# NOIP 模拟赛 sol

## 留影机

形式化题意：给定两个正整数 $n,a$，令 $k=\prod\limits_{i=1}^{n} i!$，找到最大整数 $b$，使得 $a^b \mid k$。

将 $a,k$ 进行质因数分解。设 $a=\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^{x_i}$，$k=\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^{y_i}$，题目等价于让我们求 $\min\limits_{i=1}^{m} \lfloor \frac{y_i}{x_i} \rfloor (x_i \neq 0)$。讲人话就是对于 $a$ 中每一个质因子，我们要让它们在 $k$ 中都出现，找到出现次数最少的那一个。

将 $k$ 变形，发现 $k=\prod\limits_{i=1}^{n} i^{n-i+1}$。考虑对于 $a$ 的每一个质因数 $p$，计算 $p$ 在 $k$ 中出现的次数 $x$。发现 $p$ 会在 $i=p,2p,3p,\dots,\lfloor \frac{n}{p} \rfloor p$ 中出现至少一次。但我们无法确定 $p$ 的指数。

考虑做一个容斥，对于每一个 $p^j$，不管它在 $i$ 中出现几次，我们只统计一次，然后将指数小于 $j$ 的对 $p^j$ 的贡献减去。

那么令 $q=p^j, m=\lfloor \frac{n}{q} \rfloor$，它对答案的贡献即为：

$$
\begin{aligned}
j(\sum_{i=1}^{m} n-iq+1)-\sum_{i=1}^{j-1} i(n-q+1) &= m(n+1)-\sum_{i=1}^{m} iq-(n-q+1)\sum_{i=1}^{j-1} i \\
&= m(n+1)-q\sum_{i=1}^{m} i-\frac{j(j-1)(n-q+1)}{2} \\
&= m(n+1)-\frac{qm(m+1)}{2}-\frac{j(j-1)(n-q+1)}{2}
\end{aligned}
$$

将它们加起来得到 $x$，取 $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ 的最小值即可。

## 关禁闭

先无视询问次数，考虑 $2n$ 的做法。

设一个全 $0$ 串，每次修改最左边的 $0$ 为 $1$，在这至多 $n$ 次询问中，我们一定能找到一个有 $\frac{n}{2}$ 位正确的串。

> 正确性证明：假设全 $0$ 时有小于 $\frac{n}{2}$ 位正确，那么最糟情况，也就是变成全 $1$ 时一定有多于 $\frac{n}{2}$ 位正确；反之亦然。我们每次只改变一位的正确性，也就是说每次正确的位数只会改变 $1$，这样在移动的过程中一定会有一个情况恰好 $\frac{n}{2}$ 位正确。

记你获得的恰好 $\frac{n}{2}$ 位相同的字符串为 $H$。在字符串 $H$ 上我们固定一个位置，每次询问将该位置和其他一个位置取反。若返回的答案为 $\frac{n}{2}$，那么说明固定位置和这个位置的正确性是相反的。我们这样询问固定位置和其他每一个位置，就能够得到包含所有位置的两个正确性相反的集合。然后，我们将这个得到的 $01$ 串和取反后的串询问，找到正确的输出即可。此时你得到了 $2n$ 次操作的确定性做法。

再考虑询问次数 $n+500$ 的特殊性，每次询问求得恰好 $\frac{n}{2}$ 位相同的字符串的概率 $\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n} \geq 0.025$。$499$ 次操作中一次恰好为 $\frac{n}{2}$ 位相同的概率可以视为 $1$，所以你可以视为随机询问 $499$ 次字符串中可以会问出一次恰好 $\frac{n}{2}$ 位相同的字符串。事实上，这样的期望询问次数是 $\sqrt{n}$ 次。

询问次数是 $499+n-1+2=n+500$，可以通过。

# 蹦蹦炸弹

显然有一个 $\mathcal{O}(nm)$ 的暴力 dp，设 $f_{i,j,0/1}$ 表示到点 $(i,j)$，先手/后手操作的结果，那么 $f_{i,j,0}=\min(f_{i+1,j,1},f_{i,j+1,1}),f_{i,j,1}=\max(f_{i+1,j,0},f_{i,j+1,0})$，若 (i,j) 有水坑，$f_{i,j,0}=f_{i,j,1}=a_{i,j}$。

发现状态数很多，但转移是 $\mathcal{O}(1)$ 的，考虑优化状态数。

首先一个点由谁操作是确定的，所以状态的最后一维可以去掉。假设当前是先手操作，转移可以转化为 $f_{i,j}=\min(\max(f_{i+2,j},f_{i+1,j+1}),\max(f_{i,j+2},f_{i+1,j+1}))$，这等价于 $f_{i,j}=\max(f_{i+1,j+1},\min(f_{i+2,j},f_{i,j+2}))$。发现一个水坑 $(i,j)$ 只会直接影响到 $(i-2,j),(i,j-2)$，其余的点由它右下角转移过来，那么将会被影响到的点特殊转移，剩下的点按对角线转移即可。

# 嘟嘟可

这里我们称触发机关为“传送”。

我们可以将比赛过程分为 $n\times m$ 轮，每轮有一架嘟嘟可从上一个石碑走至下一个石碑，其余的传送。

考虑每轮是哪个没有传送。发现是走向下一个石碑时间最少且编号最小的。设 $w_{i,j}$ 表示 $i$ 从 $j-1$ 号石碑走向 $j$ 号石碑所需的时间，发现实际上这个顺序是对这 $n$ 个数组的归并。具体来说就是每次取这 $n$ 个数组中开头最小的那一个，然后删去它，直到删空。

注意到若一个数 $w_{i,l}$ 被删去，且存在一个 $r$ 满足 $(\max_{j=l}^{r} w_{i,j})\le w_{i,l}$，那么 $w_{i,l\sim r}$ 会被连续删去。证明很显然。那么可以将这些会被连续删去的合并成一个段。

容易发现每个段的段首元素单调递增，即 $w_{i,l_1}<w_{i,l_2}<\cdots<w_{i,l_{m'}}$，其中 $m'$ 为段数。

记 $d_i$ 表示石碑 $i-1$ 到 $i$ 的距离，发现 $w_{i,j}=t_i\times d_j$，而对于相同的 $i$，$t_j$ 相同，所以实际上我们在对 $d$ 分段，所以可得 $d_{l_1}<d_{l_2}<\cdots<d_{l_{m'}}$，又由于 $\sum d_{l_i}\le S$，其中 $S$ 为总距离，所以 $m'\le\mathcal{O}(\sqrt{S})$。

考虑怎么算答案。每次一个嘟嘟可走至下一个石碑时，对答案的贡献为剩下的没到达终点的嘟嘟可个数，则答案为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j\ne i}\sum\limits_{k=1}^{m}[w_{j,k}\le w_{i,m}]$，又由于一大段会连续走过去，所以同一段中的贡献相同，只需要算每段的段首，再乘上段的长度即可。所以答案为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j\ne i}\sum\limits_{k=1}^{m'}[w_{j,k}\le w_{i,l_{m'}}]len_k$。$j\ne i$ 的不好算，将所有的算出来减去 $j=i$ 的即可。

考虑优化这个计算过程。现在计算一次答案的复杂度为 $\mathcal{O}(n^2\sqrt{S})$，考虑优化一个 $n$。我们固定 $k$，当 $t$ 有序时，发现 $i,j$ 有单调性，那么固定 $i,k$，可以找到 $j$ 的限制 $t_j\le R_{i,k}$，$R_{i,k}$ 可以双指针求出，可以做前缀和维护 $j$ 的个数。

假设我们已经算出 $i\le x-1$ 的答案，考虑计算 $x$ 对答案的增量。分两种情况：

- $i=x,j<x$ 时：

  增量为 $\sum\limits_{j<x}\sum\limits_{k=1}^{m'}[t_j\le R_{x,k}]len_k$，枚举 $k$，$\mathcal{O}(n)$ 次在 $t_x$ 的位置单点加 $1$，$\mathcal{O}(n\sqrt{S})$ 次查询 $\le R_{x,k}$ 的前缀和，可以分块根号平衡。

- $i\le x,j=x$ 时：

  增量为 $\sum\limits_{i\le x}\sum\limits_{k=1}^{m'}[t_x\le R_{i,k}]len_k$，枚举 $k$，$\mathcal{O}(n\sqrt{S})$ 次在 $R_{i,k}$ 的位置单点加 $len_k$，$\mathcal{O}(n)$ 次查询 $\ge t_x$ 的后缀和，也可以分块根号平衡。