Bài luận cá nhân môn Bài toán không chỉnh - 21TTH

Lê Hoàng Bảo

27 tháng 05 năm 2024

Nội dung tiểu luận: Chương 2 của "An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems"

Mục lục

1 Lời mở đầu

Trong tiểu luận này, các bài toán không đặt chỉnh đều có thể viết được dưới dạng phương trình toán tử:

$$Kx = y$$

với K là toán tử compact tuyến tính liên tục giữa hai không gian Hilbert X và Y trên trường $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Ở chương 2 này, ta sẽ nói về các phương pháp để chỉnh hóa một bài toán có dạng $Kx = y$, sau đó tiến hành giải chúng.

2 Kiến thức chuẩn bị

2.1 Các không gian hàm

2.1.1 Không gian Banach

Định nghĩa 2.1.1.1. Không gian vector X trên trường số thực gọi là *không gian định chuẩn* nếu tồn tại ánh xạ $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ thỏa:

(i) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in X; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X$

Định nghĩa 2.1.1.2. Cho không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$.

(i) Dãy (x_n) gọi là *dãy Cauchy* nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon, \ \forall m, n \geq n_0$$

(ii) Dãy (x_n) được gọi là *hội tụ về* x_0 nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|x_n - x_0\| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$$

Khi đó ta ký hiệu $x_n \to x_0$ hay $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0$.

Định lý 2.1.1.3. Cho không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$.

(i) Mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy, và mọi dãy Cauchy đều bị chặn, tức là ta có $M > 0$ thỏa $\|x_n\| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Mọi dãy Cauchy đều có dãy con hội tụ.

Định nghĩa 2.1.1.4. Không gian định chuẩn X được gọi là *không gian Banach* nếu mọi dãy Cauchy đều hội tụ về một phần tử trong X.

2.1.2 Không gian Hilbert

Định nghĩa 2.1.2.1. Cho X là không gian vector trên trường thực hoặc phức (ký hiệu chung là $\mathbb{K}$), và f là ánh xạ đi từ $X \times X$ vào $\mathbb{K}$. Ta nói f là một *tích vô hướng* trên X nếu và chỉ nếu f có các tính chất sau: Với mọi $x, x', y, y' \in X$ và $\alpha \in \mathbb{K}$:

(i) $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$

(ii) $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$

(iii) $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$

(iv) $f(x, \alpha y) = \overline{\alpha} f(x, y)$

(v) $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$

(vi) $f(x,x) \geq 0$; $f(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ (vector không trong X).

Bổ đề 2.1.2.2. Cho f là một tích vô hướng trên X. Với mọi $x, y \in X$, ta có:

(i) BĐT Schwarz: $|f(x,y)|^2 \leq f(x,x)f(y,y)$

(ii) BĐT Minkowsky: $\sqrt{f(x+y,x+y)} \leq \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}$

Định nghĩa 2.1.2.3. Với f là tích vô hướng trên X, ta gọi cặp (X,f) là một *không gian Unita*.

Nhận xét 2.1.2.4. Với không gian Unita (X,f), nếu ta xét ánh xạ $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$\|x\| = \sqrt{f(x,x)}, \quad \forall x \in X$$

thì $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên X, nên X trở thành không gian định chuẩn. Ta nói $\|\cdot\|$ là chuẩn sinh bởi tích vô hướng. Như vậy, mọi không gian Unita đều là không gian định chuẩn.

Định nghĩa 2.1.2.5. Một không gian Unita (X,f) mà là không gian Banach thì ta gọi nó là *không gian Hilbert*. Khi đó, ta dùng ký hiệu $\langle x,y\rangle$ thay cho $f(x,y)$.

Định nghĩa 2.1.2.6. Cho X là không gian Hilbert.

(i) Với $x, y \in X$, nếu $\langle x,y\rangle = 0$ thì ta nói x *trực giao* (vuông góc) với y, và viết $x \perp y$.

(ii) Cho họ $\{u_i\}_{i\in I}$ trong X, ta nói $\{u_i\}$ là một *họ trực chuẩn* của X nếu và chỉ nếu:

$$\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(iii) Họ trực chuẩn $\{u_i\}_{i\in I}$ được gọi là *đầy đủ* trong X nếu

$$u = \sum_{i\in I} \langle u_i, u\rangle u_i, \quad \forall u \in X$$

Họ trực chuẩn $\{u_i\}$ hữu hạn được gọi là đầy đủ trong X nếu nó là cơ sở trong X.

Ta có định lý quan trọng sau:

Định lý 2.1.2.7. Cho $\{u_i\}_{i\in I}$ là họ trực chuẩn đầy đủ trong không gian Hilbert X. Với x là một vector trong X, đặt $x_i = \langle x, u_i\rangle$ với mọi $i \in I$. Khi đó $J := \{i \in I : x_i \neq 0\}$ là một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được. Hơn nữa:

(i) $x = \sum\limits_{i\in I} x_i u_i$

(ii) $\sum\limits_{i\in I} |x_i|^2 = \|x\|^2$

(iii) Không gian sinh bởi $\{u_i\}$ là trù mật trong X, tức là: $\overline{\operatorname{span}\{u_i\}} = X$.

2.1.3 Các định lý cơ bản trong tích phân Lebesgue

Định nghĩa 2.1.3.1. Một tính chất $P(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *đúng hầu khắp nơi (a.e)* nếu tồn tại A có độ đo không sao cho $P(x)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$.

Định lý 2.1.3.2. (Hội tụ đơn điệu) Cho (f_m) là dãy hàm khả tích trên $\mathbb{R}^n$ với $f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nếu dãy hàm (f_m) tăng hầu khắp nơi và tồn tại M sao cho

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_m \leq M, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

thì tồn tại hàm khả tích $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sao cho $f_m \to f$ a.e và

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$$

Định lý 2.1.3.3. (Hội tụ bị chặn) Cho (f_m) là dãy hàm khả tích trên $\mathbb{R}^n$ với $f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sao cho $f_m \to f$ hầu khắp nơi. Nếu tồn tại hàm g sao cho $|f_m(x)| \leq g(x)$ a.e thì f khả tích, và:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$$

Chú ý rằng hai định lý trên vẫn đúng khi thay $\mathbb{R}^n$ bằng tập đo được Ω.

Định lý 2.1.3.4. Nếu f đo được trên $\mathbb{R}^n$ và g khả tích trên $\mathbb{R}^n$ sao cho $|f(x)| \leq g$ a.e thì f khả tích trên $\mathbb{R}^n$.

2.1.4 Các không gian L^p $(1 \leq p \leq \infty)$

Ta ký hiệu Ω là tập đo được (thường là tập mở) trong $\mathbb{R}^n$, và quy ước rằng hai hàm đo được $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ là bằng nhau nếu $f(x) = g(x)$ a.e trên Ω.

Định nghĩa 2.1.4.1. Cho f đo được trên Ω và $|f|^p$ khả tích trên Ω.

(i) Với $1 \leq p < \infty$, ta định nghĩa:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

Tập hợp tất cả các hàm f như trên được gọi là *không gian* $L^p(\Omega)$. Ta có $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right)$ là không gian định chuẩn.

(ii) Đặt

$$L^\infty(\Omega) = \{g : \Omega \to \mathbb{R} \text{ đo được và } \exists\lambda > 0 : |g(x)| \leq \lambda \text{ a.e trên } \Omega\}$$

và

$$\|f\|_\infty = \inf\{\lambda : |f(x)| \leq \lambda \text{ a.e trên } \Omega\}$$

Khi đó $\left(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty\right)$ là không gian định chuẩn.

Định lý 2.1.4.2. Với $1 \leq p \leq \infty$ thì $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right)$ là không gian Banach.

Định lý 2.1.4.3. Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ đo được. Khi đó $L^2(\Omega)$ trở thành không gian Hilbert với tích vô hướng:

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

2.1.5 Không gian Sobolev $W^{m,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$

Định nghĩa 2.1.5.1. Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ là tập mở. Ta đặt

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ đo được và } f \in L^1(\omega),\ \forall\omega \in \mathbb{R}^n \text{ và } \overline{\omega} \text{ là tập compact trong } \Omega\}$$

Định nghĩa 2.1.5.2. (Đạo hàm suy rộng) Cho $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m$ với $\alpha_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}$ và $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Hàm $g_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ được gọi là *đạo hàm suy rộng thứ* α *của* f nếu:

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \mathrm{d}x$$

với mọi $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ và $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ và $D^\alpha\varphi = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$.

Định nghĩa 2.1.5.3. (Không gian Sobolev) Với mọi $m \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m, \alpha_i \geq 0$ và $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mở, ta định nghĩa:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \forall\alpha, |\alpha| \leq m\}$$

Khi đó chuẩn trên $W^{m,p}$ được cho bởi:

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

Đặc biệt, khi $p = 2$, ta ký hiệu $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. Khi đó $H^m(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng:

$$\langle f, g\rangle_{H^m} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha f \overline{D^\alpha g}$$

Định lý 2.1.5.4. $W^{m,p}(\Omega)$ với $1 \le p \le \infty$ là không gian Banach.

2.1.6 Các không gian hàm phụ thuộc thời gian

Định nghĩa 2.1.6.1. Cho X là không gian Banach với chuẩn $\|\cdot\|$ và $T > 0$. Ta định nghĩa $L^p([0,T], X)$ là không gian tất cả các hàm đo được $\mu : [0,T] \to X$ với chuẩn thỏa:

$$\|u\|_{L^p([0,T],X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \forall p \in [1, \infty)$$

Định nghĩa 2.1.6.2. Không gian $H^1([0,T], X)$ là không gian các hàm $u \in L^2([0,T], X)$ và có đạo hàm suy rộng $u' \in L^2([0,T], X)$ với chuẩn:

$$\|u\|_{H^1([0,T],X)} = \sqrt{\int_0^T \left(\|u(t)\|^2 + \|u'(t)\|^2\right) \mathrm{d}t}$$

2.1.7 Một số không gian hàm khác

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mở, $m \in \mathbb{N}^*$ và hàm số $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ta ký hiệu

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Ta có các định nghĩa sau:

$$\begin{aligned}
&C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ liên tục}\}\\
&C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega),\ \text{supp } f \subset \Omega\}\\
&C^m(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : D^\alpha f \in C(\Omega), |\alpha| \le m\}\\
&C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)\\
&C_c^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_c(\Omega)\\
&C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)\\
&C(\overline{\Omega}) = \{f \in C(\Omega) : f \text{ bị chặn và liên tục đều trên } \Omega\}\\
&C^m(\overline{\Omega}) = \{f \in C^m(\Omega) : D^\alpha f \in C(\overline{\Omega}), |\alpha| \le m\}
\end{aligned}$$

2.1.8 Một số tính chất trù mật

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mở. Ta có các tính chất sau:

Định lý 2.1.8.1. Không gian các hàm bậc thang (s_n) trù mật trong $L^p(\Omega)$ với $1 \le p < \infty$, với hàm bậc thang s là ánh xạ đo được đi từ $\Omega \to \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$, tức hàm số chỉ nhận hữu hạn giá trị.

Định lý 2.1.8.2. $C_c^\infty(\Omega)$ và $C(\overline{\Omega})$ trù mật trong $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ với chuẩn $\|\cdot\|_p$.

2.1.9 Một số bất đẳng thức thông dụng

Định lý 2.1.9.1 (Holder) Cho $1 \leq p, q \leq \infty$ thỏa $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ và $f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega)$. Ta có:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Định lý 2.1.9.2. Cho $f : [a, b] \to X$ với $(X, \|\cdot\|)$ là không gian Banach. Ta có bất đẳng thức:

$$\left\| \int_a^b f(t) \mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \mathrm{d}t$$

Định lý 2.1.9.3 (Young) Cho $p, q > 0$ thỏa $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Với mọi $a, b > 0$, ta có:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2.2 Biến đổi Fourier

Định nghĩa 2.2.1. Cho $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, khi đó ta định nghĩa *biến đổi Fourier của* f là:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}x, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Nếu $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ thì với hầu hết $x \in \mathbb{R}^n$, ta có:

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{\mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

Định lý 2.2.2. Cho $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ và $c \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có các tính chất:

(i) $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$

(ii) $\widehat{cf} = c\hat{f}$

(iii) $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

(iv) Với $k \in \mathbb{N},\ i = \overline{1, n},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ và $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ thì:

$$\widehat{\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f}(\xi) = (\mathrm{i}\xi_i)^k \hat{f}(\xi)$$

2.3 Một số kết quả trong Giải tích hàm

2.3.1 Các kết quả trong không gian Hilbert

Định nghĩa 2.3.1.1. Trong không gian Hilbert X:

(i) $\{x_n\}$ gọi là *hệ trực giao* nếu các vector của nó đôi một trực giao.

(ii) Cho $M \subset X$. Ta đặt:

$$M^\perp = \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0,\ \forall y \in M\}$$

là *phần bù trực giao* của M.

Định lý 2.3.1.2. Trong không gian Hilbert X:

(i) $x \perp y_1, y_2, \ldots, y_n \ \Rightarrow\ x \perp \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$.

(ii) $x \perp y_n$ và $y_n \to y \ \Rightarrow\ x \perp y$

(iii) $M^{\perp}$ là không gian con đóng của X.

(iv) Nếu $\{x_n\}$ là hệ trực giao thì:

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2$$

Định lý 2.3.1.3. Cho X là không gian Hilbert và M là không gian con đóng của X. Khi đó, mọi $x \in X$ đều có thể phân tích được duy nhất dưới dạng $x = v + w$ với $v \in M,\ w \in M^{\perp}$.

Toán tử $P : X \to M$ thỏa $Px = v$ gọi là *phép chiếu trực giao* X lên M và thỏa:

(i) $Pv = v$ nếu $v \in M$

(ii) $\|x - Px\| \leq \|x - v'\|,\ \forall v' \in M$

(iii) Nếu $\{u_j\}_{j \in I} \subset M$ là hệ đầy đủ của M thì:

$$Px = \sum_{j \in I} \langle x, u_j \rangle u_j,\ \forall x \in X$$

Định lý 2.3.1.4. Nếu $\{x_n\}$ là hệ đầy đủ trong không gian Hilbert X và dãy số $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ thỏa $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2$ hội tụ thì có duy nhất $x \in X$ để cho:

$$\langle x, x_j \rangle = \xi_j,\ \forall j \in \mathbb{N}$$

Định nghĩa 2.3.1.5. Ta ký hiệu $\mathcal{L}(X, Y)$ là *tập các ánh xạ tuyến tính liên tục* giữa hai không gian định chuẩn X và Y.

Định lý 2.3.1.6. (Riesz) Với mọi a cho trước thuộc không gian Hilbert X, hệ thức $f_a(x) = \langle x, a \rangle$ xác định một phiếm hàm tuyến tính liên tục từ X sang $\mathbb{R}$ thỏa $\|f_a\| = \|a\|$.

Ngược lại, với mỗi $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ đều tồn tại duy nhất một $a \in X$ sao cho $f(x) = \langle x, a \rangle$ và $\|f\| = \|a\|$.

Định lý 2.3.1.7. (Lax - Milgram) Cho f là một dạng song tuyến tính đối xứng liên tục trên không gian Hilbert X sao cho f là *coercive*: $\exists \alpha > 0$ sao cho $f(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$. Khi đó với mỗi phiếm hàm tuyến tính liên tục $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, tồn tại duy nhất phần tử $x_0 \in X$ sao cho:

$$f(x_0, x) = Tx, \quad \forall x \in X$$

Định lý 2.3.1.8. Cho X, Y là không gian định chuẩn và $T : X \to Y$ là ánh xạ tuyến tính. Ta có:

(i) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ khi và chỉ khi tồn tại $M > 0$ sao cho:

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X$$

(ii) Nếu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ thì:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\|$$

(iii) Nếu Y là không gian Banach thì $\mathcal{L}(X, Y)$ cũng là không gian Banach. Do đó $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ là không gian Banach.

2.3.2 Các định lý cơ bản trong Giải tích hàm

Định lý 2.3.2.1. (Ánh xạ ngược liên tục) Nếu X, Y là không gian Banach và $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ là song ánh thì $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Định lý 2.3.2.2. (Đồ thị đóng) Cho X, Y là không gian Banach. Khi đó $T : X \to Y$ là liên tục nếu và chỉ nếu T là đóng, tức là biến mỗi tập $\mathcal{U}$ đóng trong X thành $T(\mathcal{U})$ đóng trong Y.

Định nghĩa 2.3.2.3. Dãy $(T_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ hội tụ về $T \in \mathcal{L}(X, Y)$:

(i) *theo từng điểm* nếu $T_n x \to Tx$ (trong Y), với mọi $x \in X$.

(ii) *đều* nếu $T_n \to T$ trong $\mathcal{L}(X, Y)$.

Định lý 2.3.2.4. (Banach - Steinhaus) Cho X là không gian Banach, Y là không gian định chuẩn và $\{T_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ là họ các ánh xạ tuyến tính bị chặn từng điểm, tức là tồn tại $M_x > 0$ sao cho:

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y \leq M_x, \quad \forall x \in X$$

Khi đó

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$$

Hệ quả 2.3.2.5. Cho X, Y là không gian Banach và $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Các phát biểu sau tương đương:

(i) $\{T_n\}$ hội tụ đều trên tập con compact của X.

(ii) $\{T_n\}$ hội tụ điểm trên X.

(iii) $\{T_n\}$ hội tụ điểm trên tập con trù mật $\mathcal{U}$ của X và $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$.

Hệ quả 2.3.2.6. Cho X, Y là không gian Banach và $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Nếu T_n hội tụ về $T : X \to Y$ theo từng điểm thì T bị chặn.

2.3.3 Toán tử liên hợp và toán tử compact

Định nghĩa 2.3.3.1 Cho $K : X \to Y$ là toán tử tuyến tính liên tục giữa hai không gian Hilbert. Khi đó tồn tại duy nhất một toán tử tuyến tính liên tục $K^* : Y \to X$ thỏa:

$$\langle Kx, y \rangle_Y = \langle x, K^* y \rangle_X, \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y$$

Toán tử K^* được gọi là *toán tử liên hợp* của K. Khi $X = Y$ và $K^* = K$ thì K gọi là *tự liên hợp*.

Định nghĩa 2.3.3.2. Cho K là toán tử tuyến tính liên tục trên không gian định chuẩn X. Ta gọi $\lambda \in \mathbb{R}$ là *trị riêng* của K nếu tồn tại vector $x \in X$ và $x \neq 0$ sao cho $Kx = \lambda x$. Khi đó x được gọi là *vector riêng* ứng với trị riêng λ.

Tập hợp $\ker(K - \lambda I)$ là một không gian con đóng bất biến đối với x và được gọi là *không gian riêng* ứng với trị riêng λ. Số chiều của không gian này được gọi là *số bội* của trị riêng λ.

Mệnh đề 2.3.3.3. Nếu K là toán tử tự liên hợp trên không gian Hilbert X thì:

(i) Các vector riêng ứng với các trị riêng khác nhau của K thì trực giao nhau.

(ii) M là không gian con bất biến đối với K thì $M^\perp$ cũng bất biến đối với K.

Định nghĩa 2.3.3.4. Cho $K : X \to Y$ là toán tử giữa hai không gian Hilbert. K được gọi là *toán tử compact* nếu nó biến mỗi tập bị chặn trong X thành một tập compact tương đối trong Y.

Hiển nhiên toán tử tuyến tính compact thì liên tục. Mặt khác, nếu một toán tử tuyến tính liên tục A có miền giá trị hữu hạn chiều thì A compact. Toán tử như vậy được gọi là *thoái hóa*.

Mệnh đề 2.3.3.5. (i) Nếu K là toán tử compact và A là toán tử tuyến tính liên tục thì $A \circ K$ và $K \circ A$ đều tuyến tính compact.

(ii) Nếu K là toán tử tuyến tính compact thì K^* cũng tuyến tính compact.

(iii) Nếu K_n là dãy các toán tử tuyến tính compact, K tuyến tính liên tục và $\|K_n - K\| \to 0$ thì K tuyến tính compact.

Định lý 2.3.3.6. Cho K là toán tử tuyến tính giữa hai không gian Hilbert. Hai mệnh đề sau tương đương:

(i) K tuyến tính compact.

(ii) Tồn tại dãy các toán tử thoái hóa K_n sao cho $\|K_n - K\| \to 0$.

Mệnh đề 2.3.3.7. Cho K là toán tử tuyến tính compact trên không gian Hilbert X. Khi đó:

(i) Mọi hệ trực chuẩn gồm những vector riêng ứng với các trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn hơn hay bằng một hằng số $c > 0$ cho trước đều hữu hạn.

(ii) Các trị riêng khác 0 của K đều hữu hạn.

(iii) Số trị riêng của K là quá lắm đếm được. Trong trường hợp K có vô hạn đếm được trị riêng thì ta có thể sắp chúng thành dãy $\{\lambda_n\}$ sao cho $\{|\lambda_n|\}$ giảm dần và hội tụ về 0.

Định lý 2.3.3.8. Cho T là toán tử tuyến tính compact tự liên hợp trên không gian Hilbert X và $\{\mu_n\}_{n\in J}$ ($J = \mathbb{N}$ hay J là tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$) là tập các trị riêng phân biệt khác 0 của T. Khi đó với mỗi $x \in X$, ta có:

$$x = x_0 + \sum_{j\in J} P_j x, \quad x_0 \in \ker T$$

$$Tx = \sum_{j\in J} \lambda_0 P_0 x$$

trong đó P_n là phép chiếu trực giao của X lên $\ker(T - \lambda_n I)$ cho bởi công thức:

$$P_n x = \sum_{j=1}^{m_n} \left\langle x, x_j^n \right\rangle x_j^n, \quad x \in X$$

với m_n là số bội của λ_n và $\left\{x_1^n, \ldots, x_{m_n}^n\right\}$ là hệ trực chuẩn trong $K(T - \lambda_n I)$.

Định lý 2.3.3.9. Cho $K : X \to Y$ là toán tử tuyến tính compact giữa hai không gian Hilbert. Khi đó tồn tại tập chỉ số J (hữu hạn hoặc đếm được) và hai hệ trực chuẩn $\{x_j\}_{j\in J}$ và $\{y_j\}_{j\in J}$ tương ứng trong X và Y và dãy số dương $\{\mu_j\}_{j\in J}$ sao cho:

(i) $\{\mu_j\}_{j\in J}$ là dãy đơn điệu không tăng và $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$ nếu $J = \mathbb{N}$.

(ii) $Kx_j = \mu_j y_j$ và $K^* y = \mu_j x_j$, $\forall j \in J$.

(iii) Với mỗi $x \in X$ thì $x = x_0 + \sum\limits_{j\in J} \langle x, x_j\rangle x_j$ với $x_0 \in \ker K$ và:

$$Kx = \sum_{j\in J} \mu_j \langle x, x_j\rangle y_j \tag{*}$$

Định nghĩa 2.3.3.10. μ_j như trên gọi là *giá trị kỳ dị* của K, $\{\mu_j, x_j, y_j\}_{j\in J}$ được gọi là *hệ kỳ dị* của K và (*) gọi là *phân tích giá trị kỳ dị* của K. Ngoài ra, nếu K là 1-1 thì $\{x_j\}$ là *hệ đầy đủ*.

Ta có một số tính chất sau của K và K^*:

Định lý 2.3.3.11. Cho K là toán tử tuyến tính và K^* là toán tử liên hợp của K. Ta có:

(i) $(K^*)^* = K$

(ii) $\|K^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \|K\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

(iii) $\|K^*K\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \|K\|^2_{\mathcal{L}(X,Y)}$

Định lý 2.3.3.12. Cho $\Omega = (0,1)$ và $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ định bởi:

$$K(x)(t) := \int_0^1 k(s,t)x(s)\mathrm{d}s$$

là toán tử compact, ở đây $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Hơn nữa nếu $k(s,t) = k(t,s)$ a.e $t, s \in \Omega$ thì K tự liên hợp.

2.4 Bài toán không chỉnh

Định nghĩa 2.4.1. Cho X, Y là hai không gian định chuẩn và $K : X \to Y$ là toán tử tuyến tính. Phương trình $Kx = y$ được gọi là *đặt chỉnh theo nghĩa Hadamard* nếu nó thỏa cả 3 điều kiện:

(i) Tồn tại nghiệm: $\forall y \in Y,\ \exists x \in X$ sao cho $Kx = y$.

(ii) Duy nhất nghiệm: $\forall y \in Y$, có nhiều nhất một $x \in X$ sao cho $Kx = y$.

(iii) Tính ổn định: Nghiệm x phụ thuộc liên tục vào y, tức là mọi dãy (x_n) trong X với $Kx_n \to Kx$ thì dẫn đến $x_n \to x$.

Nếu ít nhất một trong ba điều kiện trên không thỏa, ta gọi đó là *bài toán không đặt chỉnh* (gọi tắt là "không chỉnh").

Việc xác định rõ bộ ba (X, Y, K) và chuẩn của chúng rất quan trọng. Sự tồn tại và duy nhất chỉ phụ thuộc vào bản chất đại số của không gian và toán tử, chẳng hạn như toán tử đó đơn ánh hay toàn ánh. Tính ổn định còn phụ thuộc vào tôpô của không gian, ví dụ như toán tử nghịch đảo $K^{-1} : Y \to X$ có liên tục không,... Những yêu cầu này cũng có thể phụ thuộc lẫn nhau, chẳng hạn ta biết rằng K^{-1} là toán tử tự liên tục nếu K tuyến tính liên tục và X, Y là các không gian Banach (do định lý ánh xạ mở).

Định lý sau đây ngụ ý rằng các phương trình tuyến tính dạng $Kx = y$ với toán tử compact K luôn không chỉnh.

Định lý 2.4.2. Cho X, Y là các không gian định chuẩn và $K : X \to Y$ là toán tử compact với hạt nhân $\mathcal{N}(K) = \{x \in X : Kx = 0\}$. Giả sử số chiều của $X/\mathcal{N}(K)$ là vô hạn, khi đó tồn tại dãy (x_n) trong X để $Kx_n \to 0$ nhưng (x_n) không hội tụ. Chúng ta còn có thể chọn (x_n) sao cho $\|x_n\|_X \to \infty$.

Đặc biệt, nếu K là 1-1 thì $K^{-1} : Y \supset \mathcal{R}(K) \to X$ không bị chặn, với $\mathcal{R}(K)$ là miền giá trị của K.

Định nghĩa 2.4.3. Cho $K : X \to Y$ là toán tử tuyến tính bị chặn giữa hai không gian Banach, $\widehat{X} \subset X$ là không gian con và $\|\cdot\|_{\widehat{X}}$ thỏa:

$$\exists c > 0 : \|x\|_X \le c\|x\|_{\widehat{X}}, \quad \forall x \in \widehat{X}$$

Khi đó ta định nghĩa:

$$\mathcal{F}\left(\delta, E, \|\cdot\|_{\widehat{X}}\right) = \sup\left\{\|x\|_X : x \in \widehat{X}, \|Kx\|_Y \le \delta, \|x\|_{\widehat{X}} \le E\right\}$$

và gọi nó là *sai số lớn nhất* ứng với sai số δ trong dữ liệu và thông tin tiên nghiệm $\|x\|_{\widehat{X}} \le E$.

Tất nhiên $\mathcal{F}\left(\delta, E, \|\cdot\|_{\widehat{X}}\right)$ phụ thuộc vào toán tử K và các chuẩn trên $X, Y, \widehat{X}$. Điều ta mong muốn là sai số lớn nhất này không chỉ hội tụ về 0 mà còn có cùng cấp hội tụ với δ. Điều này đúng (ngay cả khi không có thông tin tiên nghiệm) cho toán tử khả nghịch bị chặn qua bất đẳng thức

$$\|x\|_X \le \left\|K^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|Kx\|_Y$$

Tuy nhiên, với toán tử compact K và $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{\widehat{X}}$ thì sai số lớn nhất này không hội tụ, do đó người ta cần đến những chuẩn "mạnh hơn" $\|\cdot\|_{\widehat{X}}$.

Bổ đề 2.4.4. Cho $K : X \to Y$ là tuyến tính compact và $X/\mathcal{N}(K)$ vô hạn chiều. Khi đó với $E > 0$, tồn tại $c > 0$ và $\delta_0 > 0$ để $\mathcal{F}\left(\delta, E, \|\cdot\|_X\right) \ge c$ với mọi $\delta \in (0, \delta_0)$.

Ở phần tiếp theo, ta xây dựng sơ đồ chính quy hóa "tối ưu tiệm cận" theo nghĩa, nếu $x \in \widehat{X}$, $\|x\|_{\widehat{X}} \le E$ và $\|y - \tilde{y}\|_Y \le \delta$ thì xấp xỉ $\tilde{x}$ và hằng số $c > 0$ được xây dựng sao cho:

$$\|\tilde{x} - x\|_X \le c\mathcal{F}\left(\delta, E, \|\cdot\|_{\widehat{X}}\right)$$

3 Nội dung

3.1 Mục 2.1: Lý thuyết tổng quát về chỉnh hóa

Định nghĩa 2.1.1. *Một sơ đồ chỉnh hóa là một họ các toán tử tuyến tính liên tục* $R_\alpha : Y \to X$ *sao cho* $\lim_{\alpha\to 0} R_\alpha Kx = x$ *với* $\forall x \in X$*, tức là các toán tử* $R_\alpha K$ *hội tụ điểm đến* Id*.*

Định lý 2.1.2. *Cho* R_α *là một sơ đồ chỉnh hóa với toán tử* $K : X \to Y$ *đơn ánh compact, và* $\dim X = \infty$*. Khi đó:*

(1) Toán tử R_α *không bị chặn đều, tức là tồn tại một dãy* $\{\alpha_i\}$ *mà* $\|R_{\alpha_i}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \to \infty$ *khi* $i \to \infty$*.*

(2) Dãy $\{R_\alpha Kx\}$ *không hội tụ đều trên các tập con bị chặn của* X*, tức là* $\{R_\alpha K\}$ *không hội tụ đến* Id *theo chuẩn toán tử.*

Chứng minh. (1) Giả sử toán tử R_α bị chặn đều, tức là $\exists c > 0 : \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \le c,\ \forall \alpha > 0$. Ta có $R_\alpha y \to K^{-1}y$ $(\alpha \to 0)$, $\forall y \in \mathcal{R}(K)$ và $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \le c\|y\|_Y$, suy ra $\|K^{-1}\| \le c\|y\|_Y, \forall y \in \mathcal{R}(K)$. Vậy K^{-1} bị chặn. Vậy $Id = K^{-1}K : X \to Y$ là compact, mâu thuẫn với $\dim X = \infty$. Vậy toán tử R_α không bị chặn đều.

(2) Giả sử $R_\alpha K \to Id$ trong $\mathcal{L}(X,X)$. Theo tính compact của $R_\alpha K$ và các Định lý 2.3.3.4, 2.3.3.5, ta suy ra Id cũng compact. Điều này dẫn đến $\dim X < \infty$ (mâu thuẫn). Vậy $R_\alpha K$ không hội tụ về Id theo chuẩn toán tử. □

Ta có:

$$\left\|R_\alpha y^\delta - x^*\right\|_X \le \left\|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y^*\right\|_X + \|R_\alpha y^* - x^*\|_X \le \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \left\|y^\delta - y^*\right\|_Y + \|R_\alpha Kx^* - x^*\|_X$$

Vì vậy,

$$\left\|R_\alpha y^\delta - x^*\right\|_X \le \delta\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \|R_\alpha Kx^* - x^*\|_X \tag{2.1.2a}$$

Tương tự ta có

$$\left\|KR_\alpha y^\delta - y^*\right\|_Y \le \delta\|KR_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y)} + \|KR_\alpha y^* - y^*\|_Y \tag{2.1.2b}$$

Định nghĩa 2.1.3. *Một sự lựa chọn tham số* $\alpha = \alpha_\delta$ *cho sơ đồ chỉnh hóa* R_α *được gọi là có khả năng nếu* $\lim_{\delta\to 0} \alpha_\delta = 0$ *và:*

$$\sup\left\{\left\|R_{\alpha_\delta} y^\delta - x\right\|_X : y^\delta \in Y,\ \left\|Kx - y^\delta\right\|_Y \le \delta\right\} \to 0 \text{ khi } \delta \to 0 \text{ với mọi } x \in X$$

Ví dụ 2.1.4. (Numerical differentiation by two-sided difference quotient)

$$R_h y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\left[4y\left(t + \dfrac{h}{2}\right) - y(t+h) - 3y(t)\right], & 0 < t < \dfrac{h}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{h}\left[y\left(t + \dfrac{h}{2}\right) - y\left(t - \dfrac{h}{2}\right)\right], & \dfrac{h}{2} < t < 1 - \dfrac{h}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{h}\left[3y(t) + y(t-h) + 4y\left(t - \dfrac{h}{2}\right)\right], & 1 - \dfrac{h}{2} < t < 1 \end{cases}$$

với $y \in L^2(0,1)$. Để chứng minh R_h là một sơ đồ chỉnh hóa, ta cần chứng minh R_hK bị chặn đều đối với h, trong đó $Kx(t) = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s$, tức là $\|R_hKx - x\|_{L^2}$ tiến tới 0 đối với x trơn (xem Hệ quả 2.3.2.5). Sau đó, ta chứng minh sự hội tụ đối với $x \in H^2(0,1)$. Ta có:

$$R_h y(t) = \frac{1}{h}\int_{t-\frac{h}{2}}^{t+\frac{h}{2}} y'(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'(s+t)\mathrm{d}s,\ \frac{h}{2} < t < 1 - \frac{h}{2}$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{t-\frac{h}{2}} |R_h y(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} y'(s+t)y'(\tau+t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được: $\displaystyle\int_{\frac{h}{2}}^{t-\frac{h}{2}} |R_h y(t)|^2\mathrm{d}t \le \|y'\|_{L^2}^2$

Từ $R_h y(t) = \frac{1}{h}\left[4y(t+\frac{h}{2}) - y(t+h) - 3y(t)\right], 0 < t < \frac{h}{2}$ và cách biểu diễn tương tự với $1 - \frac{h}{2} < t < 1$, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho $\|R_h y\|_{L^2} \le c\|y'\|_{L^2},\ \forall y \in H^1(0,1)$. Với $y = Kx,\ x \in L^2(0,1)$, sự bị chặn đều của $R_h K$ như sau.

Giờ ta lấy $x \in H^2(0,1)$ và do đó $y = Kx \in H^3(0,1)$. Chúng ta áp dụng công thức Taylor dưới dạng (trường hợp $\frac{h}{2} < t < 1 - \frac{h}{2}$):

$$y\left(t \pm \frac{h}{2}\right) - y(t) \mp \frac{h}{2}y'(t) - \frac{h^2}{8}y''(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\pm\frac{h}{2}} s^2 y'''\left(t \pm \frac{h}{2} - s\right)\mathrm{d}s$$

$$R_h y(t) - y'(t) = \frac{1}{2h}\int_0^{\frac{h}{2}} s^2\left[y'''\left(t + \frac{h}{2} - s\right) + y'''\left(t - \frac{h}{2} - s\right)\right]\mathrm{d}s,$$

và do đó, bằng cách thay đổi thứ tự tích phân và sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được:

$$\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} |R_h y(t) - y'(t)|^2 \mathrm{d}t \le \frac{1}{h^2}\|y'''\|_{L^2}^2 \left(\int_0^{\frac{h}{2}} s^2 \mathrm{d}s\right)^2 = \frac{1}{24^2}\|y'''\|_{L^2}^2 h^4$$

Áp dụng công thức Taylor tương tự trên khoảng $\left(0, \dfrac{h}{2}\right)$ và $\left(1 - \dfrac{h}{2}, 1\right)$ ta được:

$$\|R_h Kx - x\|_{L^2} = \|R_h y - y'\|_{L^2} \le c_1 E h^2,$$

với mọi $x \in H^2(0,1)$ mà $\|x''\|_{L^2} \le E$. Kết hợp với sự bị chặn đều của $R_h K$, ta có $R_h Kx \to x$ với mọi $x \in L^2(0,1)$.

Mặt khác, áp dụng ước lượng (2.1.2a), tồn tại $c_2 > 0$ sao cho $\|R_h y\|_{L^2} \le \dfrac{c_2}{h}\|y\|_{L^2},\ \forall y \in L^2(0,1)$.

Ước lượng (2.1.2a) cho ra

$$\left\|R_h y^\delta - x^*\right\|_{L^2} \le \frac{\delta}{h} + c_1 E h^2,$$

với E là một đầu mút trên $\|(x^*)''\|_{L^2} = \|(y^*)'''\|_{L^2}$. Việc cực tiểu hóa theo h của biểu thức ở vế phải dẫn tới:

$$h(\delta) = \sqrt[3]{\frac{\delta}{E}} \quad \text{và} \quad \left\|R_{h(\delta)} y^\delta - x^*\right\|_{L^2} \le \tilde{c} E^{1/3}\delta^{2/3}$$

Ví dụ 2.1.5. (Numerical differentiation by mollification) Ta đặt:

$$(Kx)(t) = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s,\ t \in [0,1]$$

và

$$L_0^2(0,1) = \left\{z \in L^2(0,1) : \int_0^t z(s)\mathrm{d}s = 0\right\}$$

là không gian con đóng của $L^2(0,1)$ vào $L^2(0,1)$. Tiếp tục đặt nhân Gaussian:

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-t^2/\alpha^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

Khi đó $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha(t)\mathrm{d}t = 1$ và tích chập

$$\psi_\alpha * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha(t-s)y(s)\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha(s)y(t-s)\mathrm{d}s,\ t \in \mathbb{R}, y \in L^2(\mathbb{R})$$

tồn tại. Theo bất đẳng thức Young, ta có:

$$\|\psi_\alpha * y\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \|\psi_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R})}\|y\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Vì thế, toán tử $y \to \psi_\alpha * y$ bị chặn đều trong $L^2(\mathbb{R})$ với α. Ta chú ý $\psi_\alpha * y$ khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$, $\forall y \in L^2(\mathbb{R})$.

Ta cần chứng minh hai điều sau:

$$\|\psi_\alpha * y\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0 \text{ khi } \alpha \to 0, \quad \forall y \in L^2(0,1) \tag{2.1.5a}$$

và

$$\|\psi_\alpha * y\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\alpha\|z'\|_{L^2(0,1)} \tag{2.1.5b}$$

Chứng minh. (2.1.5b) Ta có $\left\{z \in H^1(0,1) : z(1) = z(0) = 0\right\}$ trù mật trong $L^2(0,1)$ và toán tử $z \to \psi_\alpha * z$ bị chặn đều từ $L^2(0,1)$ vào $L^2(\mathbb{R})$.

Cho biến đổi Fourier được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{F}z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z(s)e^{\mathrm{i}st}\mathrm{d}s, \quad t \in \mathbb{R}$$

Với $z \in \mathcal{S}$, ta định nghĩa không gian Schwarz $\mathcal{S}$ như sau:

$$\mathcal{S} = \left\{z \in C^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|t^p z^{(q)}(t)\right| < \infty\right\}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}_0$$

Với sự chuẩn hóa này, theo định lý Plancherel và định lý tích chập, ta có:

$$\|\mathcal{F}z\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|z\|_{L^2(\mathbb{R})} \text{ và } \mathcal{F}(u * z)(t) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}u(t)\mathcal{F}z(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

với mọi $z, u \in \mathcal{S}$.

Vì $\mathcal{S}$ trù mật trong $L^2(\mathbb{R})$ nên công thức đầu tiên cho phép nó mở rộng $\mathcal{F}$ thành toán tử bị chặn từ $L^2(\mathbb{R})$ lên chính nó (theo Định lý Hahn - Banach) và cả hai công thức đều đúng với $z \in L^2(\mathbb{R})$. Kết hợp hai tính chất, ta kết luận rằng

$$\|\psi_\alpha * z - z\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}(\psi_\alpha * z) - \mathcal{F}z\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\left[\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\psi_\alpha) - 1\right]\mathcal{F}z\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

với mỗi $z \in L^2(0,1)$.

Ta có:

$$\mathcal{F}z'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 z'(s)e^{\mathrm{i}st}\mathrm{d}s = \frac{-\mathrm{i}t}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 z(s)e^{\mathrm{i}st}\mathrm{d}s = -\mathrm{i}t\mathcal{F}z(t), \quad \forall z \in H_0^1(0,1)$$

Ta đặt ψ_α như sau

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{\mathrm{i}t}\left[1 - \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\phi_\alpha)\right] = \frac{1}{\mathrm{i}t}\left(1 - e^{\frac{-\alpha^2 t^2}{4}}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Chúng ta kết luận rằng

$$\|\psi_\alpha * z - z\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\phi_\alpha\mathcal{F}(z')\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\phi_\alpha\|_\infty\|\mathcal{F}(z')\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\phi_\alpha\|_\infty\|z'\|_{L^2(0,1)}$$

Hơn nữa, $|\phi_\alpha(t)| = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{(\alpha t)/2}\left(1 - e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{4}}\right)$ mà $1 - \dfrac{e^{-\tau^2}}{\tau} \leq 2\sqrt{2}$. Vậy ta được (2.1.5b).

Ta định nghĩa toán tử $\mathcal{R}_\alpha : L^2(0,1) \to L_0^2(0,1)$ như sau

$$\mathcal{R}_\alpha y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_\alpha * y)(t) - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\psi_\alpha * y)(s)\mathrm{d}s = (\psi_\alpha' * y)(t) - \int_0^1 (\psi_\alpha' * y)(s)\mathrm{d}s, \quad t \in (0,1), \ y \in L^2(0,1)$$

Chú ý rằng $\mathcal{R}_\alpha$ được định nghĩa tốt, nghĩa là đi từ $L^2(0,1)$ vào $L_0^2(0,1)$ và bị chặn. Để chứng minh $\mathcal{R}_\alpha$ là một sơ đồ chỉnh hóa, chúng ta tiến hành như trong ví dụ trước và chứng minh các ý sau ($\alpha > 0$):

i) $\|\mathcal{R}_\alpha y\|_{L^2(0,1)} \leq \dfrac{4}{\alpha\sqrt{\pi}}\|y\|_{L^2}$ với $y \in L^2(0,1)$

ii) $\|\mathcal{R}_\alpha Kx\|_{L^2(0,1)} \leq 2\|y\|_{L^2}$ với $x \in L_0^2(0,1)$

iii) $\|\mathcal{R}_\alpha Kx - x\|_{L^2(0,1)} \leq 2\sqrt{2}\alpha\|x'\|_{L^2}$ với $x \in H_{00}^1(0,1)$

với $H_{00}^1(0,1) := \left\{x \in H_0^1(0,1) : x(0) = x(1) = 0, \displaystyle\int_0^1 x(s)\mathrm{d}s = 0\right\}$

Ta áp dụng bất đẳng thức Young để chứng minh (i). Ta có:

$$\|\mathcal{R}_\alpha y\|_{L^2(0,1)} \leq \|\psi_\alpha' * y\|_{L^2(0,1)} \leq \|\psi_\alpha' * y\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|\psi_\alpha'\|_{L^1(\mathbb{R})}\|y\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{4}{\alpha\sqrt{\pi}}\|y\|_{L^2(0,1)}, \quad y \in L^2(0,1)$$

Vì $\|\psi'_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R})} = -2\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi'_\alpha(s)\mathrm{d}s = 2\psi'_\alpha(0) = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}$, ta đã chứng minh xong (i).

Bây giờ ta lấy $y \in H^1(0,1)$ với $y(0) = y(1) = 0$. Khi đó,

$$(\psi'_\alpha * y)(t) = \int_0^1 \psi'_\alpha(t-s)y(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \psi_\alpha(t-s)y'(s)\mathrm{d}s = (\psi_\alpha * y')(t)$$

Đặt $y = Kx,\ x \in L^2_0(0,1)$, ta thu được

$$\mathcal{R}_\alpha Kx(t) = (\psi_\alpha * x)(t) - \int_0^1 (\psi_\alpha * x)(s)\mathrm{d}s$$

Bây giờ ta có

$$\mathcal{R}_\alpha Kx(t) - x(t) = (\psi_\alpha * x)(t) - x(t) - \int_0^1 [(\psi_\alpha * x)(s) - x(s)]\mathrm{d}s$$

Do $\displaystyle\int_0^1 x(s)\mathrm{d}s = 0$, ta suy ra

$$\|\mathcal{R}_\alpha Kx - x\|_{L^2(0,1)} \leq 2\|(\psi_\alpha * x) - x\|_{L^2(0,1)} \leq 2\sqrt{2}\alpha\|x'\|_{L^2}$$

(xem 2.1.5b) với $x \in H^1_{00}(0,1)$.

Ta kết luận rằng $\mathcal{R}_\alpha Kx$ hội tụ về x với mọi $x \in L^2_0(0,1)$ bởi (ii), (iii), và sự trù mật của $H^1_{00}(0,1)$ trong $L^2_0(0,1)$. Do đó, $\mathcal{R}_\alpha$ là một sơ đồ chỉnh hóa.

Một phương pháp thuận tiện để xây dựng các sơ đồ chỉnh hóa chấp nhận được đưa ra bằng cách lọc các hệ kỳ dị. Cho $K : X \to Y$ là toán tử compact tuyến tính, đặt $\{\mu_j, x_j.y_j : j \in J\}$ là một hệ kỳ dị đối với K. (xem Định nghĩa 2.3.3.10). Nghiệm x của $y = Kx$ được cho bởi định lý Picard (xem Định lý A.58, trang 350 trong giáo trình)

Ta đặt

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j}(y, y_j)_Y x_j \tag{2.1.5c}$$

là chuỗi hội tụ, $y \in \mathcal{R}(K)$. Kết quả này một lần nữa minh họa ảnh hưởng của sai số trong y vì các hệ số lớn $\frac{1}{\mu_j}$ (chú ý rằng $\mu_j \to 0$ khi $j \to +\infty$) khuếch đại sai số trong hệ số giãn nở $(y, y_j)_Y$. Chúng ta xây dựng sơ đồ chỉnh hóa bằng cách giảm bớt các hệ số $\frac{1}{\mu_j}$.

Định lý 2.1.6. *Cho $K : X \to Y$ là toán tử compact và đơn ánh với hệ kỳ dị $\{\mu_j, x_j.y_j : j \in J\}$ và $q : (0,\infty) \times (0, \|K\|_{L(X,Y)}) \to \mathbb{R}$ là một hàm số với các tính chất sau:*

1) $|q(\alpha,\mu)| \leq 1$ với mọi $\alpha > 0$ và $0 < \mu \leq \|K\|_{L(X,Y)}$.

2) Với mỗi $\alpha > 0$, tồn tại hằng số c_α sao cho $|q(\alpha,\mu)| \leq c_\alpha\mu$ với mọi $0 < \mu \leq \|K\|_{L(X,Y)}$.

3a) $\lim\limits_{\alpha\to 0} q(\alpha,\mu) = 1$ với mỗi $0 < \mu \leq \|K\|_{L(X,Y)}$.

Khi đó, toán tử $\mathcal{R}_\alpha : Y \to X$, $\alpha > 0$, được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{R}_\alpha y := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q(\alpha,\mu_j)}{\mu_j}(y, y_j)_Y x_j, \quad y \in Y \tag{2.1.6a}$$

là một sơ đồ chỉnh hóa với $\|\mathcal{R}_\alpha\|_{L(Y,X)} \leq c_\alpha$ và $\|K\mathcal{R}_\alpha\|_{L(Y)} \leq 1$. Sự lựa chọn $\alpha = \alpha_\delta$ là có thể nếu $\alpha_\delta \to 0$ và $\delta c(\alpha_\delta) \to 0$ khi $\delta \to 0$. Hàm số q được gọi là hàm lọc đối với K.

Chứng minh. Các toán tử $\mathcal{R}_\alpha$ bị chặn vì theo giả sử (2), ta có:

$$\|\mathcal{R}_\alpha y\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[q(\alpha,\mu_j)]^2}{\mu_j^2}|(y,y_j)|_Y^2 \leq c_\alpha^2 \sum_{j=1}^{\infty}|(y,y_j)|_Y^2 \leq c_\alpha^2\|y\|_Y^2.$$

Vậy ta suy ra $\|\mathcal{R}_\alpha\|_{L(Y,X)} \leq c_\alpha^2$.

Từ $K\mathcal{R}_\alpha y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q(\alpha,\mu_j)}{\mu_j}(y,y_j)_Y Kx_j = \sum_{j=1}^{\infty} q(\alpha,\mu_j)(y,y_j)_Y y_j$, ta kết luận rằng

$$\|K\mathcal{R}_\alpha y\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |q(\alpha,\mu_j)|^2 |(y,y_j)_Y|^2 \leq \|y\|_Y^2$$

Do đó, $\|K\mathcal{R}_\alpha\|_{L(Y)} \leq 1$.

Hơn nữa, từ ba điều sau:

$$\mathcal{R}_\alpha Kx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q(\alpha,\mu_j)}{\mu_j}(Kx,y_j)_Y x_j$$
$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (x,x_j)_X x_j$$
$$(Kx,y_j)_Y = (x,K^* y_j)_X = \mu_j (x,x_j)_X$$

ta kết luận rằng:

$$\|\mathcal{R}_\alpha Kx - x\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |q(\alpha,\mu_j)-1|^2 |(x,x_j)_X|^2 \tag{2.1.6b}$$

Ở đây, K^* biểu thị liên hợp của K (xem Định nghĩa 2.3.3.1). Sự biểu diễn cơ bản sau đây sẽ được sử dụng khá thường xuyên. Bây giờ đặt $x \in X$ là tùy ý nhưng cố định.

Với $\varepsilon > 0,\ \exists N > \mathbb{N} : \sum_{j=N+1}^{\infty} |(x,x_j)_X|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{8}$.

Theo (3a), $\exists \alpha_0 > 0 : |q(\alpha,\mu_j) - 1|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2\|x\|_X^2}$ với mọi $j = \overline{1,\dots N}$ và $0 < \alpha \leq \alpha_0$.

Với (1), ta kết luận rằng:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_\alpha Kx - x\|_X^2 &= \sum_{j=1}^{N} |q(\alpha,\mu_j)-1|^2 |(x,x_j)_X|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} |q(\alpha,\mu_j)-1|^2 |(x,x_j)_X|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2\|x\|_X^2} \sum_{j=1}^{N} |(x,x_j)_X|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \leq \varepsilon^2\end{aligned}$$

với mọi $0 < \alpha \leq \alpha_0$.

Vì vậy, ta đã chứng minh xong $\lim_{\alpha\to 0} \mathcal{R}_\alpha Kx = x$ với mọi $x \in X$. □

Trong định lý này, chúng ta đã chỉ ra sự hội tụ của $\mathcal{R}_\alpha y$ với nghiệm x. Như Ví dụ 2.1.4 và 2.1.5 đã chỉ ra, ta đặc biệt quan tâm đến các chiến thuật tối ưu, nghĩa là những hội tụ có cùng bậc với lỗi trong trường hợp xấu nhất. Ta thấy rằng trong định lý tiếp theo, việc thay thế đúng giả định 3a) cùng với giả định độ trơn trừu tượng rằng x lần lượt thuộc miền của K^* hoặc $(K^*K)^{\sigma/2}$, dẫn tới các chiến thuật tối ưu sau.

Định lý 2.1.7. *Giữ nguyên các giả thiết 1) và 2) của định lý trước đó. Giả sử 3a) được thay thế bằng giả thiết mạnh hơn:*

3b) $\forall \sigma > 0$, *tồn tại một hàm số liên tục* $\omega_\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *với* $\lim_{\alpha\to 0} \omega_\sigma(\alpha) = 0$ *và*

$$\mu^\sigma |q(\alpha,\mu_j) - 1| \leq \omega_\sigma(\alpha), \quad \forall \alpha > 0,\ 0 < \mu \leq \|K\|_{L(X,Y)} \tag{2.1.7a}$$

Khi đó:

$$\|\mathcal{R}_\alpha Kx - x\|_X \leq \omega_0(\alpha)\|x\|_X \tag{2.1.7b}$$
$$\|K\mathcal{R}_\alpha Kx - Kx\|_Y \leq \omega_0(\alpha)\|x\|_X \tag{2.1.7c}$$

Hơn nữa, nếu $x \in \mathcal{R}\big((K^*K)^{\sigma/2}\big)$ *thì*

$$\|\mathcal{R}_\alpha Kx - x\|_X \le \omega_\sigma(\alpha)\|z\|_X \tag{2.1.7d}$$

$$\|K\mathcal{R}_\alpha Kx - Kx\|_Y \le \omega_{\sigma+1}(\alpha)\|z\|_X \tag{2.1.7e}$$

với $x = (K^*K)^{\sigma/2}z$*. Chúng ta lưu ý rằng lũy thừa* $(K^*K)^{\sigma/2}$ *được xác định bởi hệ kỳ dị (xem A.47 ở trang 339 trong giáo trình). Trong trường hợp* $\sigma = 1$*, chúng ta có thể thay thế giả thiết* $x = (K^*K)^{1/2}z$ *bởi* $x = Kz$ *đối với một vài* $z \in Y$ *và (2.1.7d), (2.1.7e) được giữ lại với* $\|z\|_Y$ *thay thế* $\|z\|_X$*.*

Chứng minh. Ước lượng (2.1.7b) được suy ra từ (2.1.6b) và định nghĩa của $\omega_0(\alpha)$. Hơn nữa, từ

$$\begin{aligned} K\mathcal{R}_\alpha Kx - Kx &= \sum_{j=1}^{\infty}[q(\alpha,\mu_j)-1](x,x_j)_X Kx_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}[q(\alpha,\mu_j)-1]\mu_j(x,x_j)_X y_j \end{aligned}$$

ta kết luận rằng $\|K\mathcal{R}_\alpha Kx - Kx\|_Y^2 \le \omega_0(\alpha)^2\|x\|_X^2$. Vậy ta đã chứng minh xong (2.1.7c).

Giờ ta lấy $x = (K^*K)^{\sigma/2}z$ với $z \in X$. Khi đó, $(x,x_j)_X = \mu_j^\sigma(z,x_j)_X$ và một lần nữa, từ (2.1.6b), ta có

$$\|\mathcal{R}_\alpha Kx - x\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty}[q(\alpha,\mu_j)-1]^2\mu_j^{2\sigma}[(z,x_j)_X]^2 \le \omega_{\sigma+1}(\alpha)^2\|z\|_X^2.$$

(2.1.7e) chứng minh tương tự. □

Chúng ta thay thế những ước lượng này thành các ước lượng cơ bản (2.1.2a) và (2.1.2b). Do đó, theo các giả thiết của Định lý 2.1.7, ta có:

$$\|\mathcal{R}_\alpha y^\delta - x^*\|_X \le \delta\|\mathcal{R}_\alpha\|_{L(Y,X)} + \omega_\sigma(\alpha)\|z\|_X \tag{2.1.7f}$$

$$\|K\mathcal{R}_\alpha y^\delta - y^*\|_Y \le \delta + \omega_{\sigma+1}(\alpha)\|z\|_X \tag{2.1.7g}$$

với $\sigma > 0$ và $x^* = (K^*K)^{\sigma/2}z$. Chú ý rằng chúng ta sử dụng $\|K\mathcal{R}_\alpha\|_{L(Y)} \le 1$ ở Định lý 2.1.6.

Định lý 2.1.8. *Ba hàm q sau đây thỏa mãn các giả thiết 1), 2), 3a) và 3b) của Định lý 2.1.6 và 2.1.7, tương ứng:*

a) $q(\alpha,\mu) = \dfrac{\mu^2}{\alpha+\mu^2}$.
Hàm này thỏa mãn 2) với $c(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$*. Giả thiết 3b) đúng với* $\omega_\sigma(\alpha) = c_\sigma\alpha^{\sigma/2}$ *nếu* $\sigma \le 2$ *và* $\omega_\sigma(\alpha) \le c_\sigma\alpha$ *nếu* $\sigma > 2$ $\big(c_\sigma$ *không phụ thuộc vào* α*,* $c_1 = \frac{1}{2}$ *và* $c_2 = 1\big)$*.*

b) $q(\alpha,\mu) = 1-(1-a\mu^2)^{\frac{1}{\alpha}}$ *với* $0 < a < \dfrac{1}{\|K\|_{L(X,Y)}^2}$.
Trong trường hợp này, 2) đúng với $c_\alpha = \sqrt{\dfrac{a}{\alpha}}$ *và 3b) thỏa mãn với* $\omega_\sigma(\alpha) = \left(\dfrac{\sigma}{2a}\right)^{\sigma/2}\alpha^{\sigma/2}$ *với* $\sigma,\alpha > 0$*.*

c) $q(\alpha,\mu) = \begin{cases} 1, & \mu^2 \ge \alpha \\ 0, & \mu^2 < \alpha \end{cases}$
Khi đó, 2) đúng với $c_\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ *và 3b) thỏa mãn với* $\omega_\sigma(\alpha) = \alpha^{\sigma/2}$ *với* $\sigma,\alpha > 0$*.*
Vì thế, các hàm q trong a), b), c) là các hàm lọc.

Chứng minh. (a) Tính chất 2) suy ra từ bất đẳng thức sơ cấp $\dfrac{\mu^2}{\alpha+\mu^2} \le \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, $\forall \alpha,\mu > 0$.

Ta có: $1-q(\alpha,\mu) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\mu^2}$. Cố định $\mu > 0$ và $\alpha > 0$, ta đặt hàm số

$$f(\mu) = \mu^\sigma(1-q(\alpha,\mu)) = \frac{\alpha\mu^\sigma}{\alpha+\mu^2} \Rightarrow f'(\mu) = \alpha\mu^{\sigma-1}\frac{(\sigma-2)\mu^2+\alpha\mu}{(\alpha+\mu^2)^2}$$

với $0 \le \mu \le \mu_0$.

Khi đó, hàm f tăng đối với $\sigma \ge 2$ và do đó $f(\mu) \le f(\mu_0) \le \mu_0^{\sigma-2}\alpha$.

Nếu $\sigma < 2$, ta tính cực đại của nó khi $\mu_{\max}^2 = \dfrac{\alpha\sigma}{2-\sigma}$ với giá trị $f(\mu_{\max}) \le c_\sigma \alpha^{\sigma/2}$.

(b) Tính chất 2) suy ra từ bất đẳng thức Bernoulli:

$$1-(1-a\mu^2)^{\frac{1}{\alpha}} \le 1-\left(1-\frac{a\mu^2}{\alpha}\right) = \frac{a\mu^2}{\alpha}$$

Do đó, ta được:

$$|q(\alpha,\mu)| \le \sqrt{q(\alpha,\mu)} \le \sqrt{\frac{a}{\alpha}}\mu$$

Tính chất 3b) được chứng minh giống như trong phần a). Ta đặt hàm số

$$f(\mu) = \mu^\sigma(1-q(\alpha,\mu)) = \mu^\sigma(1-a\mu^2)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 \le \mu \le a$$

Ta tính

$$f'(\mu) = \mu^{\sigma-1}(1-a\mu^2)^{\frac{1}{\alpha-1}}[\sigma(1-a\mu^2)-2a\mu^2]$$

Khi đó $a\mu_{\max}^2 = \dfrac{\alpha\sigma}{2+\alpha\sigma}$ với giá trị $f(\mu_{\max}) \le c_\sigma\alpha^{\sigma/2}$.

(c) Đối với tính chất 2) ta chỉ cần xem xét trường hợp $\mu^2 \ge \alpha$ là đủ. Trong trường hợp này, $q(\alpha,\mu) = 1 \le \dfrac{\mu}{\sqrt{\alpha}}$.

Đối với tính chất 3b) chúng ta chỉ xem xét trường hợp $\mu^2 < \alpha$ và ta có

$$\mu^\sigma(1-q(\alpha,\mu)) = \mu^\sigma \le \alpha^{\sigma/2}$$

Định lý đã được chứng minh. □

Ta sẽ thấy rằng phương pháp chỉnh hóa cho hai sự lựa chọn đầu tiên của q thừa nhận một cái đặc trưng mà không cần kiến thức về hệ kỳ dị. Sự lựa chọn (c) của q được gọi là chặt cụt. Nghiệm chặt cụt $x^{\alpha,\delta} \in X$ do đó được định bởi:

$$x^{\alpha,\delta} = \sum_{\mu_j^2 \ge \alpha} \frac{1}{\mu_j}\left(y^\delta, y_j\right)_Y x_j$$

Đối với nghiệm chặt cụt này, ta kết hợp các ước lượng (2.1.7f), (2.1.7g) với Định lý 2.1.6 và cho thấy kết quả sau.

Định lý 2.1.9. *(a) Cho $K : X \to Y$ là toán tử compact đơn ánh với hệ kỳ dị $\{\mu_j, x_j.y_j\}$. Toán tử*

$$\mathcal{R}_\alpha y := \sum_{\mu_j^2 \ge \alpha} \frac{1}{\mu_j}(y^\delta, y_j)_Y x_j \tag{2.1.9a}$$

định nghĩa một sơ đồ chỉnh hóa với $\|\mathcal{R}_\alpha\|_{L(Y,X)} \le \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Sự lựa chọn tham số $\alpha = \alpha_\delta$ là có thể nếu $\alpha_\delta \to 0$ khi $\delta \to 0$ và $\frac{\delta^2}{\alpha_\delta} \to 0$ khi $\delta \to 0$.

(b) Cho $Kx^* = y^*$ và $y^\delta \in Y$ sao cho $\left\|y^\delta - y^*\right\|_Y \le \delta$. Hơn nữa, $x^* = K^*z \in \mathcal{R}(K^*)$ với $\|y\|_Y \le E$ và $c > 0$. Với sự lựa chọn $\alpha_\delta = \frac{c\delta}{E}$, ta có ước lượng sai số sau đây đối với chỉnh hóa chặt cụt.

$$\|x^{\alpha_\delta,\delta} - x^*\|_X \le \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right)\sqrt{\delta E} \tag{2.1.9b}$$

$$\|Kx^{\alpha_\delta,\delta} - y^*\|_Y \le (1+c)\delta \tag{2.1.9c}$$

(c) Cho $x^* = (K^*K)^{\sigma/2}z \in \mathcal{R}((K^*K)^{\sigma/2})$ đối với $\sigma > 0$ với $\|z\|_X \le E$. Sự lựa chọn $\alpha_\delta = c\delta^{\frac{2}{\sigma+1}}$ dẫn đến ước lượng sau

$$\|x^{\alpha_\delta,\delta} - x^*\|_X \le \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + c^{\sigma/2}\right)\delta^{\frac{\sigma}{\sigma+1}}E^{\frac{1}{\sigma+1}} \tag{2.1.9d}$$

$$\|Kx^{\alpha_\delta,\delta} - y^*\|_Y \le \left(1 + c^{\frac{\delta+1}{2}}\right)\delta \tag{2.1.9e}$$

Vì vậy, việc chỉnh hóa chặt cụt là tối ưu dưới thông tin $\|(K^*)^{-1}x^*\|_Y \leq E$ *hoặc* $\|(K^*K)^{-\sigma/2}x^*\| \leq E$ *nếu* K^* *là đơn ánh.*

Chứng minh. Kết hợp (2.1.7f), (2.1.7g) và phần (c) của Định lý 2.1.8, ta thu được ước lượng sai số

$$\begin{aligned}\|x^{\alpha_\delta,\delta} - x^*\|_X &\leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}\|z\|_Y \\ \|Kx^{\alpha_\delta,\delta} - y^*\|_Y &\leq \delta + \alpha\|z\|_Y\end{aligned}$$

cho phần (b) và

$$\begin{aligned}\|x^{\alpha_\delta,\delta} - x^*\|_X &\leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \alpha^{\sigma/2}\|z\|_X \\ \|Kx^{\alpha_\delta,\delta} - y^*\|_Y &\leq \delta + \alpha^{(\sigma+1)/2}\|z\|_X\end{aligned}$$

cho phần (c).

Sự lựa chọn $\alpha_\delta = \dfrac{c\delta}{E}$ và $\alpha_\delta = c\left(\dfrac{\varepsilon}{E}\right)^{\frac{2}{\sigma+1}}$ dẫn đến các ước lượng (2.1.9b), (2.1.9c), (2.1.9d) và (2.1.9e). ☐

3.2 Mục 2.2: Chỉnh hóa Tikhonov

Thoạt tiên, người ta nghĩ đến việc cực tiểu hóa sai số $\|Fx - y\|$ với $x \in X$, nhưng với trường hợp X vô hạn chiều thì bài toán cực tiểu hóa này cũng không đặt chỉnh. Cụ thể như sau:

Mệnh đề 2.2.1. *Cho X, Y là hai không gian Hilbert và $F : X \to Y$ là một toán tử tuyến tính liên tục. Khi đó cực tiểu của phiếm hàm $\|Fx - y\|$ cũng là nghiệm của phương trình $F^*Fx = F^*y$ và ngược lại.*

Tikhonov đã thay việc cực tiểu hóa $\|Fx - y\|$ bằng việc cực tiểu hóa một phiếm hàm khác.

Định nghĩa 2.2.2. *Phiếm hàm Tikhonov $J_\alpha(x)$ với $\alpha > 0$ được định nghĩa như sau:*

$$J_\alpha(x) := \|Fx - y\|^2 + \alpha\|x\|^2, \quad x \in X \tag{1}$$

Bài toán cực tiểu hóa phiếm hàm này luôn có nghiệm, và hơn nữa nghiệm của nó lại là nghiệm của phương trình chỉnh.

Định lý 2.2.3. *Phiếm hàm Tikhonov $J_\alpha(x)$ trên không gian Hilbert X có duy nhất một cực tiểu $x_\alpha \in X$, và nó cũng là nghiệm duy nhất của phương trình chỉnh:*

$$\alpha x + F^*Fx = F^*y \tag{2}$$

Chứng minh. i) Trước tiên ta chứng minh (2) là một phương trình chỉnh.

Xét ánh xạ:

$$\begin{aligned} a : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, z) &\mapsto \alpha\langle x, z\rangle + \langle Fx, Fz\rangle \end{aligned}$$

• Dễ thấy được a song tuyến tính.

• a là ánh xạ liên tục, do:

$$\begin{aligned}|a(x,z)| &\leq \alpha\|\langle x, z\rangle\| + \|\langle Fx, Fz\rangle\| \\ &\leq \alpha\|x\|\|z\| + \|Fx\|\|Fz\| \\ &\leq \left(\alpha + \|F\|^2\right)\|x\|\|z\|\end{aligned}$$

• a cưỡng bức, do:

$$a(x,x) = \alpha\|x\|^2 + \|Fx\|^2 \geq \alpha\|x\|^2$$

• Xét phiếm hàm:

$$\begin{aligned} \lambda : X &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \lambda z := \langle F^* y, z \rangle \end{aligned}$$

Dễ thấy λ tuyến tính liên tục.

Từ bốn kết quả trên, áp dụng định lý Lax - Milgram thì $\exists! x_\alpha \in X : a(x_\alpha, z) = \lambda z$ với $z \in X$. Suy ra:

$$\begin{gathered} \alpha\langle x_\alpha, z\rangle + \langle F x_\alpha, F z\rangle = \langle F^* y, z\rangle,\ \forall z \in X \\ \langle \alpha x_\alpha + F^* F x_\alpha, z\rangle = \langle F^* y, z\rangle,\ \forall z \in X \\ \alpha x_\alpha + F^* F x_\alpha = F^* y \end{gathered}$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm.

(ii) Nghiệm của (2) là duy nhất vì:

$$\alpha x + F^* F x = 0 \Rightarrow \langle \alpha x + F^* F x, x\rangle = 0 \Rightarrow \alpha\|x\|^2 + \|Fx\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

(iii) Để kiểm tra tính ổn định của phương trình, xét dãy $(x_n) \subset X$ thỏa $y_n = (\alpha I + F^* F)x_n \to 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} &\langle y_n, x_n\rangle = \alpha\|x_n\|^2 + \|F x_n\|^2 \le \|y_n\|\|x_n\| \\ &\Rightarrow \alpha\|x_n\| \le \|y_n\| \\ &\Rightarrow x_n \to 0 \end{aligned}$$

(iv) Cuối cùng, ta chứng minh cực tiểu của (1) cũng là nghiệm của (2) và ngược lại.

• Xét

$$J_\alpha(x) - J_\alpha(x_\alpha) = \|Fx - y\|^2 - \|F x_\alpha - y\|^2 + \alpha\left(\|x\|^2 - \|x_\alpha\|^2\right).$$

Áp dụng công thức $\|u\|^2 - \|v\|^2 = \|u - v\|^2 + 2\langle v, u - v\rangle$, ta có:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) - J_\alpha(x_\alpha) &= \|F(x - x_\alpha)\|^2 + 2\langle F x_\alpha - y, F(x - x_\alpha)\rangle + \alpha\|x - x_\alpha\|^2 + 2\alpha\langle x_\alpha, x - x_\alpha\rangle \\ &= \|F(x - x_\alpha)\|^2 + \alpha\|x - x_\alpha\|^2 + 2\underbrace{\langle F^* F x_\alpha - F^* y + \alpha x_\alpha, x - x_\alpha\rangle}_{=0 \text{ (do } x_\alpha \text{ là nghiệm của (2))}} \end{aligned} \tag{3}$$

dẫn đến $J_\alpha(x) - J_\alpha(x_\alpha) = \|F(x - x_\alpha)\|^2 + \alpha\|x - x_\alpha\|^2 \ge 0$, do đó x_α là cực tiểu của (1).

• Ngược lại, nếu x_α là cực tiểu của (1), áp dụng (3) với $x = x_\alpha + tz,\ t > 0$ thì ta có:

$$t^2\|Fz\|^2 + 2t\langle F^* F x_\alpha - F^* y + \alpha x_\alpha, z\rangle + \alpha t^2\|z\|^2 \ge 0$$

Đơn giản hai vế cho t rồi cho $t \to 0$, ta được:

$$\langle F^* F x_\alpha - F^* y + \alpha x_\alpha, z\rangle \ge 0, \quad \forall z \in X,$$

tức x_α là nghiệm của (2). Ta có điều phải chứng minh. □

Từ đây, gọi x_α^δ là nghiệm của phương trình:

$$\alpha x + F^* F x = F^* y^\delta$$

Phép chỉnh hóa trong trường hợp tuyến tính sẽ lấy x_α^δ làm một xấp xỉ cho nghiệm chính xác x^* của phương trình $Fx = y$ ứng với sai số trên dữ kiện là δ, nghĩa là $\|y^\delta - y\| \le \delta$.

Trước tiên ta sẽ đánh giá sai số trong trường hợp tuyến tính compact. Giả sử $F : X \to Y$ là toán tử tuyến tính compact 1-1 giữa hai không gian Hilbert vô hạn chiều. Gọi (μ_j, x_j, y_j) là hệ kỳ dị của F. Đặt:

$$R_\alpha := (\alpha I + F^* F)^{-1} F^*$$

Do phần chứng minh của Định lý 2.2.3, R_α tuyến tính liên tục.

Mệnh đề 2.2.4. *R_α là sơ đồ chỉnh hóa với:*

$$a)\ R_\alpha y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} \langle x_j, y_j \rangle x_j, \quad \forall y \in Y \tag{4}$$

$$b)\ \|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \tag{5}$$

Chứng minh. a) Do (μ_j, x_j, y_j) là hệ kỳ dị và F là 1-1 nên $\{x_j\}$ là một hệ đầy đủ, tức là

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j, \quad \forall x \in X$$

Xét $y \in Y$ và đặt $z = R_\alpha y$, ta có:

$$(\alpha I + F^* F)^{-1} F^* y = z \ \text{ hay } \ (\alpha I + F^* F) z = F^* y$$

Mà:

$$F^* y = \sum_{j=1}^{\infty} \langle F^* y, x_j \rangle x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle y, F x_j \rangle x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle y, y_j \rangle x_j$$

và

$$\begin{aligned}
(\alpha I + F^* F) z &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \alpha I + F^* F z, x_j \rangle x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} [\alpha \langle z, x_j \rangle + \langle F^* F z, x_j \rangle] x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} [\alpha \langle z, x_j \rangle + \langle z, F^* F x_j \rangle] x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha + \mu_j^2\right) \langle z, x_j \rangle x_j
\end{aligned}$$

Từ đó: $\left(\alpha + \mu_j^2\right) \langle z, x_j \rangle = \mu_j \langle y, y_j \rangle$. Vậy:

$$R_\alpha y = z = \sum_{j=1}^{\infty} \langle z, x_j \rangle x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} \langle y, y_j \rangle x_j$$

b) Do a) nên $\|R_\alpha y\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j^2}{\left(\alpha + \mu_j^2\right)^2} |\langle y, y_j \rangle|^2$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy: $\dfrac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ (6)

Dẫn đến $\|R_\alpha y\|^2 \leq \dfrac{1}{4\alpha} \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |\langle y, y_j \rangle|^2 \leq \dfrac{1}{4\alpha} \|y\|^2 \ \Rightarrow \ \|R_\alpha\| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ □

Định lý 2.2.5. *Nếu $x^* = F^* z \in F^*(Y)$ với $\|z\| \leq E$ thì khi chọn $\alpha(\delta) = \dfrac{c\delta}{E}$ $(c > 0)$, ta sẽ có:*

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\| \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)\sqrt{\delta E} \tag{7}$$

Chứng minh. Ta có $x^* = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \langle x^*, x_j \rangle x_j$. Từ Mệnh đề 2.2.4:

$$R_\alpha F x^* = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} \langle F x^*, y_j \rangle x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j^2}{\alpha + \mu_j^2} \langle x^*, x_j \rangle x_j$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\|R_\alpha F x^* - x^*\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\left(\alpha+\mu_j^2\right)^2} |\langle x^*, x_j\rangle|^2 \quad (8)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\left(\alpha+\mu_j^2\right)^2} |\langle F^* z, x_j\rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^2\mu_j^2}{\left(\alpha+\mu_j^2\right)^2} |\langle z, y_j\rangle|^2 \le \frac{\alpha}{4}\|z\|^2 \quad [\text{do } (6)]\end{aligned}$$

dẫn đến $\|R_\alpha F x^* - x^*\| \le \dfrac{\sqrt{\alpha}}{2} E \quad (9)$

Như vậy:

$$\begin{aligned}\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\| &\le \left\|R_\alpha y^\delta - R_\alpha F x^*\right\| + \|R_\alpha F x^* - x^*\| \\ &\le \|R_\alpha\| \left\|y - y^\delta\right\| + \|R_\alpha F x^* - x^*\| \\ &\le \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} E \quad [\text{do } (5) \text{ và } (9)]\end{aligned}$$

Thay $\alpha = \dfrac{c\delta}{E}$, ta có đpcm. □

Định lý 2.2.6. *Nếu $x^* = F^* F z \in F^* F(X)$ với $\|z\| \le E$ thì khi chọn $\alpha(\delta) = c\left(\dfrac{\delta}{E}\right)^{2/3}$ $(c > 0)$, ta có:*

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\| \le \left(c + \frac{1}{2\sqrt{c}}\right) E^{1/3}\delta^{2/3} \tag{10}$$

Chứng minh. Do (8), ta có:

$$\|R_\alpha F x^* - x^*\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\left(\alpha+\mu_j^2\right)^2} |\langle F^* F z, x_j\rangle|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^2\mu_j^4}{\left(\alpha+\mu_j^2\right)^2} |\langle z, x_j\rangle|^2 \le \alpha^2\|z\|^2,$$

dẫn đến $\|R_\alpha F x^* - x^*\| \le \alpha E$. Do vậy:

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\| \le \|R_\alpha\| \left\|y^\delta - y\right\| + \|R_\alpha F x^* - x^*\| \le \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\delta + \alpha E$$

Thay $\alpha(\delta) = c\left(\dfrac{\delta}{E}\right)^{2/3}$, ta có đpcm. □

Điều đáng ngạc nhiên là bậc hội tụ của phép chỉnh hóa Tikhonov không thể cao hơn được nữa.

Mệnh đề 2.2.7. *Cho $F : X \to Y$ là toán tử tuyến tính compact 1-1 sao cho miền xác định của F là vô hạn chiều. Xét $x \in Y$, nếu tồn tại hàm $\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ liên tục thỏa:*

- $\alpha(0) = 0$
- $\lim\limits_{\delta\to 0} \left\|\alpha_{\alpha(\delta)}^\delta - x\right\| \delta^{2/3} = 0, \quad \forall y^\delta \in B(y, \delta)$

thì khi đó $x = 0$.

Bây giờ ta sẽ đánh giá sai số của phép chỉnh hóa Tikhonov trong trường hợp F tuyến tính liên tục. Ta thu được kết quả tương tự Định lý 2.2.5 và 2.2.6.

Định lý 2.2.8. *Nếu $x^* = F^* z \in F^*(Y)$ với $\|z\| \le E$ thì:*

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\| \le \frac{\alpha E + \delta}{\sqrt{\alpha}} \tag{11}$$

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{gathered}\alpha x_\alpha^\delta + F^*Fx_\alpha^\delta = F^*y^\delta \\ \alpha x^* + F^*Fx^* = F^*y + \alpha x^*\end{gathered}$$

Suy ra: $\alpha\left(x_\alpha^\delta - x^*\right) + F^*F\left(x_\alpha^\delta - x^*\right) = -\alpha x^* + F^*\left(y^\delta y\right)$

Nhân vô hướng hai vế của đẳng thức trên cho $x_\alpha^\delta - x^*$, ta được:

$$\begin{aligned}\alpha\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 + \left\|F\left(x_\alpha^\delta - x^*\right)\right\|^2 &= -\alpha\left\langle F^*z,\ x_\alpha^\delta - x^*\right\rangle + \left\langle y^\delta - y,\ F\left(x_\alpha^\delta - x^*\right)\right\rangle \\ &= -\alpha\left\langle z,\ F\left(x_\alpha^\delta - x^*\right)\right\rangle + \left\langle y^\delta - y,\ F\left(x_\alpha^\delta - x^*\right)\right\rangle \\ &\le \alpha E\left\|F\left(x_\alpha^\delta - x^*\right)\right\| + \delta\left\|F\left(x_\alpha^\delta - x^*\right)\right\| \\ &= (\alpha E + \delta)\left\|F\left(x_\alpha^\delta - x^*\right)\right\|\end{aligned} \tag{12}$$

Bỏ số hạng đầu trong vế trái của (12), ta được:

$$\left\|F\left(x_\alpha^\delta - x^*\right)\right\| \le \alpha E + \delta \tag{13}$$

Từ (12) và (13), suy ra: $\alpha\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \le (\alpha E + \delta)^2$, nghĩa là:

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\| \le \frac{\alpha E + \delta}{\sqrt{\alpha}} \quad \square$$

<u>Ghi chú:</u> Nếu ta chọn $\alpha = \delta$ thì:

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\| = \mathcal{O}(\sqrt{\delta})$$

Định lý 2.2.9. *Nếu* $x^* = F^*Fz \in F^*F(X)$ *với* $\|z\| \le E$ *thì:*

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\| \le \frac{\delta + \alpha^{3/2}E}{\sqrt{\alpha}} \tag{14}$$

Chứng minh. Do x_α^δ là cực tiểu của $J_\alpha(x)$ nên:

$$J_\alpha\left(x_\alpha^\delta\right) \le J_\alpha(x^* - \alpha z),$$

nghĩa là:

$$\begin{aligned}&\left\|Fx_\alpha^\delta - y^\delta\right\|^2 + \alpha\left\|x_\alpha^\delta\right\|^2 \le \left\|F(x^* - \alpha z) - y^\delta\right\|^2 + \alpha\|x^* - \alpha z\|^2 \\ &\left\|Fx_\alpha^\delta - y^\delta + \alpha Fz - \alpha Fz\right\|^2 + \alpha\left\|x_\alpha^\delta - x^* + x^*\right\|^2 \le \left\|y - y^\delta - \alpha Fz\right\|^2 + \alpha\|x^* - \alpha z\|^2\end{aligned}$$

Khai triển cả bốn số hạng trong bất đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned}&\left\|Fx_\alpha^\delta - y^\delta + \alpha Fz\right\|^2 - 2\left\langle Fx_\alpha^\delta - y^\delta + \alpha Fz, \alpha Fz\right\rangle + \alpha\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 + 2\alpha\left\langle x_\alpha^\delta - x^*, x^*\right\rangle \\ &\le \left\|y - y^\delta\right\|^2 - 2\left\langle y - y^\delta, \alpha Fz\right\rangle + \alpha\|\alpha z\|^2 - 2\alpha\langle\alpha z, x^*\rangle\end{aligned}$$

Thay $x^* = F^*Fz$ ở số hạng thứ tư của hai vế và sắp xếp lại:

$$\begin{aligned}&\left\|Fx_\alpha^\delta - y^\delta + \alpha Fz\right\|^2 + \alpha\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \\ &\le \left\|y - y^\delta\right\|^2 + \alpha\|\alpha z\|^2 + 2\left\langle Fx_\alpha^\delta - y^\delta, \alpha Fz\right\rangle - 2\alpha\left\langle Fx_\alpha^\delta - y, Fz\right\rangle - 2\left\langle y - y^\delta, \alpha Fz\right\rangle \\ &= \left\|y - y^\delta\right\|^2 + \alpha\|\alpha z\|^2 + 2\alpha\underbrace{\left\langle Fx_\alpha^\delta - y^\delta - Fx_\alpha^\delta + y - y + y^\delta, Fz\right\rangle}_{=0}\end{aligned} \tag{15}$$

Bỏ số hạng đầu trong vế trái của (15), ta được:

$$\alpha\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \le \delta^2 + \alpha^3E^2$$

Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} \le a + b$ $(a, b > 0)$, ta có:

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \le \sqrt{\frac{\delta^2 + \alpha^3E^2}{\sqrt{\alpha}}} \le \frac{\delta + \alpha^{3/2}E}{\sqrt{\alpha}} \quad \square$$

<u>Ghi chú:</u> Nếu ta chọn $\alpha = \delta^{2/3}$ thì:

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\| = \mathcal{O}\left(\delta^{2/3}\right)$$

3.3 Mục 2.3: Phép lặp Landweber

3.3.1 Ý tưởng

Bước 1: Áp dụng thuật toán steepest descent cho hàm $x \mapsto \|Kx - y\|_Y^2$ để tìm nghiệm gần đúng của bài toán $Kx = y$ ứng với dữ liệu chính xác. Nghiệm đó được xác định bởi vòng lặp:

$$\begin{cases} x^0 := 0, \\ x^m := (I - aK^*K)x^{m-1} + aK^*y \end{cases} \tag{3.1.1a}$$

với $m = 1, 2, \ldots$

Bước 2: Từ vòng lặp trên, ta sẽ tìm công thức tổng quát cho nghiệm gần đúng.

$$x^m = R_m y = a \sum_{k=0}^{m-1} (I - aK^*K)^k K^* y,$$

với $m = 1, 2, \ldots$

Để thuận tiện cho việc kiểm tra sự hội tụ của nghiệm gần đúng x^m về nghiệm chính xác x khi $m \to \infty$ cũng như việc chọn m thích hợp và đánh giá sai số, ta viết lại $R_m y$ theo hệ kỳ dị $\{\mu_j, x_j, y_j\}$ của K:

$$R_m y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \left[1 - (1 - a\mu_j^2)^m\right] \langle y, y_j \rangle_Y x_j$$

Bước 3: Ta chứng minh với $0 < a < \dfrac{1}{\|K\|^2}$ thì R_m là toán tử tuyến tính bị chặn ($\|R_m\| \le \sqrt{ma}$) và

$$\lim_{m\to\infty} \|R_m y - x\| = 0.$$

Khi đó, đặt $x^{m,\delta} = R_m y^\delta$ là nghiệm chỉnh hoá của bài toán ứng với dữ liệu nhiễu y^δ, thì:

$$\left\|x^{m,\delta} - x\right\| = \left\|R_m y^\delta - x\right\| \le \left\|R_m y^\delta - R_m y\right\| + \|R_m y - x\| \le \delta\sqrt{ma} + \|R_m y - x\|.$$

Vậy nếu chọn $m(\delta)$ sao cho $m(\delta) \to \infty$ khi $\delta \to 0$ và $\delta\sqrt{m(\delta)a} \to 0$ khi $\delta \to 0$ thì $\left\|x^{m,\delta} - x\right\| \to 0$ khi $\delta \to 0$, tức là bài toán đã được chỉnh hoá và nghiệm chỉnh hoá là $x^{m(\delta),\delta}$.

Cụ thể trong giáo trình, tác giả trình bày cách chọn và đánh giá sai số của nghiệm chỉnh hoá trong trường hợp $x = K^*z$ với $\|z\| \le E$ và $x = K^*Kz$. Ngoài ra, tác giả cũng chỉ ra nguyên tắc dừng của vòng lặp Landweber trong trường hợp K là toán tử tuyến tính, compact, đơn ánh, $\overline{K(X)} = Y$ và $\left\|y^\delta\right\| \ge r^\delta$ $(r > 1)$, $\forall \delta \in (0, \delta_0)$.

Tóm lại, để tìm nghiệm chỉnh hoá của phương trình $Kx = y$ trong đó K là toán tử tuyến tính compact đơn ánh, $\overline{K(X)} = Y$ và $\left\|y^\delta\right\| \ge r^\delta$ $(r > 1)$, $\forall \delta \in (0, \delta_0)$ thì ta cho chạy vòng lặp

$$\begin{cases} x^{0,\delta} := 0, \\ x^{m,\delta} := (I - aK^*K)^{m-1} x^{m-1,\delta} + aK^*y^\delta, \end{cases}$$

với $m = 1, 2, \ldots$ cho đến khi $\left\|Kx^{m,\delta} - y^\delta\right\| \le r^\delta$ thì xuất ra nghiệm $x^{m,\delta}$.

3.3.2 Nghiệm gần đúng của bài toán

Để tìm nghiệm gần đúng của bài toán, ta thực hiện phép lặp cho phương trình sau đây:

$$\begin{cases} x^0 := 0, \\ x^m := (I - aK^*K)x^{m-1} + aK^*y \end{cases} \tag{3.3.2.1}$$

với $m = 1, 2, \ldots$

Sơ đồ này có thể giải thích như ứng dụng của thuật toán steepest descent cho hàm $x \mapsto \|Kx - y\|_Y^2$ như trong bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.3.2.1. *Cho dãy (x^m) được xác định bởi (3.3.2.1) và định nghĩa hàm $\psi : X \to \mathbb{R}$ bởi*

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left\|Kx - y\right\|_Y^2, \ x \in X$$

Khi đó, ψ khả vi Fréchet với mọi $z \in X$ và

$$\psi'(z)x = Re\left\langle Kz - y, Kx\right\rangle_Y = Re\left\langle K^*(Kz-y), x\right\rangle_X, \quad x \in X. \tag{3.3.2.2}$$

Hàm tuyến tính $\psi'(z)$ có thể đồng nhất với $K^*(Kz-y) \in X$ trong không gian Hilbert X thực. Do đó,

$$x^m = x^{m-1} - aK^*(Kx^{m-1} - y)$$

là các bước của thuật toán steepest descent với bước nhảy là a.

Chứng minh. Trước hết với mọi $z \in X$, ta có:

$$\begin{aligned}\psi(z+x) - \psi(z) &= \frac{1}{2}\left\|K(z+x) - y\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|Kz - y\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\|Kz - y\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|Kx\right\|^2 + \mathrm{Re}\left\langle Kz-y, Kx\right\rangle_Y - \frac{1}{2}\left\|Kz-y\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\|Kx\right\|^2 + \mathrm{Re}\left\langle Kz-y, Kx\right\rangle_Y.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\left|\psi(z+x) - \psi(z) - \mathrm{Re}\left\langle Kz-y, Kx\right\rangle_Y\right| = \frac{1}{2}\left\|Kx\right\|^2 \le \frac{1}{2}\left\|K\right\|^2\left\|x\right\|^2.$$

Do đó, theo định lý kẹp ta được:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|\psi(z+x) - \psi(z) - \mathrm{Re}\left\langle Kz-y, Kx\right\rangle_Y\right|}{\left\|x\right\|} = 0.$$

Vậy ψ khả vi Fréchet với mọi $z \in X$.

Ngoài ra, ánh xạ $A(z) : X \to \mathbb{R}$ với $A(z)x = \mathrm{Re}\left\langle Kz-y, Kx\right\rangle_Y = \mathrm{Re}\left\langle K^*(Kz-y), x\right\rangle_X$ là tuyến tính bị chặn, vì với $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. Ta thấy $A(z)x$ là tuyến tính.

2. Ta cần chứng minh tính bị chặn. Thật vậy,

$$\left|A(z)x\right| = \left|\mathrm{Re}\left\langle K^*(Kz-y), x\right\rangle_X\right| \le \left|\left\langle K^*(Kz-y), x\right\rangle_X\right| \le \left\|K^*(Kz-y)\right\|\left\|x\right\|, \quad \forall x \in X.$$

Suy ra $\|Az\| \le \|K^*(Kz-y)\|\,\|x\| < \infty$. Khi đó:

$$\psi'(z)x = A(z)x = \mathrm{Re}\left\langle K^*(Kz-y), x\right\rangle_X, \quad x \in X.$$

Kết thúc chứng minh. □

3.3.3 Sơ đồ chỉnh hóa

Bổ đề 3.3.3.1. *Từ (3.3.2.1), ta được*

$$x^m = R_m y = a\sum_{k=0}^{m-1}(I - aK^*K)^k K^* y, \tag{3.3.3.1}$$

với $m = 1, 2, \ldots$

Chứng minh. Theo phương pháp quy nạp, với $m = 1$ thì:

$$x^1 = R_1 y = a(I - aK^*K)^0 K^* y.$$

Bây giờ, ta giả sử nó đúng với $m \in \mathbb{N}$. Ta cần chứng minh $m+1$ cũng đúng. Thật vậy,

$$\begin{aligned}
x^{m+1} &= (I - aK^*K)x^m + aK^*y \\
&= (I - aK^*K)\left[a\sum_{k=0}^{m-1}(I - aK^*K)^k K^*y\right] + aK^*y \\
&= a\sum_{k=0}^{m-1}(I - aK^*K)^{k+1}K^*y + a(I - aK^*K)^0 K^*y \\
&= a\sum_{k=0}^{m}(I - aK^*K)^k K^*y.
\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Mặt khác, cho $\{\mu_j, x_j, y_j\}$ là hệ kỳ dị của K. Ta có

$$\begin{aligned}
x^m &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle x^m, x_j\rangle x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle a\sum_{k=0}^{m-1}(I - aK^*K)^k K^*y, x_j\right\rangle x_j \\
&= a\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j \sum_{k=0}^{m-1}\left\langle (I - aK^*K)^k y, Kx_j\right\rangle x_j \\
&= a\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j \sum_{k=0}^{m-1}\left\langle (I - aK^*K)^k y, y_j\right\rangle x_j.
\end{aligned}$$

Vì μ_j^2 là trị riêng của K^*K nên $(1 - a\mu_j^2)^k$ là trị riêng của $(I - aK^*K)^k$. Suy ra

$$(I - a\mu_j^2)^k y = (I - aK^*Ky)^k y.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
x^m &= a\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j \sum_{k=0}^{m-1}\left\langle (1 - a\mu_j^2)^k y, y_j\right\rangle x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1} a\mu_j(1 - a\mu_j^2)^k \langle y, y_j\rangle x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} a\mu_j \frac{1 - (1 - a\mu_j^2)^m}{1 - (1 - a\mu_j^2)} \langle y, y_j\rangle x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j}\left[1 - (1 - a\mu_j^2)^m\right] \langle y, y_j\rangle x_j.
\end{aligned}$$

Khi đó,

$$R_m y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j}\left[1 - (1 - a\mu_j^2)^m\right] \langle y, y_j\rangle x_j, \tag{3.3.3.2}$$

trong đó $R_m : Y \to X$.

Định lý 3.3.3.2. *Cho $K : X \to Y$ là toán tử compact và $0 < a < \frac{1}{\|K\|^2}$. Khi đó, toán tử tuyến tính bị chặn $R_m : Y \to X$ với $R_m y$ xác định bởi (3.3.3.2) là sơ đồ chỉnh hoá với tham số chỉnh hoá rời rạc $\alpha = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}$ và $\|R_m\| \leq \sqrt{am}$. Dãy $x^{m,\delta} = R_m y^\delta$ tính như sau*

$$\begin{cases}
x^{0,\delta} := 0, \\
x^{m,\delta} := (I - aK^*K)^{m-1}x^{m-1,\delta} + aK^*y^\delta,
\end{cases}$$

với $m = 1, 2, \ldots$ Ngoài ra, với mỗi cách chọn $m = m(\delta)$ sao cho $m(\delta) \to \infty$ và $\delta^2 m(\delta) \to 0$ khi $\delta \to 0$ là cách chọn chấp nhận được.

Chứng minh. Ta thấy rằng R_m là tuyến tính, ta cần chứng minh R_m bị chặn. Với mọi $y \in Y$, ta có

$$\|R_m y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2} \left[1 - (1 - a\mu_j^2)^m\right]^2 |\langle y, y_j \rangle|^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$1 - (1 - a\mu_j^2)^m \le 1 - (1 - ma\mu_j^2) = ma\mu_j^2.$$

Vì $0 \le 1 - (1 - a\mu_j^2)^m \le 1$ nên

$$\left[1 - (1 - a\mu_j^2)^m\right]^2 \le mau_j^2.$$

Do đó,

$$\|R_m y\|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} ma|\langle y, y_j t\rangle|^2 = ma\,\|y\|^2.$$

Suy ra

$$\|R_m\| \le \sqrt{ma}.$$

Vậy R_m bị chặn.

Ta tiếp tục chứng minh $R_m Kx \to x$ khi $m \to \infty$. Ta có

$$\begin{aligned}
R_m Kx &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \left[1 - (1 - a\mu_j^2)^m\right] \langle Kx, y_j \rangle x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \left[1 - (1 - a\mu_j^2)^m\right] \langle x, K^* y_j \rangle x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \left[1 - (1 - a\mu_j^2)^m\right] \mu_j \langle x, x_j \rangle x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left[1 - (1 - a\mu_j^2)^m\right] \langle x, x_j \rangle x_j
\end{aligned}$$

và vì $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j$, suy ra

$$\|R_m Kx - x\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} (1 - a\mu_j^2)^m \langle x, x_j \rangle x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - a\mu_j^2)^{2m} |\langle x, x_j \rangle|^2$$

Ta có $\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, x_j \rangle|^2 < \infty$, do đó

$$\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \sum_{j=N+1}^{\infty} |\langle x, x_j \rangle|^2 < \frac{\varepsilon^2}{\|x\|^2 + 1}.$$

Mặt khác, với mỗi $j = \overline{1, N} : 0 \le 1 - a\mu_j^2 < 1$ thì $\lim_{m \to \infty} (1 - a\mu_j^2)^{2m} = 0$.

Do đó, tồn tại $m_j > 0$ sao cho

$$(1 - a\mu_j^2)^{2m} < \frac{\varepsilon^2}{\|x\|^2 + 1}, \quad \forall m > m_j$$

Chọn $m_0 = \max\left\{m_j,\ j = \overline{1, N}\right\}$ thì

$$(1 - a\mu_j^2)^{2m} < \frac{\varepsilon^2}{\|x\|^2 + 1}, \quad \forall m > m_0$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
\|R_mKx - x\|^2 &= \sum_{j=1}^{N}(1-a\mu_j^2)^{2m}\left|\langle x, x_j\rangle\right|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty}(1-a\mu_j^2)^{2m}\left|\langle x, x_j\rangle\right|^2 \\
&\le \frac{\varepsilon^2}{\|x\|^2+1}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\langle x, x_j\rangle\right|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty}\left|\langle x, x_j\rangle\right|^2 \\
&\le \frac{\varepsilon^2}{\|x\|^2+1}\|x\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{\|x\|^2+1} = \varepsilon^2
\end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{m\to\infty} R_mKx = x,\ \forall x \in X$. Điều phải chứng minh.

Vậy $R_m : Y \mapsto X$ là sơ đồ chỉnh hoá với $\|R_m\| \le \sqrt{ma}$ và tham số chỉnh hoá rời rạc $\alpha = \dfrac{1}{m}, m \in \mathbb{N}$.

Lại có,

$$\left\|x^{m,\delta} - x\right\| = \left\|R_my^\delta - x\right\| \le \|R_m\|\left\|y^\delta - Kx\right\| + \|R_mKx - x\| \le \delta\sqrt{am} + \|R_mKx - x\|$$

Khi $m \to \infty$ thì $\|R_mKx - x\| \to 0$, nhưng $\delta\sqrt{am} \to \infty$. Do đó, ta chọn $m = m(\delta)$ sao cho $m(\delta) \to \infty$ nhưng $\delta^2 m(\delta) \to 0$ khi $\delta \to 0$. Khi đó, ta mới có $\le \delta\sqrt{am} + \|R_mKx - x\| \to 0$ khi $\delta \to 0$. Điều phải chứng minh. □

3.3.4 Đánh giá về sai số

Định lý 3.3.4.1. *Cho $K : X \to Y$ là toán tử compact, đơn ánh và $0 < a < \dfrac{1}{\|K\|^2}$.*

(i) Nếu $x = K^*z \in K^*(Y)$, $\|z\| \le E$ và $0 < c_1 < c_2$ thì với mỗi cách chọn $m(\delta)$ sao cho $c_1\frac{E}{\delta} \le m(\delta) \le c_2\frac{E}{\delta}$ thì ta có được đánh giá

$$\left\|x^{m(\delta),\delta}\right\| \le c_3\sqrt{\delta E},$$
$$\left\|Kx^{m(\delta),\delta}\right\| \le \left(1 + \frac{1}{ac_1}\right)\delta,$$

trong đó, c_3 phụ thuộc vào c_1, c_2 và a. Bởi vậy, phương pháp lặp Landweder là tối ưu với thông tin thêm vào $\left\|(K^*)^{-1}x\right\| \le E$.

(ii) Nếu $x = K^*Kz \in K^*K(X)$, $\|z\| \le E$ và $0 < c_1 < c_2$ thì với mỗi cách chọn $m(\delta)$ sao cho $c_1\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} \le m(\delta) \le c_2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}$, ta có được đánh giá

$$\left\|x^{m(\delta),\delta}\right\| \le c_3E^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}},$$
$$\left\|Kx^{m(\delta),\delta}\right\| \le c_3\delta,$$

trong đó c_3 phụ thuộc vào c_1, c_2 và a. Bởi vậy, phương pháp lặp Landweder cũng là tối ưu với thông tin thêm vào $\left\|(K^*K^{-1})x\right\| \le E$.

Chứng minh. (i) Cho $x = K^*z \in K^*(Y)$, $\|z\| \le E$ thì

$$\begin{aligned}
\|R_mKx - x\|^2 &= \left\|\sum_{j=1}^{\infty}(1-a\mu_j^2)^m\langle x, x_j\rangle x_j\right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}(1-a\mu_j^2)^{2m}\left|\langle x, x_j\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}(1-a\mu_j^2)^{2m}\left|\langle K^*z, x_j\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}(1-a\mu_j^2)^{2m}\mu_j^2\left|\langle z, y_j\rangle\right|^2.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\|R_mKx - x\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu_j\sqrt{2am}}\right)^2 \mu_j^2 \left|\langle z, y_j\rangle\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2am}\left|\langle z, y_j\rangle\right|^2 = E^2\frac{1}{2am}.$$

Khi đó, với cách chọn $m(\delta)$ như trong giả thiết thì

$$\begin{aligned}\left\|x^{m(\delta),\delta} - x\right\| &\leq \delta\sqrt{am(\delta)} + \frac{E}{\sqrt{2am(\delta)}}\\ &\leq \delta\sqrt{ac_2\frac{E}{\delta}} + \frac{E}{\sqrt{2ac_1\frac{E}{\delta}}}\\ &\leq c_3\sqrt{E\delta},\end{aligned}$$

trong đó $c_3 = \sqrt{ac_2} + \dfrac{1}{\sqrt{2ac_1}}$.

Tiếp theo, xét:

$$\begin{aligned}\left\|Kx^{m(\delta),\delta} - y^*\right\| &\leq \left\|Kx^{m(\delta),\delta} - KR_mKx\right\| + \|KR_mKx - Kx^*\|\\ &= \|KR_m\|\left\|y^\delta - y\right\| + \|KR_mKx - Kx^*\|\\ &\leq \delta\end{aligned}$$

(ii) Cho $x = K^*Kz \in K^*K(X)$, $\|z\| \leq E$ thì

$$\begin{aligned}\|R_mKx - x\|^2 &= \left\|\sum_{j=1}^{\infty}(1 - a\mu_j^2)^m\langle x, x_j\rangle x_j\right\|^2\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(1 - a\mu_j^2)^{2m}\left|\langle x, x_j\rangle\right|^2\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(1 - a\mu_j^2)^{2m}\left|\langle K^*Kz, x_j\rangle\right|^2\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(1 - a\mu_j^2)^{2m}\mu_j^4\left|\langle z, x_j\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\|R_mKx - x\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_j^4a^2m^2}\mu_j^4\left|\langle z, x_j\rangle\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a^2m^2}\left|\langle z, x_j\rangle\right|^2 = \frac{E^2}{a^2m^2}.$$

Khi đó, với mỗi cách chọn $m(\delta)$ như giả thiết thì

$$\begin{aligned}\left\|x^{m(\delta),\delta} - x\right\| &\leq \delta\sqrt{am(\delta)} + \frac{E}{am}\\ &\leq \delta\sqrt{ac_2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{E}{2ac_1\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}}\\ &\leq c_3E^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}},\end{aligned}$$

trong đó $c_3 = \sqrt{ac_2} + \dfrac{1}{ac_1}$.

Kết thúc chứng minh. □

3.4 Mục 2.4: Ví dụ với số cụ thể

Ở mục này, ta minh họa phương pháp chỉnh hóa Tikhonov và Landweber cho phương trình vi tích phân loại I dưới đây:

$$\int_0^1(1 + ts)e^{ts}x(s)\mathrm{d}s = e^t,\ 0 \leq t \leq 1$$

Phương trình này có nghiệm duy nhất là $x^*(t) = 1$ (xem Bài tập 2.1, trang 60 trong giáo trình). Toán tử $K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ được định nghĩa:

$$(Kx)(t) = \int_0^1 (1+ts)e^{ts}x(s)\mathrm{d}s$$

và nó tự liên hợp, tức là $K^* = K$. Ta chú ý rằng x^* không nằm trong tập xác định của K (Bài tập 2.1). Về việc giải số của Kx, ta sử dụng Quy tắc Simpson. Với $t_i = \frac{i}{n},\ i = \overline{0,n},\ n$ chẵn, ta thay thế $(Kx)(t_i)$ bởi:

$$\sum_{j=0}^{n} w_j(1+t_it_j)e^{t_it_j}x(t_j) \quad \text{với} \quad w_j = \begin{cases} \dfrac{1}{3n}, & j \in \{0,n\} \\ \\ \dfrac{4}{3n}, & j = 1,3,\ldots,n-1 \\ \\ \dfrac{2}{3n}, & j = 2,4,\ldots,n-2 \end{cases}$$

Ta lưu ý rằng ma trận tương ứng A không đối xứng. Điều này dẫn tới phương trình Tikhonov rời rạc hóa

$$\alpha x^{\alpha,\delta} + A^2 x^{\alpha,\delta} = Ay^{\delta}.$$

Ở đây, $y^\delta = \left(y_i^\delta\right) \in \mathbb{R}^n$ là một dữ kiện nhiễu (vector ngẫu nhiên được phân bố đều) của $y_i^* = \exp\left(\dfrac{i}{n}\right)$ sao cho:

$$\left|y^* - y^\delta\right|^2 := \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(y_i^* - y_i^\delta\right)^2} \le \delta$$

Kết quả trung bình của mười lần tính toán được cho trong bảng ở dưới, nơi mà ta đã liệt kê các chuẩn rời rạc $\left|1 - x^{\alpha,\delta}\right|_2$ của các sai số giữa nghiệm chính xác $x^*(t) = 1$ và xấp xỉ Tikhonov $x^{\alpha,\delta}$.

α	$n = 8$	$n = 16$
10^{-1}	$2,4 * 10^{-1}$	$2,3 * 10^{-1}$
10^{-2}	$7,2 * 10^{-2}$	$6,8 * 10^{-2}$
10^{-3}	$2,6 * 10^{-2}$	$2,4 * 10^{-2}$
10^{-4}	$1,3 * 10^{-2}$	$1,2 * 10^{-2}$
10^{-5}	$2,6 * 10^{-3}$	$2,3 * 10^{-3}$
10^{-6}	$9,3 * 10^{-4}$	$8,7 * 10^{-4}$
10^{-7}	$3,5 * 10^{-4}$	$4,4 * 10^{-4}$
10^{-8}	$1,3 * 10^{-3}$	$3,2 * 10^{-5}$
10^{-9}	$1,6 * 10^{-3}$	$9,3 * 10^{-5}$
10^{-10}	$3,9 * 10^{-3}$	$2,1 * 10^{-4}$

Table 1: Chỉnh hóa Tikhonov với $\delta = 0$

α	$\delta = 0,0001$	$\delta = 0,001$	$\delta = 0,01$	$\delta = 0,1$
10^{-1}	0,2317	0,2317	0,231	0,2255
10^{-2}	0,0681	0,0677	0,0692	0,1194
10^{-3}	0,0238	0,024	0,0268	0,1651
10^{-4}	0,0119	0,0127	0,1172	1,0218
10^{-5}	0,0031	0,0168	0,2553	3,0065
10^{-6}	0,0065	0,0909	0,6513	5,9854
10^{-7}	0,047	0,2129	2,4573	30,595
10^{-8}	0,1018	0,8119	5,9775	
10^{-9}	0,173	1,8985	16,587	
10^{-10}	1,0723	14,642		

Table 2: Chỉnh hóa Tikhonov với $\delta > 0$

m	$\delta = 0,0001$	$\delta = 0,001$	$\delta = 0,01$	$\delta = 0,1$
1	0,8097	0,8097	0,8088	0,8135
2	0,6274	0,6275	0,6278	0,6327
3	0,5331	0,5331	0,5333	0,5331
4	0,4312	0,4311	0,4322	0,4287
5	0,3898	0,3898	0,3912	0,3798
6	0,3354	0,3353	0,336	0,3339
7	0,3193	0,3192	0,3202	0,3248
8	0,2905	0,2904	0,2912	0,2902
9	0,2838	0,2838	0,2845	0,2817
10	0,2675	0,2675	0,2677	0,2681
100	0,0473	0,0474	0,0476	0,0534
200	0,0248	0,0248	0,0253	0,0409
300	0,0242	0,0242	0,0249	0,0347
400	0,0241	0,0241	0,0246	0,0385
500	0,0239	0,024	0,0243	0,0424

Table 3: Phép lặp Landweber

Ở bảng đầu tiên, ta đã chọn $\delta = 0$, tức là chỉ có sai số rời rạc hóa cho quy tắc Simpson phụ trách cho sự tăng sai số với α bé. Sự khác biệt giữa các tham số rời rạc hóa $n = 8$ và $n = 16$ dễ nhận thấy với $\alpha \leq 10^{-8}$.

Ở bảng thứ hai, ta luôn lấy $n = 16$ và quan sát thấy rằng tổng các sai số giảm khi α giảm, đến khi đạt được giá trị tối ưu thì tổng lại tăng. Điều này được dự đoán bởi lý thuyết trước đó, cụ thể là hai ước lượng (2.21a) và (2.21b) (trang 39 trong giáo trình).

Ở bảng thứ ba, ta liệt kê các kết quả ứng với các bước lặp của phương pháp Landweber với tham số $a = 0,5$ và tiếp tục chọn $n = 16$. Ta quan sát thấy rằng sai số giảm nhanh ở vài bước lặp đầu tiên, sau đó giảm chậm lại. Để so sánh phương pháp của Tikhonov với Landweber, ta lưu ý rằng sai số ứng với m phải được so sánh với sai số ứng với $\alpha = \frac{1}{2m}$.

Ta quan sát thấy rằng cả hai phương pháp đều so sánh được, nơi mà sự chính xác được quan tâm. Tuy nhiên, cũng lưu ý rằng thời gian tính toán của phương pháp Landweber nhiều hơn đáng kể so với Tikhonov, cụ thể nếu δ nhỏ. Mặt khác, phương pháp Landweber ổn định hơn với các dữ kiện nhiễu ở vế phải và đưa ra các kết quả khá tốt, kể cả khi δ lớn.

3.5 Mục 2.5: Nguyên lý không khớp của Morozov

Trong mục này, ta nghiên cứu nguyên lý không khớp dựa trên phương pháp chỉnh hóa Tikhonov. Ta giả sử lại rằng $K : X \to Y$ là toán tử đơn ánh compact giữa hai không gian Hilbert với miền xác định trù mật $\mathcal{R}(K) \subset Y$. Một lần nữa, ta nghiên cứu phương trình:

$$Kx = y^\delta$$

với dữ kiện nhiễu cho trước $y^\delta \in Y$ của vế phải chính xác $y^* = Kx^*$. Phương pháp chỉnh hóa Tikhonov đã được nghiên cứu ở mục 2.2, và tương ứng với các toán tử chỉnh hóa

$$R_\alpha = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^*, \quad \alpha > 0$$

mà xấp xỉ nghịch đảo không bị chặn của K trên miền xác định của nó. Ta đã thấy rằng $x^\alpha = R_\alpha y$ tồn tại và là cực tiểu duy nhất của phiếm hàm Tikhonov (xem lại ở Mục 2.2). Nhiều điều hơn về sự phụ thuộc của α và y sẽ được chứng minh ở các định lý sau đây.

Định lý 2.5.1. *Cho $y \in Y$, $\alpha > 0$ và x^α là nghiệm duy nhất của phương trình:*

$$\alpha x^\alpha + K^*Kx^\alpha = K^*y \tag{2.5.1}$$

Khi đó x^α phụ thuộc liên tục vào y và α. Ánh xạ $\alpha \mapsto \|x^\alpha\|_X$ là đơn điệu không tăng và:

$$\lim_{\alpha \to 0} x^\alpha = 0$$

Ánh xạ $\alpha \mapsto \|kX^\alpha - y\|_y$ là đơn điệu không giảm và

$$\lim_{\alpha \to 0} Kx^\alpha = y$$

Nếu $y \neq 0$ thì tính đơn điệu ngặt đúng cho cả hai đẳng thức trên.

Chứng minh. Bước 1: Sử dụng định nghĩa của J_α và sự tối ưu của x^α, ta kết luận rằng:

$$\alpha \|x^\alpha\|_X^2 \leq J_\alpha(x^\alpha) \leq J_\alpha(0) = \|y\|_Y^2,$$

tức là $\|x^\alpha\|_X \leq \dfrac{\|y\|_Y}{\sqrt{\alpha}}$. Điều này chứng tỏ $x^\alpha \to 0$ khi $\alpha \to \infty$.

Bước 2: Ta chọn $\alpha, \beta > 0$ và trừ đi hai vế của phương trình:

$$\alpha\left(x^\alpha - x^\beta\right) + K^*K\left(x^\alpha - x^\beta\right) + (\alpha - \beta)x^\beta = 0 \tag{2.5.2}$$

Nhân hai vế cho $x^\alpha - x^\beta$ cho ta:

$$\alpha \left\|x^\alpha - x^\beta\right\|_X^2 + \left\|K\left(x^\alpha - x^\beta\right)\right\|_Y^2 = (\beta - \alpha)\left(x^\beta, x^\alpha - x^\beta\right)_X \tag{2.5.3}$$

Từ phương trình này, ta trước tiên kết luận rằng:

$$\alpha \left\|x^\alpha - x^\beta\right\|_X^2 \leq |\beta - \alpha| \left|\left(x^\beta, x^\alpha - x^\beta\right)_X\right| \leq |\beta - \alpha| \left\|x^\beta\right\|_X \left\|x^\alpha - x^\beta\right\|_X$$

tức là:

$$\alpha \left\|x^\alpha - x^\beta\right\|_X \leq |\beta - \alpha| \left\|x^\beta\right\|_X \leq |\beta - \alpha| \frac{\|y\|_Y}{\sqrt{\beta}}$$

Điều này chứng tỏ được sự liên tục của ánh xạ $\alpha \mapsto x^\alpha$.

Bước 3: Cho $\beta > \alpha > 0$. Từ (2.5.3), ta kết luận rằng $\left(x^\beta, x^\alpha - x^\beta\right)_X$ là số (thực) dương. Nếu nó bằng không thì $x^\alpha = x^\beta = 0$ từ (2.5.2), mâu thuẫn với giả thiết ban đầu $y \neq 0$. Do đó, $\left\|x^\beta\right\|_X^2 < \left(x^\beta, x^\alpha\right)_X \leq \left\|x^\beta\right\|_X \|x^\alpha\|_X$, tức là $\left\|x^\beta\right\|_X < \|x^\alpha\|_X$. Vậy ta chứng minh xong tính đơn điệu ngặt của ánh xạ $\alpha \mapsto \|x^\alpha\|_X$.

Bước 4: Nhân hai vế phương trình chỉnh cho x^β bởi $x^\alpha - x^\beta$, ta được:

$$\beta \left(x^\beta, x^\alpha - x^\beta\right)_X + \left(Kx^\beta - y, K\left(x^\beta, x^\alpha - x^\beta\right)\right)_Y = 0$$

Bây giờ ta cho $\alpha > \beta$. Từ (2.5.3), ta thấy rằng $\left(x^\beta, x^\alpha - x^\beta\right)_X < 0$, tức là:

$$0 < \left(Kx^\beta - y, K\left(x^\beta, x^\alpha - x^\beta\right)\right)_Y = \left(Kx^\beta - y, Kx^\alpha - y\right)_Y - \left\|Kx^\beta - y\right\|_Y^2$$

Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho ta: $\left\|Kx^\beta - y\right\|_Y < \|Kx^\alpha - y\|_Y$.

Bước 5: Cuối cùng, cho $\varepsilon > 0$. Vì miền xác định của K trù mật trong Y, tồn tại $x \in X$ với $\|Kx - y\|_Y^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$. Chọn α_0 sao cho $\alpha_0 \|x\|_X^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$. Khi đó:

$$\|Kx^\alpha - y\|_Y^2 \leq J_\alpha(x^\alpha) \leq J_\alpha(x) \leq \varepsilon^2,$$

tức là $\|Kx^\alpha - y\|_Y \leq \varepsilon$ với mọi $\alpha \leq \alpha_0$. $\square$

Giờ ta xét sự xác định của $\alpha(\delta)$ từ nguyên lý không khớp. Ta tính $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ sao cho nghiệm Tikhonov tương ứng $x^{\alpha,\delta}$ là nghiệm của phương trình:

$$\alpha x^{\alpha,\delta} + K^*Kx^{\alpha,\delta} = K^*y^\delta,$$

tức là cực tiểu của:

$$J_{\alpha,\delta}(x) := \left\|Kx - y^\delta\right\|_Y^2 + \alpha\|x\|_X^2$$

thỏa phương trình

$$\left\|Kx^{\alpha,\delta} - y^\delta\right\|_Y = \delta \tag{2.5.4}$$

Lưu ý rằng sự lựa chọn α này của nguyên lý không khớp phải đảm bảo rằng sai số của lỗi là δ, và mặt khác α không quá bé.

Phương trình (2.5.4) có nghiệm duy nhất, cho trước $\delta \leq \left\|y^\delta\right\|_Y$ do định lý trước đó:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left\|Kx^{\alpha,\delta} - y^\delta\right\|_Y = \left\|y^\delta\right\|_Y > \delta$$

và

$$\lim_{\alpha\to 0} \left\|Kx^{\alpha,\delta} - y^\delta\right\|_Y = 0 < \delta$$

Hơn nữa, ánh xạ $\alpha \mapsto \left\|Kx^{\alpha,\delta} - y^\delta\right\|_Y$ là liên tục và tăng ngặt.

Định lý 2.5.2. *Cho $K : X \to Y$ đơn ánh tuyến tính compact với miền xác định trù mật trong Y. Cho $Kx^* = y^*$ với $x^* \in X$, $y^* \in Y$ và $y^\delta \in Y$ sao cho $\left\|y^\delta - y^*\right\|_Y \leq \delta < \left\|y^\delta\right\|_Y$. Cho nghiệm Tikhonov $x^{\alpha(\delta)}$ thỏa mãn $\left\|Kx^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta\right\|_Y = \delta$ với mọi $\delta \in (0, \delta_0)$. Khi đó:*

(i) $x^{\alpha(\delta),\delta} \to x^*$ khi $\delta \to 0$, tức là Nguyên lý không khớp là chấp nhận được.

(ii) Cho $x^* = K^*z \in K^*(Y)$ với $\|z\|_Y \leq E$. Khi đó

$$\left\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x^*\right\|_X \leq 2\sqrt{\delta E}$$

Do đó, nguyên lý không khớp là một sơ đồ chỉnh hóa tối ưu dưới thông tin $\left\|(K^*)^{-1}x^*\right\|_Y \leq E$.

Chứng minh. $x^\delta := x^{\alpha(\delta),\delta}$ cực tiểu hóa phiếm hàm Tikhonov:

$$J^{(\delta)}(x) := J_{\alpha(\delta),\delta}(x) = \alpha(\delta)\|x\|_X^2 + \left\|Kx - y^\delta\right\|_Y$$

Do đó ta kết luận rằng:

$$\alpha(\delta)\left\|x^\delta\right\|_X^2 + \delta^2 = J^{(\delta)}\left(x^\delta\right) \leq J^{(\delta)}(x^*) = \alpha(\delta)\left\|x^*\right\|_X^2 + \left\|y^* - y^\delta\right\|_Y \leq \alpha(\delta)\left\|x^*\right\|_X^2 + \delta^2$$

và vì vậy $\left\|x^\delta\right\|_X \leq \|x^*\|_X$ với mọi $\delta > 0$. Điều này cho ta một ước lượng quan trọng sau:

$$\begin{aligned}\left\|x^\delta - x^*\right\|_X^2 &= \left\|x^\delta\right\|_X^2 - 2\mathrm{Re}\left(x^\delta, x^*\right)_X + \|x^*\|_X^2\\ &\leq 2\left[\|x^*\|_X^2 - \mathrm{Re}\left(x^\delta, x^*\right)_X\right]\\ &= 2\mathrm{Re}\left(x^* - x^\delta, x^*\right)_X\end{aligned}$$

(ii) Cho $x^* = K^*z,\ z \in Y$. Khi đó

$$\begin{aligned}\left\|x^\delta - x^*\right\|_X^2 &\leq 2\mathrm{Re}\left(x^* - x^\delta, K^*z\right)_X = 2\mathrm{Re}\left(y^* - Kx^\delta, z\right)_Y\\ &\leq 2\mathrm{Re}\left(y^* - y^\delta, z\right)_Y + 2\mathrm{Re}\left(y^\delta - Kx^\delta, z\right)_Y\\ &\leq 2\delta\|z\|_Y + 2\delta\|z\|_Y = 4\delta\|z\|_Y \leq 4\delta E\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

(i) Cho $x^* \in X$ và $\varepsilon > 0$ tùy ý. Miền xác định $\mathcal{R}(K^*)$ trù mật trong X vì K là đơn ánh. Do đó tồn tại $\hat{x} = K^*z \in \mathcal{R}(K^*)$ sao cho $\|\hat{x} - x^*\|_X \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Khi đó, tương tự như trên, ta kết luận rằng:

$$\begin{aligned}\left\|x^\delta - x^*\right\|_X^2 &\leq 2\mathrm{Re}\left(x^* - x^\delta, x^* - \hat{x}\right)_X + 2\mathrm{Re}\left(x^* - x^\delta, K^*z\right)_X\\ &\leq 2\left\|x^* - x^\delta\right\|_X \frac{\varepsilon}{3} + 2\mathrm{Re}\left(y^* - Kx^\delta, z\right)_Y\\ &\leq 2\left\|x^* - x^\delta\right\|_X \frac{\varepsilon}{3} + 4\delta\|z\|_Y\end{aligned}$$

Có thể viết lại thành $\left(\left\|x^* - x^\delta\right\|_X - \dfrac{\varepsilon}{3}\right)^2 \leq \dfrac{\varepsilon^2}{9} + 4\delta\|z\|_Y$.

Giờ ta chọn $\delta > 0$ sao cho vế phải nhỏ hơn $\dfrac{4\varepsilon^2}{9}$. Lấy căn hai vế, ta kết luận rằng $\left\|x^\delta - x^*\right\|_X \leq \varepsilon$. □

Điều kiện $\left\|y^\delta\right\|_Y > \delta$ có lý vì nếu không như vậy, thì vế phải sẽ nhỏ hơn sai số δ, và $x^\delta = 0$ sẽ là một xấp xỉ chấp nhận được cho x^*.

Sự xác định của $\alpha(\delta)$ tương đương với bài toán tìm zero của hàm đơn điệu $\phi(\alpha) := \left\|Kx^{\alpha,\delta} - y^\delta\right\|_Y^2 - \delta^2$ (với $\delta > 0$ cố định). Nó không cần thiết thỏa mãn phương trình $\left\|Kx^{\alpha,\delta} - y^\delta\right\|_Y = \delta$ một cách chính xác. Dạng

$$c_1\delta \leq \left\|Kx^{\alpha,\delta} - y^\delta\right\|_Y \leq c_2\delta$$

với $1 \leq c_1 < c_2$ cố định là đủ để chứng minh các phát biểu của định lý trước đó.

Sự tính toán của $\alpha(\delta)$ có thể được đưa ra bởi phương pháp của Newton. Đạo hàm của ánh xạ $\alpha \mapsto x^{\alpha,\delta}$ được cho bởi nghiệm của phương trình:

$$(\alpha I + K^*K)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}x^{\alpha,\delta} = -x^{\alpha,\delta}$$

được tìm thấy bằng cách đạo hàm phương trình (2.5.1) theo α.

Trong định lý sau đây, ta chứng minh rằng cấp hội tụ của $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ là tốt nhất có thể cho nguyên lý không khớp. Do đó, theo kết quả của Ví dụ 1.20 (trang 14 trong giáo trình), nó không thể là tối ưu dưới thông tin $\left\|(K^*K)^{-\sigma/2}x\right\|_X \leq E$ với $\sigma > 1$.

Định lý 2.5.3. *Cho K đơn ánh compact và giả sử tồn tại $\sigma > 0$ sao cho với mỗi $x \in \mathcal{R}\left((K^*K)^{-\sigma/2}\right)$ với $y = Kx \neq 0$ và các dãy $\delta_n \to 0$ và $y^{\delta_n} \in Y$ với $\left\|y - y^{\delta_n}\right\|_Y \leq \delta_n$ và $\left\|y^{\delta_n}\right\|_Y > \delta_n$ với mọi n, các nghiệm Tikhonov $x^n = x^{\alpha(\delta_n),\delta_n}$ (với $\alpha(\delta_n)$ được chọn bởi nguyên lý không khớp) hội tụ về x nhanh hơn $\sqrt{\delta_n}$ hội tụ về 0, tức là*

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_n}}\left\|x^n - x\right\|_X \longrightarrow 0 \text{ khi } n \to \infty \tag{2.5.5}$$

Khi đó miền xác định $\mathcal{R}(K)$ phải hữu hạn chiều.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh sự lựa chọn $\alpha(\delta)$ bởi nguyên lý không khớp chỉ ra được tính bị chặn của $\frac{\alpha(\delta)}{\delta}$. Viết tắt $x^\delta := x^{\alpha(\delta),\delta}$, ta viết

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\|y\|_Y &= \left(1 - \frac{2}{3}\right)\|y\|_Y \leq \|y\|_Y - 2\delta \\
&\leq \left\|y - y^\delta\right\|_Y + \left\|y^\delta\right\|_Y - 2\delta \leq \left\|y^\delta\right\|_Y - \delta \\
&= \left\|y^\delta\right\|_Y - \left\|y^\delta - Kx^\delta\right\|_Y \leq \left\|Kx^\delta\right\|_Y \\
&= \frac{1}{\alpha(\delta)}\left\|KK^*\left(y^\delta - Kx^\delta\right)\right\|_Y \leq \frac{\delta}{\alpha(\delta)}\|K\|^2_{\mathcal{L}(X,Y)}
\end{aligned}$$

nơi mà ta áp dụng K vào (2.5.1). Do đó ta đã chứng tỏ được rằng tồn tại $c > 0$ với $\alpha(\delta) \leq c\delta$ với mọi δ đủ nhỏ.

Giờ ta giả sử $\dim \mathcal{R}(K) = \infty$ và xây dựng một mâu thuẫn. Đặt $\{\mu_j, x_j, y_j : j \in \mathbb{N}\}$ là hệ kỳ dị của K và định nghĩa:

$$x := \frac{1}{\mu_1}x_1 \quad \text{và} \quad y^{\delta_n} := y_1 + \delta_n y_n \quad \text{với} \quad \delta_n := \mu_n^2$$

Khi đó $y = Kx = y_1$ và $\delta_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và $x \in \mathcal{R}\left((K^*K)^{-\sigma/2}\right)$ với mọi $\sigma > 0$ và

$$\left\|y^{\delta_n} - y\right\|_Y = \delta_n < \sqrt{1 + \delta_n^2} = \left\|y^{\delta_n}\right\|_Y$$

Do đó, các giả sử của nguyên lý không khớp được thỏa mãn và vì vậy (2.5.5) đúng.

Nghiệm của phương trình $\alpha(\delta_n)x^n + K^*Kx^n = K^*y^{\delta_n}$ được cho bởi:

$$x^n = \frac{\mu_1}{\alpha(\delta_n) + \mu_1^2}x_1 + \frac{\mu_n\delta_n}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2}x_n$$

Ta tính:

$$x^n - x = -\frac{\alpha(\delta_n)}{\mu_1\left(\alpha(\delta_n) + \mu_1^2\right)}x_1 + \frac{\mu_n\delta_n}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2}x_n$$

và do đó:

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_n}}\left\|x^n - x\right\|_X \geq \frac{\mu_n\sqrt{\delta_n}}{\alpha(\delta_n) + \mu_n^2} = \frac{\delta_n}{\alpha(\delta_n) + \delta_n} = \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha(\delta_n)}{\delta_n}} \geq \frac{1}{1 + c},$$

mâu thuẫn với (2.5.5). □

Ta nhận xét rằng ước lượng

$$\alpha(\delta) = \frac{\delta\|K\|^2_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\|y^\delta\|_Y - \delta}$$

có trong chứng minh trước đó đã đề nghị sử dụng $\frac{\delta\|K\|^2_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\|y^\delta\|_Y - \delta}$ như là giá trị khởi điểm cho phương pháp Newton để xác định $\alpha(\delta)$.

3.6 Mục 2.6: Phương pháp lặp của Landweber với Quy luật dừng

Cho $r > 1$ cố định, thuật toán sẽ dừng lại khi $\left\|Kx^{m,\delta} - y^\delta\right\| < r\delta$, với $m \in \mathbb{N}$. Ta cần chọn m nguyên dương, nhỏ nhất cho phương pháp Landweber và cách chọn m phải là chấp nhận được và tối ưu cho sơ đồ chỉnh hoá. Ta có định lý:

Định lý 2.6.1. *Cho $K : X \to Y$ tuyến tính, compact, đơn ánh với $\overline{K(X)} = Y$. Cho $r > 1$ và $y^\delta \in Y$ là dữ liệu bị nhiễu của y với $\left\|y - y^\delta\right\| \le \delta$, $\left\|y^\delta\right\| \le r\delta$, $\forall \delta \in (0, \delta_0)$.*

Cho dãy $x^{m,\delta}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ xác định như sau:

$$x^{m,\delta} = (I - aK^*K)x^{m-1,\delta} + aK^*y, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

sao cho $0 < a < \dfrac{1}{\|K\|^2}$, thì:

(i) $\lim_{m\to\infty} \left\|Kx^{m,\delta} - y^\delta\right\| = 0$, $\forall \delta > 0$, nghĩa là công thức được định nghĩa tốt. Khi đó, tồn tại $m = m(\delta)$ là số nguyên dương nhỏ nhất thoả:

$$\left\|Kx^{m,\delta} - y^\delta\right\| \le r\delta$$

(ii) $\delta^2 m(\delta) \to 0$ khi $\delta \to 0$, nghĩa là $m(\delta)$ chấp nhận được. Bởi vậy, từ Định lý 3.3.3.2 và 3.3.4.1 thì $x^{m(\delta),\delta} \to x$ khi $\delta \to 0$

(iii) Nếu $x = K^*z \in K^*(Y)$ hoặc $x = K^*Kz \in K^*K(X)$ sao cho $\|z\| = E$, thì ta có:

$$\left\|x^{m(\delta),\delta} - x\right\| \le c\sqrt{E\delta} \quad \text{hoặc}$$
$$\left\|x^{m(\delta),\delta} - x\right\| \le cE^{1/3}\delta^{2/3}$$

Với $c > 0$ tương ứng, đây là cách chọn $m(\delta)$ tối ưu.

Chứng minh. (i) Với $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \langle y, y_j\rangle y_j$, ta có:

$$Kx^m = KR_m y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j}[1 - (1 - a\mu_j^2)^m]\langle y, y_j\rangle Kx_j = \sum_{j=1}^{\infty}[1 - (1 - a\mu_j^2)^m]\langle y, y_j\rangle y_j$$

Xét:

$$\|KR_m y - y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}[1 - a\mu_j^2]^{2m}|\langle y, y_j\rangle|^2 < \sum_{j=1}^{\infty}|\langle y, y_j\rangle|^2 = \|y\|^2$$

Suy ra $\|KR_m - I\| \le 1$. Tương tự:

$$\left\|Kx^{m,\delta} - y^\delta\right\|^2 = \left\|KR_m y^\delta - y^\delta\right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(1 - a\mu_j^2)^{2m}|\langle y^\delta, y_j\rangle|^2$$

Với mỗi $\delta > 0$ thì $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}|\langle y^\delta, y_j\rangle|^2 = \left\|y^\delta\right\|^2 < \infty$, nên:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \sum_{j=N+1}^{\infty}|\langle y^\delta, y_j\rangle|^2 < \frac{\varepsilon^2}{\|y_\delta\|^2 + 1}$$

Mặt khác, với mỗi $j : \overline{1, N}$ thì $0 \le 1 - a\mu_j^2 < 1$ nên $\displaystyle\lim_{m\to\infty}(1 - a\mu_j^2)^{2m} = 0$.

Do đó $\exists m_j : (1 - a\mu_j^2)^{2m} < \dfrac{\varepsilon^2}{\|y_\delta\|^2 + 1}, \quad \forall m > m_j$.

Chọn $m_0 = \displaystyle\max_{j=\overline{1,N}} m_j$ thì

$$\forall j \in \overline{1, N} : (1 - a\mu_j^2)^{2m} < \frac{\varepsilon^2}{\|y_\delta\|^2 + 1}, \quad \forall m > m_0$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\left\|Kx^{m,\delta}-y^\delta\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{N}(1-a\mu_j^2)^{2m}|\langle y^\delta,y_j\rangle|^2+\sum_{j=N+1}^{\infty}(1-a\mu_j^2)^{2m}|\langle y^\delta,y_j\rangle|^2\\ &\le \frac{\varepsilon^2}{\left\|y^\delta\right\|^2+1}\left\|y^\delta\right\|^2+\frac{\varepsilon^2}{\left\|y^\delta\right\|^2+1}\left\|y^\delta\right\|^2<\varepsilon^2\end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|Kx^{m,\delta}-y^\delta\right\|=0,\forall\delta>0.$

Chọn $\varepsilon=r\delta$ thì cũng tồn tại $m=m(\delta)$ nguyên dương nhỏ nhất sao cho

$$\left\|Kx^{m,\delta}-y^\delta\right\|\le r\delta \tag{2.6.1}$$

(ii) Với $y=Kx$, đặt $m=m(\delta)$ như (2.6.1), ta có:

$$\begin{aligned}\|KR_{m-1}y-y\| &\ge \left\|KR_{m-1}y^\delta-y^\delta\right\|-\left\|(KR_{m-1}-I)(y-y^\delta)\right\|\\ &\ge r\delta-\|KR_{m-1}-I\|\left\|y-y^\delta\right\|\\ &\ge (r-1)\delta\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}m(r-1)^2\delta^2 &\le m\|KR_{m-1}y-y\|^2\\ &= m\sum_{j=1}^{\infty}(1-a\mu_j^2)^{2m-2}|\langle y,y_j\rangle|^2 \qquad (y=Kx)\\ &= m\sum_{j=1}^{\infty}(1-a\mu_j^2)^{2m-2}\mu_j^2|\langle x,x_j\rangle|^2 \qquad (2.6.2)\end{aligned}$$

Cho $0<\varepsilon<1,\ \exists N_0$ để $\sum\limits_{j=N_0+1}^{\infty}|\langle x,x_j\rangle|^2<a\varepsilon^2$ Do đó

$$\sum_{j=N_0+1}^{\infty}m(1-a\mu_j^2)^{2m-2}\mu_j^2|\langle x,x_j\rangle|^2<\sum_{j=N_0+1}^{\infty}\frac{1}{2a}|\langle x,x_j\rangle|^2<\frac{1}{2a}a\varepsilon^2=\frac{\varepsilon^2}{2}$$

Hơn nữa $\lim\limits_{m\to\infty}m(1-a\mu_j^2)^{2m-2}=0$. Nên với mỗi $j=1,\dots,N_0$, tồn tại $m_j\in\mathbb{N}$ sao cho

$$\forall m\ge m_j: m\mu_j^2(1-a\mu_j^2)^{2m-2}<\mu_j^2\frac{\varepsilon^2}{2\mu_j^2\|x\|^2}=\frac{\varepsilon^2}{2\|x\|^2}$$

Chọn $m_0=\max\limits_{j=\overline{1,N_0}}m_j$, ta có

$$\sum_{j=1}^{N_0}m\mu_j^2(1-a\mu_j^2)^{2m-2}|\langle x,x_j\rangle|^2<\frac{\varepsilon^2}{2\|x\|^2}\|x\|^2=\frac{\varepsilon^2}{2}$$

Như vậy

$$\begin{aligned}m(r-1)^2\delta^2 &< \sum_{j=1}^{N_0}m\mu_j^2(1-a\mu_j^2)^{2m-2}|\langle x,x_j\rangle|^2+\sum_{j=N_0+1}^{\infty}m\mu_j^2(1-a\mu_j^2)^{2m-2}|\langle x,x_j\rangle|^2\\ &< \frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}=\varepsilon^2,\quad \forall m\geqslant m_0\end{aligned}$$

Suy ra $\delta^2 m(\delta)\to 0$ khi $\delta\to 0$.

(iii) Với $m = m(\delta)$, chọn như (2.6.1), nếu $x = K^*z$ và $\|z\| = E$ thì từ $m^2(1-a\mu_j^2)^{2m-2}\mu_j^2 < \frac{1}{a^2}$ và (2.6.2), ta có:

$$\begin{aligned}(r-1)^2\delta^2 m^2 &< \sum_{j=1}^{\infty} m^2(1-a\mu_j^2)^{2m-2}\mu_j^4|\langle z, y_j\rangle|^2 \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^2}\langle z, y_j\rangle^2 = \frac{1}{a^2}\|z\|^2\end{aligned}$$

Do đó $m(\delta) < \dfrac{1}{a(r-1)}\dfrac{E}{\delta}$.

Mặt khác:

$$\begin{aligned}\|(I-R_mK)x\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2\left(1-a\mu_j^2\right)^{2m}|(z,y_j)|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\left[\mu_j^2(1-a\mu_j^2)^m|(z,y_j)|\right]\left[\left(1-a\mu_j^2\right)^m|(z,y_j)|\right] \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^4\left(1-a\mu_j^2\right)^{2m}|(z,y_j)|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-a\mu_j^2\right)^{2m}|(z,y_j)|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^2\left(1-a\mu_j^2\right)^{2m}|(z,y_j)|^2}\|z\| \quad (\text{Do } (1-a\mu_j)^{2m}\leq 1) \\ &\leq \|KR_my-y\|\,\|z\| \\ &\leq E\left[\left\|(I-KR_m)\left(y-y^\delta\right)\right\| + \left\|(I-KR_m)\,y^\delta\right\|\right] \\ &\leq E\left[\|I-KR_m\|\left\|y-y^\delta\right\| + r\delta\right] \\ &\leq E(1+r)\delta.\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\left\|x^{m(\delta),\delta}-x\right\| \leq \delta\sqrt{\frac{E}{(r-1)r}} + \sqrt{E(1+r)\delta} = c\sqrt{E\delta}$$

Trong đó $c = \sqrt{\dfrac{1}{r-1}} + \sqrt{r+1}$.

Nếu $x = K^*Kz$ và $\|z\| \leq E$ thì từ

$$m^3(1-a\mu_j^2)^{2m-2}\mu_j^6 < \frac{27}{8a^3}$$

và (2.6.2), ta có:

$$\begin{aligned}(r-1)^2\delta^2 m^3 &< \sum_{j=1}^{\infty} m^3(1-a\mu_j^2)^{2m-2}\mu_j^6|\langle z, y_j\rangle|^2 \\ &< \frac{27}{8a^3}\sum_{j=1}^{\infty}|\langle z, y_j\rangle|^2 \\ &= \frac{27}{8a^3}\|z\|^2\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}m(\delta) &< \left(\frac{27}{8a^3}\frac{1}{(r-1)^2}\frac{E^2}{\delta^2}\right)^{1/3} \\ &= \frac{3}{2a(r-1)^{2/3}}E^{2/3}\delta^{-2/3} \\ &= c_1E^{2/3}\delta^{-2/3} \quad \left(c_1 = \frac{3}{2a(r-1)^{2/3}}\right)\end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}
\|(I - R_m K)x\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^4 \left(1 - a\mu_j^2\right)^{2m} |\langle z, x_j\rangle|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\mu_j^4 \left(1 - a\mu_j^2\right)^{4m/3} |\langle z, x_j\rangle|^{4/3}\right]\left[\left(1 - a\mu_j^2\right)^{2m/3} |\langle z, x_j\rangle|^{2/3}\right] \\
&\le \left[\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^6 \left(1 - a\mu_j^2\right)^{2m} |\langle z, x_j\rangle|^2\right]^{2/3} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - a\mu_j^2\right)^{2m} |\langle z, x_j\rangle|^2\right]^{1/3} \\
&= \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - a\mu_j^2\right)^{2m} |\langle y, y_j\rangle|^2\right]^{2/3} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - a\mu_j^2\right)^{2m} |\langle z, x_j\rangle|^2\right]^{1/3} \\
&\le \|KR_m y - y\|^{4/3} \|z\|^{2/3}
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\|(I - R_m)x\| \le \|KR_m y - y\|^{2/3} \|z\|^{1/3} \le E^{1/3}(1 + r)^{2/3}\delta^{2/3}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\left\|x^{m(\delta),\delta} - x\right\| &\le \delta(ac_1 E^{2/3}\delta^{-2/3})^{1/2} + E^{1/3}(1 + r^{2/3})\delta^{2/3} \\
&= c_2 E^{1/3}\delta^{2/3} \quad (c_2 = \sqrt{ac_1} + (1 + r)^{2/3})
\end{aligned}$$

Định lý đã được chứng minh. □

4 Tài liệu tham khảo

[1] Đặng Đình Áng, *Biến đổi tích phân*

[2] Dương Minh Đức, *Lý thuyết độ đo và tích phân*

[3] Đặng Đức Trọng, *Giải tích thực*

[4] Nguyễn Xuân Liêm, *Giải tích hàm*

[5] Hoàng Tụy, *Hàm thực và giải tích hàm*

[6] C.Clason, *Regularization of Inverse problems*

[7] Andreas Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*

[8] C.Evans, *Partial Differential Equations*