宁波市2024学年第一学期期末九校联考 高三数学参考答案

一、**单项选择题**：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	A	D	C	A	B

二、**多项选择题**：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分

题号	9	10	11
答案	ABC	BC	ACD

三、**填空题**：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

12．19　　13．$\frac{1}{8}$　　14．$\left(e,\frac{2}{\ln 2}\right)$

四、**解答题**：本题共 5 小题，共 77 分

15．解：

（1）从甲箱中任取2个小球的事件数为$C_8^2=28$，　--------2 分

这 2 个球是同色的事件数为$C_5^2+C_3^2=13$，　--------4 分

所以这 2 个小球同色的概率为$P=\frac{13}{28}$.　--------5 分

（2）解：设事件A为“从乙箱中任取1个小球，取出的这个小球是白球”，事件B_1为“从甲箱中取出的2个小球都是白球”，事件B_2为“从甲箱中取出的2个小球是1个白球1个黑球”，事件B_3为“从甲箱中取出的2个都是黑球”，则事件B_1，B_2，B_3彼此互斥.

$P(B_1)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$，$P(B_2)=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$，$P(B_3)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$，　--------8 分

$P(A|B_1)=\frac{2}{3}$，$P(A|B_2)=\frac{5}{9}$，$P(A|B_3)=\frac{4}{9}$，　--------11 分

所以$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\frac{5}{14}\times\frac{2}{3}+\frac{15}{28}\times\frac{5}{9}+\frac{3}{28}\times\frac{4}{9}=\frac{7}{12}$，

所以从乙箱中取出的小球是白球的概率为$\frac{7}{12}$.　--------13 分

16．解：

（1）由$f(x)=x^2+x$，得$f'(x)=2x+1$，　--------1 分

曲线$y=f(x)$在$(x_n,f(x_n))$处的切线方程为

$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$　--------3 分

令$y=0$，则$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2+x_n}{2x_n+1}=\frac{x_n^2}{2x_n+1}$，　--------5 分

所以$\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+1}+1}=\dfrac{x_n^2}{(x_n+1)^2}$， --------7 分

所以$\ln\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+1}+1}=2\ln\dfrac{x_n}{x_n+1}$，由$x_1=\dfrac{e}{1-e}$，得 $\ln\dfrac{x_1}{x_1+1}=1$ --------9 分

数列$\left\{\ln\dfrac{x_n}{x_n+1}\right\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

（2）由上式得$a_n=2^{n-1}$，$n\cdot a_n=n\cdot 2^{n-1}$， --------10 分

$S_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$ ①

$2S_n=\quad 1\cdot 2^1+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$ ②

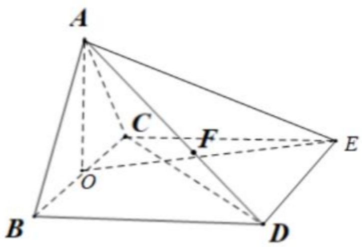
① —②，得 $-S_n=2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=2^n-1-n\cdot 2^n$

所以$S_n=(n-1)2^n+1$. --------15 分

17. （1）法一：（几何法）如图，取 BC 中点 O，由 AB=AC，得$AO\perp BC$，作$CE\parallel BD,DE\parallel BC$，连$AE,OE$，因为 AC 与 BD 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

所以$\cos\angle ACE=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$， --------2 分

由于$\angle ACE\in\left(\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12}\right)$



若$\cos\angle ACE=\dfrac{\sqrt{2}}{4}>\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos\dfrac{5\pi}{12}$，不可能成立，舍去.

故$\cos\angle ACE=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，由余弦定理得$AE=2\sqrt{2}$，

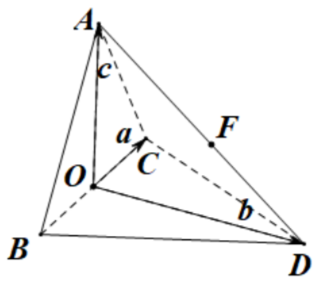
又因为$BC=CD=BD=2$，$AB=AC=\sqrt{2}$，

所以$OA=1,OE=\sqrt{7}$，所以$OA\perp OE$， --------4 分

因为$OA\perp BC,BC\cap OE=O,OE\subset$平面$BCD$，所以$OA\perp$平面$BCD$，

因为$OA\subset$平面ABC，所以平面 $ABC\perp$平面 BCD. --------6 分

法二：（基底法）如图，取BC中点O，由$AB=AC$，BD=CD，



得$AO\perp BC$，$DO\perp BC$，二面角$A-BC-D$ 的平面角为$\angle AOD$，

由题意，得$OA=1$，$OD=\sqrt{3}$，

设$\angle AOD=\theta$，$\overrightarrow{OC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OA}=\vec{c}$.

则$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\sqrt{3}\cos\angle AOD$，

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{c}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{a}$， --------2 分

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\vec{a}-\vec{c})(\vec{b}+\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2-\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=1-\sqrt{3}\cos\angle AOD$

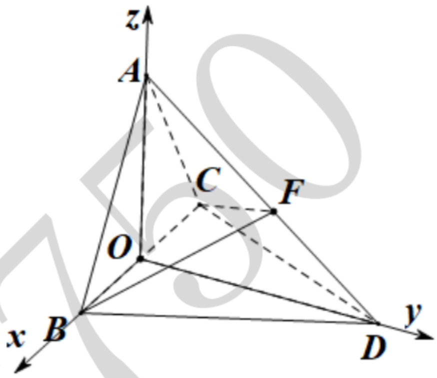
$|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle| = |\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}| = |\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{2\sqrt{2}}| = \frac{\sqrt{2}}{4}$，得$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \pm 1$， --------4 分

解得$\cos\angle AOD = 0$或$\cos\angle AOD = \frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$(舍去)，

所以$\cos\angle AOD = 0$，此时$\angle AOD = 90°$，平面$ABC \perp$平面 BCD. --------6 分

（2）以$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OA}$分别为x，y，z轴正方向，建立空间直角坐标系（如图）. --------7 分

则$B(1,0,0)$，$D(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,0,0)$，$A(0,0,1)$，



设$F(x,y,z)$，$\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AD}$ $(t \in (0,1))$，

$\overrightarrow{AD} = (0,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{AF} = (x,y,z-1)$，

所以$(x,y,z-1) = t(0,\sqrt{3},-1)$，

所以$\begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{3}t, \\ z = 1-t, \end{cases}$ 得$F(0,\sqrt{3}t,1-t)$，

因为$\overrightarrow{BC} = (-2,0,0)$，$\overrightarrow{OF} = (0,\sqrt{3}t,1-t)$，

设平面BCF的法向量$\overrightarrow{m} = (x_0,y_0,z_0)$，

则$\begin{cases} \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{m} = -2x_0 = 0, \\ \overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{m} = \sqrt{3}ty_0 + (1-t)z_0 = 0, \end{cases}$

令$y_0 = 1-t$，得$z_0 = -\sqrt{3}t$，$x_0 = 0$，

故平面ACD的一个法向量为$\overrightarrow{m} = (0,1-t,-\sqrt{3}t)$， --------10 分

又$\overrightarrow{AC} = (-1,0,-1)$，$\overrightarrow{AD} = (0,\sqrt{3},-1)$，

同理可求得平面BCF的一个法向量为$\overrightarrow{n} = (-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$， --------12 分

设二面角$B-CF-D$的平面角为α，

所以$|\cos\alpha| = \left|\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}\right| = \frac{|1-t-3t|}{\sqrt{(1-t)^2+3t^2}\cdot\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}\sqrt{\frac{16t^2-8t+1}{4t^2-2t+1}} = \frac{4}{7}$，

得 $t=\frac{4}{3}$ 或 $t=-\frac{1}{4}$（舍），$DF=\frac{1}{2}$. --------15 分

18．解：

（1）C_1的渐近线方程为$y = \pm\sqrt{3}x$，$2c = 4$，

C_2的渐近线方程为$y = \pm\frac{a}{b}x$，$a^2 + b^2 = 4$， --------2 分

所以$\begin{cases} \frac{a}{b} = \sqrt{3} \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$，得$a = \sqrt{3}$，$b = 1$，

所以双曲线C_2的方程为$\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$. --------4 分

（2）已知$P(x_0, y_0)$，且满足$3x_0^2 - y_0^2 = 3$，设切点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_M,y_M)$，

根据题意得，直线 AB 方程为$\frac{y_0}{3}y - x_0x = 1$. --------5 分

直线 AB 与C_1联立，得$\begin{cases}\dfrac{y_0}{3}y-x_0x=1\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，

化简得$3x^2+6x_0x+3+y_0^2=0$，$\Delta=36x_0^2-12(3+y_0^2)=12(3x_0^2-3-y_0^2)=0$，

所以直线AB与C_1切于点M. --------8 分

所以$x_M=-x_0, y_M=-y_0$.

直线 AB 与C_2联立，得$\begin{cases}\dfrac{y_0}{3}y-x_0x=1\\\dfrac{y^2}{3}-x^2=1\end{cases}$，即$\begin{cases}\dfrac{y_0}{3}y-x_0x=1\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=-1\end{cases}$，

得$3x^2+6x_0x+3-y_0^2=0$

所以$x_1+x_2=-2x_0=2x_M$，所以$|AM|=|BM|$. --------10 分

（3）法一：因为$PM \parallel BF_2$，则$k_{PM}=k_{BF_2}=\dfrac{y_0}{x_0}$，

直线$BF_2: y=\dfrac{y_0}{x_0}(x-2)$与直线$AB: \dfrac{yy_0}{3}-xx_0=1$联立，得 --------12 分

$B\left(-\dfrac{2}{3}y_0^2-x_0,-2x_0y_0-y_0\right)$，即$B\left(2-2x_0^2-x_0,-y_0(2x_0+1)\right)$ --------14 分

将点$B\left(2-2x_0^2-x_0,-y_0(2x_0+1)\right)$代入$\dfrac{y^2}{3}-x^2=1$，

得$\left(x_0^2-1\right)\left(2x_0+1\right)^2-\left(2x_0^2+x_0-2\right)^2=1$，

化简得$x_0^2=\dfrac{6}{4}$， --------16 分

由$3x_0^2-y_0^2=3$得，$|y_0|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 $S_{\Delta MF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times4\times|y_0|=2|y_0|=\sqrt{6}$ --------17 分

法二：因为$P(x_0,y_0)$，$M(-x_0,-y_0)$，点P与点M关于原点对称，所以$S_{\Delta MPF_2}=S_{\Delta MF_1F_2}$，

因为$PM \parallel BF_2$，所以$S_{\Delta MPF_2}=S_{\Delta MPB}$，因为$|AM|=|BM|$，所以$S_{\Delta MPB}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta PAB}$，

所以$S_{\Delta MF_1F_2}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta PAB}$， --------13 分

$S_{\Delta MF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times4\times|y_0|=2|y_0|$， --------14 分

$$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\times|AB|\times d_{P-AB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{1+\frac{9x_0^2}{y_0^2}}\cdot\frac{\sqrt{24y_0^2}}{3}\times\frac{\left|x_0^2-\frac{y_0^2}{3}+1\right|}{\sqrt{x_0^2+\frac{y_0^2}{9}}}=2\sqrt{6},$$ --------16 分

所以 $S_{\Delta MF_1F_2}=2|y_0|=\sqrt{6}$. --------17 分

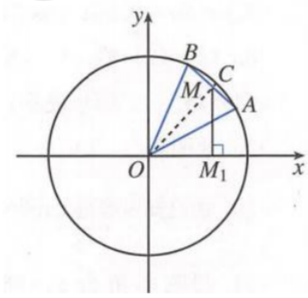
19．解：

（1）$\sin\alpha=\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2})=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\beta=\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2})=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

两式相加，得 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ --------4 分

（2）线段 AB 的中点 M 的坐标为 $(\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta),\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta))$.



过 M 作 MM_1 垂直于 x 轴，交 x 轴于 M_1，

所以 $M_1M=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)$ -----6 分

$\angle MOM_1=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. 在 $Rt\Delta OMA$ 中，$OM=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$，

在 $Rt\Delta OM_1M$ 中，$M_1M=OM\sin\angle MOM_1=\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$， --------9 分

则 $\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，

即 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. --------10 分

（3）设 $\angle BAC=\alpha,\angle ACB=\beta,\beta>\alpha$，则 $\angle ABD=\frac{\alpha+\beta}{2},\angle ADB=\pi-\beta$，

所以 $\angle DAB=\frac{\beta-\alpha}{2}$， --------12 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $BA+BC=2(\sin\alpha+\sin\beta)$

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得 $AD=2\sin\angle ABD=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

所以 $2AM=2AD\cdot\cos\angle DAB=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ --------16 分

由（1）式 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，得 $2AM=BA+BC$. --------17 分