Matematica per adulti

Prima settimana

intro

1 Giorno 1: quanti numeri?

Non so ci avete pensato, che possiamo contare per sempre. Dato un numero, posso sempre scrivere e dare un nome al successivo. Curiosamente non è sempre stato così.

Io ricordo distintamente quando da piccolo ho realizzato la cosa. Scherzando, ma poi non tanto, dico spesso agli studenti che quella è stata la prima e unica esperienza spirituale della mia vita. Per questo mi ha stupito realizzare che non tutti da piccoli sono passati per quell'esperienza. L'ho chiesto al forum e alcuni hanno stentato a arrivare al punto, qualcuno ha dovuto essere convinto che sa il nome delnumero 66 354 427 745 367. In fondo è sempre bello quando il mondo ti stupisce.

I romani avevano un numero finito di simboli con cui potevano scrivere un numero finito di numeri. Per esempio con I e V potete scrivere I II III IV V VI VII VIII.

Poi per scrivere 9 dovete inventare un nuovo simbolo X.

Loro avevano (a seconda del secolo) fino a un simbolo M per 1000 (poi aggiungevano barre sopra $\bar{M}$, $\bar{\bar{M}}$ per iterare la cosa ma senza cambiare il fatto che arrivavano a un certo numero) e poi si dovevano fermare.

Noi abbiamo lo zero, la notazione posizionale e la lingua (a parte i numeri 3, 11 e 20) è costruita in modo analogo. Conti fino a 10 poi 10-n arrivi fino a 20, 20-n arrivi fino a 30, 40, 50, ..., cento.

Poi si ricomincia con 1cento-nn, 2-cento–nn, ..., 9-cento–99.

Poi viene 1000 e si ricomincia 1-mille-nnn, 2-mille-nnn, ... nnn-mille-nnn. Poi viene 1 milione e si ricomincia, 1-milione-nnnnnn, fino a nnn-mille-nnn-milioni-nnnnnn, poi viene 1miliardo e si ricomincia fino a nnn-milioni-nnn-mila-nnn-miliardi-nnn-milioni-nnn-mila-nnn.

Voi potete dire che dieci cento mille milione miliardi funzionano come i romani. E forse è questo che trae in inganno i bambini, in fondo chi ha bisogno di contare fino a 1 miliardo?

Ma qui viene la novità, 1000-milioni-di-miliardi non hanno un nome vero (ce l'hanno perché la barbarie non ha limite ma non ne abbiamo bisogno).

Si chiamano 1 miliardo-di-miliardi

E si ricomincia. E poi 1-milione di miliardi di miliardi-nnnnnnnn e così finché avete voglia.

2 Giorno 2: cardinali, ordinali, numerali

Abstract. Esistono infiniti numeri naturali.

Che differenza c'è tra numeri *cardinali*, *ordinali* e *numerali*?

I cardinali servono per contare gli oggetti (zero, uno, due, ...), gli ordinali servono per l'ordine (primo, secondo, terzo, ...) definiscono maggiore e minore, le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{N}$.

I numerali sono diversi modi di rappresentare un numero: 11 si può scrivere 11 in base 10, 1011 in binario, B in esadecimale, X in romano. Quando i carcerati contano i giorni sul muro della cella le 4 stanghette verticali tagliate da una stanghetta obliqua sono un numerale per 5.

Non ci occupiamo di numerali, sono solo rappresentazioni. Esistono cardinali (uno, due, tre, ...) e ordinali (primo, secondo, terzo, ...).

Il problema è che finché parliamo di numeri finiti, cardinali e ordinali sono in corrispondenza 1-a-1. Ok dovremo dare definizioni per bene. Lo faremo. Ma se è così, serve uno solo dei 2 l'altro non serve.

MA quando consideriamo insiemi infiniti i numeri ordinali sono molti di più. Quindi gli ordinali sono molto meglio. Ci torniamo in modo più preciso ma ci vuole pazienza che ci va un po'.

Per ora stiamo ancora a partire! Per essere sinceri questi primi giorni servono a far capire che ci sono un sacco di problemi, anzi che più si scava e peggio è. Ancora non abbiamo detto COSA è un numero naturale.

Qui i matematici si dividono in 2. Metà predilige le proprietà, le enuncia e se non si cura di cosa sia un numero. L'altra metà definisce cosa è un numero naturale (in genere come classe di equivalenza di insiemi finiti) e poi usando questa rappresentazione definire le operazioni (eg somma e prodotto) e per dimostrare le proprietà (eg commutativa, associativa, ...).

Siccome stiamo facendo turismo e nessuno ha fretta di arrivare, percorriamo entrambe le strade, ok?

Prima strada. Nell'800 Peano ha dato i seguenti assiomi per i numeri naturali.

1) 0 è un numero naturale.

2) esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e diciamo che $s(n)$ è il successore di n.

3) se x diverso da y allora $s(x)$ è diverso da $s(y)$

4) $s(x)$ non è mai 0 qualunque sia x

5) [Principio di induzione]

se U è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ e

a) $0 \in U$

b) se $n \in U$ allora $s(n) \in U$

allora $U = \mathbb{N}$

Questi assiomi, con un bel po' di lavoro permettono di dimostrare OGNI proprietà dei numeri naturali (che sappiamo dimostrare altrimenti).

Se conveniamo che non c'è un numero più grande di tutti (no "∞" non è un numero naturale se lo fosse, sapreste fare "$\infty+1$"), l'insieme dei numeri è infinito (in-finito) perché non posso finire di contare?

Per ora lasciate perdere cosa sia un numero, quello che conta è che sono infiniti, che hanno un nome, e che potremo fare operazioni coi numeri.

3 Giorno 3: somme e prodotto

Definiamo i numeri in $\mathbb{N}$

0

$1 = s(0)$

$2 = s(1) = s(s(0))$

$3 = s(2) = s(s(s(0)))$

$4 = s(3) = s(s(s(s(0))))$

$5 = s(4) = s(s(s(s(s(0)))))$

$6 = s(5) = s(s(s(s(s(s(0))))))$

$7 = s(6) = s(s(s(s(s(s(s(0)))))))$

$8 = s(7) = s(s(s(s(s(s(s(s(0))))))))$

e avanti così.

Definiamo la *somma* $a + b$ con le proprietà

$a + 0 = a$

$a + (s(b)) = s(a + b) = (a + b) + 1$

Se devo fare

$$5+3 = 5+s(s(s(0))) = s(5+s(s(0))) = s(s(5+s(0))) = s(s(s(5)))+0 = s(s(s(5)))$$

che è definito come 8.

Definiamo la *prodotto* ab:

$a \cdot 1 = a$

$a \cdot s(b) = a \cdot b + a$

Se devo fare

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot s(1) = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot s(s(1)) = 2 \cdot s(1) + 2 = (2 \cdot 1 + 2) + 2 = (2 + 2) + 2 = 4 + 2 = 6$$

Poi ci mettiamo con santa pazienza e dimostriamo le proprietà.

$a + 0 = 0 + a = a$	0 elemento neutro della somma
$(a + b) + c = a + (b + c)$	associativa della somma
$a + b = b + a$	commutativa della somma
$a1 = 1a = a$	1 elemento neutro del prodotto
$(ab)c = a(bc)$	associativa del prodotto
$ab = ba$	commutativa del prodotto
$(a + b)c = ac + bc$	distributiva della somma rispetto al prodotto

Non credo siano importanti i dettagli ma se vuoi ne dimostriamo qualcuna.

4 Giorno 4: insiemi

Abstract. Fin qui non abbiamo ancora fatto nulla. Abbiamo solo scoperto che:
1) i numeri naturali sono infiniti (quindi anche in prima elementare non si può parlare solo di roba finita anche se faccio 2+3). Cioè si può ma secondo me non si capisce cosa si lascia fuori e si lascia fuori il meglio.
2) esisteranno 2 tipi di numeri (cardinali e ordinali). Finché consideriamo numeri finiti non fa differenza, uno vale l'altro. Se consideriamo gli infiniti, invece, gli ordinali sono più fondamentali e "di più" dei cardinali.
3) i cardinali sono per contare le cose, gli ordinali per essere messi in fila (0, 1, 2, 3, ...). Coi numeri finiti fate entrambe le cose, con quelli infiniti molti ordinali diversi hanno la stessa cardinalità.
4) Abbiamo fatto gli assiomi di Peano per i numeri naturali. Questi permettono di definire le operazioni di somma e prodotto, di dimostrare un sacco di cose, ma non ci dicono cosa sono i numeri naturali. Negli approcci assiomatici uno non dice cosa sono le cose, dice le proprietà e usa solo quelle.
5) per un approccio non-assiomatico abbiamo bisogno di dire cosa è un insieme (e poi funzioni e relazioni). Questo è un vero casino (sempre a causa degli insiemi infiniti).

Insiemi: prima cosa da dire è che gli insiemi possono avere *elementi*. Per dire che 3 è un numero naturale, chiamiamo $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e diciamo $3 \in \mathbb{N}$, che si legge 3 appartiene a $\mathbb{N}$.

Seconda cosa esiste un insieme senza elementi. Si chiama l'insieme vuoto, lo chiamiamo $\varnothing$. Siccome 2 insiemi sono uguali a meno che non produca un elemento che sta in uno ma non nell'altro, esiste un solo insieme vuoto o se preferite ogni insieme vuoto e uguale all'altro.

Come ho detto un insieme finito è la lista senza ripetizione dei suoi elementi. I numeri primi minori di 10 sono l'insieme $P = \{2, 3, 5, 7\}$. Quanti elementi ha?

(ah! non potete rispondere perché ancora non abbiamo definito la cardinalità di un insieme e pure coi numeri andiamo ancora maluccio.)

Quando si passa agli insiemi infiniti, si è pensato (direi nell'800) di definirli dando una proprietà $P(x)$ che quando è vera per x allora x appartiene a A ($x \in A$), quando è falsa, allora x non appartiene all'insieme A ($x \notin A$).

Ad esempio i numeri pari corrispondono alla proprietà $P(n)$: esiste $k \in N$ tale che $n = 2k$.

per $n = 0$, esiste $k = 0$ tale che $2 \cdot 0 = 0$, quindi 0 è pari.

per $n = 1$, non esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $2k = 1$, quindi 1 non è pari.

(ovviamente bisognerebbe dimostrare che non esiste, mi credete?)

per $n = 2$, esiste $k = 1$ tale che $2 \cdot 1 = 2$, quindi 2 è pari.

per $n = 6$, esiste $k = 3$ tale che $2 \cdot 3 = 6$, quindi 6 è pari.

[sto usando i numeri naturali di Peano per fare gli esempi]

L'insieme dei numeri pari $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ lo indichiamo pure in modo più impreciso come $A = \{0, 2, 4, ..., 2k, ...\}$ come se fosse un elenco. Lo indichiamo pure con $2\mathbb{N}$, ma sono solo syntax sugar.

L'unico piccola crepa nel nostro castello di buone intenzioni è che ci sono delle proprietà (antinomie) che non definiscono dei buoni insiemi.

Nota: per gli informatici, quello che faccio è che definisco un linguaggio formale e una grammatica per scrivere enunciati e proposizioni. Dico proprio con una context free grammar. L'idea è che poi voglio definire un insieme come gli elementi che rendono vera una proposizione. Purtroppo non si riesce ad escludere le antinomie a livello sintattico. Cioè si può ma si è costretti a tipizzare fortemente il linguaggio e bisogna gerarchizzare i tipi molto più rigorosamente di come fate voi nei linguaggi di oggi. A quel punto dichiaro equivalenti 2 proposizioni che sono sempre vere o false sugli stessi oggetti e un insieme è una proposizione modulo equivalenti. Gli assiomi di Peano in buona sostanza sono una tale proposizione e definiscono l'insieme $\mathbb{N}$ (quando scrivo "per ogni $k \in \mathbb{N}$", sto dichiarando il tipo di k).

5 Giorno 5: operazioni tra insiemi

Ora che sappiamo cosa è un insieme (o almeno facciamo finta) possiamo definire un po' di operazioni.

Dati 2 insiemi A e B definiamo l'*unione*, scriviamo $A \cup B$ che è l'insieme che contiene tutti gli elementi x che sono in A o in B (o in entrambi ma sono elementi dell'unione una volta sola visto che $A \cup B$ è un insieme e nessun insieme può contenere 2 volte uno stesso elemento).

Dati 2 insiemi A e B definiamo l'*intersezione*, scriviamo $A \cap B$ che è l'insieme che contiene tutti gli elementi x che sono in A e in B (cioè gli elementi comuni a A e B).

Il *prodotto* $A \times B$ è l'insieme delle coppie (a, b) con il primo elemento $a \in A$ e il secondo $b \in B$. In pratica

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Nota: come puoi immaginare ora che sai come funziona la testa dei matematici prima o poi vorremo fare operazioni tra infiniti insiemi. Per ora ci accontentiamo.

Nota: un altro casino è che possiamo fare $(A \times B) \times C$ che in teoria avrebbe come elementi coppie $((a, b), c)$ ma facciamo finta che non ce ne accorgiamo e che $A \times B \times C$ contenga terne (a, b, c). sia $A \times B \times C$, che $(A \times B) \times C$ che $A \times (B \times C)$ contengono le terne (a, b, c).

Esercizio: Cosa contiene $\mathbb{N} \times \varnothing$?

Se ogni elemento di A è anche elemento di B allora A è un *sottoinsieme* di B e scriviamo $A \subset B$. Ovviamente $\varnothing$ è sottoinsieme di ogni insieme B ($\varnothing \subset B$ per qualunque B). Ovviamente per ogni insieme B, $B \subset B$, cioè B è sempre sottoinsieme di se stesso.

Dato A un sottoinsieme di B ($A \subset B$) possiamo definire il complemento di A in B, che è l'insieme $B - A$ che contiene tutti gli elementi $x \in B$ tale che non sono elementi di A, cioè:

$$B - A = \{x \in B : x \notin A \subset B\}$$

Nota: sui libri lo trovi anche definito quanto A non è sottoinsieme ma a me piace di più così al momento.

Nota: qui è uno dei posti dove i tipi importano. Se ho P, insieme dei primi minori di 10, cioè $P = \{2, 3, 5, 7\}$ e prendessi l'insieme delle cose che non stanno in P oltre a 6, in $-P$ ci troverei pure una mela, hookii, me e te. invece faccio $\mathbb{N} - P$ e ci trovo tutti **i numeri** che non sono in P. $\mathbb{N}$ funziona come un tipo.

Dato un insieme A, $P(A)$ è l'insieme di tutti i sui sottoinsiemi, si chiama l'*insieme delle parti*. Se $A = \{0, 1, 2\}$ allora

$$P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}$$

ha 8 elementi, ops *avrà* 8 elementi.

Nota: $\{1\}$ e 1 sono due cose diverse. $1 \in A$ è un elemento di A. $\{1\}$ invece è un sottinsieme di A che contiene un solo elemento. Abbiamo $1 \in \{1\} \subset A$. Non si può scrivere né $1 \subset A$ né $\{1\} \in A$.

Nota: anche che $\varnothing$ è un oggetto, un elemento dell'insieme delle parti $P(A)$.

Esercizio: quanti elementi ha $P(\varnothing)$?

Nota: siccome gli insiemi sono definiti con delle proposizioni $P(x)$ non ti sfuggirà che l'unione intersezione e complemento di insiemi corrisponde agli operatori logici *.or.*, *.and.*, *.not.* tra le corrispondenti proposizioni. [In buona sostanza logica booleana e insiemistica sono la stessa cosa.]

Seconda settimana

intro

6 Giorno 6: relazioni e funzioni

Introduciamo 2 concetti molto importanti per dopo.

Dati 2 insiemi A e B, chiamiamo *relazione* da A a B un sottoinsieme $R \subset A \times B$. Diciamo che $a \in A$ è in relazione con $b \in B$ se e solo se $(a, b) \in R$

Esempio: definiamo una relazione su $\mathbb{N}$ (che significa da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$) che descrive la divisibilità. Diciamo che $(k, n) \in R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (che "k divide n" e scriviamo $k|n$) se il numero naturale k divide esattamente n. Ad esempio abbiamo $1|10$, $2|10$, $5|10$, $10|10$, ma non $3|10$. Possiamo quindi pensare alla relazione $|$ come il sottoinsieme

$$I = \{(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{ esiste } q \in \mathbb{N} : n = qk\}$$

Ci interessano 3 tipi di relazioni:

1) relazioni di equivalenza su un insieme A

2) relazioni di ordine su un insieme A

3) le funzioni da un insieme A a un insieme B (che può essere uguale a o diverso da A)

Una relazione di equivalenza $\sim$ è una relazione con le seguenti proprietà (liberamente ispirate da $=$)

1) $x \in A : x \sim x$ (ogni elemento di A è in relazione con se stesso)

2) $x, y \in A$: se $x \sim y$ allora anche $y \sim x$ (se x è un relazione con y allora anche y è in relazione con x)

3) $x, y \in A$: se $x \sim y$ e $y \sim z$ allora anche $x \sim z$.

Nota: La relazione di divisibilità gode della proprietà 1 (per ogni $n \in \mathbb{N} : n|n$). Gode pure della proprietà 3) ($k|n|m$ allora $k|m$). Ma non gode della proprietà 2) ($3|6$ na non $6|3$). Quindi non è una relazione di equivalenza.

Esercizio: definiamo la relazione di equivalenza su $\mathbb{N}$. Diciamo che $n =_{(3)} k$ se esistono $q, p \in \mathbb{N}$ e $r \in \{0, 1, 2\}$ tale che $n = 3q + r$ e $k = 3p + r$. Ad esempio $7/3$ ha resto 1, $10/3$ ha resto 1, quindi abbiamo che $7 =_{(3)} 10$. Siccome $12/3$ ha resto 0, non $12 \neq_{(3)} 10$. È facile convincersi che questa relazione d'equivalenza separa $\mathbb{N}$ in tre sottoinsiemi:

$R_0 = \{n \in \mathbb{N} : \text{resto di } n/3 \text{ è } 0\}$, cioè dei numeri che si dividono esattamente per 3.

$R_1 = \{n \in \mathbb{N} : \text{resto di } n/3 \text{ è } 1\}$, cioè dei numeri che hanno resto 1 quando li dividete per 3.

$R_2 = \{n \in \mathbb{N} : \text{resto di } n/3 \text{ è } 2\}$, cioè dei numeri che hanno resto 2 quando li dividete per 3.

Ogni numero naturale sta in uno e solo uno tra R_0, R_1, e R_2. In altre parole, l'unione $R_0 \cup R_1 \cup R_2 = \mathbb{N}$ e $R_0 \cap R_1 = \varnothing$, $R_0 \cap R_2 = \varnothing$, $R_1 \cap R_2 = \varnothing$.

Questi sottoinsiemi R_0, R_1, R_2, si chiamano le classi di equivalenza della relazione $k =_{(3)} n$. Potete rimpiazzare 3 con ogni numero naturale k che definisce k classi di equivalenza a seconda del resto $r = 0, 1, ..., k-1$.

Nota: Questa costruzione è piuttosto generica. Ogni volta che voglio dividere un insieme A in classi di equivalenza, lo fate definendo una relazione di equivalenza in modo da spezzare l'insieme A nelle classi di equivalenza desiderate. Le 3 classi di equivalenza R_0, R_1, R_2, tengono conto dei possibili resti e trascurano il rapporto. Abbiamo che $10 = 3 \cdot 3 + 1$ e $7 = 3 \cdot 2 + 1$, quindi $10 =_{(3)} 7$ perché hanno lo stesso resto anche se il rapporto con 3 è diverso (3 e 2, rispettivamente). Le relazioni di equivalenza sono di preciso un modo di considerare equivalenti elementi diversi che però hanno in comune alcune caratteristiche (il resto), e considerare ininfluenti le altre (il rapporto).

Delle relazioni di ordine ce ne occupiamo dopo, che ce ne sono tipi sottilmente diversi.

Invece definiamo una funzione $f : A \to B$ una relazione tra A e B tale che per ogni $a \in A$ esiste uno e in solo elemento $b \in B$ tale che (a, b) sono in relazione. Se (a, b) sono un relazione scriviamo $b = f(a)$ e diciamo che b è l'immagine di a attraverso la funzione f. Per riassumere tutto ciò, scriviamo una funzione $f : A \to B : a \mapsto f(a)$ per dire pure che la funzione f associa a a l'elemento $f(a) = b$.

Nota: A questo punto probabilmente vi chiedete perché uno deve fare le cose così complicate invece di dire che una funzione è $y = 3x + 1$, tu mi dai un valore x e io uso la funzione per calcolarmi il valore di y. Il problema è che poi uso funzioni in contesti diversi (coi numeri ma pure tra insiemi di spazi, di equazioni, ...). In questo modo, facciamo il lavoro una volta sola anche se serve un po' di sforzo iniziale ad abituarsi useremo molto di più questi concetti che i numeri!

Esempi di funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ considerate la funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$ che ad ogni numero naturale associa il suo successivo. Questo è la funzione che compare negli assiomi di Peano. Solo bisogna sapere fare $n+1$ cioè aver definito la somma in $\mathbb{N}$. Gli assiomi di Peano sono emunciati prima di dire come si fa la somma. Abbiamo definito la somma su $\mathbb{N}$ usando la funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ invece che usare la somma per definire s.

Sono anche funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 2n$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n^2$, mentre non è una funzione $\sqrt{\ } : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \sqrt{n}$. Perché non è una buona funzione?

Nota: Guardate che a questo tipo di domande si risponde facilmente andando a prendere la definizione e capendo perché non funziona. Una funzione per un matematico è esattamente quello che c'è scritto nella definizione. Se un matematico definisce un cane come un quadrupede, allora per lui un gatto è un cane.

Una funzione $f : A \to B$ è detta biettiva se oltre al fatto che ad ogni elemento $a \in A$ corrisponde una e una sola immagine $f(a) \in B$ (se no f non è neanche una funzione) vale pure che per ogni $b \in B$ esiste un solo elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (cioè se esiste una e una sola *controimmagine* di b)

Esercizio: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 2n$, $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n^2$ non sono biettive. Perché?

Per rispondere dovete trovare un numero naturale b che non è prodotto come immagine da nessun $a \in \mathbb{N}$ oppure che è prodotto come immagine da più di un numero.

Esercizio: definiamo i numeri pari $P = \{n \in \mathbb{N} :$ esiste $k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$. La mappa $f : \mathbb{N} \to P : n \mapsto 2n$ è una funzione? È biettiva?

Ora abbiamo gli ingredienti per definire la cardinalità degli insiemi e dire cosa significa contare. La prossima volta.

7 Giorno 7: che stai a contare?

Se ti do una scatola di caramelle e ti chiedo quante caramelle contiene tu che fai?

Tiro a indivinare. Apri la scatola prendi una caramella e conti 1, prendi un'altra caramella e conti 2, ..., prendi la 13ma caramella e conti 13. Non ci sono più caramelle e dici che nella scatola c'erano 13 caramelle.

Ora lasciami fare una domandina. Che hai fatto in tutto ciò se non istituire una funzione biettiva tra le caramelle e il sottoinsieme $I_{13} = \{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\} \subset \mathbb{N}$?

Contare *significa* stabilire una funziona bilineare tra un insieme da contare (la scatola di caramelle) e un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$.

Definizione: dati 2 insiemi A e B, diciamo che hanno la stessa *cardinalità* se esiste una funzione biettiva $f : A \to B$.

Avere la stessa cardinalità è una relazione di equivalenza sugli insiemi (e pure sugli insiemi infiniti). Le classi di equivalenza rispetto a questa relazione di equivalenza sono, ad esempio, tutti gli insiemi con 17 elementi. Esiste una classe di equivalenza ogni $n \in \mathbb{N}$, fatta di tutti gli insiemi finiti con n elementi.

Le classi di equivalenza *sono* una rappresentazione dei numeri naturali. Il numero $17 \in \mathbb{N}$ è identificato con tutti gli insiemi finiti con 17 elementi.

Dobbiamo notare 2 cose: primo, il numero è per definizione astratto, non importa se conti mele, pere, colori o unicorni. Secondo, la definizione di avere la stessa cardinalità si estende per costruzione anche agli insiemi infiniti.

Gli insiemi che hanno la stessa cadinalità di $\mathbb{N}$ sono detti *numerabili.* Il numero cardinale corrispondente si chiama $\aleph_0$ (letto *aleph-zero*). Ovviamente, un insieme numerabile è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, quindi $\aleph_0 \notin \mathbb{N}$ perché non può essere in corrispondenza con un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$. Sono i sottoinsiemi *finiti* di $\mathbb{N}$ che definiscono gli elementi di $\mathbb{N}$.

Esercizio: sono più i numeri naturali o i numeri pari?

[Siate certi di considerare la mappa $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} : n \mapsto 2n$. (È biettiva? Quindi?)]

Esercizio: Se consideriamo $A = \mathbb{N} \cup \{a\}$. È numerabile? Chi ha maggiore cardinalità, $\mathbb{N}$ o A?

Nota: notate che gli assiomi di Peano definiscono i numerali naturali, dicono che 0 è il primo, che esiste sempre il successivo e che il successivo e sempre un numero nuovo, che continuano per sempre a comparire numeri nuovi e che tutti i naturali sono ottenuti come il successivo di un numero naturale. Questo definisce già un (buon) ordine di $\mathbb{N}$.

Poi definiamo la cardinalità dei numeri naturali che si estende agli insiemi numerabili.

Ora prima di definire per bene il buon ordine andiamo in vacanza in montagna all'Hilbert hotel.

8 Giorno 8: l'hotel di Hilbert (numerabile)

L'hotel Hilbert è un albergo in un'amena località montana non meglio precisata che ha $\aleph_0$ stanze. Un giorno l'albergo risulta completo al momento della cena.

Nel mezzo della notte tempestosa un nuovo cliente bussa alla porta cercando una stanza per passare la notte al sicuro. In un primo momento il portiere risponde che sono al completo poi, mosso a compassione per il nuovo venuto, pensandoci un po' ha un'idea e trasmette in tutte le camere il seguente messaggio:

Stiamo affrontando un'emergenza, chiediamo ad ogni cliente a seguire le seguenti istruzioni: Se state occupando la nella stanza k, vi preghiamo di prendere la vostra roba e trasferirvi nella stanza $k + 1$. In cambio, riceverete uno sconto del 10% sul conto.

Dopo di ciò, la stanza 0 è rimasta vuota visto che nessuno ci si è trasferito a fronte del suo occupante che ora dorme seneramente nella stanza 1. Il nuovo cliente quindi viene sistemato della stanza 0, non prima di essersi offerta a pagare di tasca sua il mancato incasso dovuto allo sconto. A questo proposito, il portiere ha gentilmente declinato l'offerta argomentando che malgrado le tariffe molto basse dell'albergo e lo sconto, l'incasso totale non sarebbe diminuto finché l'albergo fosse risultato completo o, per quel che conta, anche avesse avuto un numero finito di stanze vuote, o comunque con un numero numerabile di stanze occupate (ad esempio solo quelle pari).

Più tardi nella notte, un'altra infinita comitiva si presenta alla porta chiedendo una stanza per evitare la tempesta. A quel punto il portiere trasmette il seguente messaggio:

Mi spiace disturbarvi ancora ma stiamo affrontando una nuova emergenza. Vi chiediamo gentilmente di alzarvi, prendere le vostre cose, e se state nella stanza k trasferitevi nella stanza $2k + 1$. In cambio, riceverete un ulteriore sconto del 10%.

Ciò ha reso disponibili tutte le stanze pari che così hanno potuto essere destinate alla comitiva giunta nella notte. Sembra che l'hotel di Hilbert non possa esaurire le stanze, [Ma può, come vedremo.]

Se ci pensate, tutta la storiella dice che la cosa particolare dell'albergo con $\aleph_0$ stanze è che le posso numerare coi numeri naturali $\mathbb{N}$. Tuttavia le sole stanze pari, quelle dispari da sole, e tutte le stanze hanno la stessa cardinalità. Non ci credete?

Allora controllate che la mappa $f : \mathbb{N} \to P : n \mapsto 2n$, dove

$$P = \{0, 2, 4, \dots, 2k, \dots\}$$

è biettiva, così come la mappa $g : \mathbb{N} \to D : n \mapsto 2n + 1$, dove

$$D = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1, \dots\}$$

Ok se ci pensate, magari dite: *e grazie dai sono entrambe infinite quindi sono tanti quanti.* Se è così ripetete con me: *la natura è malevola e non perde occasione di rendere le cose semplici meravigliosamente complicate.* Avete in parte ragione ma vedremo che ci sono infiniti e infiniti (se no perché la cardinalità di $\mathbb{N}$ l'avrei chiamata $\aleph_0$? Perché mi avanzava uno 0 o perché alla fine mi servirà una cosa più grande $\aleph_1$, poi una più grande $\aleph_2$, . . . ?).

Ma ora non possiamo occuparcene, prima dobbiamo definire i numeri interi, quelli razionali, quelli reali e vedremo che la cardinailtà dei numeri reali è più grande di quella di $\mathbb{N}$, cioè che i numeri reali sono una infinità non numerabile.

E vi sembra possibile quella sia la fine della storia? No, eh, vedete che la natura è malevola?

Prossime tappe: relazioni di ordine e buon ordine, così possiamo definire una rappresentazione (un modello) per i numeri ordinali. Poi ci dobbiamo occupare di definire i numeri interi, i razionali e i reali, estendendo le operazioni e definendone altre (ad esempio: la sottrazione, la divisione, le radici quadrate). A quel punto siamo arrivati ai tempi di Pitagora (che, non lui, diciamo la sua scuola, ha scoperto che $\sqrt{2}$ non è razionale).

Per questa strada estenderemo 2 volte l'hotel di Hilbert. A quel punto il finale di Interstellar vi sembrerà banalotto.