2024 学年杭州学军中学高三（上）数学期末测试参考答案

一、单选题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

BDBC　CDAB

二、多选题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分。

9. AC　10. ABD　11. ACD

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分。

12. -160　13. $2\sqrt{2}$　14. $[1,+\infty)$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分

15.(1)如图,过点 E 作圆柱的母线 EG ,连 DG ,CG ,则 $EG//AD//BC$ 且$EG=AD=BC$,所以四边形 $AEGD$ 和 $BEGC$ 均是平行四边形,所以 $AE//DG,BE//CG,$又 $CF//AE$,所以 $CF//DG$,所以 $\angle DCF=\angle CDG$ (不妨记作 θ),而 CD 为底面圆的直径,所以 $\angle DFC=\angle CGD=90^{\circ}$,所以 $CF=DG$ (均等于 $CD\cdot\cos\theta$),所以四边形 $CFDG$ 为平行四边形,所以 $CG//FD$,可得 $DF//BE$.　　　　…………5 分

(2) 由(1)可知 $GC=EB=DF,GD=CF=EA$,不妨设 $GC=EB=DF=a,GD=CF=EA=b$,则 $a^2+b^2=16$,因为 BC 是圆柱的母线,所以 $BC\perp$ 平面 CDF ,所以 $BC\perp CF$,$BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{8+b^2}$,依题意得 $BF=DF$,即 $\sqrt{8+b^2}=a$,解得 $a=2\sqrt{3},b=2$,

(法 1)过点 D 作 AE ,CD 的平行线,两直线交于点 K ,连 AK ,则 AK 是平面 ABF 与平面 ADE 的交线. 因为 AD 是圆柱的母线,所以 $AD\perp$ 平面 ABE ,所以 $AD\perp DF$,又因为 $CF\perp DF,CF//DK$,所以 $DK\perp DF$,又 $AD\cap DK=D$,所以 $DF\perp$ 平面 $AEDK$.过点 D 作 $DH\perp AK$ 于 H ,连 FH ,又因为 $DF\perp AK,DF\cap DH=D$,所以 $AK\perp$ 平面 DFH ,所以 $AK\perp FH$,所以 $\angle DHF$ 是平面 ABF 与平面 ADE 所成二面角的平面角. 在 Rt$\triangle ADK$ 中,

$AD=2\sqrt{2},DK=CF=2,DH=\frac{AD\cdot KD}{AK}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

在 Rt$\triangle FDH$ 中,$DF=2\sqrt{3},\tan\angle FHD=\frac{FD}{HD}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$,所以 $\sin\angle FHD=\frac{3}{\sqrt{2+9}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$.所以

平面 ABF 与平面 ADE 夹角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{11}}{11}$. ………………………13 分

（法 2）因为 EG 是圆柱的母线,CD 为底面圆的直径,所以 $EG\perp$ 平面 $CDF,GC\perp GD$,故以点G 为坐标原点,GC,GD,GE 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系. 所以$G(0,0,0),D(0,2,0),C(2\sqrt{3},0,0),F(2\sqrt{3},2,0),B(2\sqrt{3},0,2\sqrt{2}),E(0,0,2\sqrt{2}),A(0,2,2\sqrt{2})$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{3},-2,0),\overrightarrow{AF}=(2\sqrt{3},0,-2\sqrt{2})$,设平面 ABF 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,由

$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$,得 $\begin{cases}2\sqrt{3}x-2y=0,\\ 2\sqrt{3}x-2\sqrt{2}z=0.\end{cases}$ 取 $x=1$,得$\mathbf{n}=\left(1,\sqrt{3},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,同理可求平面 ADE 的法向量 $\mathbf{m}=(1,0,0)$,所以

$\cos<\mathbf{n},\mathbf{m}>=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{m}|}=\frac{1}{1\cdot\sqrt{1+3+\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}},\sqrt{1-\cos^2<\mathbf{n},\mathbf{m}>}=\frac{3}{\sqrt{11}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$,

所以平面 ABF 与平面 ADE 夹角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{11}}{11}$. ………………………13 分

16（1）若$k=0$，设抽取n 次中抽中黑球的次数为X，

则 $X\sim B(n,\frac{1}{3})$，故 $P_n=P(X=1)=C_n^1\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}=\frac{n}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$.

由 $\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{2(n+1)}{3n}$，$P_1<P_2=P_3>P_4>P_5>\cdots$，故 P_n 最大值为 P_2 或 P_3，即 $\frac{4}{9}$. …………5 分

（2）（i） $P(B_1\overline{B_2}\,\overline{B_3})=P(B_1)P(\overline{B_2}\mid B_1)P(\overline{B_3}\mid\overline{B_2}B_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$,

$P(\overline{B_1}B_2\overline{B_3})=P(\overline{B_1})P(B_2\mid\overline{B_1})P(\overline{B_3}\mid B_2\overline{B_1})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$,

$P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}B_3)=P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}\mid\overline{B_1})P(B_3\mid\overline{B_2}\,\overline{B_1})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$, ………………………11 分

（ii）由（i）可进行猜测，抽取n 次中恰有 2 次抽中的黑球的概率与抽球次序无关，

则 $P=C_n^2P(B_1B_2\overline{B_3}\,\overline{B_4}\cdots\overline{B_n})=\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{n-1}{n+2}=\frac{2(n-1)}{(n+1)(n+2)}$. …………15 分

17(1) $f(x)=(\frac{1}{x}-1)\ln(1+x)$ ，$f(1)=0,\ f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+(\frac{1}{x}-1)\cdot\frac{1}{1+x}$，$f'(1)=-\ln 2,$

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=(-\ln 2)(x-1).$ … ………………… ………4 分

（2） $f(\frac{1}{x})=(x+a)\ln(1+\frac{1}{x})$ ，其定义域为 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty),$ 若曲线 $y=f(\frac{1}{x})$ 关于直线 $x=b$ 对称，

则 $b=-\frac{1}{2}.$

由对 $\forall x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty),\ f(\frac{1}{x})=f(\frac{1}{-1-x})$ 恒成立，

即 $(x+a)\ln(1+\frac{1}{x})=(-1-x+a)\ln(1-\frac{1}{x+1}),$

即 $(x+a)\ln\frac{x+1}{x}=(-1-x+a)\ln\frac{x}{x+1},$

即 $(x+a)\ln\frac{x+1}{x}=(x+1-a)\ln\frac{x+1}{x},$

$\therefore x+a=x-a+1,\therefore a=\frac{1}{2}.$

综上，满足条件的存在实数 a,b 存在，且 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}.$ ………………… ………9 分

(3) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\frac{1}{x}+a\right)\cdot\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{x^2}\left[\ln(1+x)-\frac{ax^2+x}{1+x}\right]$.令

$h(x)=\ln(1+x)-\frac{ax^2+x}{1+x}$,则 $h(0)=0$,且

$h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{(2ax+1)(1+x)-(ax^2+x)}{(1+x)^2}=\frac{x(1-2a-ax)}{(1+x)^2}$

(i) 若 $a\le 0$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $h'(x)>0, h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增,从而 $h(x)>h(0)=0$. 故当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)<0, f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不存在极值点.

(ii) 若 $a\ge\frac{1}{2}$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $h'(x)<0, h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减,从而 $h(x)<h(0)=0$. 故当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)>0, f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不存在极值点.

(iii) 若 $0<a<\frac{1}{2}$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$ 时，$h'(x)>0,h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$ 单调递增；当 $x\in\left(\frac{1}{a}-2,+\infty\right)$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}-2,+\infty\right)$ 单调递减．所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}-2\right]$ 时，$h(x)>h(0)=0$．取 $x_1=\mathrm{e}^t-1$，其中常数 $t>\frac{4}{a}$，则 $x_1\in\left(\frac{1}{a}-2,+\infty\right)$，且

$$h(x_1)=t-\frac{a\left(\mathrm{e}^t-1\right)^2+\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t}<t+1-a\mathrm{e}^t<t+1-a\left(1+\frac{t}{2}\right)^2=(t+2)\left[\frac{t+1}{t+2}-\frac{a}{4}(t+2)\right]<0,$$

所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}-2,+\infty\right)$ 有唯一零点 x_0．当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)>0,f'(x)<0,f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)<0,f'(x)>0,f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值点 x_0．

综上，a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$．…………………………15 分

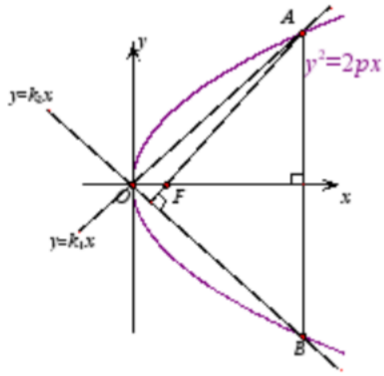
18（1）如图，$AB\perp x$ 轴时 $AB=4\sqrt{5}$，由 F 为 ΔOAB 垂心，故 $k_{AF}=-\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k_1}$，由 $A(\frac{2}{k_1}\sqrt{5},2\sqrt{5})$，$F(\frac{p}{2},0)$，

故 $\frac{2\sqrt{5}}{\frac{2}{k_1}\sqrt{5}-\frac{p}{2}}=\frac{1}{k_1}\Rightarrow 2\sqrt{5}k_1=\frac{2}{k_1}\sqrt{5}-\frac{p}{2}$—①，$(2\sqrt{5})^2=\frac{2}{k_1}\sqrt{5}\cdot 2p\Rightarrow p=\sqrt{5}k_1$—②，

联立①②解得 $p=2$，故 $y^2=4x$；………………5 分

（2）如图，$A(\frac{4}{k_1^2},\frac{4}{k_1})$，$B(\frac{4}{k_2^2},\frac{4}{k_2})$，故 $k_{AB}=\frac{\frac{4}{k_1}-\frac{4}{k_2}}{\frac{4}{k_1^2}-\frac{4}{k_2^2}}=\frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}$

$=\frac{-4}{k_1+k_2}$，



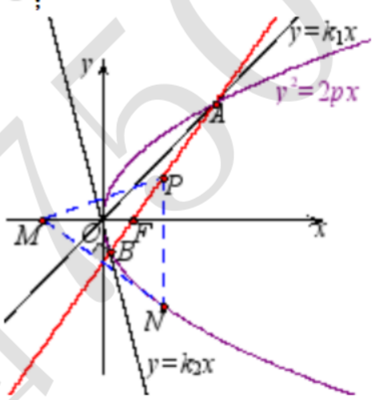
AB 的直线方程为：$y-\frac{4}{k_1}=\frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}(x-\frac{4}{k_1^2})$，

故 $y=\dfrac{1}{\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}}x+\dfrac{4}{k_1}-\dfrac{4}{k_1+\dfrac{k_1^2}{k_2}}=\dfrac{-4}{k_1+k_2}x+\dfrac{4\dfrac{k_1}{k_2}}{k_1+\dfrac{k_1^2}{k_2}}=\dfrac{-4}{k_1+k_2}(x-1)$，恒过点$(1,0)$，

再设 AB：$x=my+1$，则 $m=\dfrac{1}{4}(k_1+k_2)$，联立 $C:y^2=4x$，得 $y^2-4my-4=0$，故 $P(2m^2+1,2m)$，

由 M,N 关于 AB 对称，得 $\dfrac{y_N}{x_N+2}=-m$，$\dfrac{x_N-2}{2}=m\cdot\dfrac{y_N}{2}+1\Rightarrow x_N=\dfrac{4-2m^2}{m^2+1}$，$y_N=\dfrac{-6m}{m^2+1}$，

由 N 在 C 上得 $y_N^2=4x_N$，故 $\dfrac{36m^2}{(m^2+1)}=\dfrac{16-8m^2}{m^2+1}\Rightarrow 2m^4+7m^2-4=0\Rightarrow m^2=\dfrac{1}{2}$；



当 $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，得 $P(2,\sqrt{2})$，AB：$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+1$，M 到 AB 的距离 $d=\sqrt{6}$，

$PM=3\sqrt{2}$，故 P 到 MN 的距离为 $\sqrt{PM^2-d^2}=2\sqrt{3}$，故 $S_{\Delta PMN}=\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{2}$，

当 $m=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，同理得 $S_{\Delta PMN}=6\sqrt{2}$.

综上所述，ΔPMN 的面积为 $6\sqrt{2}$ ....17 分

19.（1）若 $\{a_n\}$ 的单极数列为 1,2,2,3,3,3,则有 $a_1=1,a_2=2,a_3=1$ 或 $a_3=2$,$a_4=3,a_5=1$ 或 $a_5=2$ 或 $a_5=3,a_6=1$ 或 $a_6=2$ 或 $a_6=3$,则满足条件的 $\{a_n\}$ 的个数为 $2\times3\times3=18$ ... .4 分

(2)(i)由 b_k 为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的最大值,可知 $b_{k+1}\ge b_k$,由 $a_{k+1}+2b_{p-k}=k$,得 $a_k+2b_{p-k+1}=k-1$,两式相减,得 $a_{k+1}-a_k+2(b_{p-k}-b_{p-k+1})=1$,整理,得 $a_{k+1}-a_k-1=2(b_{p-k+1}-b_{p-k})$,又 $b_{p-k+1}-b_{p-k}\ge 0$,则 $a_{k+1}-a_k\ge 1$,即 $a_{k+1}>a_k$ ，所以 $a_k=b_k$,即 $a_k-b_k=0$.... ....9 分

(ii) 设 $k=1,2,\cdots,25$,因为 $a_n=\begin{cases}\lambda n^2-(-1)^{\frac{n+1}{2}}n, n \text{ 为奇数}\\ \lambda n^2-(-1)^{\frac{n}{2}}n, n \text{ 为偶数}\end{cases}$,则

$a_{4k-3}=\lambda(4k-3)^2+(4k-3)$,

$a_{4k-2}=\lambda(4k-2)^2+(4k-2)$, $a_{4k-1}=\lambda(4k-1)^2-(4k-1)$, $a_{4k}=\lambda(4k)^2-4k$.

易知 $a_{4k-2}>a_{4k-3}$,$a_{4k-1}-a_{4k-2}=(\lambda-1)(8k-3)<0$,即

$a_{4k-1}<a_{4k-2}$,$a_{4k}-a_{4k-2}=2(2\lambda-1)(4k-1)>0$,即 $a_{4k}>a_{4k-2}$.又 $a_{4k+1}>a_{4k}$,则有

$b_{4k-3}=a_{4k-3}, b_{4k-2}=a_{4k-2}, b_{4k-1}=a_{4k-2}, b_{4k}=a_{4k}$

所以

$$\sum_{i=1}^{100}(b_i-a_i)=(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots+(b_{100}-a_{100})$$

$$=(b_3-a_3)+(b_7-a_7)+(b_{11}-a_{11})+\cdots+(b_{4k-1}-a_{4k-1})+\cdots+(b_{99}-a_{99})$$

$$=(a_2-a_3)+(a_6-a_7)+(a_{10}-a_{11})+\cdots+(a_{4k-2}-a_{4k-1})+\cdots+(a_{98}-a_{99}$$

$$=\sum_{k=1}^{25}(a_{4k-2}-a_{4k-1})$$

$$=(1-\lambda)\sum_{k=1}^{25}(8k-3)$$

$$=2525(1-\lambda).$$

由 $\frac{1}{2}<\lambda<1$,得 $0<2525(1-\lambda)<\frac{2525}{2}<1263$,即 $0<\sum_{i=1}^{100}(b_i-a_i)<1263$.

…………….17 分