清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：代数1　　2021年11月7日　　A卷

一、（7分）a,b,c满足什么条件时下面的方程组无解、有唯一解、或有无穷多组解，并在有解的情况下求出解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + ax_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + (a+3)x_4 = c \end{cases}$$

二、（12分）计算下面矩阵的行列式

(1) $\begin{pmatrix} b_n & -1 & & & \\ & b_{n-1} & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_2 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1+b_1 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & 1+a_nb_n \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta_1^{n-1} & \theta_2^{n-1} & \dots & \theta_n^{n-1} \end{pmatrix}.$

(4) (a_{ij})，$a_{ij} = \theta_1^{i-1}\theta_1^{j-1} + \cdots + \theta_n^{i-1}\theta_n^{j-1}\ (1 \le i,j \le n).$

三、（6分）用所学的群论的知识证明对任何素数p和任何整数a，我们有

$$a^p \equiv a \mod p, \quad (p-1)! \equiv -1 \mod p.$$

四、（3分）证明群$(\mathbb{Q},+)$不能写成两个非零子群的直和。

五、（6分）设G为群，N为G的正规子群，

$$\mathrm{Aut}(N) = \{\sigma | \sigma : N \to N\text{是同构}\}$$

是N的自同构群（$\mathrm{Aut}(N)$上的运算为同构的复合）。

(1) 对任何$g\in G$, 定义ϕ_g为映射

$$\phi_g: N\to N,\quad \phi_g(x)=gxg^{-1}.$$

证明 ϕ_g为同构，并证明映射

$$\phi: G\to \mathrm{Aut}(N),\quad g\mapsto \phi_g$$

为同态。

(2) 设$\pi: G\to G/N$是同态$\pi(g)=gN$。假设存在G的子群H使得π诱导同构 $\pi|_H: H\xrightarrow{\cong} G/N$。证明映射

$$f: N\times H\to G,\quad (x,h)\mapsto xh$$

是双射，并且

$$f(x,h)f(x',h')=f(x\phi_h(x'),hh').$$

六、(11分) 设N和H为群，

$$\phi: H\to \mathrm{Aut}(N),\quad h\mapsto \phi_h$$

为群同态，G是集合

$$G=\{(x,h): x\in N,\ h\in H\}.$$

在G上定义运算

$$\cdot: G\times G\to G,\quad (x,h)\cdot(x',h')=(x\phi_h(x'),hh').$$

(1) 证明$(G,\cdot)$是群。

(2) 证明

$$i: H\to G,\quad h\mapsto (e,h)$$

是个单同态，举例说明i的像$i(H)$不一定是G的正规子群。

(3) 证明

$$j: N\to G,\quad x\mapsto (x,e)$$

是个单同态，$j(N)$是G的正规子群，并且存在同构 $H\cong G/j(N)$。

七、(12分) 设R为有恒等元素1的交换环，$e\in R$为幂等元，即$e^2=e$。

(1) 证明$1-e$也是幂等元。设$I=(e)$，$J=(1-e)$分别为e，$1-e$生成的理想。证明I和J都是含有恒等元素的环，证明存在环的同构

$$R/J\xrightarrow{\cong} I,\quad R/I\xrightarrow{\cong} J.$$

(2) 设$I=(e)$，$J=(1-e)$，$I\times J$为环I和环J的直积 证明映射

$$f: I\times J\to R,\quad (a,b)\mapsto a+b$$

是环之间的同构。

（3）证明映射

$$f: R \to R/I \times R/J, \quad r \mapsto (r+I, r+J)$$

是环之间的同构。

（4）设$\mathfrak{p}$为R中的素理想，证明$\mathfrak{p} \supset I$或$\mathfrak{p} \supset J$，但不可能同时有$\mathfrak{p} \supset I$且$\mathfrak{p} \supset J$.

八、（8分）设A为有恒等元素1的交换环，$f \in A$，S是可乘集合$S = \{1, f, f^2, \ldots, \}$。记环$S^{-1}A$为$A_f$。设$A[x]/(fx-1)$为在$A$中添加$f$的逆得到的环。证明

$$R[x]/(fx-1) \cong R_f.$$

九、（10分）设A为含有恒等元素1的交换环，$\mathfrak{m}$为A的极大理想，S是可乘集合$S = A \backslash \mathfrak{m}$，$n \in \mathbb{N}$。证明

$$A/\mathfrak{m}^n \cong S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{m}.$$

十、（10分）设$w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$，$\mathbb{Z}[\omega]$是复数域的子环

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a_0 + a_1\omega + \cdots + a_n\omega^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

（1）证明存在同构$\mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[\omega]$。

（2）证明素数p在$\mathbb{Z}[\omega]$中生成的理想(p)是素理想当且仅当$p \equiv 2 \mod 3$。

十一、（15分）（1）证明对任何整数环$\mathbb{Z}$上$(m \times n)$-矩阵A，存在可逆的整数矩阵$P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$使得$AP$形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

并且对任何i都有$a_{ii} \geq 0$；对任何$j < i$，如果$a_{ii} \neq 0$，都有$0 \leq a_{ij} < a_{ii}$。

（2）设$M_2(\mathbb{Z})$为2阶整数方阵，构造$M_2(\mathbb{Z})$的一个具体的子集合S，由形状尽可能简单的矩阵组成，使得对任何$A \in M_2(\mathbb{Z})$，存在可逆的整数矩阵$P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$、和唯一的$A' \in S$使得$AP = A'$成立。