分析 1 期中考试

Long

2022/4/11

几点声明:

1、此试卷为考生回忆版, 不保证问题顺序的准确性与问题陈述的严谨性。

2、考试时间为 2021 年 11 月 01 日 9:50 至 12:20。

3、满分 100 分加附加题 5 分。

一、解答题 (6 题, 每题 6 分)

3、计算 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{nk-k^2}$。

4、计算 $\lim_{x\to\infty}x[\frac{1}{e}-(\frac{x}{x+1})^x]$。

5、证明 $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sqrt{\ln x}$ 一致连续。

二、判断题 (4 题, 每题 7 分)

1、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛。

2、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{R}-\{-1\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 均收敛, 则 $\Pi_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛。

3、$f\in\mathcal{C}^1((0,\infty))$ 满足 $\forall x\in(0,\infty)$, 都有 $\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0$, 则 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$。

4、$f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ 且满足 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}=0$, 则存在 $s,t\in\mathbb{R}$,$s\neq t$,$f''(s)=f''(t)=0$。

三、牛顿迭代法 (4 问, 每题 5 分)

1、令 $\theta_1 < \theta_2 < \ldots$ 是方程 $f(x) = x\tan x + 1 = 0$ 的所有正解。证明:$\forall k \in \mathbb{N}^*$,$\theta_k \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 且 $f(\theta_k) = 0$,$f'(\theta_k) > 0$。

2、令 $x_0 = k\pi$,$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, 证明:$\{x_n\}$ 单调递减至 θ_k。

3、证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\theta_k}{(x_n-\theta_k)^3}$ 存在, 并求 $\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\theta_k}{(x_n-\theta_k)^3}$。

4、证明存在 $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\theta_k = k\pi + c_0 + \frac{c_1}{k\pi} + \frac{c_2}{(k\pi)^2} + \frac{c_3}{(k\pi)^3} + o(\frac{1}{(k\pi)^3}), k \to \infty$$

并计算 c_0, c_1, c_2, c_3。

四、震荡函数 (共 16 分)

$f_{a,b}$,$g_{a,b} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ 如下:

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} x^a \cos(x^{-b}), x \in (0, 1] \\ 0, x \in [-1, 0] \end{cases}$$

1、给定 $b > 0$, 求所有 a 满足 $f_{a,b} \in \mathcal{C}^n[-1, 1]$

2、令 $g = f_{1,1}$, 求所有 $\alpha > 0$ 使得 $\exists C_\alpha > 0$ 满足 $\forall x, y \in [-1, 1]$, 都有:

$$|g(x) - g(y)| \leq C_\alpha |x - y|^\alpha$$

五、附加题 (5 分)

$\{a_{n.k}\}$ 一族实数满足:

1、对任意 $k \in \mathbb{N}^*$,$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty$。

2、对任意有界序列 b_n, 有 $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} b_n = 0$。

问: 是否有 $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1} \infty |a_{n,k}| = 0$?