金华十校 2024—2025 学年第一学期期末调研考试

高三数学试题卷

本试卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟.

考生注意：

1. 考生答题前，务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题卷上.
2. 选择题的答案须用 2B 铅笔将答题卷上对应题目的答案涂黑，如要改动，须将原填涂处用橡皮擦净.
3. 非选择题的答案须用黑色字迹的签字笔或钢笔写在答题卷上相应区域内，答案写在本试题卷上无效.

选择题部分(共 58 分)

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|2<x^2<10\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$(▲)

A. $\{-2,2,3\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{2\}$　　D. $\{3\}$

2. 设 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\frac{1}{1-z}=$(▲)

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $2-\mathrm{i}$　　D. $2+\mathrm{i}$

3. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}, x+1<0$”的否定是(▲)

A. $\forall x\in\mathbf{R}, x+1\geqslant0$　　B. $\exists x\in\mathbf{R}, x+1\geqslant0$　　C. $\forall x\in\mathbf{R}, x+1>0$　　D. $\exists x\in\mathbf{R}, x+1>0$

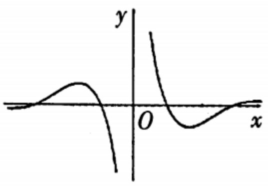
4. 以边长为 1 的正方形的一条边所在的直线为轴旋转一周，得到的几何体的体积为(▲)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

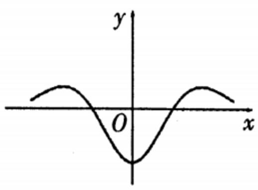
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(-1,1)$ 垂直，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$(▲)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

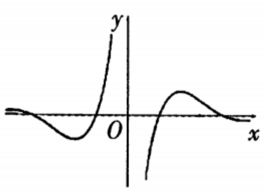
6. 函数 $f(x)=\frac{\cos2x}{e^x+e^{-x}}$ 的部分图象是(▲)



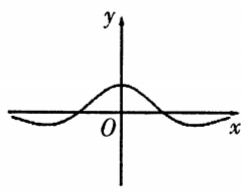
A.



B.



C.



D.

7. 甲乙两人玩跳棋游戏,约定由抛两次硬币的结果确定谁先走,若两次都正面向上,则甲先走,否则乙先走,已知甲先走的情况下,甲胜的概率为 p,乙先走的情况下,甲胜的概率为 $\frac{1}{2}p$,则甲获胜的概率是(▲)

A. $1-\frac{3}{8}p$　　B. $\frac{5}{8}p$　　C. $1-\frac{1}{3}p$　　D. $\frac{2}{3}p$

8. 已知函数 $f(x)=a^x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2-x-1(a>0$ 且 $a\neq1)$在$(0,1)$上有唯一零点,则 a 的范围为(▲)

A. $\frac{14}{9}<a<\mathrm{e}$　　B. $2\leqslant a<\mathrm{e}$　　C. $1<a\leqslant\frac{14}{9}$　　D. $a\geqslant\mathrm{e}$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 随机变量 $X\sim B(5,p)$,且 $P(X\geqslant1)=\frac{31}{32}$,则(▲)

A. $p=\frac{1}{2}$　　B. $E(X)=\frac{5}{2}$　　C. $D(X)=\frac{3}{2}$　　D. $P(X=2)=\frac{1}{4}$

10. 已知 A,B 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点和上顶点,$F_1,F_2$ 为椭圆的左、右焦点,P 为椭圆上一点,圆 T 的圆心 T 在第一象限,且与 y 轴相切于点 B,直线 AB 与圆 T 的另一个交点为 D,直线 OT(O 为坐标原点)垂直于直线 AB,记椭圆的离心率为 e,则(▲)

A. 若$\angle F_1PF_2=60°$且 $PF_1\perp F_1F_2$,则 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. 若 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则$\angle F_1PF_2$ 最大值为 $60°$

C. OD 是圆 T 的切线

D. 若 D 为线段 AB 的中点,则 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$

11. 已知定义域是 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$不恒为 0,满足 $f(x+y)=f(x)f(y)-f(k-x)f(k-y)$,且 $f(-k)=f(k)$ 则(▲)

A. $f(k)=0$　　B. $f(0)=1$

C. $x=k$ 是函数 $f(x)$的一条对称轴　　D. $f(k)+f(2k)+f(3k)+\ldots+f(2025k)=0$

非选择题部分(共 92 分)

三、填空题:本题共3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知角 θ 的终边经过点 $P(1,1)$,则 $\sin\theta\cdot\cos\theta=$___▲___.

13. 若直线 $mx-y+2m-6=0$ 是曲线 $y=x^3-x$ 的切线,则 m 的值可以是___▲___. (写出一个值即可)

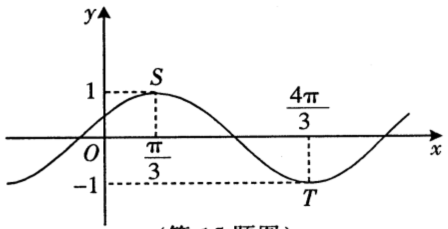
14. 已知球 O 的半径等于 4，O_1，O_2 是球 O 的某内接圆柱的上下底面圆心，$O_1O_2=2$，PQ 是球 O 的直径（点 O_1 在 PO 上，点 O_2 在 OQ 上），M 为 OP 的中点，若四边形 $ABCD$ 是圆 O_1 的内接矩形，AE，BF 是圆柱的母线，且平面 $MCD\perp$ 平面 MEF，则 $AB=$___▲___.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. （本题满分 13 分）函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图，且经过点 $S\left(\frac{\pi}{3},1\right)$，$T\left(\frac{4\pi}{3},-1\right)$.

（1）求函数 $y=f(x)$ 的解析式；

（2）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c 若 $f(A)=f(B)$，$a=2$，$b=3$，求 $f(A)$ 的值.

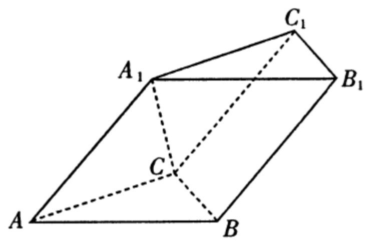


（第 15 题图）

16. （本题满分 15 分）在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1$，$\angle A_1AB=60^\circ$，且 $CA=CB=CA_1$.

（1）证明：$CB\perp BB_1$；

（2）若 $AB=AC=2$，求直线 AB_1 与平面 CBB_1C_1 所成角的正弦值.



（第 16 题图）

17. （本题满分 15 分）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的一个焦点是 $(\sqrt{5},0)$，渐近线方程是 $y=\pm\frac{1}{2}x$.

（1）求双曲线的方程；

（2）点 M 为 y 轴上一点，点 A 是双曲线的右顶点，点 P 是双曲线上异于顶点的一点，若 $\triangle MAP$ 是正三角形，求点 M 的坐标.

18. (本题满分 17 分)已知数列$\{a_n\}$是等比数列,满足 $a_1a_2=a_3$,且 a_2,a_3+a_1,a_4 成等差数列,数列$\{b_n\}$满足 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n=(2n-7)\cdot 2^{n+1}+14$,记数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1)求 a_n;

(2)求数列$\{\frac{b_n}{a_n}\}$的前 n 项和;

(3)记 $c_n=\frac{S_n+4}{a_n+4}$,若 $c_n\leqslant c_k$ 恒成立,求 k 的值.

19. (本题满分 17 分)设集合 $A=\{\alpha|\alpha=(x_1,x_2,\ldots,x_n),x_i\in\{0,1\}\}$. 若集合 A 中元素 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$满足$|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|=1$,则称 β 为 α 在集合 A 中的“友好元”. 对于整数 k,若 A 存在一个子集 B 满足:(i)集合 B 中元素个数为 k;(ii) $\forall\alpha\in B$,在集合 B 中都至少有 $n-1$ 个“友好元”,则称 k 是“好数”.

(1)当 $n=4$ 且 $\alpha=(1,0,1,0)$时,直接写出 α 在集合 A 中的“友好元”β;

(2)当 $n=10$ 时,求证:$2^{10}-2^8$ 是“好数”;

(3)当 $n=2024$ 时,若整数 $d_1,d_2,\cdots,d_t$ 满足 $0\leqslant d_1<d_2<\cdots<d_t\leqslant 2021$,且对 $i=1,2,\cdots,t-1$ 均有 $d_{i+1}-d_i\geqslant 3$,求证:$2^{2024}-(2^{d_1}+2^{d_2}+\cdots+2^{d_t})$是“好数”.