Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2025 届高三第二次联考

数学参考答案

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】C

【解析】由数轴可知，$A\cap B=\{0,1,2\}$，答案选 C；

2.【答案】B

【解析】复数 $z=\dfrac{3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{3\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{5}=\dfrac{-3+6\mathrm{i}}{5}$，对应点 Z 坐标为 $\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{6}{5}\right)$，位于第二象限．答案选 B；

3.【答案】A

【解析】$\because \vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{a}-\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=4\lambda-2\times\sqrt{3}\times\cos 30^\circ=0$，$\therefore 4\lambda=3$，$\lambda=\dfrac{3}{4}$．答案选 A；

4.【答案】D

【解析】法一：令 $x=0$，$\because f(0)=\dfrac{m}{2}-1=0$，$\therefore m=2$．

法二：由 $f(-x)=-f(x)$，得 $m=2$．答案选 D；

5.【答案】D

【解析】不同元素的分组分配问题，$\dfrac{C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_2^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=36$．答案选 D；

6.【答案】A

【解析】由已知 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，则两条渐近线倾斜角分别为 60° 和 120°；直线 DE 的倾斜角为 30°，且经过右焦点 F，所以该直线与其中一条渐近线垂直．令 $\angle FEO=90^\circ$，易得 $\Delta DEO\cong\Delta FEO$，则 $|FE|=|DE|=b=\sqrt{3}$．答案选 A；

7.【答案】C

【解析】设事件 A=“该教师为男教师”，事件 B=“该教师为女教师”，事件 C=“该教师为点赞教师”，则 $P(BC)=P(B)\cdot P(C|B)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25}$，$P(AC)=P(A)\cdot P(C|A)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{25}$，

又 $\because P(C)=P(AC)+P(BC)=\dfrac{17}{25}$，$\therefore P(B|C)=\dfrac{P(BC)}{P(C)}=\dfrac{9}{17}$．答案选 C；

8.【答案】B

【解析】**法一**：构造抽象函数模型

$\because f(x)+f(y)=f(xy)-1$，可令 $f(x)=\log_a x-1$，又 $f(2)=0$，则 $\log_a 2-1=0$，

$\therefore a=2$，$\therefore f(x)=\log_2 x-1$．$\because f(a_n)=\log_2 a_n-1=n-1$，$\therefore a_n=2^n$，

$\therefore S_n=\dfrac{2\cdot\left(1-2^n\right)}{1-2}=2^{n+1}-2<2025$，$\therefore 2^{n+1}<2027$．

$\because 2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$，$\therefore (n+1)_{\max}=10$，$\therefore n_{\max}=9$．答案选 B.

法二：赋值

$\because f(x)+f(y)=f(xy)-1$，$f(a_n)=n-1$

由题 $f(2)=0=1-1$，$\therefore a_1=2$；

令 $x=y=2$，$\therefore f(2)+f(2)=f(4)-1$，$\therefore f(4)=1=2-1$，$\therefore a_2=4$；

令 $x=2,\ y=4$，$\therefore f(2)+f(4)=f(8)-1$，$\therefore f(8)=2=3-1$，$\therefore a_3=8$；

$\therefore a_1=2^1,\ a_2=2^2,\cdots a_n=2^n$，以下同法一.

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对得部分分，有选错的或不选的得 0 分.

9.【答案】ABD

【解析】对于 A 选项，样本相关系数 $|r|$ 越接近 1，相关性越强，故正确；

B 选项，一组数据中的每一个数据都加上或减去同一个常数后，方差不变，满足方差的性质，故正确；

C 选项，在做回归分析时，残差图中残差点分布的带状区域的宽度越窄表示回归效果越好，故错误；

D 选项，$\chi^2>x_{0.1}$，所以相关，故正确，答案选 ABD；

10.【答案】BC

【解析】对于 A 选项，$f(x)=2x^3-3x+1$，$f'(x)=6x^2-3$，$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故错误；

B 选项，$f(x)=2x^3-3x+1=(x-1)(2x^2+2x-1)$，$f(x)$ 存在三个零点，$x_1=1$，x_2,x_3 为方程 $2x^2+2x-1=0$ 的两根，故 $x_2+x_3=-1$，故所有零点之和为 0，故正确；

C 选项，$f'(x)=3ax^2-3=-3$ 时，$x=0$，$f(x)$ 过 $(0,1)$，故 $f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线为 $y=-3x+1$，故正确；

D 选项，$f'(0)=-3$，故错误. 答案选 BC；

11.【答案】ABD

【解析】对于 A 选项，设曲线 C_2 上任意一点 $M(x,y)$，由 C_2 定义可知，x,y 满足

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}+|y-1|=4$，移项，平方可得：

$x^2+(y+1)^2=(4-|y-1|)^2=16-8|y-1|+(y-1)^2$，

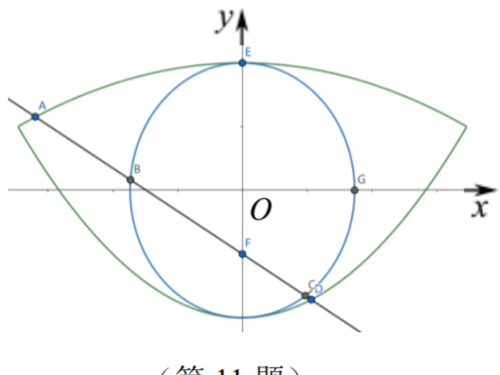
即 $x^2=16-4y-8|y-1|=\begin{cases}-12y+24, y\ge 1\\ 4y+8, y<1\end{cases}$，

为两条抛物线，故正确；

B 选项，F 和直线 $y=5$ 分别为抛物线 $x^2=-12y+24$ 的焦点和准线，由抛物线定义可知，故正确

C 选项，设 l 与 y 轴夹角为 θ，F 同时为抛物线 $x^2=-12y+24$ 和椭圆的焦点，$p=6$，

$|AB|=|AF|-|BF|=\dfrac{6}{1+\cos\theta}-\dfrac{3}{2-\cos\theta}=\dfrac{5}{6}$，



（第 11 题）

解得 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，则 $k_l=-\dfrac{4}{3}$，故错误.

D 选项，易知 F 为抛物线 $x^2=4y+8$ 和 $x^2=-12y+24$ 的焦点，前者 $p=2$，后者 $p=6$，AF,DF 分别为两个抛物线的较短的焦半径，因此

$|AF|=\dfrac{6}{1+\cos\theta},|DF|=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$，$|AF|=3|DF|$，由于 $S_{\Delta AFE}=3S_{\Delta DFG}$，

则 $d_{E-l}=d_{G-l}$，因此 $EG//l$，所以 $k_l=k_{EG}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故正确，答案选 ABD；

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

12.【答案】5

【解析】由题意可知，$5a_1+a_3=6a_2$，则 $q^2-6q+5=0$，由于 a_n 为递增数列，$q=5$；

13.【答案】$\dfrac{7}{9}$

【解析】**法一：**由 $\sin\alpha\tan\beta=1-\cos\alpha,$ 则 $\sin\alpha\sin\beta=\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta,$

因此 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=\cos\beta$，结合 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

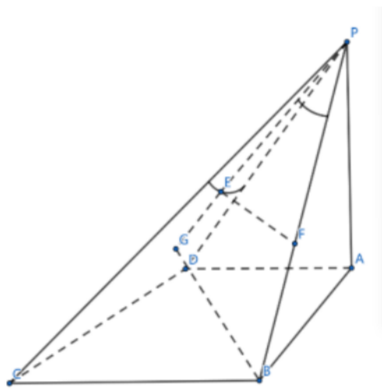
所以 $\alpha=2\beta$，则 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，$\cos\alpha=\cos2\beta=1-2\sin^2\beta=\dfrac{7}{9}$.

法二：由 $\sin\alpha\tan\beta=1-\cos\alpha,$ 则 $\tan\beta=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，结合 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

则 $\alpha=2\beta$，后同解法一.

14.【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】以 P 为球心 1 为半径的球与 ΔPCD(包括边界)的交线上事实上就是 ΔPCD 内以 P 为圆心，1 为半径的一截圆弧，如图所示，由于 PE 距离为定值 1，则当 F 点固定时，由余弦定理可知，EF 的距离只取决于 $\angle EPF$，$\angle EPF$ 越小，EF 距离越小，过 B 作面 $\angle PCD$ 的垂线，垂足为 G，易证 G 点在 ΔPCD 内，连接 PG 交圆弧为 E，此时 $\angle EPF$ 为线面角，取到最小，此时 $\sin\angle EPF=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，过 E 作 PB 垂线，EF 取到最小值 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



（第 14 题）

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

【解析】

（1）$\because\angle BAD=60^\circ,\quad AB=4,AD=2,$

$\therefore BD=2\sqrt{3},$ 且 $\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$，……………………2 分

又 $AD \perp PB$， $PB \cap BD = B$

$\therefore AD \perp$ 面PBD 又 $\because ABCD$ 是平行四边形 $\therefore BC \parallel AD$

$\therefore BC \perp$ 面PBD ……………………6 分

（2） $\because PB = PD = 2\sqrt{3}$ 设 AC 与BD交点为O,

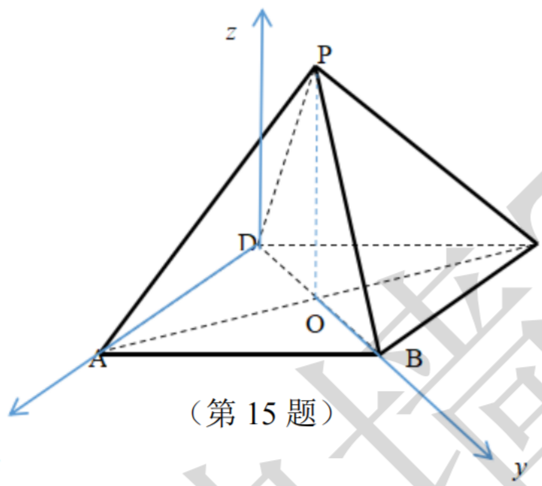
则 O 为 BD 中点，

$\therefore PO \perp BD$，

$\because BC \perp$ 面PBD，$PO \subset$ 面PBD $\therefore BC \perp PO$，

$\therefore PO \perp$ 面BCD ………………7 分

法一：建系：如图建系，



（第 15 题）

$\therefore D(0,0,0), A(2,0,0), C(-2,2\sqrt{3},0), P(0,\sqrt{3},3),$ ……………………8 分

$\therefore \overrightarrow{AC} = (-4, 2\sqrt{3}, 0)$， $\therefore \overrightarrow{PA} = (2, -\sqrt{3}, -3), \overrightarrow{AD} = (-2,0,0),$

设平面 PAC 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$，

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ $\therefore \vec{m} = (\sqrt{3}, 2, 0),$ ……………………10 分

设平面 PAD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$，

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases}$ $\therefore \vec{n} = (0, -\sqrt{3}, 1),$ ……………………12 分

设二面角 $C—PA—D$ 的平面角为 θ

$\therefore \cos\theta = \left|\cos < \vec{n}, \vec{m} >\right| = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ……………………13 分

$\therefore$ 二面角 $C—PA—D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

法二：即求 O 直接找角：作 $OH \perp PD$，$\because AD \perp$ 面PBD，

$\therefore OH \perp$ 面PAD，作 $OE \perp PA$,连EH $\therefore \angle OEH = \theta$ 即为所求角 ………………8 分

$\therefore OH = \dfrac{3}{2}$， $OE = \dfrac{3\sqrt{7}}{4}$， $\therefore EH = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ……………………12 分

$\therefore \cos\theta = \dfrac{EH}{EO} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ……………………13 分

$\therefore$ 二面角 $C—PA—D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

法三：等积法：角度转化+等体积公式 ……………………8 分

$\therefore OH=\dfrac{3}{2}$，$OE=\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$，$\therefore EH=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ……………………12 分

设二面角 $C—PA—D$ 的平面角为 θ

$\therefore \cos\theta=\dfrac{EH}{EO}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ……………………13 分

$\therefore$ 二面角 $C—PA—D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

16.（本小题满分 15 分）

【解析】

（1）$\because 2a\cos B=c-a$，

$\therefore 2\sin A\cdot\cos B=\sin C-\sin A$, ……………………2 分

$\therefore 2\sin A\cdot\cos B=\sin\left(A+B\right)-\sin A$, ……………………3 分

$\therefore 2\sin A\cdot\cos B=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B-\sin A$,

$\therefore \sin B\cdot\cos A-\cos B\cdot\sin A=\sin A$,

$\therefore \sin\left(B-A\right)=\sin A$， ……………………6 分

$\because 0<A<\pi, 0<B<\pi$，$\therefore -\pi<B-A<\pi$，

$\therefore B-A=A$ 或 $\left(B-A\right)+A=\pi$，

$\therefore B=2A$ 或 $B=\pi$（舍去），

$\therefore B=2A$. ……………………8 分

（2）在 ΔABC 中，$\because B=2A, AC=\sqrt{3}BC$，$\therefore \sin 2A=\sqrt{3}\sin A$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore \angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$, ……………………11 分

在 ΔBCD 中，$\because CD=BD=1$，$\angle BCD=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore BC=1$,

$\therefore AB=2BC=2$， ……………………13 分

在 ΔABD 中，由余弦定理得：$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore AD^2=2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$

$\therefore AD=\sqrt{7}$ ……………………15 分

17.（本小题满分 15 分）

【解析】

（1）$a=2$ 时，$f\left(x\right)=x\left(\ln x+1\right)$，

$\therefore f'\left(x\right)=\ln x+1+1=\ln x+2$ ……………………2 分

$\therefore f'(1)=2$，$f(1)=1$， ……………………4 分

$\therefore$ 切线方程是 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$ ……………………5 分

（2）**法一：** $\because g(x)=x(\ln x+a-1)-\frac{1}{2}ax^2$，由题意得

$\therefore g'(x)=\ln x+a-ax\le 0 \quad x\in[2,3]$ 恒成立，

$\therefore \ln x+a-ax\le 0 \Leftrightarrow \ln x\le a(x-1)$

即 $a\ge h(x)=\frac{\ln x}{x-1} \quad x\in[2,3]$，故只需求 $h(x)$ 的最大值 ……………………10 分

$h'(x)=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$，令 $t(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$，$\because t'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}<0$，

$\therefore \ t(x)\le 1-\frac{1}{2}-\ln 2<0$，$\therefore h(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递减，$\therefore h(x)\le h(2)=\ln 2$，

$\therefore a\ge \ln 2$. ……………………15 分

法二： 令 $h(x)=\ln x+a-ax$，$x\in[2,3]$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-a$，

1° 当 $a\le\frac{1}{3}$ 时，$h'(x)\ge 0$ 恒成立，$h(x)$ 单调递增，

$\therefore h(3)=\ln 3-2a\le 0$，$\therefore a\ge\frac{1}{2}\ln 3$，舍去； ……………………8 分

2° 当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)\le 0$ 恒成立，$h(x)$ 单调递减，

$\therefore h(2)=\ln 2-a\le 0$，$\therefore a\ge\ln 2$，$\therefore a\ge\ln 2$； ……………………11 分

3° 当 $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-a=0$ 的根 $x_0=\frac{1}{a}\in[2,3]$，

$\therefore h(x)$ 在 $[2,x_0]$ 上递增，在 $[x_0,3]$ 上递减，

$\therefore$ 只需 $f\left(\frac{1}{a}\right)\le 0$，即 $-\ln a+a-1\le 0$，$\therefore \ln a-a+1\ge 0$，

$\because \ln x\le x-1$ 恒成立，$\therefore \ln a-a+1\ge 0$ 在 $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ 时无解， ………………14 分

综上：$a\ge\ln 2$. ……………………15 分

18.（本小题满分 17 分）

【解析】

（1）（i）$Q_1(1,-2)$ 在抛物线 C 上，代入，求得 $p=2$,

所以抛物线 C：$y^2=4x$， ……………………3 分

准线 $x=-1$. ……………………4 分

（ii）设直线 $P_1P_2: x=my+b$，$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，联立直线与抛物线，得

$y^2-4my-4b=0$，$\Delta=16m^2+16b>0$，

由韦达定理可得 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4b$， ……………………6 分

由于 $k_1+k_2=0$，

则 $\dfrac{y_1+2}{x_1-1}+\dfrac{y_2+2}{x_2-1}=\dfrac{y_1+2}{my_1+b-1}+\dfrac{y_2+2}{my_2+b-1}=0,$

整理可得 $2my_1y_2+(2m+b-1)(y_1+y_2)+4(b-1)=0$.

将 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4b$ 代入可得

$(m-1)(2m-b+1)=0$， ……………………8 分

当 $2m-b+1=0$ 时，直线 P_1P_2 过 $Q_1(1,-2)$，不符合题意，舍去， …………9 分

因此 $m=1$，则直线 P_1P_2 的斜率为 1. ……………………10 分

（2）设 $P_n(2pt_n^2,2pt_n)$，令 $\dfrac{1}{k_1}=m_1,\dfrac{1}{k_2}=m_2$，则直线 $P_nQ_n:x=m_1(y-2pt_n)+2pt_n^2$

联立直线与抛物线

$\begin{cases}P_nQ_n:x=m_1(y-2pt_n)+2pt_n^2\\ y^2=2px\end{cases}$，可得 $y^2-2pm_1y+4p^2m_1t_n-4p^2t_n^2=0$

由韦达定理可知：$2pt_n+y_{Q_n}=2pm_1$，$y_{Q_n}=2p(m_1-t_n)$，

则 $Q_n\left(2p(m_1-t_n)^2,2p(m_1-t_n)\right)$ ……………………11 分

则直线 Q_nP_{n+1}：$x=m_2\left(y-2p(m_1-t_n)\right)+2p(m_1-t_n)^2$

联立

$\begin{cases}x=m_2\left(y-2p(m_1-t_n)\right)+2p(m_1-t_n)^2\\ y^2=2px\end{cases}$

可得 $y^2-2pm_2y+4p^2m_2(m_1-t_n)-4p^2(m_1-t_n)^2=0$

由韦达定理：$2p(m_1-t_n)+y_{P_{n+1}}=2pm_2$，$y_{P_{n+1}}=2p(m_2-m_1+t_n)$，

$x_{P_{n+1}}=2p(m_2-m_1+t_n)^2$

则 $P_{n+1}\left(2p(m_2-m_1+t_n)^2,2p(m_2-m_1+t_n)\right)$ ……………………12 分

同理可得 $P_{n+2}\left(2p(2m_2-2m_1+t_n)^2,2p(2m_2-2m_1+t_n)\right)$ ………………13 分

（以上求 Q_n，P_{n+1}，P_{n+2}，只要有想法，不管对错即可得分）

法一：

1.叉乘法算面积

$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=2p\left((m_2-m_1)(m_2-m_1+2t_n),m_2-m_1\right)$

$\overrightarrow{P_nP_{n+2}}=2p\left((2m_2-2m_1)(2m_2-2m_1+2t_n),2m_2-2m_1\right)$

$S_n=\dfrac{1}{2}(2p)^2\left|2(m_2-m_1)^2(m_2-m_1+2t_n)-2(m_2-m_1)^2(2m_2-2m_1+2t_n)\right|$

$$=4p^2(m_2-m_1)^2|m_2-m_1|=4p^2|m_2-m_1|^3=4p^2\left|\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}\right|^3$$ …………17 分

2.水平宽×铅锤高算面积

线段 p_np_{n+2} 的中点为 $M\left(p\left(t_n^2+(2m_2-2m_1+t_n)^2\right),2p(m_2-m_1+t_n)\right)$，

则 $p_{n+1}M$ 平行于 x 轴，因此

$$S_n=\frac{1}{2}|p_{n+1}M|\bullet|y_{p_n}-y_{p_{+2}}|$$

$$=\frac{1}{2}\left|p\left(t_n^2+(2m_2-2m_1+t_n)^2-2(m_2-m_1+t_n)^2\right)\right|\bullet|4p(m_2-m_1)|$$

$$=2p^2\left|2(m_2-m_1)^2\right|\bullet|m_2-m_1|$$

$$=4p^2|m_2-m_1|^3$$

$$=4p^2\left|\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}\right|^3$$ ……………………17 分

法二：

$P_{n+3}\left(2p(3m_2-3m_1+t_n)^2,2p(3m_2-3m_1+t_n)\right)$

此时有 $k_{P_{n+1}P_{n+2}}=\dfrac{m_2-m_1}{(3m_2-3m_1+2t_n)(m_2-m_1)}=\dfrac{1}{3m_2-3m_1+2t_n}$

$k_{P_nP_{n+3}}=\dfrac{3(m_2-m_1)}{(3m_2-3m_1+2t_n)(3m_2-3m_1)}=\dfrac{1}{3m_2-3m_1+2t_n}$

因此 $k_{P_{n+1}P_{n+2}}=k_{P_nP_{n+3}}$，直线 $P_{n+1}P_{n+2}$ 与直线 P_nP_{n+3} 平行 ……………………14 分

所以，S_n 为定值，$S_n=S_1=S_{\Delta p_1p_2p_3}$ ……………………15 分

1.叉乘法算面积

$\overrightarrow{P_1P_2}=2p\left((m_2-m_1)(m_2-m_1+2t_1),m_2-m_1\right)$

$\overrightarrow{P_1P_3}=2p\left((2m_2-2m_1)(2m_2-2m_1+2t_1),2m_2-2m_1\right)$

$$S_n=\frac{1}{2}(2p)^2\left|2(m_2-m_1)^2(m_2-m_1+2t_1)-2(m_2-m_1)^2(2m_2-2m_1+2t_1)\right|$$

$$=4p^2(m_2-m_1)^2|m_2-m_1|=4p^2|m_2-m_1|^3=4p^2\left|\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}\right|^3$$ ……17 分

2.水平宽×铅锤高算面积

线段 p_1p_3 的中点为 $M\left(p\left(t_1^2+(2m_2-2m_1+t_1)^2\right),2p(m_2-m_1+t_1)\right)$，

则 p_2M 平行于 x 轴，因此

$$S_n=\frac{1}{2}|p_2M|\bullet|y_{p_1}-y_{p_3}|$$
$$=\frac{1}{2}\left|p\left(t_1^{\ 2}+(2m_2-2m_1+t_1)^2-2(m_2-m_1+t_1)^2\right)\right|\bullet|4p(m_2-m_1)|$$
$$=2p^2|2(m_2-m_1)|\bullet|m_2-m_1|$$
$$=4p^2|m_2-m_1|^3$$
$$=4p^2\left|\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}\right|^3$$
……………………17 分

19.（本小题满分 17 分）

【解析】

（1）$f(3)=0,f(4)=1$（可以枚举）　（每个 2 分）　……………………4 分

（2）$f(2^n+2)(n\ge 2)$ 表示集合 $\{2^n+3,2^n+4,\cdots,2^{n+1}+4\}$ 中在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素的个数. 因为 $\{2^n+3,2^n+4,\cdots,2^{n+1}-1\}$ 中有 C_n^2 个数其二进制表示恰有 3 个 1，因为在二进制表示下 $2^n+3=(10\cdots011)_2,2^{n+1}-1=(11\cdots1)_2$，故 $\{2^n+3,2^n+4,\cdots,2^{n+1}-1\}$ 中在二进制表示下恰有 3 个 1 的数都是从右起第 $n+1$ 位数字是 1，而在后 n 位中找两个位置放 1，其余位置放 0 而得到的，故有 C_n^2 个

……………………7 分

又 $2^{n+1},2^{n+1}+1,2^{n+1}+2,2^{n+1}+3,2^{n+1}+4$ 的二进制表示分别为

$(100\cdots0000)_2,(100\cdots0001)_2,(100\cdots0010)_2,(100\cdots0011)_2,(100\cdots0100)_2$

其中只有 $2^{n+1}+3$ 的二进制表示中恰有 3 个 1，　……………………9 分

所以当 $n\ge 2$ 时，$f(2^n+2)=C_n^2+1$.　……………………10 分

（3）设 T 表示所有的“Z20 数”表示的集合，因为在二进制表示下，在 $n+1$ 的个位数字后面添加一个 0，恰为 $2(n+1)$ 在二进制下表示的数，于是 $n+1$ 与 $2(n+1)$ 同时属于 T，或者同时不属于 T，且集合 $\{n+2，n+3,\cdots,2(n+1)\}$ 比 $\{n+1，n+2,\cdots,2n\}$ 恰少了一个 $n+1$，而多了 $2n+1,2n+2$ 两个数，因此 $f(n+1)=\begin{cases}f(n),2n+1\notin T\\ f(n)+1,2n+1\in T\end{cases}$

……………………12 分

由 $f(1)=0$，且对任意正整数 s，由（2）知都存在正整数 n 使得 $f(n)\ge s$，并且由递推关系，可知存在正整数 n 使得 $f(n)=s$.　……………………13 分

假设恰有一个 n 使得 $f(n)=s$，则 $f(n-1)=s-1$，$f(n+1)=s+1$，当且仅当 $2n-1\in T,2n+1\in T$ 时成立，　……………………15 分

由二进制表示知 n 必有 $2^k+2(k\ge 2)$ 的形式. 故 $s=f(n)=f(2^k+2)=C_k^2+1$。

因此，使得 $f(n)=s$ 只有唯一解的全体 s 由正整数 $C_k^2+1(k\ge 2)$ 给出，且唯一解为 $n=2^k+2(k\ge 2)$.　……………………17 分