Các đề thi Phương trình đạo hàm riêng

Lê Hoàng Bảo

8th July 2024

1 Đề thi

1.1 Đề thi cuối học kì II Phương trình đạo hàm riêng, 2017 - 2018

(Ngày thi: 12/06/2018; Thời gian: 120 phút)

Bài 1 (5 điểm): Cho $a, b > 0,\ \Omega = [0,a] \times [0,b],\ S_1 = [0,a] \times \{0\},\ S_2 = \{0\} \times [0,b],\ S_3 = \partial\Omega \setminus (S_1 \cup S_2)$ và $f \in L^2(\Omega)$. Xét phương trình:

$$Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left((2+x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left((2+y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega$$

với điều kiện biên $u = 0$ trên S_2 và $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ trên $S_1 \cup S_3$.

a) Tìm dạng nghiệm yếu của bài toán trên không gian nghiệm V cần xác định.

b) Sử dụng đẳng thức

$$u^2(x,y) = 2\int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}(s,y)u(s,y)\mathrm{d}s$$

và KHÔNG sử dụng bất đẳng thức Poincaré, chứng minh rằng tồn tại $C > 0$ sao cho:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2}^2 \geq C\|u\|_{H^1}^2$$

với mọi $u \in V$.

c) Chứng minh bài toán có nghiệm trên V bằng định lý Lax - Milgram.

d) Giả sử nghiệm của bài toán yếu thỏa $u \in V \cap H^2(\Omega)$. Chứng tỏ nghiệm u này thỏa bài toán ban đầu.

e) Viết phiếm hàm $J : V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $u = \underset{w \in V}{\arg\min}\ J(w)$.

Nếu thay V bằng $H^1(\Omega)$ thì điểm cực tiểu của J thỏa bài toán biên nào?

Bài 2 (5 điểm): Cho toán tử L xác định trên Ω như ở Bài 1. Xét phương trình $u_t + Lu = 0$ với điều kiện đầu $u(x,0) = g(x)$ và điều kiện biên $u\big|_{\partial\Omega} = 0$.

a) Xác định $D(L) \subset L^2(\Omega)$.

b) KHÔNG sử dụng bất đẳng thức Poincaré, chứng minh rằng tồn tại $C > 0$ sao cho:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2}^2 \geq C\|u\|_{H^1}^2$$

với mọi $u \in H_0^1(\Omega)$.

c) Chứng minh rằng toán tử L đơn điệu cực đại trên $L^2(\Omega)$.

d) Chứng minh rằng toán tử L đối xứng, từ đó suy ra L tự liên hợp.

e) Bằng định lý Hille - Yoshida, chứng minh rằng nếu $g \in L^2(\Omega)$ thì bài toán có nghiệm:

$$u \in C\big([0,\infty), L^2(\Omega)\big) \ \cap\ C\big([0,\infty), D(L)\big) \ \cap\ C^1\big([0,\infty), L^2(\Omega)\big)$$

1.2 Đề thi cuối học kì II Phương trình đạo hàm riêng, 2021 - 2022

(Ngày thi: 18/06/2022; Thời gian: 120 phút)

Bài 1 (5 điểm): Cho $a, b > 0,\ \Omega = [0, a] \times [0, b]$ và $f \in L^2(\Omega)$. Xét phương trình:

$$Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left((2 + \cos^2 x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),\ (x, y) \in \Omega$$

với điều kiện biên $u = 0$ trên $\partial\Omega$.

a) Tìm dạng nghiệm yếu của bài toán trên không gian nghiệm $V = H_0^1(\Omega)$.

b) Cho biết

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2}^2 \geq C\|u\|_{H^1}^2$$

với mọi $u \in V$. Chứng minh bài toán có nghiệm trên V bằng định lý Lax - Milgram.

c) Giả sử nghiệm của bài toán yếu thỏa $u \in V \cap H^2(\Omega)$. Chứng tỏ nghiệm u này thỏa bài toán ban đầu.

d) Tìm toán tử $J[u]$ và tập A để nghiệm u của câu a thỏa $u = \arg\min\limits_{u \in A} J[u]$.

e) Nếu $A = H^1(\Omega)$, tìm $u_{tt} - Lu = 0,\ \nabla J[u]$ và tập xác định của nó, từ đó suy ra bài toán biên của điểm cực tiểu của $J[u]$.

Bài 2 (5 điểm): Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ là một miền thuộc lớp C^2 và L như ở Bài 1. Xét phương trình $u_{tt} - Lu = 0$ với điều kiện đầu $u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = v_0(x)$ và điều kiện biên $u(x, t)\big|_{\partial\Omega} = 0$. Giả sử:

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ v_0 \in H_0^1(\Omega)$$

Chứng minh bài toán tồn tại duy nhất nghiệm thỏa:

$$u \in C\big([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\big)\ \cap\ C^1\big([0, \infty); H_0^1(\Omega)\big)\ \cap\ C^2\big([0, \infty); L^2(\Omega)\big)$$

1.3 Đề thi giữa học kì II Phương trình đạo hàm riêng, 2022 - 2023

(Ngày thi: 27/04/2023; Thời gian: 60 phút)

Cho phương trình $u_{xx} + u_{yy} = 0$ trên miền $x, y > 0$ với các điều kiện biên $u(0, y) = 0,\ u(x, 0) = f(x)$, trong đó $f \in L^1(0, \infty) \cap C([0, \infty))$ và $\lim\limits_{x\to\infty} u(x, y) = \lim\limits_{x\to\infty} u_x(x, y) = 0$.

Bài 1 (4 điểm): Chứng minh rằng:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda y} f(\zeta) \sin \lambda x \sin \lambda\zeta \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}\lambda$$

Bài 2 (4 điểm): Chứng minh rằng:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{y^2 + (\zeta - x)^2} - \frac{1}{y^2 + (\zeta + x)^2} \right) f(\zeta) \mathrm{d}\zeta$$

Bài 3 (2 điểm): Chứng minh rằng:

$$\lim_{y\to 0^+} u(x, y) = f(x)$$

1.4 Đề thi cuối học kì II Phương trình đạo hàm riêng, 2022 - 2023

(Ngày thi: 06/07/2023; Thời gian: 120 phút)

Bài 1 (5 điểm): Cho $a, b, \alpha_0, \alpha_1 > 0,\ \Omega = [0,a] \times [0,b]$ và $f \in L^2(\Omega)$. Đặt $S_1 = [0,a] \times \{0\},\ S_2 = \partial\Omega \setminus S_1$ và

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left((\alpha_0 + x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left((\alpha_1 + x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Xét bài toán biên:

$$Lu = f \text{ với điều kiện biên } u\big|_{S_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}\bigg|_{S_2} = 0$$

a) Tìm không gian nghiệm V và viết dạng nghiệm yếu của bài toán.

b) Cho $v \in H^1(\Omega),\ v\big|_{S_1} = 0$. Sử dụng đẳng thức

$$v(x,y) = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y}(x,s)\mathrm{d}s$$

để chứng minh rằng tồn tại số $C_0 > 0$ không phụ thuộc vào v sao cho $\|v\|_{L^2} \leq C_0\|\nabla v\|_{L^2}$. Từ đó suy ra

$$\|v\|_{H^1} \leq C_0\|\nabla v\|_{L^2}.$$

c) Chứng minh bài toán biên có nghiệm duy nhất $u \in V$.

d) Tìm $J[v]$ với $v \in V$ thỏa $u = \underset{V}{\arg\min}\ J[v]$.

e) Nếu $w = \underset{H^1(\Omega)}{\arg\min}\ J[w]$ và $w \in H^2(\Omega)$ thì w thỏa bài toán biên nào?

Bài 2 (5 điểm): Cho $\Omega = (0,1),\ T > 0$ và $f \in L^2\big(\Omega \times (0,T)\big)$. Xét phương trình $u_t - u_{xx} = f$ với điều kiện biên $u(0,t) = u(1,t) = 0$ và điều kiện đầu $u(x,0) = g(x),\ 0 < x < 1$.

a) Tìm $D(L)$ với $Lu = -u_{xx}$.

b) Chứng minh L đơn điệu, cực đại trên $L^2(\Omega)$.

c) Chứng minh L tự liên hợp.

d) Giả sử $f \equiv 0,\ g \in L^2(\Omega)$. Chứng minh bài toán có nghiệm u bằng định lý Hille - Yoshida.

e) Tìm công thức của nửa nhóm $S(t)$ để nghiệm u của câu d thỏa mãn $u(x,t) = S(t)g$. Sử dụng công thức này để viết công thức nghiệm trong trường hợp f khác 0.

1.5 Đề thi giữa học kì II Phương trình đạo hàm riêng, 2023 - 2024

ĐỀ THI KÍP 1 (31-05-2024), THỜI GIAN: 30 PHÚT

Xét bài toán gồm phương trình $-u'' + u = f$ với $f \in L^2(0, \pi)$ và điều kiện đầu $u(0) = u(\pi) = 0$.

a) Viết dạng nghiệm yếu của bài toán.

b) Chứng minh rằng dạng nghiệm yếu tồn tại nghiệm bằng định lý Lax - Milgram.

c) Chứng minh rằng nghiệm của bài toán yếu cũng là nghiệm của bài toán ban đầu.

d) Xấp xỉ nghiệm $u \approx c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ với $f(x) = x$ và $\phi_1(x) = 1,\ \phi_2(x) = x$.

ĐỀ THI KÍP 2 (07-06-2024), THỜI GIAN: 30 PHÚT

Xét bài toán gồm phương trình $-u'' + 3u = f$ với $f \in L^2(0, 1)$ và điều kiện đầu $u(0) = u'(1) = 0$.

a) Viết dạng nghiệm yếu của bài toán.

b) Chứng minh rằng dạng nghiệm yếu tồn tại nghiệm bằng định lý Lax - Milgram.

c) Chứng minh rằng nghiệm của bài toán yếu cũng là nghiệm của bài toán ban đầu.

d) Xấp xỉ nghiệm $u \approx \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2$ với $f(x) = x$ và $\phi_1(x) = x^2 - 2x,\ \phi_2(x) = x^3 - 3x$.

1.6 Đề thi cuối học kì II Phương trình đạo hàm riêng, 2023 - 2024

(Ngày thi: 04/07/2024; Thời gian: 120 phút)

Bài 1 (5 điểm): Cho $a, b > 0,\ \Omega = [0, a] \times [0, b]$ và $f \in L^2(\Omega)$. Đặt $S_1 = [0, a] \times \{0\},\ S_2 = \partial\Omega \setminus S_1$ và

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Xét bài toán biên:

$$Lu = f \text{ với điều kiện biên } u\big|_{S_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}\bigg|_{S_2} = 0$$

a) Tìm không gian nghiệm V và viết dạng nghiệm yếu của bài toán.

b) Cho $v \in H^1(\Omega),\ v\big|_{S_1} = 0$. Sử dụng đẳng thức

$$v^2(x, y) = 2\int_0^y v(x, s)\frac{\partial v}{\partial y}(x, s)\mathrm{d}s$$

để chứng minh rằng tồn tại số $C_0 > 0$ không phụ thuộc vào v sao cho $\|v\|_{L^2} \leq C_0\|\nabla v\|_{L^2}$. Từ đó suy ra

$$\|v\|_{H^1} \leq C_0'\|\nabla v\|_{L^2},\quad \forall v \in V$$

với C_0' là một hằng số.

c) Chứng minh bài toán có nghiệm duy nhất $u \in V$.

d) Tìm $J[v]$ với $v \in V$ thỏa $u = \arg\min\limits_{V} J[v]$.

e) Nếu $w = \arg\min\limits_{H^1(\Omega)} J[w]$ và $w \in H^2(\Omega)$ thì w thỏa bài toán biên nào?

Bài 2 (5 điểm): Cho $\Omega = (0, \pi),\ T > 0,\ \kappa > 0,\ f \in L^2\big(\Omega \times (0, T)\big)$ và $g \in L^2(\Omega)$. Xét phương trình $u_t - \kappa u_{xx} = f$ với điều kiện biên $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ và điều kiện đầu $u(x, 0) = g(x),\ 0 < x < \pi$.

a) Tìm $D(L)$ với $Lu = -\kappa u_{xx}$.

b) Chứng minh L đơn điệu, cực đại trên $L^2(\Omega)$.

c) Giả sử $f \equiv 0,\ g \in L^2(\Omega)$. Chứng minh bài toán có nghiệm u bằng định lý Hille - Yoshida.

d) Tìm công thức của nửa nhóm $S(t)$ để nghiệm u của câu c thỏa mãn $u(x, t) = S(t)g$. Sử dụng công thức này để viết công thức nghiệm trong trường hợp f khác 0.