代数 1 - 期中考试
2021 年 11 月 3 日

- 试卷共 2 页。答题使用中英文均可。
- 每道大题中各小问独立计分，可以使用前面小问的结论。
- 以下未加说明时, $\mathbb{F}$ 表示一个域，$M_n(\mathbb{F})$ 是系数在 $\mathbb{F}$ 中的 $n \times n$ 矩阵的集合。

题目 1. （*10* 分）

(1) 求矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

的逆。

(2) 在有限域 $\mathbb{F}_5$ 上求解线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 5x_1 + x_2 + 21x_3 &= 13, \\ 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}$$

题目 2. （*10* 分）令

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵。

题目 3. （*10* 分）对任意矩阵 A，记 $\mathrm{rk}(A)$ 为 A 的秩。证明对任意 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, 有

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - n \leqslant \mathrm{rk}(AB).$$

题目 4. （*10* 分）考虑矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$。计算线性映射

$$\begin{aligned} \phi : M_3(\mathbb{F}) &\rightarrow M_3(\mathbb{F}), \\ X &\mapsto AX - XA \end{aligned}$$

的秩。

题目 5. (*15 分*) 考虑矩阵 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$。令 A_{ij} 是去掉 A 的第 i 行和第 j 列得到的矩阵。对任意 $\lambda\in\mathbb{F}$，令 $A(\lambda)=(a_{ij}+\lambda)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

(1) 证明

$$\det(A(\lambda))=\det(A)+\lambda\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

(2) 证明

$$\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})=\det\begin{bmatrix}a_{11}-a_{12} & \dots & a_{1,n-1}-a_{1,n} & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}-a_{n2} & \dots & a_{n,n-1}-a_{n,n} & 1\end{bmatrix}.$$

题目 6. (*15 分*) 令 G 是一个阶为 n 的有限群，$\mathrm{Perm}(G)$ 是 G 中元素的置换群。

(1) 说明 G 在自身上的左乘作用定义一个群同态 $\rho: G\to\mathrm{Perm}(G)$。
(2) 证明若 $g\in G$ 是阶为 m 的元素，则置换 $\rho(g)$ 的符号 *(sign)* 是 $(-1)^{n+\frac{n}{m}}$.
(3) 假设 $n=2k$，其中 k 是奇数，且 G 中存在阶为 2 的元素。求证 G 中有阶为 k 的子群 N 使得 G 同构于 $N\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

题目 7. (*15 分*) 令 $A, B\in M_n(\mathbb{R})$。证明若 A 和 B 作为 $M_n(\mathbb{C})$ 中的矩阵相似，则它们作为 $M_n(\mathbb{R})$ 中的矩阵也相似。

题目 8. (*15 分*) 令 S_n 是 n 个元素的置换群。回忆 $\mathrm{Aut}(S_n)$ 是群 S_n 的自同构全体构成的群。考虑由共轭作用定义的群同态

$$\phi: S_n\to\mathrm{Aut}(S_n),\quad g\mapsto(\tau\mapsto g\tau g^{-1}).$$

(1) 证明当 $n\geqslant 3$ 时 ϕ 是单射。
(2) 证明对任意 $\tau\in\mathrm{Aut}(S_n)$，若 C 是 S_n 中的共轭类，则 $\tau(C)$ 也是 S_n 中的共轭类。
(3) 已知当 $n\neq 6$ 时，S_n 中有唯一一个由 *2* 阶元素组成的共轭类 C 使得 C 中元素个数是 $\frac{1}{2}n(n-1)$。求证 $n\geqslant 3$ 且 $n\neq 6$ 时 ϕ 是群同构。