

Chương 2: BIẾN ĐỔI Z VÀ ỨNG DỤNG VÀO HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC

Bài 1 BIẾN ĐỔI Z

Bài 2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

Bài 3 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

Bài 4 HÀM TRUYỀN ĐẠT CỦA HỆ LTI RỜI RẠC

Bài 5 GIẢI PTSP DÙNG BIẾN ĐỔI Z 1 PHÍA

BÀI 1 BIẾN ĐỔI Z

1. ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI Z:

■ Biến đổi Z của dãy $x(n)$:

Trong đó Z – biến số phức

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (*)$$

Biểu thức (*) còn gọi là biến đổi Z hai phía

■ Biến đổi Z 1 phía dãy $x(n)$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (**)$$

■ Nếu $x(n)$ nhân quả thì : (*) \equiv (**)

■ Ký hiệu:

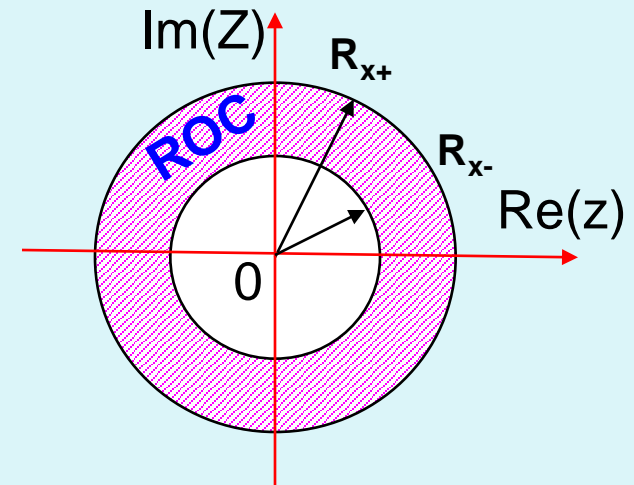
$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad \text{hay} \quad X(z) = Z\{x(n)\}$$

$$X(z) \xleftrightarrow{Z^{-1}} x(n) \quad \text{hay} \quad x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$$

2. MIỀN HỘI TỤ CỦA BIẾN ĐỔI Z (ROC)

- Miền hội tụ của biến đổi Z - ROC (Region Of Convergence) là tập hợp tất cả các giá trị Z nằm trong mặt phẳng phức sao cho $X(z)$ hội tụ.

- Để tìm ROC của $X(z)$ ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy
- Tiêu chuẩn Cauchy:



Một chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) = x(0) + x(1) + x(2) + \dots$$

hội tụ nếu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Ví dụ 1: Tìm biến đổi Z & ROC của:

$$x(n) = a^n u(n)$$

Giải:

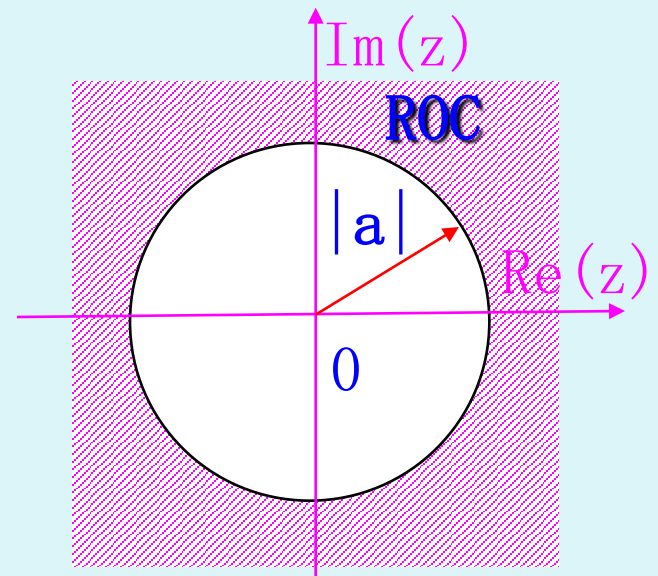
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^n u(n)]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy,

$X(z)$ sẽ hội tụ:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Nếu: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(|az^{-1}|^n \right)^{1/n} < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$



Vậy: $X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \text{ROC} : |Z| > |a|$

Ví dụ 2: Tìm biến đổi Z & ROC của:

$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$

Giải:

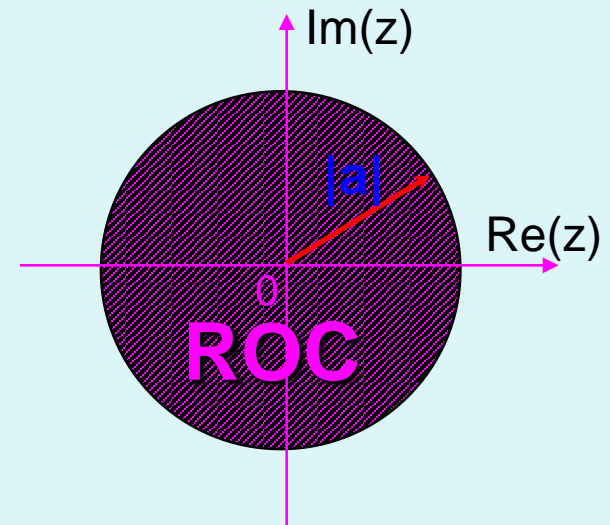
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-a^n u(-n-1)]z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot z^{-n} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1}z)^m = - \sum_{m=0}^{\infty} (a^{-1}z)^m + 1 \end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy,

$X(z)$ sẽ hội tụ:

$$X(z) = - \sum_{m=0}^{\infty} (a^{-1}z)^m + 1 = \boxed{\frac{1}{1 - az^{-1}}}$$

Nếu: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(|a^{-1}z|^n \right)^{1/n} < 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| < |a|}$



BÀI 2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

1) Tuyến tính

■ Nếu:
$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) : \text{ROC} = R_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) : \text{ROC} = R_2 \end{cases}$$

■ Thì:
$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{Z} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

ROC chứa $R_1 \cap R_2$

Ví dụ 1: Tìm biến đổi Z & ROC của:

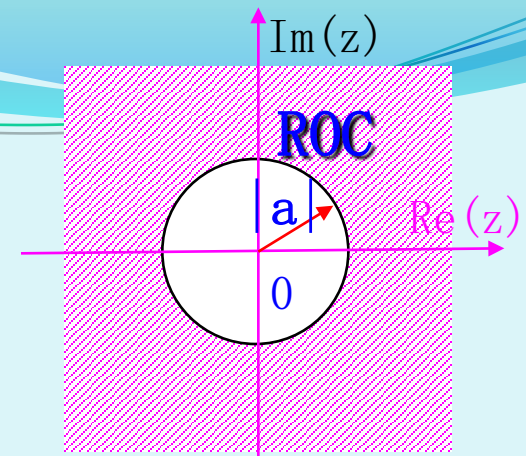
$$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1) \quad \text{với } |a| < |b|$$

Giải:

Theo ví dụ 1 và 2, ta có:

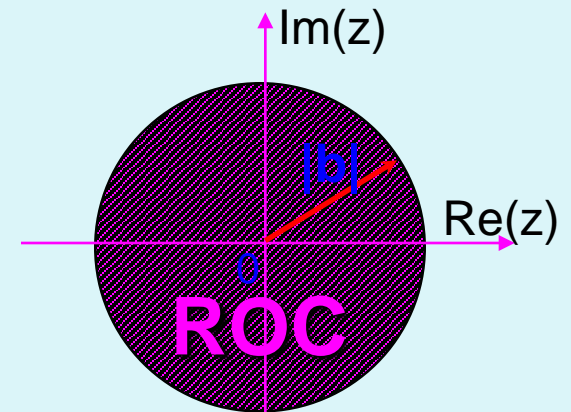
$$a^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$R_1 : |z| > |a|$$



$$-b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

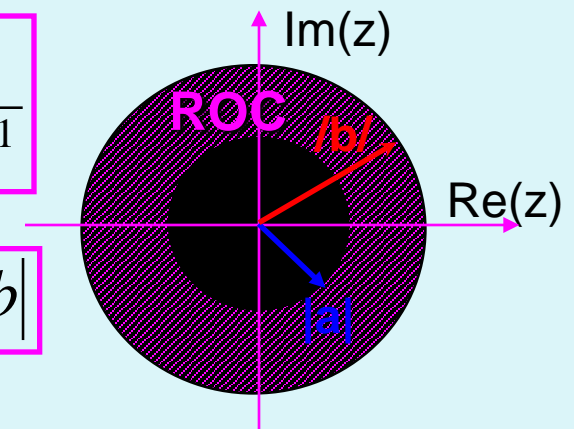
$$R_2 : |z| < |b|$$



Áp dụng tính chất tuyến tính, ta được:

$$a^n u(n) - b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

$$R = R_1 \cap R_2 : |a| < |z| < |b|$$



2) Dịch theo thời gian

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) : \text{ROC} = R$

Thì: $x(n - n_0) \xleftrightarrow{Z} Z^{-n_0} X(z) : \text{ROC} = R'$

Với: $R' = \begin{cases} R \text{ trừ giá trị } z=0, \text{ khi } n_0 > 0 \\ R \text{ trừ giá trị } z=\infty, \text{ khi } n_0 < 0 \end{cases} \quad x(n) = a^n u(n-1)$

Giải Ví dụ 3: Tìm

biến đổi Z & ROC
của:

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}; \text{ROC} : |z| > |a|$$

i: Vậy: $x(n) = a^n u(n-1) = a \cdot a^{n-1} u(n-1) \xleftrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}} : |z| > |a|$

Theo ví dụ 1:

3) Nhân với hàm mũ a^n

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) : \text{ROC} = R$

Thì: $a^n x(n) \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z) : \text{ROC} = |a|R$

Ví dụ 4: Xét biến đổi Z & ROC của:

$$x_1(n) = a^n u(n) \quad \text{và} \quad x_2(n) = u(n)$$

Giải:

$$x(n) = u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}; R : |z| > 1$$



$$a^n x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}; R' : |z| > |a|$$

4) Đạo hàm $X(z)$ theo z

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z) : \text{ROC} = R$

Thì: $nx(n) \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} : \text{ROC} = R$

Ví dụ 5: Tìm biến đổi Z & ROC của: $g(n) = na^n u(n)$

Giải:

Theo ví dụ 1:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \text{ROC} : |z| > |a|$$

$$\Rightarrow g(n) = nx(n) \xleftrightarrow{z} G(z) = -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} : |z| > |a|$$

5) Đảo biến số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) : \text{ROC} = R$

Thì: $x(-n) \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}) : \text{ROC} = 1/R$

■ **Ví dụ 6:** Tìm biến đổi Z & ROC của: $y(n) = (1/a)^n u(-n)$

■ **Giải:** Theo ví dụ 1:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \text{ROC} : |z| > |a|$$

$$\Rightarrow y(n) = (1/a)^n u(-n) = a^{-n} u(-n) = x(-n)$$

Áp dụng tính chất đảo biến số:

$$Y(z) = X(z^{-1}) = \frac{1}{1 - a(z^{-1})^{-1}} = \frac{1}{1 - az}; \text{ROC} : |z| < 1/|a|$$

6) Liên hiệp phức

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) : \text{ROC} = R$

Thì: $x^*(n) \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) : \text{ROC} = R$

7) Tích 2 dãy

Nếu:
$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) : \text{ROC} = R_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) : \text{ROC} = R_2 \end{cases}$$

Thì: $x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{2\pi} \oint_c X_1(\nu) X_2\left(\frac{z}{\nu}\right) \nu^{-1} d\nu : \text{ROC} = R_1 \cap R_2$

8) Định lý giá trị đầu

Nếu $x(n)$ nhân quả thì: $x(0) = \lim_{Z \rightarrow \infty} X(z)$

- **Ví dụ 7:** Tìm $x(0)$, biết $X(z)=e^{1/z}$ và $x(n)$ nhân quả

- **Giải:**

Theo định lý giá trị đầu:

$$x(0) = \lim_{Z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{Z \rightarrow \infty} e^{1/z} = 1$$

9) **Tích chập 2 dãy**

$$\text{Nếu: } \begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) : \text{ROC} = R_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) : \text{ROC} = R_2 \end{cases}$$

$$\text{Thì: } x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) X_2(z) ; \text{ROC có chứa } R_1 \cap R_2$$

■ Ví dụ 8: Tìm $y(n) = x(n) * h(n)$, biết:

$$x(n) = (0.5)^n u(n) \quad h(n) = -2^n u(-n-1)$$

■ Giải:

$$x(n) = (0.5)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}; ROC : |z| > 0.5$$

$$h(n) = -2^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}; ROC : |z| < 2$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})} \cdot \frac{1}{(1 - 2z^{-1})}; ROC : 0.5 < |z| < 2$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ Z^{-1} \\ \downarrow \end{matrix} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1 - 2z^{-1})}; ROC : 0.5 < |z| < 2$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = -\frac{1}{3} (0.5)^n u(n) - \frac{4}{3} 2^n u(-n-1)$$

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

$x(n)$	$X(z)$	R
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	Chứa $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2$
$x(n-n_0)$	$Z^{-n_0} X(z)$	R'
$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	R
$nx(n)$	$-z dX(z)/dz$	R
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$1/R$
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2$
$x(n)$ nhân quả	$x(0)=\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Chứa $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2$

BIẾN ĐỔI Z MỘT SỐ DÃY THÔNG DỤNG

$x(n)$	$X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u(-n-1)$		$ z < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u(-n-1)$		$ z < a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u(-n-1)$		$ z < a $
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$(1 - z^{-1}\cos\omega_o)/(1 - 2z^{-1}\cos\omega_o + z^{-2})$	$ z > 1$
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$(z^{-1}\sin\omega_o)/(1 - 2z^{-1}\cos\omega_o + z^{-2})$	$ z > 1$

BÀI 3 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

1. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (*)$$

Với C - đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ trong mặt phẳng phức, nằm trong miền hội tụ của $X(z)$, theo chiều (+) ngược chiều kim đồng hồ

- ✓ Trên thực tế, biểu thức (*) ít được sử dụng do tính chất phức tạp của phép lấy tích phân vòng
- Các phương pháp biến đổi Z ngược:
 - *Thặng dư*
 - *Khai triển thành chuỗi lũy thừa*
 - *Phân tích thành tổng các phân thức tối giản*

2. PHƯƠNG PHÁP THẶNG DƯ

a) Khái niệm thặng dư của 1 hàm tại điểm cực:

- Khái niệm điểm cực, điểm không.

■ Thặng dư tại điểm cực Z_{ci} bội r của $F(z)$ được định nghĩa:

$$\text{Res}[F(z)]_{Z=Z_{ci}} = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}} \left[F(z)(z - z_{ci})^r \right]_{Z=Z_{ci}}$$

■ Thặng dư tại điểm cực đơn Z_{ci} của $F(z)$ được định nghĩa:

$$\text{Res}[F(z)]_{Z=Z_{ci}} = \left[F(z)(z - z_{ci}) \right]_{Z=Z_{ci}}$$

b) Phương pháp:

- Theo lý thuyết thặng dư, biểu thức biến đổi Z ngược theo tích phân vòng (*) được xác định bằng tổng các thặng dư tại tất cả các điểm cực của hàm $X(z)z^{n-1}$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_i \text{Res} \left[X(z) z^{n-1} \right]_{z=z_{ci}} \quad (*)$$

Trong đó:

- z_{ci} – các điểm cực của $X(z)z^{n-1}$ nằm trong đường cong C
- $\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_{ci}}$ - thặng dư của $X(z)z^{n-1}$ tại điểm cực z_{ci}
- *Tổng cộng các thặng dư tại tất cả các điểm cực, ta được $x(n)$*

Ví dụ 1: Tìm biến đổi Z ngược của: $X(z) = \frac{z}{(z-2)}$

Giải:

Thay $X(z)$ vào (*), ta được

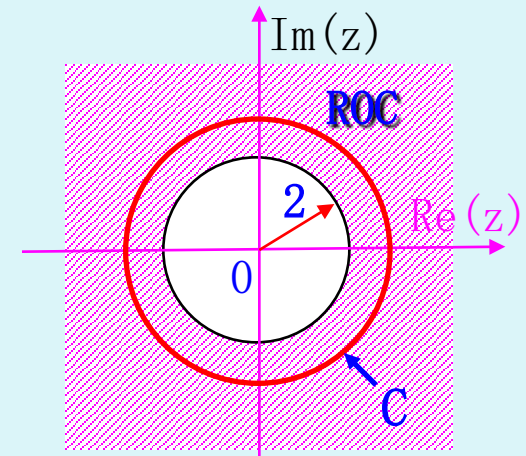
$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z}{(z-2)} z^{n-1} dz = \sum \text{Res} \left[\frac{z^n}{(z-2)} \right]$$

➤ **Chọn C là đường cong khép kín nằm bên ngoài vòng tròn có bán kính là 2**

■ **$n \geq 0$:** $X(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{(z-2)}$ có 1 điểm cực đơn $Z_{c1}=2$

Thặng dư tại $Z_{c1}=2$:

$$\text{Res} \left[\frac{z^n}{(z-2)} \right]_{Z=2} = \left[\frac{z^n}{(z-2)} (z-2) \right]_{Z=2} = 2^n$$



■ **$n < 0$:** $X(z)z^{n-1} = \frac{1}{(z-2)z^{-n}} = \frac{1}{(z-2)z^m}$ $Z_{c1}=2$ đơn,
 $Z_{c2}=0$ bội m

Với: $Z_{c1}=2$ $\text{Res} \left[\frac{1}{(z-2)z^m} \right]_{Z=2} = \left[\frac{1}{(z-2)z^m} (z-2) \right]_{Z=2} = \frac{1}{2^m}$

Với: $Z_{c2}=0$ bội m :

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=0} &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[\frac{1}{(z-2)z^m} z^m \right]_{Z=0} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{(m-1)!(-1)^{m-1}}{(-2)^m} \right] = -\frac{1}{2^m}\end{aligned}$$

Vậy, với $n < 0$: $\sum \text{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right] = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^m} = 0$

suy ra $x(n) = 2^n : n \geq 0$ hay $x(n) = 2^n u(n)$

3. PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN THÀNH CHUỖI LUỸ THỪA

Giả thiết $\mathbf{X}(\mathbf{z})$ có thể khai triển:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (*)$$

Theo định nghĩa biến đổi Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (**)$$

Đồng nhất (*) & (**), rút ra:

$$x(n) = a_n$$

Ví dụ 2: Tìm $x(n)$ biết:

$$X(z) = (z^2 + 1)(1 - 2z^{-1} + 3z^{-2})$$

Giải:

$$ROC : 0 < |z| < \infty$$

Khai triển $X(z)$ ta được:

$$X(z) = z^2 - 2z + 4 - 2z^{-1} + 3z^{-2} = \sum_{n=-2}^2 x(n)z^{-n}$$

Suy ra:

$$x(n) = \{1, -2, \hat{4}, -2, 3\}$$

Ví dụ 3: Tìm $x(n)$ biết:

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} : |z| > 2$$

Giải:

Do ROC của $X(z)$ là $|z| > 2$, nên $x(n)$ sẽ là dãy nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots \quad (*)$$

Để có dạng (*), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 - 2z^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 - 2z^{-1} \\ 1 + 2z^{-1} + 2^2 z^{-2} + \dots \end{array}$$

$$2z^{-1}$$

$$2z^{-1} - 2^2 z^{-2}$$

$$2^2 z^{-2}$$

.....

$$\Rightarrow x(n) = 2^n : n \geq 0 \equiv 2^n u(n)$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}$$

Ví dụ 4: Tìm $x(n)$ biết:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} : |z| < 2$$

Giải:

Do ROC của $X(z)$ là $|z| < 2$, nên $x(n)$ sẽ là dãy phản nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^{-n} = a_{-1} z^1 + a_{-2} z^2 + a_{-3} z^3 + \dots \quad (**)$$

Để có dạng (**), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 - 2^{-1} z^1 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 2^1 z^{-1} + 1 \\ - 2^{-1} z^1 - 2^{-2} z^2 - 2^{-3} z^3 + \dots \end{array}$$

$$2^{-1} z^1$$

$$2^{-1} z^1 - 2^{-2} z^2$$

$$2^{-2} z^2$$

.....

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} -2^n z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n) = -2^n : n < 0 \equiv -2^n u(-n-1)$$

4. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THÀNH TỔNG CÁC PHÂN THỨC TỐI GIẢN

Xét $X(z)$ là phân thức hữu tỉ có dạng:

$$X(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = \frac{d_K z^K + d_{K-1} z^{K-1} + \dots + d_1 z + d_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \dots + b_1 z + b_0} \quad \text{với: } K, N > 0$$

■ Nếu $K > N$, thực hiện phép chia đa thức, ta được:

$$X(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = C(z) + \frac{A(z)}{B(z)} = C(z) + \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} \dots + a_1 z + a_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \dots + b_1 z + b_0}$$

Ta được $C(z)$ là đa thức và phân thức $A(z)/B(z)$ có bậc $M \leq N$

■ Nếu $K \leq N$, thì $X(z)$ có dạng giống phân thức $A(z)/B(z)$

Việc lấy biến đổi Z ngược đa thức $C(z)$ là đơn giản, vấn đề phức tạp là tìm biến đổi Z ngược $A(z)/B(z)$ có bậc $M \leq N$

Xét $X(z)/z$ là phân thức hữu tỉ có bậc $M \leq N$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} \dots + a_1 z + a_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \dots + b_1 z + b_0}$$

Xét đến các điểm cực của $X(z)/z$, hay nghiệm của $B(z)$ là *đơn, bội và phức liên hiệp*

a) Xét $X(z)/z$ có các điểm cực đơn: $Z_{c1}, Z_{c2}, Z_{c3}, \dots, Z_{cN}$,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{b_N (z - z_{c1})(z - z_{c2}) \dots (z - z_{cN})}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, $X(z)/z$ phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{K_1}{(z - z_{c1})} + \frac{K_2}{(z - z_{c2})} + \dots + \frac{K_N}{(z - z_{cN})} = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{(z - z_{ci})}$$

Với hệ số K_i xác định bởi:

$$K_i = \left. \frac{X(z)}{z} (z - z_{ci}) \right|_{z=Z_{ci}}$$

Suy ra $\mathbf{X(z)}$ có biểu thức:

$$X(z) = \frac{K_1}{(1 - z_{c1}z^{-1})} + \frac{K_2}{(1 - z_{c2}z^{-1})} + \dots + \frac{K_N}{(1 - z_{cN}z^{-1})} = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{(1 - z_{ci}z^{-1})}$$

Xét: $X_i(z) = \frac{K_i}{(1 - z_{ci}z^{-1})}$

■ Nếu ROC: $|z| > |z_{ci}|$

$$\Rightarrow x_i(n) = K_i(z_{ci})^n u(n)$$

■ Nếu ROC: $|z| < |z_{ci}|$

$$\Rightarrow x_i(n) = -K_i(z_{ci})^n u(-n-1)$$

■ Vậy:

$$x(n) = \sum_{i=1}^N x_i(n)$$

Ví dụ 5.: Tìm $x(n)$ biết:

$$X(z) = \frac{2z^2 - 5z}{z^2 - 5z + 6}$$

với các miền hội tụ: **a) $|z| > 3$, b) $|z| < 2$, c) $2 < |z| < 3$**

Giải:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z - 5}{z^2 - 5z + 6} = \frac{2z - 5}{(z - 2)(z - 3)} = \frac{K_1}{(z - 2)} + \frac{K_2}{(z - 3)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1 = \frac{X(z)}{z} (z - 2) \Big|_{z=2} = \frac{2z - 5}{(z - 3)} \Big|_{z=2} = 1$$

$$K_2 = \frac{X(z)}{z} (z - 3) \Big|_{z=3} = \frac{2z - 5}{(z - 2)} \Big|_{z=3} = 1$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z - 2)} + \frac{1}{(z - 3)} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})} + \frac{1}{(1 - 3z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

Với các miền hội tụ:

a) $|z| > 3$: $x(n) = 2^n u(n) + 3^n u(n)$

b) $|z| < 2$: $x(n) = -2^n u(-n-1) - 3^n u(-n-1)$

c) $2 < |z| < 3$: $x(n) = 2^n u(n) - 3^n u(-n-1)$

b) Xét $X(z)/z$ có điểm cực Z_{c1} bội r và các điểm cực đơn: $Z_{c(r+1)}, \dots, Z_{cN}$,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{b_N(z - z_{c1})^r (z - z_{c(r+1)}) \cdots (z - z_{cN})}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, $X(z)/z$ phân tích thành:

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{K_1}{(z - z_{c1})} + \frac{K_2}{(z - z_{c1})^2} + \cdots + \frac{K_r}{(z - z_{c1})^r} + \\ &+ \frac{K_{r+1}}{(z - z_{c(r+1)})} + \cdots + \frac{K_N}{(z - z_{cN})} = \sum_{i=1}^r \frac{K_i}{(z - z_{c1})^i} + \sum_{l=r+1}^N \frac{K_l}{(z - z_{cl})} \end{aligned}$$

Với hệ số K_i xác định bởi:

$$K_i = \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{(r-i)}}{dz^{(r-i)}} \left[\frac{X(z)}{z} (z - z_{c1})^r \right] \Bigg|_{Z=Z_{c1}}$$

$$K_l = \frac{X(z)}{z} (z - z_{cl}) \Bigg|_{Z=Z_{cl}}$$

Với giả thiết ROC của $X(z)$: $|z| > \max\{|z_{ci}|\}: i=1 \div N$,
 biến đổi Z ngược của thành phần $K_i/(z-z_{ci})^r$ sẽ là:

$$\frac{z}{(z-a)^i} \xleftrightarrow{z^{-1}} \frac{n(n-1)\dots(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!} u(n)$$

Vậy ta có biểu thức biến đổi Z ngược là:

$$x(n) = \sum_{i=1}^r K_i \frac{n(n-1)\dots(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!} u(n) + \sum_{l=r+1}^N K_l (z_{cl})^n u(n)$$

Ví dụ 6: Tìm $x(n)$ biết:

$$X(z) = \frac{2z^3 - 5z^2 + 4z}{(z-2)^2(z-1)} \quad ROC: |z| > 2$$

Giải:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 - 5z + 4}{(z-2)^2(z-1)} = \frac{K_1}{(z-2)} + \frac{K_2}{(z-2)^2} + \frac{K_3}{(z-1)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1 = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}} \left[\frac{X(z)}{z} (z-2)^2 \right] \Big|_{z=2} = \frac{d}{dz} \left[\frac{2z^2 - 5z + 4}{(z-1)} \right] \Big|_{z=2} = 1$$

$$K_2 = \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{(2-2)}}{dz^{(2-2)}} \left[\frac{X(z)}{z} (z-2)^2 \right] \Big|_{z=2} = \frac{2z^2 - 5z + 4}{(z-1)} \Big|_{z=2} = 2$$

$$K_3 = \frac{X(z)}{z} (z-1) \Big|_{z=1} = \frac{2z^2 - 5z + 4}{(z-2)^2} \Big|_{z=1} = 1$$

Vậy $\mathbf{X(z)/z}$ có biểu thức là:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)} + \frac{2}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-1)} \quad ROC : |z| > 2$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

$$\Rightarrow x(n) = 2^n u(n) + n2^n u(n) + u(n)$$

c) Xét $X(z)$ có cặp điểm cực Z_{c1} và Z_{c1}^* liên hợp phức, các điểm cực còn lại đơn: Z_{c3}, \dots, Z_{cN} ,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{b_N(z - z_{c1})(z - z_{c1}^*)(z - z_{c3}) \cdots (z - z_{cN})}$$

$X(z)/z$ được phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{K_1}{(z - z_{c1})} + \frac{K_2}{(z - z_{c1}^*)} + \frac{K_3}{(z - z_{c3})} + \cdots + \frac{K_N}{(z - z_{cN})}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{K_1}{(z - z_{c1})} + \frac{K_2}{(z - z_{c1}^*)} + \sum_{i=3}^N \frac{K_i}{(z - z_{ci})}$$

Với các hệ số K_1, K_i được tính giống điểm cực đơn:

$$K_i = \left. \frac{X(z)}{z} (z - z_{ci}) \right|_{z=Z_{ci}} : i = 1 \div N$$

Do các hệ số $\mathbf{A(z)}$, $\mathbf{B(z)}$ là thực, nên $\mathbf{K_2=K_1^*}$

$$\text{Xét: } \frac{\mathbf{X_1(z)}}{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{K_1}}{(\mathbf{z-z_{c1}})} + \frac{\mathbf{K_1^*}}{(\mathbf{z-z_{c1}^*})}$$

$$\Rightarrow \mathbf{X_1(z)} = \frac{\mathbf{K_1}}{(1-\mathbf{z_{c1}z^{-1}})} + \frac{\mathbf{K_1^*}}{(1-\mathbf{z_{c1}^*z^{-1}})} \quad \text{Nếu gọi: } \begin{cases} K_1 = |K_1|e^{j\beta} \\ z_{c1} = |z_{c1}|e^{j\alpha} \end{cases}$$

Và giả thiết ROC: $|\mathbf{z}| > \mathbf{max\{|z_{ci}|\}}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1(n) &= \left[K_1 (z_{c1})^n + K_1^* (z_{c1}^*)^n \right] u(n) \\ &= 2|K_1| |z_{c1}|^n \cos(n\alpha + \beta) u(n) \end{aligned}$$

Vậy:
$$x(n) = \left\{ 2|K_1| |z_{c1}|^n \cos(n\alpha + \beta) + \sum_{i=3}^N K_i (z_{ci})^n \right\} u(n)$$

Ví dụ 7: Tìm $x(n)$ biết: $X(z) = \frac{-z}{(z^2 - 2z + 2)(z - 1)} : |z| > \sqrt{2}$

Giải:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{(z^2 - 2z + 2)(z - 1)} = \frac{-1}{[z - (1 + j)][z - (1 - j)](z - 1)}$$

$$= \frac{K_1}{[z - (1 + j)]} + \frac{K_1^*}{[z - (1 - j)]} + \frac{K_3}{(z - 1)}$$

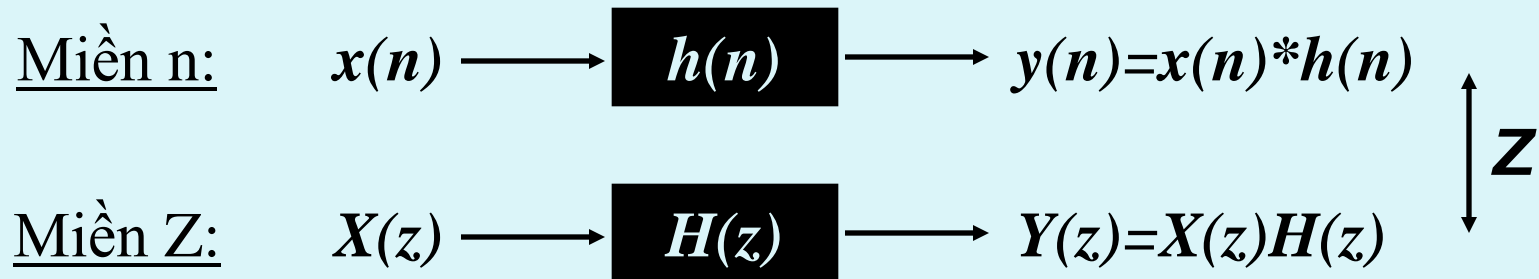
$$K_1 = \left. \frac{-1}{[z - (1 - j)](z - 1)} \right|_{z=1+j} = \frac{1}{2} \quad K_3 = \left. \frac{-1}{(z^2 - 2z + 2)} \right|_{z=1} = -1$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1/2}{[1 - (1 + j)z^{-1}]} + \frac{1/2}{[1 - (1 - j)z^{-1}]} + \frac{-1}{(1 - z^{-1})} \quad |z| > \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x(n) = (\sqrt{2})^n \cos(n \frac{\pi}{4}) u(n) - u(n)$$

BÀI 4 HÀM TRUYỀN ĐẠT CỦA HỆ THỐNG TTBB

1. Định nghĩa hàm truyền đạt



$$h(n) \xrightarrow{\mathbf{Z}} H(z): \text{gọi là hàm truyền đạt} \quad H(z) = Y(z)/X(z)$$

2. Hàm truyền đạt được biểu diễn theo các hệ số PTSP

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \xleftrightarrow{\mathbf{Z}} Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Ví dụ 1: Tìm $H(z)$ và $h(n)$ của hệ thống nhân quả cho bởi:

Giải: $y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2x(n) - 5x(n-1)$

Lấy biến đổi Z hai vế PTSP và áp dụng tính chất dịch theo t/g:

$$Y(z)[1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}] = X(z)[2 - 5z^{-1}]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - 5z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{2z^2 - 5z}{z^2 - 5z + 6}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2z - 5}{(z - 2)(z - 3)} = \frac{K_1}{(z - 2)} + \frac{K_2}{(z - 3)}$$

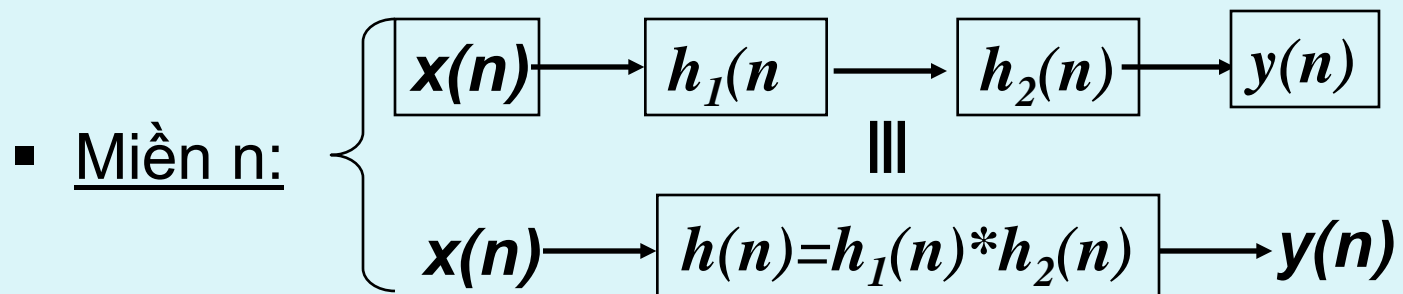
$$K_1 = \left. \frac{2z - 5}{(z - 3)} \right|_{z=2} = 1 \quad K_2 = \left. \frac{2z - 5}{(z - 2)} \right|_{z=3} = 1$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})} + \frac{1}{(1 - 3z^{-1})}$$

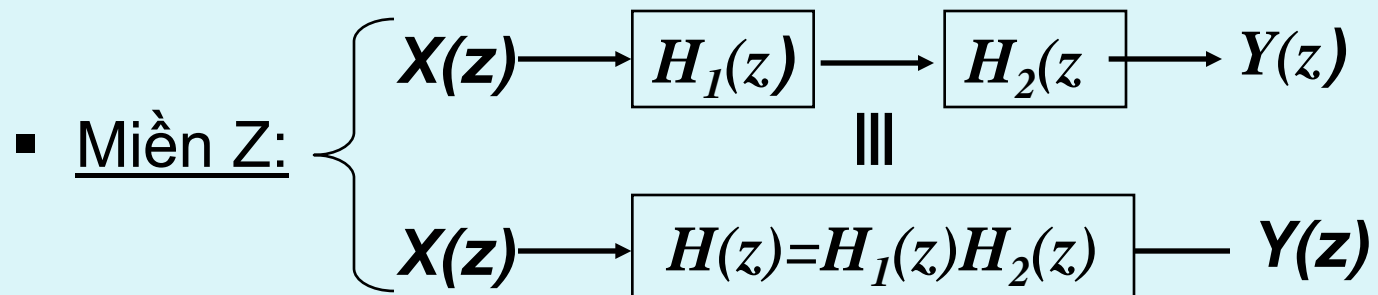
Do hệ thống nhân quả nên: $h(n) = (2^n + 3^n) u(n)$

3. Hàm truyền đạt của các hệ thống ghép nối

a. Ghép nối tiếp



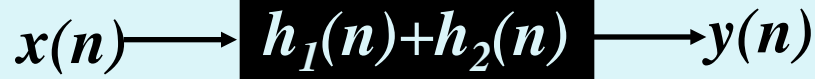
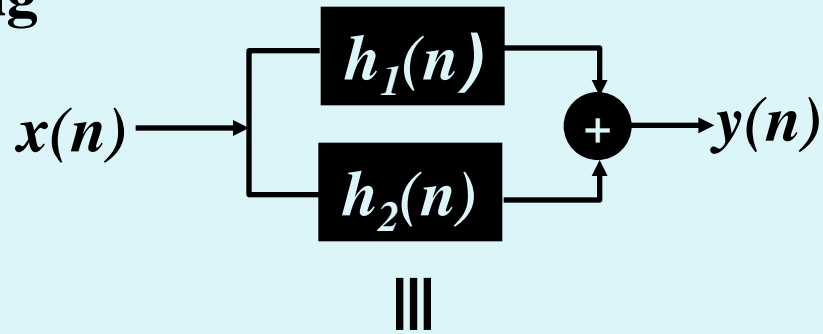
Theo tính chất tích chập: $h_1(n) * h_2(n) \xleftrightarrow{Z} H_1(z)H_2(z)$



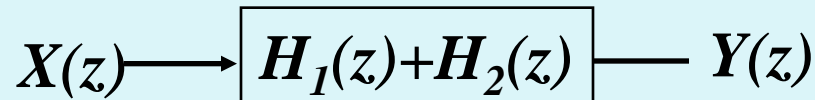
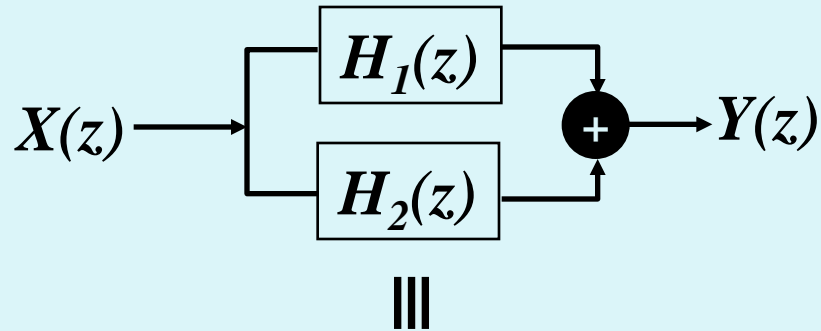
3. Hàm truyền đạt của các hệ thống ghép nối (tiếp)

b. Ghép song song

■ Miền n:



■ Miền Z:



4. Tính nhân quả và ổn định của hệ TTBB rời rạc

a. Tính nhân quả

▪ Miền n: Hệ thống TTBB là nhân quả $\Leftrightarrow h(n) = 0 : n < 0$

▪ Miền Z:
$$H(z) = \frac{A(z)}{b_N(z - z_{c1})(z - z_{c2}) \cdots (z - z_{cN})}$$

Do $h(n)$ là tín hiệu nhân quả, nên miền hội tụ $H(z)$ sẽ là:

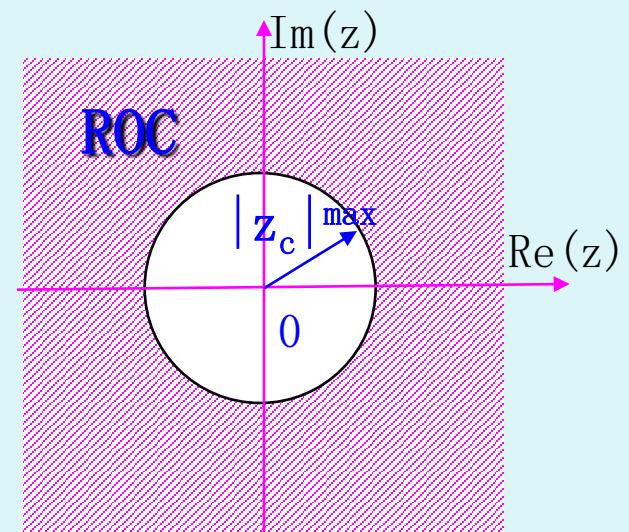
$$|z| > |z_c|^{\max} = \max \{ |z_{c1}|, |z_{c2}|, \dots, |z_{cN}| \}$$

**Hệ thống TTBB
là nhân quả**



ROC của $H(z)$ là:

$$|z| > |z_c|^{\max} = \max \{ |z_{c1}|, |z_{c2}|, \dots, |z_{cN}| \}$$



4. Tính nhân quả và ổn định của hệ TTBB rời rạc (tiếp)

b. Tính ổn định

- Miền n: Hệ thống TTBB là ổn định $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ (*)
- Miền Z:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \leq \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \right| |z^{-n}|$$

$$\Rightarrow |H(z)| \leq \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \right| \quad \text{khi } |z| = 1$$

Theo đ/k ổn định (*), nhận thấy **H(z)** cũng sẽ hội tụ với **|z|=1**

**Hệ thống TTBB
là ổn định**



**ROC của H(z)
có chứa |z|=1**

c. Tính nhân quả và ổn định

Hệ thống TTBB
là nhân quả



ROC của $H(z)$ là:

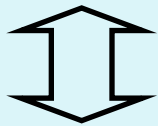
$$|z| > |z_c|^{\max} = \max \{ |z_{c1}|, |z_{c2}|, \dots, |z_{cN}| \}$$

Hệ thống TTBB
là ổn định



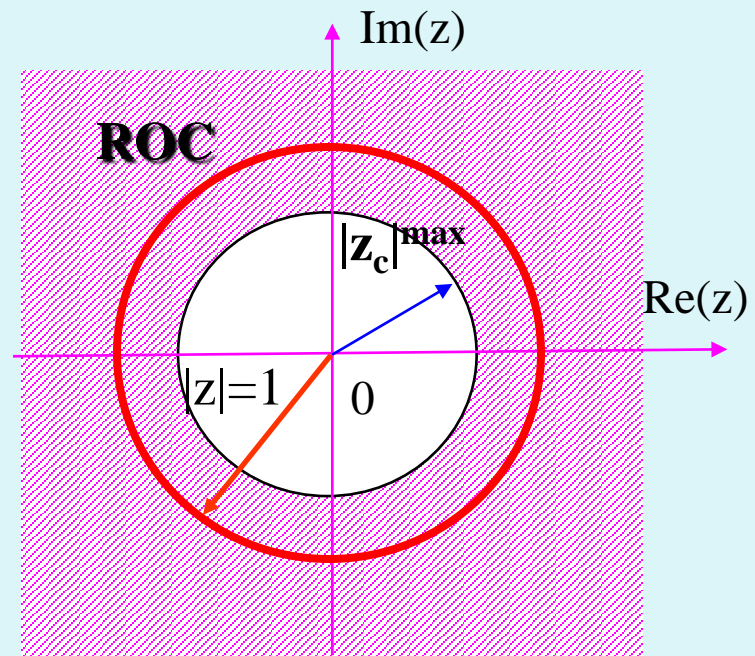
ROC của $H(z)$ có chứa $|z|=1$

Hệ thống TTBB
là nhân quả
và ổn định



ROC của $H(z)$ là:

$$|z| > |z_c|^{\max} \quad \text{và} \quad |z_c|^{\max} < 1$$



Ví dụ: 1: Tìm $h(n)$ của hệ thống, biết:

$$H(z) = \frac{4z^2 - 5z}{2z^2 - 5z + 2}$$

- a. Để hệ thống là nhân quả
- b. Để hệ thống là ổn định
- c. Để hệ thống là nhân quả và ổn định

Giải:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{4z - 5}{2(z - 1/2)(z - 2)} = \frac{K_1}{(z - 1/2)} + \frac{K_2}{(z - 2)} = \frac{1}{(z - 1/2)} + \frac{1}{(z - 2)}$$
$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{\left[1 - (1/2)z^{-1}\right]^+} + \frac{1}{(1 - 2z^{-1})}$$

a. Hệ thống nhân quả ($|z| > 2$): $h(n) = [(1/2)^n + 2^n] u(n)$

b. Hệ thống ổn định ($1/2 < |z| < 2$): $h(n) = (1/2)^n u(n) - 2^n u(-n-1)$

c. Hệ thống nhân quả và ổn định:

ROC: $|z| > 2$ không thể chứa $|z| = 1 \Rightarrow$ không tồn tại $h(n)$

BÀI 5. GIẢI PTSP DÙNG BIẾN ĐỔI Z 1 PHÍA

$$\begin{aligned} y(n-1) &\xleftrightarrow[\text{1 phía}]{\mathbf{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n} = y(-1) + y(0)z^{-1} + y(1)z^{-2} + \dots \\ &= y(-1) + z^{-1} \left[y(0) + y(1)z^{-1} + \dots \right] \\ &= y(-1) + z^{-1}Y(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n-2) &\xleftrightarrow[\text{1 phía}]{\mathbf{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-2)z^{-n} = y(-2) + y(-1)z^{-1} + y(0)z^{-2} + \dots \\ &= y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2} \left[y(0) + y(1)z^{-1} + \dots \right] \\ &= y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}Y(z) \end{aligned}$$

Tổng quát, biến đổi Z 1 phía của $y(n-k)$:

$$y(n-k) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{\mathbf{Z}} z^{-k}Y(z) + \sum_{r=1}^k y(-r)z^{r-k}$$

Ví dụ 1: Hãy giải PTSP dùng biến đổi Z 1 phía

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) : n \geq 0$$

$$\text{biết: } x(n) = 3^{n-2}u(n) \text{ và } y(-1) = -1/3; y(-2) = -4/9$$

Giải:

Lấy biến đổi Z 1 phía hai vế PTSP:

$$Y(z) - 3[y(-1) + z^{-1}Y(z)] + 2[y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}Y(z)] = X(z) \quad (*)$$

Thay $y(-1) = -1/3$; $y(-2) = -4/9$ và $X(z) = 3^{-2}/(1-3z^{-1})$ vào (*), rút ra:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z-3)}$$

$$\Rightarrow Y(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{2} [3^n - 1] u(n)$$