分析 2 期中考试

Long

2022/4/11

几点声明:

1、此试卷为考生回忆版, 不保证问题的顺序的准确性与问题陈述的严谨性。

2、考试时间为 2022 年 4 月 11 日 9:50 至 12:20。

3、满分 100 分加附加题 5 分。

一、解答题 (每题 6 分)

1、$f:(0,+\infty)^2\to\mathbb{R}$,$f(x,y)=xlog(y)$, 问 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在。如果存在则算出来, 不存在则说明理由。

2、$\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,$\Phi(x,y,z)=(x+y+z,x^2+y^2+z^2,x^3+y^3+z^3)$, 求所有 $p\in\mathbb{R}^3$ 使得 Φ 在 p 附近是微分同胚。

3、证明存在光滑函数 f 使得 $M=\{1+xcos(\pi z)+ysin(\pi z)=z^2\}$ 在 $(0,0,1)$ 附近可写为 $(x,y,f(x,y))$, 并求 $\Delta f(0,0)$。

4、证明 $\Gamma=\{(x^2+y^2-x)^2=x^2+y^2\}$ 在 $(0,0)$ 外是曲线, 并求出 Γ 在 $(0,1)$ 处的一个切向量。

5、求 $f(x,y)=x^2+2xy+y^3-y^2$ 所有的临界点并判断这是什么类型的点。(局部极值点、鞍点...)

6、$f(x,y)=x^2+2xy+y^3-y^2$ 在 $D=\{(x,y)|0\le y\le x,x+y\le 6\}$ 上的最大值与最小值。

二、判断题 (每题 7 分)

1、$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,$f$ 限制在每条平面上的直线都连续, 则 f 连续。

2、$\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 微分同胚，$\Psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 C^1 函数且有紧支集。则存在 $\epsilon_0>0$ 使得 $\forall\epsilon\in(-\epsilon_0,\epsilon_0)$, 有 $\Phi+\epsilon\Psi$ 微分同胚。

3、$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,Lebesgue 可积, 则对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$ 使得 $\forall E\subseteq\mathbb{R}^n$ 可测,$m(E)<\delta$, 都有 $\int_E|f(x)|dx<\epsilon$

4、$f_n\to f a.e.,f_n,f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 均 Lebesgue 可积, 且有 $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)dx=\int_{[0,1]}f(x)dx$, 则 $\exists g:[0,1]\to\mathbb{R}$,g Lebesgue 可积, 且 $|f_n|\le g$。

三、一个三角形的问题 (每题 5 分)

$\Omega=(0,\pi)^3,s>\frac{9}{\pi},f(x,y,z)=x+y+z,g(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},h(x,y,z)=cot(x)+cot(y)+cot(z)$

1、证明:$D=\{(x,y,z)\in\Omega|f(x,y,z)=\pi,g(x,y,z)\le s\}$ 为有界闭凸集。

2、证明:$\Gamma=\{(x,y,z)\in\Omega|f(x,y,z)=\pi,g(x,y,z)=s\}$ 为闭曲线。

3、证明:Γ 上 x,y,z 坐标互不相等的点非 h 的条件极值点。

4、证明: 一个三角形在周长、面积、内角倒数和确定后而确定。

四、一个积分的计算 (总共 16 分)

f 是 Lebesgue 可测函数, 对 $r>1$, 记 $a_f(r)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}r^km(\{x|r^k\le f(x)<r^{k+1}\})$

1、(4 分) 证明 f 可积等价于 $a_f(r)<+\infty$

2、(4 分) 证明: 若 f 可积, 则 $\int f(x)dx=\lim_{r\to 1+}a_f(r)$

3、(8 分)$f(x)=|x|^\lambda$ 不用极坐标计算 $\int_{\{x|0<|x|<1\}}f(x)dx$ 在什么时候可积, 并求其可积时的积分值。(给了 c_n 为单位球测度)

五、附加题 (5 分)

$f:[0,1]\to(0,\infty)$,f 与 $logf$ 均 Lebesgue 可积。证明对 $0<p<1$ 有 $f(x)^p$ 时 lebesgue 可积的并且有:

$$\lim_{p\to 0+}(\int_{[0,1]}f(x)^pdx)^{\frac{1}{p}}=exp(\int_{[0,1]}logf(x)dx)$$