2024学年杭州学军中学高三（上）数学期末测试卷

命题：郑日锋　审题：卢予奇

一、单选题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1．已知集合 $A=\{x\mid 2^x\le 3\},B=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{N}\}$,则 $A\cap B=$ （　）

A. $\{-1,0,1\}$　B. $\{-1,1\}$　C. $\{1\}$　D. ϕ

2．已知复数 z_1 在复平面内所对应的点位于第一象限,且 $\frac{z_2}{z_1}=-i$,则复数 z_2 在复平面内所对应的点位于（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3．已知 $p:\frac{1}{x}<1,q:x>1$ ，则 p 是 q 的（　　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

4.在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=4$ ，点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，则 $\overline{AO}\cdot\overline{AB}=$（　　）

A. 16　　B. -16　　C. 8　　D. -8

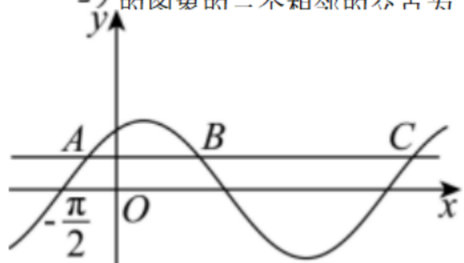
5. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n,a_1+a_4=3,a_2+a_5=6$,则 $S_6=$（　）

A. 27　B. 24　C. 21　D. 18

6．甲、乙等5人去听同时举行的4个讲座，每人可自由选择听其中一个讲座，则恰好只有甲、乙两人听同一个讲座，其他人听的讲座互不相同的种数为（　　）

A. 12　　B. 16　　C. 18　　D. 24

7．如图，直线 $y=1$ 与函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象的三个相邻的交点为 A,B,C ，且 $|AB|=\pi,|BC|=2\pi$ ，则 $f(x)=$（　　）



A. $2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$　B. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

8．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点为 $A,F(c,0)$ 是双曲线 C 的右焦点，点 P 在直线 $x=2c$ 上，且 $\tan\angle APF$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ，则双曲线 C 的离心率是（　）

A. $2\sqrt{3}$　B. $2+\sqrt{7}$　C. $2\sqrt{6}$　D. $4+2\sqrt{7}$

二、多选题：本大题共3小题，每小题6分，共计18分。每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，选对但不全得部分分，有选错的得0分。

9．下列说法正确的是（　）

A．若随机变量 X 服从正态分布 $X(3,\sigma^2)$ ，且 $P(X\le 4)=0.7$ ，则 $P(3<X<4)=0.2$

B．一组数据$10,11,11,12,13,14,16,18,20,22$的第 60 百分位数为$13.5$

C．对具有线性相关关系的变量x,y，利用最小二乘法得到的经验回归方程为$\hat{y}=0.3x-m$，若样本点的中心为$(m,2.8)$，则实数m的值是－4

D．若决定系数R^2越小，则两个变量的相关性越强

10．在梯形 $ABCD$ 中,$AB//CD,AB=1,CD=3,\cos\angle DAC=\frac{\sqrt{2}}{4},\cos\angle ACD=\frac{3}{4}$,则（　　）

A. $AD=\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\cos\angle BAD=-\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{4}$　　D. $AC\perp BD$

11．在平面四边形$ABCD$中，$AB=BC=1,AB\perp BC$，将$\triangle ACD$沿AC折起，使D到达点P的位置.已知三棱锥$P-ABC$的外接球的球心M恰是AP的中点，则下列结论正确的是（　　）

A. AP,BM与平面ABC所成的角相等　　B. 二面角$B-AP-C$的大小可能为30°

C. $AC^2+BP^2=AP^2+AB^2$　　D.若$\angle PBC=45^\circ$，则球M的表面积为3π

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分。

12．在二项式$\left(\frac{2}{x}-x\right)^6$的展开式中，常数项为__________.

13．已知点F为椭圆$E:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的右焦点，不过$F$的直线$l$与椭圆相交于$A,B$两点，且与圆$O:x^2+y^2=b^2$在$y$轴右侧相切，则$\Delta ABF$的周长为___________．

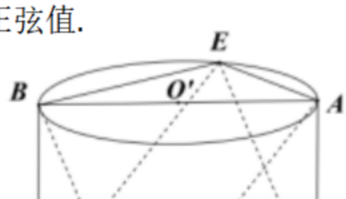
14．已知$k>0$，对任意的$x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$，不等式$e^{kx}(kx-1)\geqslant ex\ln x$恒成立，则$k$的取值范围是________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．如图,矩形 $ABCD$ 是圆柱 $O'O$ 的轴截面,$AB=4,AD=2\sqrt{2},E,F$ 分别是上、下底面圆周上的点,且 $CF//AE$.

(1)求证:$DF//BE$;

(2)若四边形 $BEDF$ 为正方形,求平面 ABF 与平面 ADE 夹角的正弦值.



16．盒中共有3个小球，其中1个黑球，2个红球.每次随机抽取1球后放回，并放入$k\left(k\in\mathbf{N}\right)$个同色球.

（1）若$k=0$，记抽取n次中恰有1次抽中黑球的概率为P_n，求P_n的最大值；

（2）若$k=1$，记事件B_i表示抽取第i次时抽中黑球.

（i）分别求$P\left(B_1\overline{B_2}\overline{B_3}\right)$，$P\left(\overline{B_1}B_2\overline{B_3}\right)$，$P\left(\overline{B_1}\overline{B_2}B_3\right)$；

（ii）结合上述分析，请直接写出抽取n次中恰有2次抽中黑球的概率.

17．已知函数$f(x)=(\frac{1}{x}+a)\ln(1+x)$.

（1）当$a=-1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）是否存在实数a,b使得曲线$y=f(\frac{1}{x})$关于直线$x=b$对称，若存在，求a,b的值；若不存在，说明理由；

（3）若$f(x)$在$(0,+\infty)$上存在极值，求实数a的取值范围.

18．两条动直线$y=k_1x$和$y=k_2x$分别与抛物线$C:y^2=2px(p>0)$相交于不同于原点的A,B两点，当ΔOAB的垂心恰是C的焦点时，$|AB|=4\sqrt{5}$.

（1）求p；

（2）若$k_1k_2=-4$，弦AB中点为P，点$M(-2,0)$关于直线AB的对称点N在抛物线C上，求ΔPMN的面积.

19．已知两个数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的项数均为p，且对于数列$a_1,a_2,\cdots,a_k$，其中$k=1,2,\cdots,p$，若存在

b_k 满足：① $\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$，都有 $a_i\le b_k$；② $\exists i\in\{1,2,\cdots,k\}$，使得 $a_i=b_k$，则称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的单极数列.

（1）已知 $a_n\in N^*$,若 $\{a_n\}$ 的单极数列为 $1,2,2,3,3,3$，求满足条件的 $\{a_n\}$ 的个数；

（2）已知 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的单极数列.

（i）若 $a_{k+1}+2b_{p-k}=k$，求 a_k-b_k； **浙考神墙750**

（ii）若 $a_n=\begin{cases}\lambda n^2-(-1)^{\frac{n+1}{2}}n(n\text{为奇数})\\ \lambda n^2-(-1)^{\frac{n}{2}}n(n\text{为偶数})\end{cases}$，当 $\frac{1}{2}<\lambda<1$ 时，证明：$0<\sum_{i=1}^{100}(b_i-a_i)<1263$.