# Tuyển tập đề thi Phương trình toán lý

Lê Hoàng Bảo

18 tháng 01 năm 2024

# Mục lục

# 1 Đề thi cuối học kì I Phương trình toán lý, 2010 - 2011

(Thời gian: 90 phút)

Chọn và giải 3 trong 4 bài sau:

**Bài 1:** $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = \sin^2 x,\ u_t(x,0) = xe^{-x}, & -\infty < x < \infty \end{cases}$

**Bài 2:** $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = t,\ u_x(1,t) = t^2, & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

**Bài 3:** $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 1 + \frac{1}{\pi}x(2t-1), & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = t,\ u(\pi,t) = t^2, & t \geq 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

**Bài 4:** $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ u(x,0) = \sin^3(\pi x),\ u(x,1) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

## 2 Đề thi cuối học kì I Phương trình toán lý, 2011 - 2012

(Thời gian: 90 phút)

**Bài 1:** $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = t^2,\ u(1,t) = t, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x),\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

**Bài 2:** $$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = t,\ u(\pi,t) = t^2, & t \geq 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

**Bài 3:** $$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi \\ u(x,0) = \sin^3 x,\ u(x,\pi) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, & 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

## 3 Đề thi cuối học kì I Phương trình toán lý, 2012 - 2013

(Thời gian: 90 phút)

**Note: Điểm của đề thi này nhận bốn giá trị là 0, 5, 9 và 10, tương ứng với việc làm đúng 0, 1, 2 và 3 câu.**

**Bài 1:** Giải bài toán theo hai trường hợp $\alpha \in \mathbb{Z}$ và $\alpha \notin \mathbb{Z}$: $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(\alpha x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

**Bài 2:** $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6xt, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = t^3, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x),\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

**Bài 3:** $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi,\ 0 < y < 1 \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, & 0 \leq y \leq 1 \\ u(x,0) = \sin x + \sin(2x),\ u(x,1) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

# 4 Đề thi cuối học kì I Phương trình toán lý, 2018 - 2019

(Ngày thi: 05/01/2019; Thời gian: 90 phút)

**Chọn một trong hai bài A hoặc B để giải.**

**Bài A:** Giải các bài toán sau:

**Bài 1A (3 điểm):** $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = t,\ u(1,t) = 2t, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(3\pi x),\ u_t(x,0) = x+1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

**Bài 2A (3 điểm):** $\begin{cases} u_t - u_{xx} = t^2 e^{-t} \sin x, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(3x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

**Bài 3A (4 điểm):** $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin(2x)\sin(3\pi y), & 0 < x < \pi,\ 0 < y < 1 \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, & 0 \leq y \leq 1 \\ u(x,0) = \sin x,\ u(x,1) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

**Bài B:** Giải các bài toán sau:

**Bài 1B (3 điểm):** $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{2},\ u_t(x,0) = \cos\frac{9\pi x}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

**Bài 2B (3 điểm):** $\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(3\pi x), & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{4}\sin(\pi x) + \sin^3(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

**Bài 3B (4 điểm):** $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + t\sin x, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(2x),\ u_t(x,0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

# 5 Đề thi giữa học kì I Phương trình toán lý, 2022 - 2023

(Ngày thi: 03/11/2022; Thời gian: 60 phút)

**Bài 1 (2 điểm):** Chuyển động tắt dần của vật nặng được gắn vào một lò xo có phương trình là:

$$2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+14\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+12x=0,$$

với $x(t)$ là khoảng cách của vật so với vị trí lò xo cân bằng tại thời điểm $t$. Nếu $x(0)=1$ và $x'(0)=0$, tìm phương trình của $x(t)$.

**Bài 2 (8 điểm):** Xét phương trình dao động tự do của một sợi dây thuần nhất với điều kiện biên Neumann như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=\cos(3x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=1, & 0\leq x\leq \pi \end{cases}$$

a) Tìm nghiệm $u(x,t)$ của phương trình trên.

b) Giả sử một ngoại lực tác động vào sợi dây như trên làm cho chuyển động của dây thay đổi theo phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\cos^3 x,\quad t>0,\ 0<x<\pi$$

Giải bài toán dao động cưỡng bức của dây:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\cos^3 x, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, & 0\leq x\leq \pi \end{cases}$$

c) Dựa vào kết quả câu a và b, tìm nghiệm của bài toán sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\cos^3 x, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=\cos(3x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=1, & 0\leq x\leq \pi \end{cases}$$

# 6 Đề thi cuối học kì I Phương trình toán lý, 2022 - 2023

(Ngày thi: 04/01/2023; Thời gian: 120 phút)

**Bài 1 (6 điểm):** Xét bài toán của sự khuếch tán nhiệt trong một thanh đồng chất.

a) Giả sử không có sự xuất hiện của nguồn nhiệt bên ngoài. Sự phân bố nhiệt độ $u(x,t)$ trong thanh thỏa phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Biết rằng nhiệt độ ban đầu của thanh là $u(x,0) = 8\sin^3\dfrac{x}{2}$. Tìm công thức nghiệm $u(x,t)$.

b) Dựa vào kết quả ở câu a để giải bài toán với điều kiện biên không thuần nhất sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t + 25\sin\dfrac{5x}{2}, & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(0,t) = t^2,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 3, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 3x + 8\sin^3\dfrac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

**Bài 2 (3 điểm):** Quá trình dẫn nhiệt dừng trên một vật hình vành khăn tuân theo phương trình Laplace:

$$\Delta u(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 1 < r < 2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Giải phương trình trên với phân bố nhiệt tại mép hình vành khăn là:

$$u(1,\varphi) = 2 + 3\cos\varphi, \quad u(2,\varphi) = 2 + 15\sin 2\varphi$$

**Bài 3 (1 điểm):** Xét phương trình Poisson của $u(x,y,z)$ với điều kiện biên Neumann:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,y,z) = 0, & (x,y,z) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

trong đó tập $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bị chặn và $\nu$ là vector pháp tuyến ngoài trên biên của $\Omega$.

a) Bài toán (1) có phải là bài toán đặt chỉnh theo nghĩa Hadamard hay không? Tại sao?

b) Chứng minh rằng đẳng thức:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

là điều kiện cần cho bài toán (1) có nghiệm $u \in C^2(\overline{\Omega})$

# 7 Đề thi giữa học kì I Phương trình toán lý, 2023 - 2024

(Ngày thi: 17/11/2023; Thời gian: 60 phút)

Xét dao động của một sợi dây mỏng, thuần nhất, có chiều dài hữu hạn trong các trường hợp dưới đây.

**Bài 1 (4 điểm):** Dao động của dây thỏa phương trình thuần nhất với điều kiện biên hỗn hợp:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 2,\ t > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(2,t) = 0, & t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = 4\cos^3\dfrac{\pi x}{4},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Tìm nghiệm $u(x,t)$ của phương trình trong trường hợp này.

**Bài 2 (5 điểm):** Giả sử dây chịu tác động của một ngoại lực $f(x,t) = \pi\cos\dfrac{\pi t}{4}\cos\dfrac{3\pi x}{4}$ nên dao động của dây thay đổi theo phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 < x < 2,\ t > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(2,t) = 0, & t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a) Tìm nghiệm $u(x,t)$ của phương trình.

b) Cho biết ngoại lực $f(x,t)$ có đặc điểm gì và hiện tượng gì xảy ra với dao động của dây? Giải thích.

c) Sóng đứng có xuất hiện không? Nếu có, cho biết tần số dao động và bước sóng của dây.

**Bài 3 (1 điểm):** Sử dụng kết quả của câu trước, tìm nghiệm $u(x,t)$ của phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2x\sin t, & 0 < x < 2,\ t > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 2\sin t,\ u(2,t) = 4\sin t, & t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = 4\cos^3\dfrac{\pi x}{4},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

# 8 Đề thi cuối học kì I Phương trình toán lý, 2023 - 2024

(Ngày thi: 18/01/2024; Thời gian: 90 phút)

**Bài 1 (4 điểm):** Nhiệt độ $u(x,t)$ trên một thanh kim loại đồng chất ở vị trí $x$ tại thời điểm $t$ được miêu tả bởi phương trình nhiệt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t), & 0 < x < 2,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g_1(t),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(2,t) = g_2(t), & t \geq 0 \\ u(x,0) = h(x), & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a) Khi hai đầu thanh kim loại được cách nhiệt và không có nguồn nhiệt bên ngoài, tìm nghiệm $u(x,t)$, biết rằng nhiệt độ ban đầu trên thanh kim loại được cho bởi $h(x) = \sin^2 \dfrac{3\pi x}{2}$.

b) Khi có sự trao đổi nhiệt với môi trường $g_1(t) = e^{-t}$ và $g_2(t) = 5e^{-t}$, cùng với sự xuất hiện của nguồn nhiệt

$$F(x,t) = 8\pi^2 \cos^2(\pi x) - e^{-t}\left(x^2 + x + \frac{2}{9}\right),$$

tìm nghiệm $u(x,t)$, biết rằng nhiệt độ ban đầu trên thanh kim loại được cho bởi $h(x) = x^2 + x$.

**Bài 2 (3 điểm):** Quá trình dẫn nhiệt dừng trên một vật hình vành khăn tuân theo phương trình Laplace:

$$\Delta u(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 1 < r < 2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Giải phương trình trên với phân bố nhiệt tại mép hình vành khăn là:

$$u(1,\varphi) = 2023 - 6\cos\varphi, \quad u(2,\varphi) = 506\ln 16 + 2023 + 15\sin(2\varphi)$$

**Bài 3 (3 điểm):** Bằng phương pháp biến đổi Fourier, với giả sử rằng $|u|$ và $|g|$ khả tích, chứng tỏ nghiệm $u(x,t)$ của phương trình sóng trên dây dài vô hạn:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

được cho bởi công thức $u(x,t) = \displaystyle\int_{x-\frac{t}{2}}^{x+\frac{t}{2}} g(w)\mathrm{d}w$.