2021-2022 Mathematical Analysis 1 Final

Long

2022/1/3

满分110分，超过100分记为100。

一、基础题（每题8分）

1.$f(x)=(1+x)^{\frac{2}{x}}$，证明：可以补充定义$f(0)$使$f(x)$在$(-1,1)$上光滑，并写出$f(x)$在0处Taylor展开直到x^3的余项。

2.判断$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{W(n+1)-W(n)}{W(n)^2}$是否收敛。其中$W(n)$为使得$W(n)e^{W(n)}=n$的唯一正实数。

3.求$\int_0^{\sqrt{3}}x^3arctan(x)dx$

4.$\gamma(t)=(e^t+t,e^t-t)$，求$\gamma(t)$在$[0,\frac{1}{2}log(3)]$上的长度。

5.证明$\int_0^{+\infty}e^{-x}|sinx|dx$反常可积，并计算该值。

6.求$x(1)+y(2)$，其中$x(t),y(t)$为满足

$$
\begin{aligned}
&x(0)=y(0)=0\\
&x'(t)=3x(t)-2y(t)+e^t\\
&y'(t)=2x(t)-y(t)+e^t
\end{aligned}
$$

二、判断题（每题9分）

1.$\{f_n\}$是一列函数使得$f_n\in\mathcal{R}([0,1])$，且$\{f_n\}$单调递增，并逐点收敛到函

数$f(x)$。则有$f\in\mathcal{R}([0,1])$并且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

2.$f\in\mathcal{C}([0,1]),\forall g\in\mathcal{C}([0,1])$且$g(0)=g(1)=\int_0^1 g(x)dx=0$都有$\int_0^1 f(x)g(x)dx=1$。则$f(x)$为常数。

3.$f\in\mathcal{C}^\infty((-1,1)),f$在0处展开式为$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$。记$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则$F$在0处展开式为$F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$

三、参数曲线（每问5分）

$$\Gamma=\{(x,y)|x^3+y^3=3xy\}$$

1.已知Γ在第一象限为简单闭合曲线，求其极坐标表达式，并计算其在第一象限围成的面积。

2.证明Γ在$x\leq 0$部分的图像为函数，记为$y=g(x)$，证明$g(x)$单调递减并且$Im(g)\subset\{(x,y):x\leq 0,max\{-x-1,0\}\leq y\leq -x\}$。

3.证明$y=-x-1$是曲线Γ在x趋于负无穷时的渐近线，即

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)+x+1=0$$

4.由对称性，已知$y=-x-1$是曲线Γ在x趋于正无穷时的渐近线（不用证明），证明Γ在二、四象限构成的曲线与y=-x-1夹出的面积与第一问中所求面积相同。

四、$Laplace$展开（10分）

五、光滑函数（5分）

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$，证明存在$g, h \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty))$使得

$$f(x) = g(x^2) + xh(x^2)$$