



绝密★考试结束前

## Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2025 届高三第二次联考

# 数学试题卷

命题：长兴中学 方志刚、陈王欢、谢伟忠

磨题：海宁高级中学 杜丽娟 嘉兴一中 吴献超 临安中学 郭立军 校稿：李慧华、吕金晶

### 考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前务必将自己的姓名，准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
3. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范答题，在本试卷纸上答题一律无效。
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

## 第 I 卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{x | 0 \leq x < 3\}$ ，则  $A \cap B =$   
 A.  $\{1, 2\}$                       B.  $\{-1, 0, 1\}$                       C.  $\{0, 1, 2\}$                       D.  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
2. 若复数  $z$  满足  $(2-i)z = 3i$ ，则复平面内复数  $z$  所对应的点位于  
 A. 第一象限                      B. 第二象限                      C. 第三象限                      D. 第四象限
3. 已知向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $30^\circ$ ， $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ ，若  $\vec{a} \perp (\lambda \vec{a} - \vec{b})$ ，则实数  $\lambda =$   
 A.  $\frac{3}{4}$                       B. 1                      C.  $\frac{4}{3}$                       D. 2
4. 若函数  $f(x) = \frac{m \cos x}{1 + e^x} - \cos x$  为奇函数，则实数  $m =$   
 A. -1                      B. 0                      C. 1                      D. 2
5. 2024 年 9 月 16 日，台风“贝碧嘉”登陆上海浦东，当地某机关单位组织甲、乙等 4 名志愿者参与 A、B、C 三个受灾小区的抗台抢险工作。每个人只能去一个小区，并且每个小区都要有人去，则不同的分配方案共有  
 A. 16 种                      B. 20 种                      C. 26 种                      D. 36 种
6. 已知双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的右焦点为  $F$ ，过  $F$  且倾斜角为  $30^\circ$  的直线交双曲线  $C$  的两条渐近线于  $D, E$  两点，则  $|DE| =$   
 A.  $\sqrt{3}$                       B.  $\sqrt{5}$                       C.  $2\sqrt{3}$                       D.  $2\sqrt{5}$
7. 某校教工食堂为更好地服务教师，在教师微信群中发起“是否喜欢菜品 A”的点赞活动，参与活动的男、女教师总人数比例为  $2:3$ ，男教师点赞人数占（参与活动的）男教师总人数的  $\frac{4}{5}$ ，女教师点赞人数占（参与活动的）女教师总人数的  $\frac{3}{5}$ ，若从点赞教师中选择一人，则该教师为女教师

的概率为

- A.  $\frac{9}{25}$  B.  $\frac{17}{25}$  C.  $\frac{9}{17}$  D.  $\frac{8}{17}$

8. 定义在  $(0, +\infty)$  的增函数  $f(x)$  满足：  $f(x) + f(y) = f(xy) - 1$ ，且  $f(2) = 0$ ，  $f(a_n) = n - 1$ 。已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，则使得  $S_n < 2025$  成立的  $n$  的最大值是

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对得部分分，有选错的或不选的得 0 分。

9. 下列结论正确的是

- A. 若  $A, B$  两组成对数据的样本相关系数分别为  $r_A = 0.8$ ，  $r_B = 0.4$ ，则  $A$  组数据比  $B$  组数据的相关性强  
 B. 将一组数据中的每一个数据都加上或减去同一个常数后，方差不变  
 C. 在做回归分析时，残差图中残差点分布的带状区域的宽度越窄表示回归效果越差  
 D. 由两个分类变量  $X, Y$  的成对样本数据计算得到  $\chi^2 = 3.276$ ，依据  $\alpha = 0.1$  的独立性检验 ( $\chi_{0.1}^2 = 2.706$ )，可判断  $X, Y$  相关，且犯错误的概率不超过 0.1

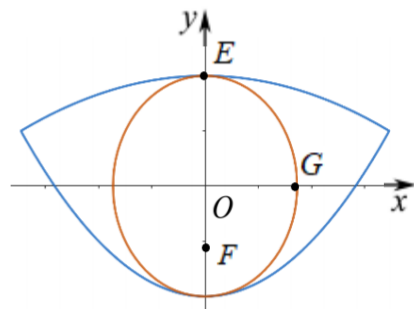
10. 已知  $f(x) = ax^3 - 3x + 1 (a \neq 0)$

浙考神墙750

- A. 当  $a = 2$  时，  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  是  $f(x)$  的极大值点 B. 当  $a = 2$  时，  $f(x)$  的所有零点之和为 0  
 C. 直线  $y = -3x + 1$  是  $f(x)$  的切线 D. 存在  $a$  使  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上单调递增

11. 数学中有许多美丽的曲线，右图中美丽的眼睛图案由两条曲线构成，曲线  $C_1: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，上顶点为  $E$ ，右顶点为  $G$ ，曲线  $C_2$  上的点满足到  $F(0, -1)$  和直线  $y = 1$  的距离之和为定值 4，已知两条曲线具有公共的上下顶点，过  $F$  作斜率小于 0 的直线  $l$  与两曲线从左到右依次交于  $A, B, C, D$  且  $y_A \geq 1$ ，则

- A. 曲线  $C_2$  由两条抛物线的一部分组成  
 B. 线段  $AF$  的长度与  $A$  点到直线  $y = 5$  的距离相等  
 C. 若线段  $AB$  的长度为  $\frac{5}{6}$ ，则直线  $l$  的斜率为  $-\frac{3}{4}$   
 D. 若  $S_{\triangle AFE} = 3S_{\triangle DFG}$ ，则直线  $l$  的斜率为  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$



(第 11 题)

## 第 II 卷

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。把答案填在答题卡中的横线上。

12. 已知等比数列  $\{a_n\}$  为递增数列，且  $5a_1, a_3$  的等差中项为  $3a_2$ ，则公比  $q$  为     ▲    。

13. 已知  $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，且满足  $\sin \alpha \tan \beta = 1 - \cos \alpha$ ，  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ ，则  $\cos \alpha =$      ▲    。

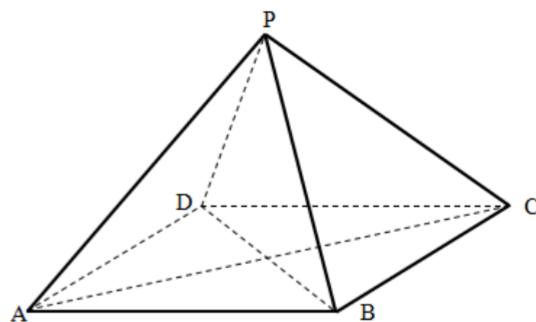
14. 四棱锥  $P - ABCD$  满足  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ，且  $AB \perp AD$ ，  $AD \parallel BC$ ，  $PA = AB = AD = \frac{1}{2}BC = 1$ ，动点  $E$  在以  $P$  为球心 1 为半径的球与  $\triangle PCD$  (包括边界) 的交线上，动点  $F$  在直线  $PB$  上，则  $EF$  的最小值为     ▲    。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 如图，四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是平行四边形， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AD = 2$ ， $PB = PD = 2\sqrt{3}$ ，且  $AD \perp PB$ 。

(1) 证明： $BC \perp$  平面  $PBD$ ；

(2) 求二面角  $C-PA-D$  的余弦值。



(第 15 题)

16. (15 分) 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，已知  $2a \cos B = c - a$ ，点  $A$  与  $D$  分别在直线  $BC$  的两侧，且  $CD = BD = 1$ 。

(1) 求证： $B = 2A$ ；

(2) 若  $AC = \sqrt{3}BC$ ， $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$ ，求  $AD$ 。

浙考神墙750

17. (15 分) 已知函数  $f(x) = x(\ln x + a - 1)$ 。

(1) 若  $a = 2$ ，求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程；

(2) 若函数  $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}ax^2$  在区间  $[2, 3]$  上单调递减，求实数  $a$  的取值范围。

18. (17 分) 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$ ，抛物线  $C$  上一点  $P_1$  在第一象限，按照如下方式依次构造点  $P_n (n = 2, 3, \dots)$ ：过点  $P_{n-1}$  作斜率为  $k_1$  的直线交  $C$  于  $Q_{n-1}$ ，再过点  $Q_{n-1}$  作斜率为  $k_2$  的直线交  $C$  于点  $P_n$ 。

(1) 若点  $Q_1(1, -2)$ ，且  $k_1 + k_2 = 0$ 。

(i) 求抛物线  $C$  的方程，并写出准线方程；

(ii) 求直线  $P_1P_2$  的斜率；

(2) 记  $S_n$  为  $\Delta P_n P_{n+1} P_{n+2}$  的面积，求  $S_n$  的表达式（用  $k_1, k_2, p$  表示）。

19. (17 分) 二进制是计算技术中广泛采用的一种数制，二进制数据是用 0 和 1 两个数码来表示的数，它的基数为 2，进位规则“逢二进一”，借位规则“借一当二”。记十进制下的正整数  $m$  在二进制下的表示为  $m = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \dots + a_1 2 + a_0$  ( $a_k = 1, a_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, \dots, k-1$ )，若  $a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 = 3$ ，则称  $m$  为“Z20 数”。记  $f(n)$  表示集合  $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$  中“Z20 数”的个数。

(1) 计算  $f(3), f(4)$ ；

(2) 求  $f(2^n + 2)$  ( $n \geq 2$ )；

(3) 求证： $\forall s \in N_+, \exists n \in N_+,$  有  $f(n) = s$ ；并求出所有  $s$ ，使得  $n$  的取值唯一。