boxed{y(n) = A.\mathrm{Re}\left\{H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}\right\} = A\left|H(\omega_0)\right|\cos\left[\omega_0 n + \phi(\omega_0)\right]}$$

Tương tự với tín hiệu vào có dạng hàm sin:

$$x(n) = A\sin(\omega_0 n) = \frac{A}{2j}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right)$$

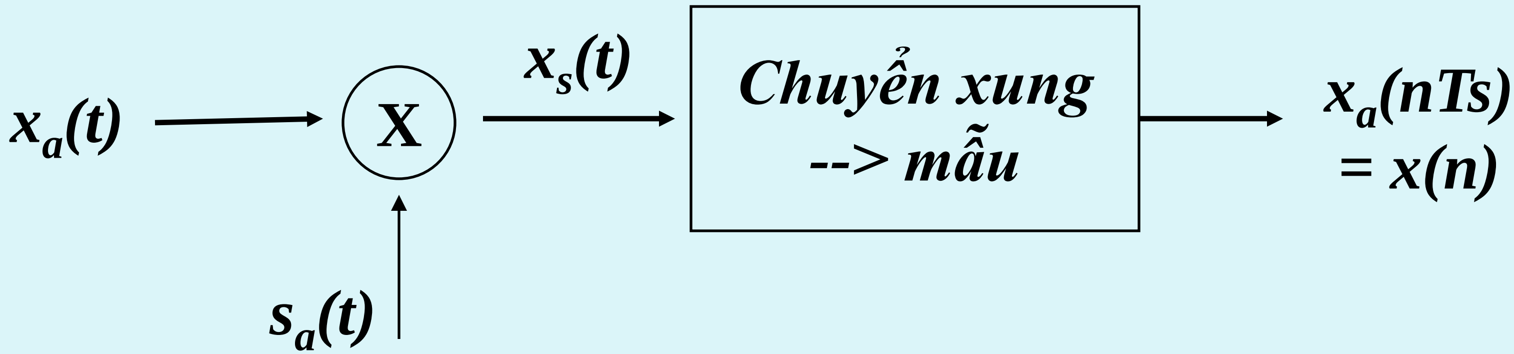
Ta cũng được kết quả:

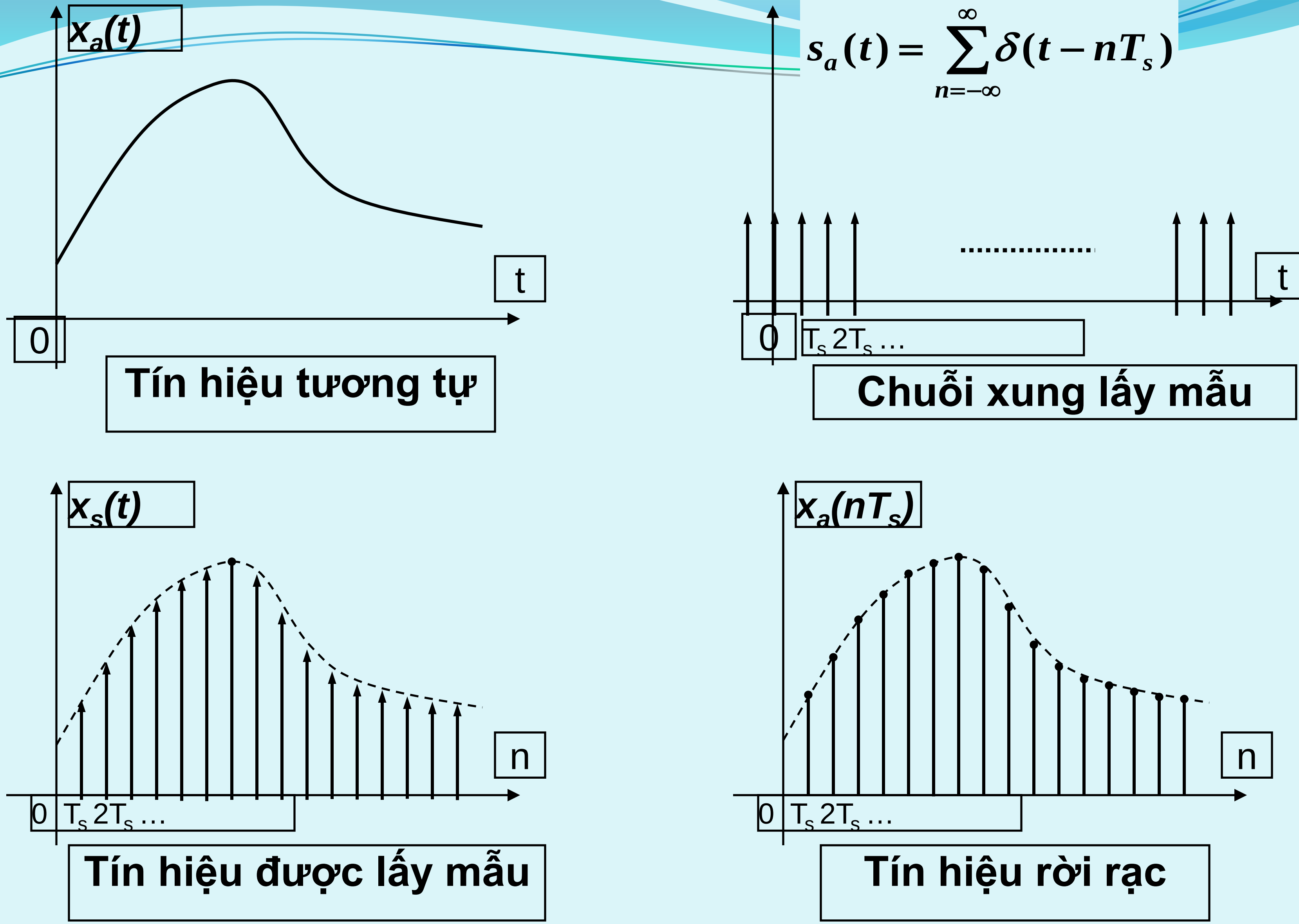
$$\boxed{y(n) = A.\mathrm{Im}\left\{H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}\right\} = A\left|H(\omega_0)\right|\sin\left[\omega_0 n + \phi(\omega_0)\right]}$$

BÀI 5. LẤY MẪU & KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1. **Khái niệm lấy mẫu tín hiệu**

Quá trình lấy mẫu tín hiệu





Tốc độ lấy mẫu càng lớn -> khôi phục tín hiệu càng chính xác

2. Quan hệ giữa tần số tín hiệu rời rạc và tương tự

$$\mathbf{x_a}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\cos\mathbf{\Omega t} \xrightarrow[\mathrm{t = nT_s}]{\text{Lấy mẫu}} \mathbf{x_a}(\mathbf{nT_s}) = \mathbf{A}\cos(\mathbf{n\Omega T_s})$$

$$\mathbf{x(n)} = \mathbf{x_a}(\mathbf{nT_s}) = \mathbf{A}\cos(\mathbf{n\Omega T_s}) = \mathbf{A}\cos(\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\omega} = \mathbf{\Omega T_s}}$$

Trong đó: $\boldsymbol{\omega}$ - tần số của tín hiệu rời rạc

$\mathbf{\Omega}$ - tần số của tín hiệu tương tự

$\mathbf{T_s}$ - chu kỳ lấy mẫu

3. Quan hệ giữa phổ tín hiệu rời rạc và phổ tín hiệu tương tự

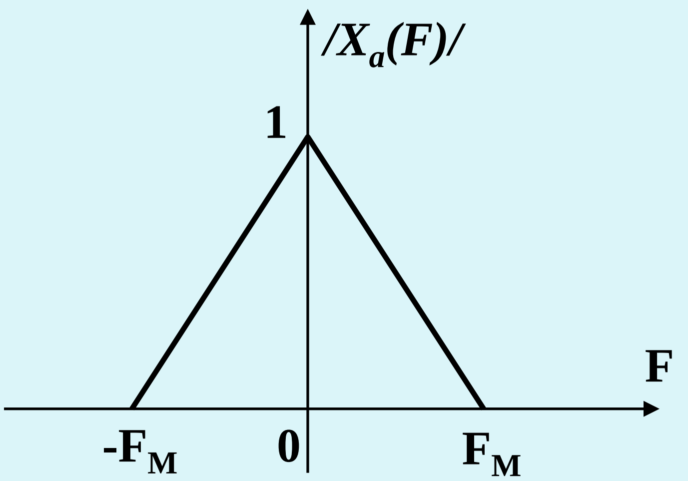
$$X(f) = X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_a(F - mF_s)$$

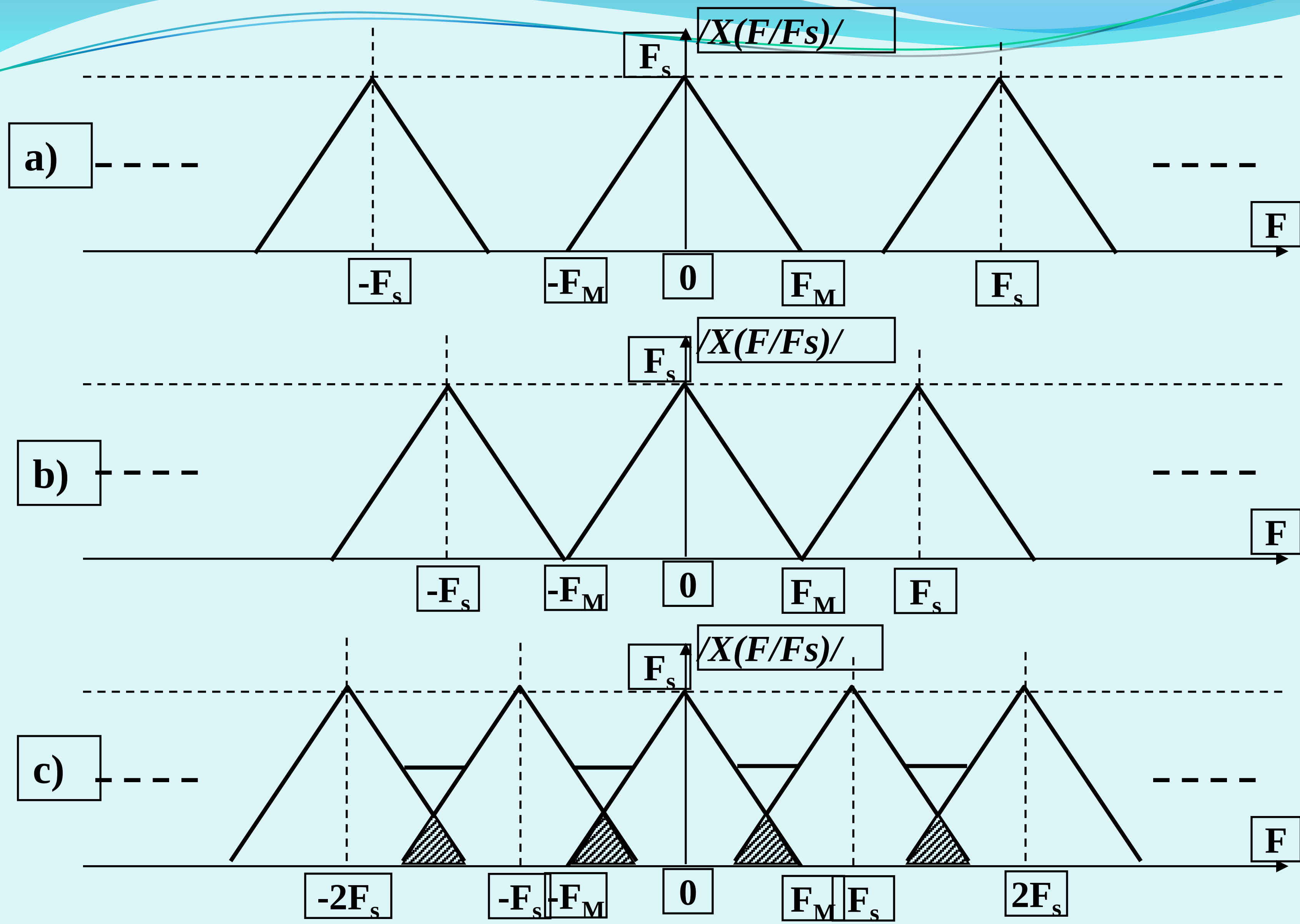
Trong đó: **X(f)** – *phổ của tín hiệu rời rạc*

X_a(F) – *phổ của tín hiệu tương tự*

<u>Ví dụ 1</u>: Hãy vẽ phổ biên độ tín hiệu rời rạc, biết phổ biên độ tín hiệu tương tự cho như hình vẽ, với các tốc độ lấy mẫu:

a)$F_s>2F_M$ b) $F_s=2F_M$ c) $F_s<2F_M$





/X(F/Fs)/
Fs
a)
F
-Fs
-FM
0
FM
Fs
/X(F/Fs)/
Fs
b)
F
-Fs
-FM
0
FM
Fs
/X(F/Fs)/
Fs
c)
F
-2Fs
-Fs
-FM
0
FM
Fs
2Fs

4. Định lý lấy mẫu

"Tín hiệu tương tự $x_a(t)$ có dải phổ hữu hạn $(-F_M, F_M)$ chỉ có thể khôi phục 1 cách chính xác từ các mẫu $x_a(nT_s)$ nếu tốc độ lấy mẫu thỏa mãn $F_s \geq 2F_M$"

- $F_s = 2F_M = F_N$: Tốc độ (tần số) Nyquist

Ví dụ 2: Xác định tốc độ Nyquist của tín hiệu tương tự:

$$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\sin 6000\pi t + 10\cos 12000\pi t$$

Giải:

Tín hiệu có các tần số: F_1=1 kHz, F_2=3 kHz, F_3=6 kHz

$F_M = \max\{F_1, F_2, F_3\}$=6 kHz $\Rightarrow$ $F_N = 2F_M$ = 12 kHz

5. Khôi phục lại tín hiệu tương tự

- Để khôi phục lại tín hiệu tương tự $\boldsymbol{x_a(t)}$ thì phổ của tín hiệu được khôi phục phải giống với phổ ban đầu của $\boldsymbol{x_a(t)}$.

- Vì phổ của tín hiệu lấy mẫu là sự lặp lại vô hạn của phổ tín hiệu tương tự, nên cần phải giới hạn lại bằng cách người ta cho các mẫu $\boldsymbol{x_a(nT_s)}$ đi qua mạch lọc thông thấp lý tưởng trong điều kiện thỏa man định lý lấy mẫu có đáp ứng tần số:

$$H_{lp}(f) = \begin{cases} T_s & : \; -\dfrac{f_s}{2} \le f \le \dfrac{f_s}{2} \\ 0 & : \; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h_{lp}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{lp}(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} H_{lp}(f)e^{j2\pi ft}df = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t}$$

$x_a(nTs)$ → **Low pass Filter $h_{lp}(t)$** → $x_a(t)=x_a(nT_s)*h_{lp}(t)$

$$\boxed{x_a(t) = x_a(nT_s) * h_{lp}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\frac{\sin[\pi F_s(t-nT_s)]}{\pi F_s(t-nT_s)}}$$

Công thức nội suy, cho phép khôi phục ***$x_a(t)$ từ $x_a(nT_s)$***