一、(10 分) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}.$$

二、(10 分) 设 $F_0=F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

三、(10 分) 指出函数 $f(x)=[\frac{1}{x}]$ 的间断点.

四、(10 分) 设 $f(x)$ 是在 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数, 且满足对任意 $x_1,x_2\geq 0$ 有 $f(x_1+x_2)\leq f(x_1)+f(x_2)$, 求证:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\inf_{x>0}\frac{f(x)}{x}.$$

五、(10 分) 假设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续. 当 $x\neq 0$ 时有 $|f(x)|<|x|$. $f_1(x)=f(x), f_2(x)=f\circ f(x),\cdots,f_k(x)=f\circ f_{k-1}(x)$, 证明 $f_k(x)$ 在 $[-A,A]$ 上一致收敛, 其中 A 为正实数.

六、(30 分) 设 (X,d) 是一个度量空间, A,B 是 X 的非空子集. 定义

$$d_A(x)=\inf_{a\in A}d(x,a)$$

$$d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}d(a,b)$$

证明:

1.(5 分) d_A 是 X 上的连续函数.

2.(5 分) $d_A^{-1}(0) = \bar{A}$.

3.(5 分) 如果 A 是闭集, B 是紧集, 那么存在 $a \in A, b \in B$, 使得

$$d(A, B) = d(a, b),$$

并举出当 A, B 均为闭集时上述命题不成立的反例.

4.(5 分) 若 A, B 是 X 上的闭集, 且 $A \cap B = \emptyset$, 则存在 X 上的取值在 $[0,1]$ 上的连续函数 f, 使得 $f^{-1}(0) = A, f^{-1}(1) = B$.

5.(10 分) (附加题) 令 $Y = \{A \subset X \mid A \text{ 是有界非空闭子集}\}$, 对于 $A, B \in Y$, 定义

$$H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d_B(a), \sup_{b \in B} d_A(b)\},$$

证明 H 是 Y 上的一个度量.

七、(15 分) 令 $l^2 = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$. 对于 $a, b \in l^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 定义

$$\lambda \cdot a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n, \cdots)$$

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n, \cdots),$$

容易验证 l^2 是一个线性空间. 我们定义

$$\|a\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

证明:

1.(5 分) $\|\cdot\|$ 是 l^2 上的一个范数.

2.(10 分) 称一个线性空间可分, 如果其上存在一族可列的基. 证明: l^2 在这个范数下是可分的完备度量空间.

八、(15 分) 设 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R} \times [a, b]$ 上的连续函数, 证明:

1.(10 分) $g(x) = \inf_{y \in [a,b]} f(x, y)$ 是一个连续函数.

2.(5 分) 举例说明 $h(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$ 可能不是连续函数.