Tuyển tập đề thi Giải tích hàm

Lê Hoàng Bảo

Bản cập nhật ngày 24 tháng 06 năm 2024

Mục lục

1 Đề thi giữa học kì

1.1 Đề thi giữa học kì II Giải tích hàm, 2016 - 2017

(Ngày thi: 18/04/2017; Thời gian: 45 phút)

Bài 1 (5 điểm): Cho không gian vector X trên trường $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

a) Giả sử X có một chuẩn kí hiệu là $\|\cdot\|$. Chứng tỏ nếu ta đặt $d(x, y) = \|x - y\|$ thì đây là một metric trên X. Vậy chuẩn sinh ra metric. Chứng tỏ rằng với $\forall x, y, z \in X$ và $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ thì metric này thỏa:

$$\begin{cases} d(x+z, y+z) = d(x, y) \\ d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y) \end{cases} \qquad (*)$$

b) Ngược lại, giả sử có metric X thỏa $(*)$. Chứng tỏ nếu ta đặt $\|x\| = d(x, 0)$ thì đây là một chuẩn trên X. Chứng tỏ ta lại có $d(x, y) = \|x - y\|$. Vậy metric thỏa $(*)$ được sinh ra bởi chuẩn.

Bài 2 (5 điểm): Xét $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ là không gian định chuẩn các hàm liên tục từ $[0, 1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$$

a) Chứng tỏ một dãy trong X mà hội tụ trong X thì phải hội tụ từng điểm.

b) Đặt $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$. Dãy $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ có hội tụ từng điểm hay không? Có hội tụ trong X hay không?

c) Đặt $f_n(x) = x^n$. Dãy $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ có hội tụ từng điểm hay không? Có hội tụ trong X hay không? Có là dãy Cauchy hay không?

1.2 Đề thi giữa học kì II Giải tích hàm, 2017 - 2018

(Ngày thi: 10/04/2018; Thời gian: 45 phút)

Cho $X = C([0,1],\mathbb{R})$ là không gian vector các hàm liên tục trên $[0,1]$. Trên X, ta xét hai chuẩn:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Với $n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]$, ta đặt:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{nx}}}$$

a) Chứng tỏ $f_n \in X$. Vẽ phác họa đồ thị của f_n tại $n = 0, 1, 2$.

b) Tính $\|f_n\|_\infty$.

c) Tìm giới hạn từng điểm của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Hàm vừa tìm được có thuộc X hay không?

d) Chứng tỏ nếu dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ về $g \in X$ (hội tụ đều) thì phải hội tụ từng điểm về g, tức là $\forall x \in [0,1]$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$.

e) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ hay không?

f) Tính $\|f_n\|_2$.

g) Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_2$.

h) Chứng tỏ dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_2)$ về 0.

i) Chứng minh rằng một dãy bất kì $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về h trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ thì cũng hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_2)$.

j) Giải thích vì sao 2 chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ và $\|\cdot\|_2$ không tương đương trên X.

1.3 Đề thi giữa học kì II Giải tích hàm, 2018 - 2019

(Thời gian: 60 phút)

Cho $X = C([0,1],\mathbb{R})$ là không gian các hàm số liên tục trên $[0,1]$. Trên X, ta xét hai chuẩn:

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u(t)| \mid t \in [0,1]\} \qquad \|u\|_2 = \left(\int_0^1 |u(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Với $n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]$, ta đặt:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

a) Hỏi f_n có thuộc X không? Vì sao? Hỏi dãy $\{f_n\}$ có hội tụ từng điểm không?

b) Tìm $\|f_n\|_\infty$.

c) Chứng minh rằng một dãy $\{g_n\}$ bất kì hội tụ về g trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ thì nó cũng hội tụ điểm về g.

d) Hỏi dãy $\{f_n\}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ không?

e) Tính $\|f_n\|_2$. Hỏi dãy $\{f_n\}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_2)$ không?

f) Giải thích vì sao hai chuẩn đã cho ở trên lại không tương đương.

g) Chứng minh rằng một dãy $\{g_n\}$ bất kì hội tụ về g trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ thì nó cũng hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_2)$.

h) Cho $\{h_n\}$ là dãy đơn điệu giảm hội tụ điểm về 0. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì, đặt $A_n = \{x : h_n(x) < \varepsilon\}$. Chứng minh rằng dãy tập hợp $\{A_n\}$ là bao phủ mở của $[0,1]$ và $A_n \subset A_{n+1}$. Từ đó chỉ ra rằng, tồn tại số tự nhiên N sao cho $A_N = [0,1]$ và $\{h_n\}$ hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$.

1.4 Đề thi giữa học kì II Giải tích hàm, 2020 - 2021

(Thời gian: 60 phút)

Bài 1 (4 điểm): Trên $X = C([0,1], \mathbb{R})$, ta trang bị chuẩn sau:

$$\|f\|_\omega := \sup_{0 \le x \le 1} \{e^{-x}|f(x)|\}$$

a) Kiểm tra $\|f\|_\omega$ là một chuẩn trên X.

b) Chứng minh chuẩn $\|\cdot\|_\omega$ tương đương với chuẩn sup $\|\cdot\|_\infty$.

Bài 2 (6 điểm): Cho $X = C([-1,1], \mathbb{R})$, trên đó trang bị chuẩn sup thông thường $\|\cdot\|_\infty$. Cho dãy hàm:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < -\dfrac{1}{n} \\ \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{n} - x\right), & -\dfrac{1}{n} \le x < \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Giải thích vì sao $f_n \in X$ và vẽ đồ thị.

b) Chứng minh $(f_n)_{n\ge1}$ hội tụ điểm trên $[-1,1]$ về một hàm f. Tìm f.

c) Chứng minh một dãy bất kì trong X mà hội tụ theo chuẩn sup thì nó cũng hội tụ điểm trên $[-1,1]$.

d) Dãy $(f_n)_{n\ge1}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ không? Vì sao?

1.5 Đề thi giữa học kì I Giải tích hàm, 2022 - 2023

(Ngày thi: 04/11/2022; Thời gian: 60 phút)

Bài 1 (5 điểm):

a) Chứng tỏ trong không gian metric (X, d), dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về x khi và chỉ khi dãy $(d(x_n, x))_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về 0. Ngắn gọn hơn, dãy x_n hội tụ về x khi và chỉ khi khoảng cách từ x_n tới x hội tụ về 0. Bằng kí hiệu thì:

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \iff d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

b) Hãy phát biểu lại mệnh đề ở câu a trong trường hợp X là một không gian định chuẩn.

c) Cho $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \dots\right)$. Kiểm tra $x_n \in \ell^2$. Tính $\|x_n\|$.

d) Cho $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$. Kiểm tra $x \in \ell^2$. Tính $\|x\|$.

e) Tính $\|x_n - x\|$.

f) Sử dụng câu a và b, hãy chứng tỏ dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về x trong ℓ^2.

Bài 2 (5 điểm): Xét không gian định chuẩn $C([-1, 1], \mathbb{R})$ với chuẩn sup.

a) Chứng minh rằng trong $C([-1, 1], \mathbb{R})$, hội tụ theo chuẩn thì dẫn đến hội tụ từng điểm, tức là

$$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \implies f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x),\ \forall x \in [-1, 1].$$

b) Với $n \in \mathbb{Z}^+$ và $x \in [-1, 1]$, đặt:

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2x^2}$$

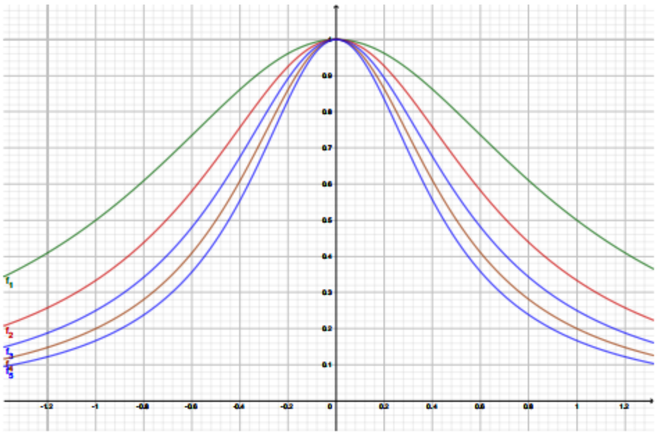
Hình bên dưới là đồ thị của (f_n) với $1 \le n \le 5$. Kiểm tra $f_n \in C([-1, 1], \mathbb{R})$.

c) Tính $\|f_n\|$.

d) Tìm giới hạn từng điểm của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, tức $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

e) Hàm f vừa tìm được có thuộc $C([-1, 1], \mathbb{R})$ không?

f) Kết luận $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ trong $C([-1, 1], \mathbb{R})$ hay không?



1.6 Đề thi giữa học kì II Giải tích hàm, 2022 - 2023

(Ngày thi: 28/04/2023; Thời gian: 60 phút)

ĐỀ THI DÀNH CHO LỚP 21TTH2

Bài 1 (3 điểm): Cho một tập hợp X bất kỳ. Ta đặt hàm:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng (X, d) là một không gian metric.

b) Chứng minh rằng (X, d) là không gian đầy đủ.

Bài 2 (5 điểm): Cho $X := C([0,2], \mathbb{R})$ với chuẩn sup thông thường. Cho dãy hàm:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x^2, & 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ n^2\left(x - \dfrac{2}{n}\right)^2, & \dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{2}{n} \\ 0, & \dfrac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a) Giải thích vì sao $f_n \in X$ và vẽ đồ thị của $f_n(x)$ với $n = 1,\ n = 2$.

b) Chứng minh dãy (f_n) hội tụ từng điểm trên $[0,2]$ về một hàm f. Tìm f.

c) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ hay không? Vì sao?

Bài 3 (2 điểm): Cho dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong $C^2([0,1],\mathbb{R})$ thỏa điều kiện $f_n(0) = f_n'(0)$ với mọi n. Chứng minh rằng nếu $|f_n'(x)| \leq 1$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ và với mọi $x \in [0,1]$ thì tồn tại một dãy con của (f_n) hội tụ đều trên $[0,1]$.

ĐỀ THI DÀNH CHO LỚP CỬ NHÂN TÀI NĂNG

Bài 1 (5 điểm): Cho ánh xạ $T : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ có dạng:

$$Tf = -2f(0) + \int_{-1}^{1} xf(x)\mathrm{d}x$$

a) Chứng minh T là ánh xạ tuyến tính.

b) Chứng minh T bị chặn.

c) Tính chính xác $\|T\|$.

Bài 2 (5 điểm): Cho X, Y là hai không gian Banach. Cho $T_n : X \to Y$ là các ánh xạ tuyến tính liên tục thỏa T_nz hội tụ với $\forall z \in X$.

a) Đặt $T_z = \lim\limits_{n\to\infty} T_nz$. Chứng minh Tz tuyến tính và bị chặn.

b) Cho dãy (x_n) và giá trị x thuộc X. Giả sử $x_n \to x$ trong X. Hỏi T_nx_n có hội tụ về Tx không? Giải thích.

1.7 Đề thi giữa học kì hè Giải tích hàm, 2022 - 2023

(Ngày thi: 09/08/2023; Thời gian: 60 phút; Lớp 20TTH_HE)

Bài 1 (4 điểm): Cho không gian $X := C([0,2],\mathbb{R})$ với chuẩn sup thông thường $\|\cdot\|_\infty$. Cho dãy hàm:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{4-2x}{2n-1}, & \dfrac{1}{n} < x \le 2 \end{cases}$$

a) Giải thích vì sao $f_n \in X$.

b) Chứng minh dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ điểm trên $[0,2]$ về một hàm f. Tìm f.

c) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ hay không? Vì sao?

d) Với chuẩn $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x$, dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_1)$ hay không? Vì sao?

Bài 2 (4 điểm): Trên trường số thực, xét ánh xạ $T : \ell^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

với mọi $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \in \ell^2$.

a) Chứng minh rằng T là ánh xạ được định nghĩa tốt, nghĩa là chứng minh Tx hội tụ.

b) Kiểm tra T là ánh xạ tuyến tính liên tục.

c) Tính $\|T\|$.

Bài 3 (2 điểm): Cho dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ được định nghĩa bởi $f_n(x) = x^n$ với $\forall x \in [0,1]$.

a) Chứng minh rằng dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không chứa bất kỳ dãy con hội tụ đều trong $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

b) Điều này có trái với kết luận của Định lý Arzelà - Ascoli không? Tại sao?

1.8 Đề thi giữa học kì II Giải tích hàm, 2023 - 2024

(Ngày thi: 27/04/2024; Thời gian: 60 phút; Lớp: 22TTH1)

Bài 1 (5 điểm): Cho dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ với:

$$f_n(x) = x - \frac{x^n}{n+2024}, \quad \forall x \in [0,1]$$

a) Tìm giới hạn hội tụ điểm f của (f_n).

b) Hỏi f_n có hội tụ đến f trong $C([0,1])$ với chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ không? Giải thích.

c) Tính $\|f_n - f\|_1$. Hỏi f_n có hội tụ đến f trong $C([0,1])$ với chuẩn $\|\cdot\|_1$ không?

d) Tính $\|f_n - f\|_2$. Hỏi f_n có hội tụ đến f trong $C([0,1])$ với chuẩn $\|\cdot\|_2$ không?

Bài 2 (2 điểm): Cho bốn số thực a, b, p, q thỏa $1 \le p \le q < \infty$ và $a < b$. Trên $C([a,b])$, chứng tỏ rằng nếu dãy hàm f_n hội tụ đến f theo chuẩn $\|\cdot\|_q$ thì f_n hội tụ đến f theo chuẩn $\|\cdot\|_p$.

Bài 3 (3 điểm): Trong không gian $C([0,\pi])$, cho dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ với:

$$f_n(x) = \sin(2^n x), \quad \forall x \in [0,\pi]$$

a) Chứng tỏ $\|f_n - f_m\|_\infty \ge 1$ với mọi số nguyên dương $m \ne n$.

b) Chứng tỏ rằng dãy (f_n) không chứa bất kỳ dãy con hội tụ đều trong $C([0,\pi])$ dưới chuẩn $\|\cdot\|_\infty$. Điều này có mâu thuẫn với kết luận của Định lý Arzelà - Ascoli không? Tại sao?

2 Đề thi cuối học kì

2.1 Đề thi cuối học kì Giải tích hàm, ???? - ???? (Đề bí ẩn 1)

(Thời gian: 90 phút; Sinh viên chọn ra 5/6 câu để giải)

Bài 1: Cho $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ là hai chuẩn trên một không gian vector E. Đặt

$$\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_2, \quad \forall x \in E$$

Hỏi $\|\cdot\|$ có là một chuẩn trên E không?

Bài 2: Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn và $E \neq \{0\}$. Chứng minh quả cầu đóng $B'(0,1)$ khác quả cầu mở $B(0,1)$.

Bài 3: Cho x là một vector trong không gian Banach $(E, \|\cdot\|)$. Dùng Định lý Hahn - Banach, chứng minh:

$$\|x\| = \sup\{T(x) : T \in L(E, \mathbb{R}),\ \|T\| \leq 1\}$$

Bài 4: Cho $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là một họ trực chuẩn trong một không gian Hilbert phức H. Hỏi có hay không một dãy $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ trong tập $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ sao cho dãy $\{\alpha_i e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong H?

Bài 5: Cho $B(a,r)$ là một quả cầu mở trong không gian định chuẩn thực $(E, \|\cdot\|)$, và T là một ánh xạ tuyến tính từ E vào $\mathbb{R}$ sao cho tập $T(B(a,r))$ bị chặn trong $\mathbb{R}$. Hỏi T có liên tục tại a không?

Bài 6: Cho a là một vector trong E với E là không gian định chuẩn và T là ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào E. Giả sử $\|T\| < 1$. Đặt $a_1 = T(a)$ và $a_{k+1} = T(a_k)$ với mọi số nguyên dương k. Hỏi $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ có hội tụ trong E không?

2.2 Đề thi cuối học kì Giải tích hàm, ???? - ???? (Đề bí ẩn 2)

(Thời gian: 120 phút)

Bài 1: Cho T là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian định chuẩn $(E, \|\cdot\|_E)$ vào không gian định chuẩn $(F, \|\cdot\|_F)$. Với

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F,$$

chứng minh rằng:

i) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F$.

ii) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_E < 1} \|T(x)\|_F$.

iii) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_E \neq 0} \dfrac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

iv) $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \ \forall x \in E\}$.

v) $\|T(x)\|_F \leq \|T\|\|x\|_E, \ \forall x \in E$.

Bài 2: Với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, xét:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \ \text{ và } \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

i) Chứng minh rằng $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ là các chuẩn trên $\mathbb{R}^n$.

ii) Chứng tỏ rằng $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Bài 3: Cho $(E, \|\cdot\|_1)$ là một không gian Banach và $\|\cdot\|_2$ là một chuẩn trên E sao cho tồn tại các số dương α, β để $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$ với mọi $x \in E$. Chứng minh rằng $(E, \|\cdot\|_2)$ cũng là một không gian Banach.

Bài 4: Cho E và F là hai không gian Banach và T là một song ánh tuyến tính liên tục từ E vào F. Chứng minh rằng T^{-1} là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ F vào E.

2.3 Đề thi cuối học kì I Giải tích hàm, 2006 - 2007

(Thời gian: 90 phút; Sinh viên chọn ra 5/6 câu để giải)

Bài 1: Cho $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian định chuẩn $(E, \|\cdot\|)$. Chứng minh $\{\|x_n\|\}$ là một dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$.

Bài 2: Cho a và b là các vector trong không gian định chuẩn $(E, \|\cdot\|)$. Giả sử $\|a\| < 1 < \|b\|$. Chứng minh rằng có tồn tại $t \in (0,1)$ sao cho $\|ta + (1-t)b\| = 1$.

Bài 3: Cho $E = C([0,1], \mathbb{R})$ và $\|x\| = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$ với mọi $x \in E$. Đặt

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x(t)\mathrm{d}t$$

Hỏi T có là ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào $\mathbb{R}$ hay không?

Bài 4: Cho $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ và T là một ánh xạ tuyến tính từ $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ vào $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng chỉ có duy nhất một bộ n số thực $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sao cho:

$$T((x_1, \ldots, x_n)) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Bài 5: Cho $\{u_1, \ldots, u_m\}$ là một họ trực chuẩn trong không gian Hilbert hữu hạn chiều H. Giả sử $\{u_1, \ldots, u_m\}$ là một cơ sở của H. Hỏi $\{u_1, \ldots, u_m\}$ có là một họ trực chuẩn cực đại trong H không?

Bài 6: Cho $\{u_i\}_{i \in I}$ là một họ trực chuẩn cực đại trong không gian Hilbert $(H, \|\cdot\|)$ với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Cho $x, y \in H$ sao cho $|\langle x, u_i \rangle| \leq |\langle y, u_i \rangle|$ với mọi i trong I. Hỏi $\|x\| \leq \|y\|$ là đúng hay sai?

2.4 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2007 - 2008

(Ngày thi: 16/06/2008; Thời gian: 120 phút)

Bài 1: Cho (X, d) là một không gian metric và A là tập con khác rỗng của X. Với mỗi $x \in X$, ta đặt:

$$\varphi(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

a) Chứng minh rằng $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq d(x, y)$ với $\forall x, y \in X$. Từ đó suy ra $\varphi : X \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục đều.

b) Chứng minh rằng $\varphi(x) = 0$ khi và chỉ khi $x \in \overline{A}$, với $\overline{A}$ là bao đóng của A trong X. Từ đó suy ra nếu A, B là hai tập con đóng, không rỗng của X sao cho $A \cap B \neq \varnothing$ thì tồn tại hàm số liên tục $f : X \to [0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $f(x) = 1$ với mọi $x \in B$.

Bài 2: Cho E, F là hai không gian định chuẩn, và $L(E, F)$ là không gian vector các ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào F. Với mỗi $T \in L(E, F)$, đặt:

$$\|T\|_{L(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F$$

Chứng minh rằng:

a) $T \to \|T(x)\|_{L(E,F)}$ là một chuẩn trên $L(E, F)$.

b) $\|T(x)\|_F \leq \|T(x)\|_{L(E,F)} \|x\|_E$ với mọi $x \in E$.

Bài 3: Cho E, F là hai không gian Banach và $T : E \to F$ là một **song ánh** tuyến tính liên tục. Đặt $S = T^{-1}$. Chứng minh:

a) S là một ánh xạ tuyến tính từ F vào E.

b) $S \in L(E, F)$ và $\|S\|_{L(E,F)} \geq \|T\|^{-1}_{L(E,F)}$.

Bài 4: Cho E là một không gian định chuẩn và $x \in E$.

a) Chứng minh rằng có tồn tại $T \in L(E, \mathbb{R}) \equiv E^*$ sao cho $\|T\| = 1$ và $Tx = \|x\|$.

b) Chứng minh rằng:

$$\|x\| = \sup_{T \in E^*, \|T\| \leq 1} |Tx|$$

2.5 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2008 - 2009

(Ngày thi: 15/06/2009; Thời gian: 120 phút)

Bài 1: Cho (X,d) là một không gian metric và A là tập con khác rỗng của X. Với mỗi $x \in X$, ta xét ánh xạ $\varphi : X \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\varphi(x) = \inf_{a\in A} d(x,a)$$

a) Chứng minh rằng $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq d(x,y)$ với $\forall x, y \in X$.

b) Chứng minh rằng $\varphi(x) = 0$ khi và chỉ khi $x \in \overline{A}$, với $\overline{A}$ là bao đóng của A trong X. Từ đó suy ra nếu A, B là hai tập con đóng, không rỗng của X sao cho $A \cap B \neq \varnothing$ thì tồn tại hàm số liên tục $f : X \to [0,1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $f(x) = 1$ với mọi $x \in B$.

Bài 2: Cho E, F là hai không gian định chuẩn, và $L(E,F)$ là không gian vector các ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào F. Với mỗi $\Lambda \in L(E,F)$, đặt:

$$\|\Lambda\|_{L(E,F)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|\Lambda(x)\|_F$$

Chứng minh rằng:

a) $\Lambda \to \|\Lambda(x)\|_{L(E,F)}$ là một chuẩn trên $L(E,F)$.

b) $\|\Lambda(x)\|_F \leq \|\Lambda(x)\|_{L(E,F)}\|x\|_E$ với mọi $x \in E$.

Bài 3: Gọi $E = C([0,1],\mathbb{R})$ là không gian các ánh xạ liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$. Với mỗi $x \in E$, đặt:

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| \mathrm{d}t$$

a) Chứng minh $(E, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn.

b) Xét dãy $(x_n) \subset E$ xác định bởi:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ n(2t-1), & \dfrac{1}{2} < t \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} \\ 1, & \dfrac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng (x_n) là dãy Cauchy nhưng không hội tụ trong $(E, \|\cdot\|)$.

Bài 4: Cho E là không gian định chuẩn và $x \in E$. Chứng minh rằng:

$$\|x\| = \sup_{\Lambda \in E^*, \|\Lambda\| \leq 1} |\Lambda x|,$$

trong đó $E^* \equiv L(E,\mathbb{R})$ là không gian các ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào $\mathbb{R}$.

2.6 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2009 - 2010

(Ngày thi: 25/06/2010; Thời gian: 120 phút)

Bài 1: Cho f, g là hai ánh xạ liên tục từ không gian metric X đến không gian metric Y, và A là một tập con khác rỗng của X sao cho $f(x) = g(x)$ với $\forall x \in A$. Chứng minh rằng $f(x) = g(x)$ với $\forall x \in \overline{A}$.

Bài 2: Cho X là không gian metric, G là một tập mở trong X và $A \subset X$. Chứng minh rằng nếu $G \cap A \neq \varnothing$ thì $G \cap \overline{A} \neq \varnothing$.

Bài 3: Cho $(E, \|\cdot\|_1)$ là không gian Banach và $\|\cdot\|_2$ là một chuẩn trên E sao cho với $\forall \alpha, \beta > 0$ thì:

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Chứng minh rằng $(E, \|\cdot\|_2)$ là không gian Banach.

Bài 4: Cho $(E, \|\cdot\|_E)$ là một không gian định chuẩn. Đặt $\Gamma = \{(x, x) : x \in E\}$. Chứng minh Γ là một không gian vector con đóng trong không gian định chuẩn $E \times E$.

Bài 5: Cho $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là họ trực giao các vector khác 0 trong không gian Hilbert H. Chứng minh rằng:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |e_i|^2$$

Bài 6: Cho K là ánh xạ liên tục từ $[0,1] \times [0,1]$ vào $\mathbb{R}$. Đặt $E = C([0,1])$ là không gian các hàm số liên tục trên $[0,1]$. Với mỗi $x \in E$, ta đặt:

$$\|x\| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

a) Chứng minh rằng $(E, \|\cdot\|)$ là không gian Banach.

b) Với mỗi $x \in E$, đặt:

$$T(x)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \ \forall t \in [0,1]$$

- i) Chứng minh $T(x)$ liên tục trên $[0,1]$.
- ii) Chứng minh $T : E \to E$ là ánh xạ tuyến tính.
- iii) Chứng minh T là ánh xạ liên tục.

2.7 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2011 - 2012

(Thời gian: 90 phút)

Bài 1: Cho K là một tập compact trong một không gian định chuẩn E và a là một vector trong E. Hỏi có hay không một vector b trong K sao cho $\|a-b\| = \inf\{\|a-x\| : x \in K\}$?

Bài 2: Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về a trong một không gian định chuẩn E. Cho $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$. Hỏi $\{x_{n_k}\}$ có hội tụ về a trong E hay không?

Bài 3: Cho Y là một không gian vector con đóng trong một không gian Banach $(X, \|\cdot\|)$. Đặt:

$$\|z\|_Y = \|z\|, \ \forall z \in Y.$$

Hỏi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ có là không gian Banach hay không?

Bài 4: Cho T là một ánh xạ tuyến tính từ một không gian định chuẩn $(E, \|\cdot\|_E)$ vào không gian định chuẩn $(F, \|\cdot\|_F)$. Giả sử có hai số thực dương M và r sao cho $\|T(x)\|_F \leq M, \ \forall x \in B'(0, r)$. Hỏi T có liên tục trên E hay không?

Bài 5: Cho H là một không gian Hilbert thực trên $\mathbb{R}$ với tích vô hướng $\langle ., . \rangle$, và a là một vector trong H. Với mọi $x \in H$, đặt

$$\alpha(x) = \langle x, a \rangle; \quad T(x) = \alpha(x)a$$

Hỏi T có là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ H vào H hay không?

Bài 6: Cho H là một không gian Hilbert thực trên $\mathbb{R}$ với tích vô hướng $\langle ., . \rangle$, và A là một tập con khác trống trong H. Đặt

$$B = \{y \in H : \langle y, x \rangle = 0, \ \forall x \in A\}$$

Hỏi B có là một tập đóng trong H hay không?

2.8 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2012 - 2013

(Thời gian: 120 phút)

Bài 1 (3 điểm): Các mệnh đề sau đúng hay sai? Không cần giải thích.

a) Dãy Cauchy thì bị chặn.

b) Dãy bị chặn là dãy Cauchy.

c) Trong không gian Banach, dãy hội tụ là dãy Cauchy.

d) Trong không gian Banach, dãy Cauchy là dãy hội tụ.

e) Trong không gian compact thì dãy Cauchy phải hội tụ.

f) Trong không gian compact thì mọi dãy đều bị chặn.

g) Chuẩn sinh ra metric.

h) Metric sinh ra chuẩn.

i) Tồn tại không gian định chuẩn hữu hạn chiều không đầy đủ.

j) Tồn tại không gian định chuẩn vô hạn chiều không đầy đủ.

k) Tồn tại $p \geq 1$ để $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right) \in \ell^p$.

l) $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ là không gian Banach với chuẩn sup.

Bài 2 (2,5 điểm): Chứng tỏ hạn chế của một ánh xạ liên tục trên một không gian metric xuống một không gian con là một ánh xạ liên tục. Cụ thể, giả sử X, Y là hai không gian metric và $A \subset X$ là một không gian metric con của X. Giả sử $f : X \to Y$ là ánh xạ liên tục. Xét ánh xạ:

$$\begin{aligned} f\big|_A : A &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Chứng tỏ $f\big|_A$ là ánh xạ liên tục.

Bài 3 (2,5 điểm): Chứng tỏ nếu hai chuẩn là tương đương thì tính compact của hai không gian định chuẩn là trùng nhau. Cụ thể, giả sử $\|\cdot\|_a$ và $\|\cdot\|_b$ là hai chuẩn tương đương trên không gian vector X, tức là có $\alpha, \beta > 0$ sao cho $\forall x \in X$ thì $\alpha\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta\|x\|_a$. Cho $A \subset X$. Chứng tỏ nếu A compact theo chuẩn $\|\cdot\|_a$ thì A compact theo chuẩn $\|\cdot\|_b$.

Bài 4 (3 điểm): Trong $X := C([0,1], \mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$, xét:

$$A = \left\{ f \in X \,\middle|\, \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x < 2 \right\}$$

a) Cho $f_n(x) = 2 - \frac{1}{n}$. Chứng tỏ dãy $(f_n)_{n \geq 1}$ hội tụ trong X.

b) Chứng tỏ A không là tập đóng trong X.

c) (Thưởng 1 điểm) A có mở trong X hay không?

2.9 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2015 - 2016

(Thời gian: 120 phút)

Bài 1 (5 điểm): Cho E là không gian định chuẩn và $T \in L(E, E)$. Đặt $T^0 = \mathrm{Id}_E$, và với $n \in \mathbb{Z}^+$ ta đặt $T^n = T^{n-1} \circ T$.

a) Chứng tỏ $T^n \in L(E, E)$.

b) Chứng tỏ $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.

c) Nhắc lại rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$

Đặt $s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\|T\|^i}{i!}$. Chứng tỏ $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$.

d) Đặt $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{T^i}{i!}$. Chứng tỏ $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là dãy Cauchy trong $L(E, E)$.

e) Giả sử thêm E là một không gian Banach. Chứng tỏ $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về một giới hạn trong $L(E, E)$. Giới hạn này thường được kí hiệu là e^T, vậy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^i}{i!} = e^T$$

Bài 2 (2 điểm): Cho H là một không gian Hilbert và $M, N \subset H$. Trong các mệnh đề dưới đây, chỉ ra mệnh đề nào đúng, và không cần giải thích:

a) $M^\perp \neq \varnothing$

b) $M \subset N \Rightarrow M^\perp \subset N^\perp$

c) $M \subset N \Rightarrow N^\perp \subset M^\perp$

d) $M \subsetneq N \Rightarrow N^\perp \subsetneq M^\perp$

e) $M^\perp = \overline{M}^\perp$

f) $M^\perp = \langle M \rangle^\perp$

Bài 3 (3 điểm): Xét không gian Hilbert $L^2([0, 1], \mathbb{R})$. Gọi M là tập tất cả các hàm hằng trên $[0, 1]$.

a) Chứng tỏ M là không gian vector con của H.

b) Chứng tỏ $\{1\}$ là một cơ sở trực chuẩn của M.

c) Vì sao M là không gian vector con đóng của H?

d) Cho hàm $f(x) = x$. Tính $\langle f, 1 \rangle$.

e) Cho $g = f - \frac{1}{2}$. Chứng tỏ $g \perp M$.

f) Chứng tỏ $P_M f = \frac{1}{2}$.

2.10 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2017 - 2018

(Ngày thi: 19/06/2018; Thời gian: 120 phút)

Bài 1 (4 điểm): Cho $X = C([0,1], \mathbb{R})$ với chuẩn sup. Xét ánh xạ:

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ f &\mapsto Tf \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} Tf : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_0^t f(s)\cos(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

a) Giải thích vì sao $Tf \in X$.

b) Kiểm tra T là ánh xạ tuyến tính.

c) Kiểm tra T là ánh xạ tuyến tính liên tục.

d) Hãy ước lượng $\|T\|$.

e) Hãy tính chính xác $\|T\|$.

Bài 2 (4 điểm): Xét không gian tích trong $H = L^2([0,1])$ trên trường số thực. Tích trong trên H được cho bởi

$$\langle u, v\rangle := \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Xét tập con $E = \{1, \sin 2\pi x\}$ của H.

a) Tính chuẩn của các phần tử trong E.

b) Chứng tỏ E là một họ trực giao trong H.

c) Hãy trực chuẩn hóa E, tức là tìm một họ trực chuẩn F sinh ra không gian tuyến tính M sinh bởi E.

d) Hãy tìm hình chiếu $P_M f$ với $f(x) = x$.

Bài 3 (2 điểm): Cho H là một không gian Hilbert và M là không gian vector con của H. Giả sử $x \in H$ có phân tích:

$$x = x_1 + x_2,\ x_1 \in M,\ x_2 \in M^{\perp} \qquad (1)$$

a) Chứng tỏ $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.

b) Chứng tỏ phân tích (1) trên là duy nhất, nghĩa là nếu $x = x_1' + x_2',\ x_1' \in M,\ x_2' \in M^{\perp}$ thì $x_1 = x_1',\ x_2 = x_2'$.

c) Khi nào thì chắc chắn có phân tích (1) trên?

2.11 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2018 - 2019

(Ngày thi: 15/06/2019; Thời gian: 90 phút)

Bài 1 (4 điểm): Cho $X := C([2,3],\mathbb{R})$ là không gian các hàm số liên tục trên $[2,3]$. Trên X, xét chuẩn

$$\|u\|_\infty := \max\{|u(t)| \mid t \in [2,3]\}$$

Với mỗi $x \in X$, đặt $T(x)$ là hàm cho bởi:

$$\begin{aligned} T(x) : [2,3] &\to \mathbb{R} \\ t \mapsto T(x)(t) &= \int_2^3 \left(t^2+1\right) x(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

a) Chứng minh rằng $T(x) \in X$.

b) Chứng minh rằng ánh xạ

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ x &\mapsto T(x) \end{aligned}$$

là ánh xạ tuyến tính liên tục.

c) Hãy ước lượng một chặn trên cho chuẩn của T.

d) Hãy tính chính xác chuẩn của T.

Bài 2 (4 điểm): Xét không gian Hilbert $L^2([-1,1],\mathbb{R})$ trên trường số thực với tích trong:

$$\langle f,g\rangle_{L^2} := \int_{-1}^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Cho $x_1(t)=1,\ x_2(t)=t,\ x_3(t)=t^2$.

a) Tính $\|x_i\|_{L^2}$ với $i=1,2,3$.

b) Trực chuẩn hóa x_1,x_2,x_3 theo thứ tự này.

c) Tìm $h \in L^2([-1,1],\mathbb{R})$ sao cho $h \neq 0$ và $h \perp (x_2+x_3)$.

Bài 3 (2 điểm):

a) Cho họ trực chuẩn $\{e_k\}$ trong không gian tích trong H. Chứng minh rằng với mọi $x,y \in H$ thì:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle| \le \|x\|\|y\|$$

b) Cho x trong không gian định chuẩn X sao cho $|f(x)| \le M$ với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in X'$ với $\|f\|_{X'}=1$. Chứng minh rằng $\|x\| \le M$.

2.12 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2019 - 2020

(Ngày thi: 01/09/2020; Thời gian: 90 phút)

Bài 1 (2 điểm): Cho $X := C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup và dãy hàm:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ 2n^2\left(\dfrac{1}{n} - x\right), & \dfrac{1}{2n} < x < \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Giải thích vì sao $f_n \in X$ và $\{f_n\}_{n\ge1}$ hội tụ điểm trên $[0,1]$.

b) Tính $\|f_n\|_X$. Dãy $\{f_n\}_{n\ge1}$ có hội tụ trên X không? Vì sao?

Bài 2 (4 điểm): Cho $X := C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup. Đặt ánh xạ:

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ f &\mapsto Tf \end{aligned}$$

với

$$T(f)(t) = f(t) + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s,\ \ t \in [0,1]$$

a) Giải thích vì sao $Tf \in X$ và kiểm tra T là ánh xạ tuyến tính.

b) Kiểm tra T là ánh xạ tuyến tính liên tục.

c) Tính $\|T\|$.

d) Chứng minh T là một đơn ánh.

Bài 3 (4 điểm): Xét không gian tích trong $H = L^2([0,1])$ trên trường số thực. Tích trong trên H được cho bởi

$$\langle u, v\rangle := \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Xét tập con $E = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ của H với:

$$\varphi_1(t) = \mathbb{I}_{[0,\frac12)}(t) - \mathbb{I}_{[\frac12,1]}(t); \qquad \varphi_2(t) = \mathbb{I}_{[0,\frac14)}(t) - \mathbb{I}_{[\frac14,\frac12]}(t)$$

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

a) Tính chuẩn của các phần tử trong E.

b) Chứng minh $\varphi_1 \perp \varphi_2$ và tìm một họ trực chuẩn F sinh ra không gian tuyến tính M sinh bởi E.

c) Hãy tìm hình chiếu $P_M f$ với $f(t) = t^2$.

d) Chứng minh $\|P_M u - P_M v\| \le \|u - v\|$ với mọi $u, v \in H$.

Bài 4 (2 điểm thưởng): Cho H là không gian Hilbert tách được và $\{e_n\}_{n\ge1}$ là một dãy trực chuẩn trên H. Chứng minh rằng $\{e_n\}_{n\ge1}$ là một dãy trực chuẩn cực đại khi và chỉ khi với mọi $x \in H$ thì:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$$

2.13 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2020 - 2021

(Ngày thi: 21/10/2021; Thời gian: 90 phút)

Bài 1 (3 điểm): Cho $X := C([-1,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup. Đặt ánh xạ:

$$\begin{aligned} T : X &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto Tf \end{aligned}$$

với

$$Tf = \int_{-1}^{0} f(s)\mathrm{d}s - \int_{0}^{1} f(s)\mathrm{d}s$$

a) Kiểm tra T là ánh xạ tuyến tính.

b) Kiểm tra T là ánh xạ liên tục.

c) Hãy tính $\|T\|$ bằng cách sử dụng dãy hàm sau:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < -\dfrac{1}{n} \\ -nt, & -\dfrac{1}{n} \leq t \leq \dfrac{1}{n} \\ -1, & \dfrac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Bài 2 (3 điểm): Xét không gian tích trong $H = L^2((-\infty,\infty))$ trên trường số thực. Tích trong trên H được cho bởi

$$\langle u, v\rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Xét tập $E = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ với:

$$\varphi_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad \varphi_1(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}; \quad \varphi_2(t) = t^2e^{-\frac{t^2}{2}}$$

a) Tính chuẩn của các phần tử trong E, biết rằng $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

b) Trực chuẩn hóa Gram - Schmidt các phần tử trong E để thu được họ trực chuẩn $\{e_0, e_1, e_2\}$.

Bài 3 (4 điểm): Cho H là một không gian Hilbert tách được và $\{e_n\}_{n\geq 1}$ là một dãy trực chuẩn cực đại trên H. Cho $T : H \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ tuyến tính bị chặn trên H, tồn tại $M > 0$ sao cho $|T(u)| \leq M\|u\|_H$ với mọi $u \in H$. Đặt $w_k = T(e_k)$ với $k = 1, 2, \ldots$

a) Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{N}$ thì

$$\sum_{k=1}^{m} |w_k|^2 \leq M^2,$$

từ đó chứng minh $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$ và $w = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} w_ke_k \in H$.

b) Chứng minh rằng $T(u) = \langle u, w\rangle_H$ với mọi $u \in H$ và $\|T\| = \|w\|_H$.

2.14 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2021 - 2022

(Ngày thi: 01/07/2022; Thời gian: 90 phút)

Bài 1 (3 điểm): Cho

$$X := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ với } f \text{ liên tục từng khúc, liên tục phải tại mỗi } x \in [0,1] \text{ và liên tục tại } 1\}$$

Ta định nghĩa:

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t,\ \ f \in X$$

a) (1,5 điểm) Kiểm tra $\|\cdot\|_1$ là một chuẩn trên X.

b) (1,5 điểm) Cho dãy hàm

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{n}{2}x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{4}, & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

với n là số nguyên dương. Kiểm tra dãy $\{f_n\}_{n\ge1}$ hội tụ về hàm

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 1, & \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

theo chuẩn $\|\cdot\|_1$. Từ đó suy ra không gian các hàm số liên tục $C([0,1],\mathbb{R})$ không đóng trong $(X, \|\cdot\|_1)$.

Bài 2 (3 điểm): Cho $q > 2$. Đặt ánh xạ đồng nhất:

$$\begin{aligned} I : \ell^2 &\to \ell^q \\ x &\mapsto Ix = x \end{aligned}$$

a) (1,5 điểm) Kiểm tra I là ánh xạ tuyến tính liên tục.

b) (1,5 điểm) Tính chuẩn của ánh xạ I.

Bài 3 (3 điểm): Cho H là một không gian Hilbert với tích trong $\langle\cdot,\cdot\rangle$ và $\{e_n\}_{n\ge1}$ là một dãy trực chuẩn trên H. Đặt $M = \operatorname{span}(\{e_n\}_{n\ge1})$ là bao tuyến tính của dãy trực chuẩn $\{e_n\}_{n\ge1}$.

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi $x \in H$ thì $x \in \overline{M}$ khi và chỉ khi $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$.

b) (1 điểm) Gọi $\{f_n\}_{n\ge1}$ là một dãy trực chuẩn trên H. Đặt $G = \operatorname{span}(\{f_n\}_{n\ge1})$ là bao tuyến tính của dãy trực chuẩn $\{f_n\}_{n\ge1}$. Chứng minh rằng $\overline{M} = \overline{G}$ khi và chỉ khi:

$$e_n = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_n, f_k\rangle f_k \ \text{ và } \ f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_n, e_k\rangle e_k$$

c) (1 điểm) Cho $\{x_n\}_{n\ge1}$ là một dãy trong H. Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ hội tụ, suy ra $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hội tụ.

Bài 4 (3 điểm): Trong bài này, chúng ta sẽ đi chứng minh định lý Banach - Steinhaus.

a) (1 điểm) Cho $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn. Chứng minh với $x, y \in X$ thì

$$\max\{\|T(x+y)\|_Y, \|T(x-y)\|_Y\} \ge \|Ty\|_Y$$

Chứng minh rằng với mỗi $x \in X$ và $r > 0$ thì:

$$\sup_{z \in B(x,r)} \|Tz\|_Y \geq r\|T\|$$

Ở đây $B(x,r) = \{z \in X : \|z - x\|_X < r\}$.

b) (1 điểm thưởng) Xét dãy ánh xạ tuyến tính bị chặn $T_n : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ với $n \in \mathbb{Z}^+$. Biết rằng X là không gian Banach và $\|T_n\| \geq 4^n$. Chứng minh rằng tồn tại dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $x_0 = 0,\ \|x_n - x_{n-1}\| \leq 3^{-n}$ và $\|T_n x_n\|_Y \geq \frac{2}{3} 3^{-n} \|T_n\|$.

c) (1 điểm thưởng) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ trong câu b hội tụ về $x \in X$ và $\{T_n x\}$ không bị chặn trong Y.

2.15 Đề thi cuối học kì I Giải tích hàm, 2022 - 2023

(Thời gian: 120 phút)

Bài 1 (4 điểm): Kiểm tra các ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính liên tục, và tính chuẩn của ánh xạ.

a)

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) &\mapsto Tx = -2x_1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T : C([0,1], \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto Tx = -3x\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} T : C([0,1], \mathbb{R}) &\to C([0,1], \mathbb{R}) \\ x &\mapsto Tx \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} Tx : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (Tx)(t) = \int_0^1 sx(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Bài 2 (2 điểm): Cho H là không gian tích trong và $x, y \in H$.

a) Chứng minh rằng nếu $x \perp y$ thì $\|x + y\| = \|x - y\|$.

b) Chứng minh rằng không gian trực giao của H, tức $x^\perp = \{y \in H \mid y \perp x\}$, là một không gian tuyến tính con của H và là một tập đóng.

Bài 3 (1,5 điểm): Cho ánh xạ:

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) &\mapsto Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2} \end{aligned}$$

a) Kiểm tra ánh xạ T được định nghĩa tốt, tức là Tx được xác định.

b) Tìm $y \in \ell^2$ sao cho với mọi $x \in \ell^2$ thì $Tx = \langle x, y \rangle_{\ell^2}$.

c) Chứng tỏ T là ánh xạ tuyến tính liên tục và tính chuẩn của T.

Bài 4 (1,5 điểm): Trong ℓ^2, xét họ $E = (e_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ các vector $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots), n \in \mathbb{Z}^+$, với số 1 nằm ở tọa độ thứ n của e_n. Cho

$$x = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\right)$$

a) Kiểm tra E là một họ trực chuẩn của ℓ^2.

b) Kiểm $x \in \ell^2$.

c) Kiểm $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ (không trích dẫn các kết quả tổng quát hơn của không gian Hilbert).

d) Giải thích vì sao x không phải là một tổ hợp tuyến tính của hữu hạn phần tử trong E, nhưng là giới hạn của một dãy các phần tử là tổ hợp tuyến tính của hữu hạn phần tử trong E.

Bài 5 (1 điểm): Trong không gian Hilbert $L^2([0,1],\mathbb{R})$, cho $f_1(t) = 1$ và $f_2(t) = t$.

a) Tính $\|f_1\|$, $\|f_2\|$, $\langle f_1, f_2\rangle$.

b) Tìm hình chiếu trực giao của f_2 lên f_1.

c) Tìm một cơ sở trực chuẩn cho không gian tuyến tính con E sinh bởi họ (f_1, f_2). Nói cách khác, hãy trực chuẩn hóa họ (f_1, f_2).

2.16 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2022 - 2023

(Ngày thi: 26/06/2023; Thời gian: 90 phút)

Bài 1 (4 điểm): Cho $X := C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup. Đặt ánh xạ:

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ f &\mapsto Tf \end{aligned}$$

với

$$Tf(t) = \int_0^1 (t-s)f(s)\mathrm{d}s,\ t \in [0,1]$$

a) Kiểm tra $Tf \in X$ với mọi $f \in X$.

b) Kiểm tra T là ánh xạ tuyến tính liên tục.

c) Hãy tính $\|T\|$.

Bài 2 (4 điểm):

a) Cho $X = \mathbb{R}^2$. Tìm $M^\perp$, biết $M = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

b) Cho $X = \mathbb{R}^n$ và $Y = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k = 0,\ \forall k \text{ chẵn}\}$. Chứng minh Y là không gian con đóng của X, và tìm $Y^\perp$.

c) Xét không gian tích trong $H = C([-1,1],\mathbb{R})$ là không gian các hàm số liên tục trên $[-1,1]$ với tích trong của H được cho bởi:

$$\langle u, v\rangle := \int_{-1}^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Xét tập con $E = \{1, t\}$ của H. Tìm họ trực chuẩn hóa của E bằng kỹ thuật Gram - Schmidt.

Bài 3 (2 điểm):

a) Cho X là không gian con đóng của $\mathbb{R}^2$ và f là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X. Chứng minh rằng tồn tại phần tử $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $f(x,y) = ax + by$ với mọi $(x,y) \in X$.

b) Gọi g là ánh xạ tuyến tính liên tục trên $\mathbb{R}^2$ mở rộng Hahn - Banach của ánh xạ f ở câu trên. Chứng minh $g(x,y) = ax + by$ với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Cho $X = \{(x, 3x) \in \mathbb{R}^2\}$ và ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$ thỏa $f(x,y) = x$. Tìm (a,b) và g minh họa cho các câu bên trên.

2.17 Đề thi cuối học kì hè Giải tích hàm, 2022 - 2023

(Ngày thi: 30/08/2023; Thời gian: 120 phút; Lớp: 20TTH_HE)

Bài 1 (3 điểm): Cho $X = L^2([0,1])$ trên trường số thực và ánh xạ $T : X \to X$ xác định bởi:

$$Tf(x) = x^3 f(x)$$

a) Giải thích vì sao $Tf \in X$?

b) Chứng tỏ T là một ánh xạ tuyến tính liên tục.

c) Cho dãy $f_n(x) = x^n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Chứng tỏ $f_n \in X$. Tính $\|f_n\|_2$ và $\|Tf_n\|_2$.

d) Tính $\|T\|$.

Bài 2 (3 điểm): Cho X là một không gian định chuẩn trên trường số thực và $M \subsetneq X$ là một không gian con đóng trong X. Cho $a \in X \setminus M$ cố định, và đặt $d = \inf\{\|a - m\| : m \in M\}$.

a) Chứng tỏ $d > 0$.

b) Cho ánh xạ $T : M + \langle a \rangle \to \mathbb{R}$ xác định bởi $T(m + ta) = td$ với mọi $m \in M$ và $t \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ T là một phiếm hàm tuyến tính liên tục.

c) Chứng tỏ tồn tại $f \in X^*$ sao cho $f\langle a \rangle = 1,\ f\big|_M = 0$ và $\|f\| \leq \dfrac{1}{d}$.

Bài 3 (4 điểm): Cho không gian Hilbert $H = L^2([-2,2];\mathbb{R})$ trên trường thực với tích trong trên H cho bởi:

$$\langle u, v \rangle = \int_{-2}^{2} u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Xét tập $E = \{1, x, x^2\}$ trong H.

a) Trực chuẩn hóa Gram - Schmidt các phần tử trong E để thu được họ trực chuẩn $\{e_1, e_2, e_3\}$.

b) Tính:

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-2}^{2} \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 \mathrm{d}x$$

c) Gọi M là không gian tuyến tính sinh bởi E, và cho ánh xạ $T : H \to M$ thỏa $x - Tx \in M^\perp$ với mọi $x \in H$. Chứng tỏ M đóng trong H và

$$\|x - Tx\| = \inf\{\|x - m\| : m \in M\}$$

với mọi $x \in H$.

2.18 Đề thi cuối học kì II Giải tích hàm, 2023 - 2024

(Ngày thi: 24/06/2024; Thời gian: 90 phút)

Bài 1 (4 điểm): Trong không gian các dãy số thực ℓ^2 với chuẩn $\|\cdot\|_2$, cho ánh xạ:

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\to \ell^2 \\ x &\mapsto Tx = \left(\frac{n}{3n+1}x_n\right)_{n\in\mathbb{Z}^+} \end{aligned}$$

với $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \in \ell^2$.

a) Chứng tỏ T được định nghĩa tốt, tức là $Tx \in \ell^2$ với mọi $x \in \ell^2$.

b) Kiểm tra T là ánh xạ tuyến tính liên tục.

c) Xét vector $e_k \in \ell^2, k \in \mathbb{Z}^+$ với số 1 ở vị trí thứ k và số 0 ở những vị trí khác. Tính $\|Te_k\|_2$ và chứng tỏ:

$$\|T\| = \frac{1}{3}.$$

d) Chứng tỏ không tồn tại vector $a \in \ell^2$ khác 0 sao cho $\|Ta\|_2 = \|T\|\|a\|_2$.

Bài 2 (4 điểm):

a) Cho $X = \mathbb{R}^n$ và $Y = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$. Chứng minh Y là không gian con đóng của X và tìm $Y^\perp$.

b) Xét không gian tích trong $H = C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ là không gian các hàm số liên tục trên $[0, 2\pi]$ với tích trong được cho bởi:

$$\langle u, v\rangle := \int_0^{2\pi} u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Cho $F := \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ với $u_k(t) = \cos kt, k = \overline{0, n}$. Chứng minh F là tập trực giao.

c) Chứng minh F ở câu trên là độc lập tuyến tính và tìm dãy trực chuẩn từ F.

d) Tìm hình chiếu của hàm $f(t) = 2024 - t$ trên không gian tuyến tính sinh bởi 3 vector đầu tiên của F.

Bài 3 (2 điểm): Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn và $x_0 \neq 0$ trong X. Đặt $M = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$ và ánh xạ $g : M \to \mathbb{R}$ với $g(tx_0) = t\|x_0\|$.

a) Chứng minh g là ánh xạ tuyến tính liên tục trên M và $\|g\|_{M^*} = 1$.

b) Cho $z \in X$ sao cho $|f(z)| \leq 2024$ với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in X^*$ mà $\|f\|_{X^*} = 1$. Chứng minh rằng $\|z\| \leq 2024$.