金华十校 2024-2025 学年第一学期期末调研考试

高三数学试题卷参考答案与评分标准

一、选择题：本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的

1	2	3	4	5	6	7	8
A	A	B	B	C	D	B	A

二、选择题：本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9	10	11
AB	ACD	ABD

三、填空题：本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. $\frac{1}{2}$　　13. 11 或 6(写出其中一个)　　14. $4\sqrt{3}$

四、解答题：本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（1）因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 图像经过 $S\left(\frac{\pi}{3},1\right),T\left(\frac{4\pi}{3},-1\right)$,

所以 $\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{T}{2}$ 得周期 $T=2\pi$,由 $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$ 得 $\omega=1$,……………………………………………3 分

又 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$ 得 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$,又因为 $0<\varphi<\pi$,

所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ………………………………………………………………6 分

（2）因为 $f(A)=f(B)$,又 $0<A+B<\pi$,所以 $A+B=\frac{2}{3}\pi,C=\frac{\pi}{3}$

又 $a=2,b=3$,由余弦定理可得 $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{7}$ ……………………………8 分

在△ABC 中,易求得 $\cos A=\frac{2}{\sqrt{7}},\sin A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,……………………………………………11 分

所以 $f(A)=\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{\sqrt{7}}\times\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$ ……………………………………………13 分

16.（1）证明（1）连结 A_1B ,$\because AB=AA_1,\angle A_1AB=60^\circ$,$\therefore\triangle ABA_1$ 是等边三角形.

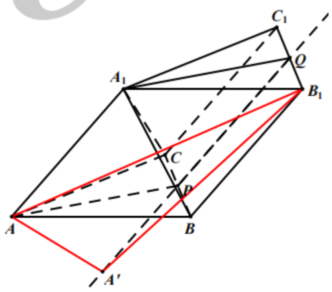
取 AA_1 的中点 M ,$\because CM\perp AA_1$,$BM\perp AA_1$,$\therefore AA_1\perp$ 平面 CMB ,……………………………………3 分

$\therefore AA_1\perp CB$,又$\because AA_1\parallel BB_1$,$\therefore CB\perp BB_1$ ………………………………………………………………6 分

(2)取 CB 的中点 P ,C_1B_1 的中点 Q ,$\because AP\perp CB,PQ\perp CB$,$\therefore CB\perp$ 平面 APQ ,……………………8 分

过 A 做 PQ 的垂线,垂足是 A' ,可得 $AA'\perp$ 平面 CBB_1C_1 ,连结 $A'B'$,

所以 $\angle AB_1A'$ 就是线面角…………………………………………………………………………………11 分



易得 $AA'=\sqrt{2}$, $AB_1=2\sqrt{3}$,

所以 $\angle AB_1A'$ 就是线面角, $\sin\angle AB_1A'=\frac{AA'}{AB_1}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ …………15 分

17.(1)因为渐近线方程是 $y=\pm\frac{1}{2}x$,所以 $a=2b$,又 $c=\sqrt{3}$,所以 $a=2,b=1$

故双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ ………………………………………………………………………………4 分

（2）设直线 AP 的方程为 $x=ty+2$,联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1\\ x=ty+2\end{cases}$,可得 $\left(t^2-4\right)y^2+4ty=0$

解得点 P 纵坐标为 $y_P=\frac{4t}{4-t^2}$,……………………………………………………………………7 分

设线段 AP 的中点为 N ,则点 N 的坐标为 $\left(\frac{8}{4-t^2},\frac{2t}{4-t^2}\right)$,设点 $M\ (0,m)$,

则由 $MN\perp AP$ 得 $\dfrac{\frac{2t}{4-t^2}-m}{\frac{8}{4-t^2}}=-t$, $2t-m\left(4-t^2\right)=-8t$,所以 $m=\frac{10t}{4-t^2}$ ①………………10 分

由 $|MN|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AP|$ 得, $\sqrt{1+(-t)^2}\left|\frac{8}{4-t^2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\left|\frac{4t}{4-t^2}\right|$,化简得 $t=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ ……………13 分

代入①可得 $m=\pm\dfrac{10\times\frac{4}{\sqrt{3}}}{4-\frac{16}{3}}=\pm10\sqrt{3}$,所以点 $M\left(0,10\sqrt{3}\right)$ 或 $M\left(0,-10\sqrt{3}\right)$ ……………………15 分

18.（1）数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,设首项是 a_1 , 公比是 q ,

由 $a_1^2q=a_1q^2,(a_1q+a_1q^3)=2(a_1q^2+a_1)$,解得 $a_1=q=2$, $a_n=2^n$ ……………………………………4 分

（2）由于 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...+a_nb_n=(2n-7)\cdot 2^{n+1}+14$ ①

则 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...+a_{n-1}b_{n-1}=(2n-9)\cdot 2^n+14$, $n\geqslant 2$ ②

由①−②得 $a_nb_n=(2n-5)\cdot 2^n, n\geqslant 2$

当 $n=1$ 时, $a_1b_1=-5\cdot 4+14=-6$，满足上式,因此 $a_nb_n=(2n-5)\cdot 2^n$,所以 $b_n=2n-5$ ………6 分

$\frac{b_n}{a_n}=\frac{2n-5}{2^n}$,接下去求 $\frac{b_n}{a_n}=\frac{2n-5}{2^n}$ 的前 n 项和,记 $\frac{b_n}{a_n}=\frac{2n-5}{2^n}$ 的前 n 项和是 S_n.

$S_n=\frac{-3}{2}+\frac{-1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{2n-7}{2^{n-1}}+\frac{2n-5}{2^n}$ ①

$\frac{1}{2}S_n=\frac{-3}{2^2}+\frac{-1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{2n-7}{2^n}+\frac{2n-5}{2^{n+1}}$ ②……………………………………………8 分

由①−②得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{-3}{2}+2(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n})-\frac{2n-5}{2^{n+1}}$,整理得：$S_n=-1-\frac{2n-1}{2^n}$ ……………10 分

（3）$c_n=\frac{S_n+4}{a_n+4}=\frac{n^2-4n+4}{2^n+4}=\frac{(n-2)^2}{2^n+4}$,要求 c_n 的最大项,可以设函数 $f(x)=\frac{(x-2)^2}{2^x+4}, x>0$

则 $f'(x)=\frac{(x-2)(2^{x+1}-x\cdot 2^x\ln 2+2^{x+1}\ln 2+8)}{(2^x+4)^2}$ ……………………………………………12 分

令 $\varphi(x)=2^{x+1}-x\cdot 2^x\ln 2+2^{x+1}\ln 2+8$

则 $\varphi'(x)=2^x\ln 2(1+2\ln 2-\ln 2\cdot x)$,分析可得 $\varphi'(3)>0,\varphi'(4)<0$, $\exists a\in(3,4)$,使得 $\varphi'(a)=0$

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递增, $(a,+\infty)$ 单调递减, $\varphi(5)=64-160\ln 2+64\ln 2+8=72-96\ln 2>0$,

$\varphi(6)=128-384\ln 2+128\cdot\ln 2+8=136-256\ln 2<0$, $\exists x_0\in(5,6)$,使得 $\varphi(x_0)=0$

当 $x\in(0,2)$ 时, $f'(x)<0$,当 $x\in(2,x_0)$ 时, $f'(x)>0$, $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$

因此 $f(x)$ 在 $x\in(0,2)$ 单调递减,在 $x\in(2,x_0)$,单调递增,在 $x\in(x_0,+\infty)$,单调递减. ………15 分

只要比较 $f(1)$, $f(5)$, $f(6)$ 的大小, $f(1)=\frac{1}{6}$, $f(5)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$, $f(6)=\frac{16}{68}<\frac{1}{4}$.

所以第五项是最大项, $k=5$ ……………………………………………………………………17 分

19.（1） $\beta=(0,0,1,0)$ 或 $\beta=(1,1,1,0)$ 或 $\beta=(1,0,0,0)$ 或 $\beta=(1,0,1,1)$ ……………………………4 分

此时 $A=\{\alpha\mid\alpha=(x_1, x_2,\cdots, x_{10}), x_i\in\{0,1\}\}$，显然 A 中的每一个元素都恰有10个“友好元”.

设$U=\{u\mid(0,0,\ u_3,\cdots,\ u_{10}),\ u_i\in\{0,1\}\}$，$B=C_A(U)$，此时$|B|=2^{10}-2^8$ …………………6 分

对B中的任意元素$b=(b_1,\ b_2,\cdots,\ b_{10})$，在集合$U$中至多存在一个$u=(0,0,\ u_3,\cdots,\ u_{10})$满足

$|b_1-0|+|b_2-0|+|b_3-u_3|+\cdots|b_{10}-u_{10}|=1$，从而$b=(b_1,\ b_2,\cdots,\ b_{10})$在集合$B$中至少有 9 个"友好元"，所以$2^{10}-2^8$是"好数".……………………………………………………9 分

(3)①当$n=2024$时，集合$A=\{\alpha\mid\alpha=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{2024}),\ x_i\in\{0,1\}\}$中的每个元素均有 2024 个"友好元".

设$B_{d_t}=\{\alpha\mid\alpha=(0,0,\cdots,0,\ a_1,\ a_2,\cdots,\ a_{d_t}),\ 其中a_i\in\{0,1\},\ i=1,2\cdots,\ d_t\}$，则$B_{d_t}$中含有$2^{d_t}$个元素

设$B_{d_i}=\left\{\alpha\mid\alpha=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{2024-d_{i+1}个1},\underbrace{0,0,\cdots0}_{d_{i+1}-d_i个0},\ x_1,\cdots,\ x_{d_i}),\ 其中x_i\in\{0,1\},\ i=1,2\cdots,\ d_i\right\}$，则

B_{d_i}含有2^{d_i}个元素，$i\in\{1,2,\cdots,\ t-1\}$ ……………………………………………12 分

此时令$C=A-(B_{d_1}\cup B_{d_2}\cup\cdots\cup B_{d_t})$ ………………………………………………13 分

对于$c=(c_1,\ c_2,\cdots,\ c_{2024})\in C$，我们有：

②c在每一个B_{d_i}中至多有一个"友好元".

设$b_1=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{2024})$，$b_2=(y_1,\ y_2,\cdots,\ y_{2024})\in B_{d_i}$，且均是$c$的"友好元".由于$c\notin B_{d_i}$，从而$c$与$b_1$不同的元素在前$2024-d_i$位且后$d_i$位相同. 又因为$b_1$，$b_2$的前$2024-d_i$位相同，后$d_i$位至少一位不相同，因此$|c_1-y_1|+|c_2-y_2|+\cdots|c_{2024}-y_{2024}|\geq 2$ ……………………15 分

③c不能在B_{d_i}和B_{d_j}中均有"友好元".

由于对于$1\leq i<j\leq t$，B_{d_i}中的元素第$2024-d_{j+1}+1$，$2024-d_{j+1}+2$，$\cdots$ $2024-d_j$都是1，而B_{d_i}中$2024-d_{j+1}+1$，$2024-d_{j+1}+2$，$\cdots$ $2024-d_j$都是0，且$d_j-d_i\geq 3$，从而b_1和b_2之间至少有 3 位元素不同， 所以不存在$b_1\in B_{d_i}$，$b_2\in B_{d_j}$且均是c的"友好元".

从而c在C中至少有 2023 个"友好元"，所以$2^{2024}-(2^{d_1}+2^{d_2}+\cdots+2^{d_t})$是"好数"………17 分