Giorno 33: prodotti notevoli e fattorizzazioni

Ma torniamo alle cose elementari. Ci sono un po' di prodotti di polinomi che si chiamano *prodotti notevoli* perché vanno annotati e sono usati spesso. Ora che abbiamo chiara la differenza tra incognite e parametri possiamo vederli come identità in $\mathbb{P}[x]$.

Ad esempio $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ si chiama *sviluppo del quadrato di un binomio*. Dovete considerare questo come uno stampo a cui sostituire ai parametri a e b come volete.

Nota: Potete sostituire $a \to x$ e $b \to -b$ per ottenere $(x-b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$.

Quindi la prima buona notizia è che non dovete segnare pure $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, visto che questa si ottiene mandando b in $-b$.

Pure potete sostituire $a \to x^2$ e $b \to -3$ per ottenere $(x^2-3)^2 = x^4 - 6x^2 + 9$.

La brutta notizia è che quando vedete $x^4 - 6x^2 + 9$ dovete riconoscere che se prendete $a = -x^2$, $b = 3$ questo viene il quadrato del binomio $(3-x^2)^2$ oppure se prendete $a = x^2$, $b = -3$ questo viene il quadrato del binomio $(x^2-3)^2 = (3-x^2)^2$.

Siccome non abbiamo davvero bisogno del prodotto notevole per sviluppare $(a+b)^2$ (basterebbe espandere il prodotto $(a+b)(a+b)$), il più delle volte il prodotto notevole è usato al contrario per ricostruire $(a+b)^2$ a partire dal suo sviluppo.

Al quadrato del binomio aggiungete almeno

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad \text{(la differenza dei quadrati),}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad \text{(cubo del binomio),}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \qquad \text{(il quadrato del trinomio),}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \qquad \text{(somme telescopiche)}$$

Nota: Oltretutto, la differenza dei quadrati è una somme telescopiche.

Intendiamoci, poi potete aggiungerne quanti vi pare, ad esempio

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \qquad \text{(quartica del binomio).}$$

Mi sembra valga la pena dimostrare la somma telescopica e le potenze del binomio. Cominciamo con le somme telescopiche.

Nota: A parte semplicemente fare il prodotto, come lo trovo il secondo membro se non me lo ricordo? Se guardo $a^n - b^n$ si vede che ha uno zero in $a = b$, quindi mi aspetto $(a-b)|(a^n - b^n)$ e posso fare la divisione dei polinomi

$$\begin{aligned}
&a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}) + ba^{n-1} - b^n \\
&a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2}) + b^2a^{n-2} - b^n \\
&a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3}) + b^3a^{n-3} - b^n \\
&\ldots \\
&a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + b^{n-2}a) + b^{n-1}a - b^n \\
&a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}) + b^n - b^n
\end{aligned} \qquad (1)$$

Quindi $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$.

Per le potenze del binomio dobbiamo dire come scegliere i coefficienti a secondo membro a per questo abbiamo il triangolo di Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \dots & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \\ n=5 \\ \end{array} \tag{2}$$

In cui ogni numero è la somma dei 2 che gli stanno sopra. Quindi abbiamo che

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \tag{3}$$

Tra l'altro i coefficienti sono pure

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 \tag{4}$$

definendo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n! = n(n-1)\dots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \quad e \quad 0! = 1 \tag{5}$$

Un problema parallelo è come fattorizzare (se possibile) un polinomio di grado 2 come prodotto di 2 polinomi di grado 1, cioè se posso scrivere

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1) \tag{6}$$

Un modo di farlo è facile e lo abbiamo già discusso: vale la fattorizzazione sse x_0 e x_1 sono soluzioni di $ax^2 + bx + c$. E per le soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$ abbiamo già discusso che esistono sse $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (essendo distinte se $\Delta > 0$ e coincidono se $\Delta = 0$). In tutti i casi in cui le soluzioni esistono e sono

$$x_{0,1} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{7}$$

Con queste soluzioni possiamo facilmente fattorizzare.

Il problema è se posso farlo ad occhio. Se le soluzioni sono $x_{0,1} = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ ben difficilmente posso trovare le soluzioni a occhio. Ma se guardo $x^2 - 3x - 18$ magari mi può sovvenire che $x^2 - 3x - 18 = (x-6)(x+3)$.

Nota: Come mi sovviene? Se scrivo

$$x^2 - 3x - 18 = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \tag{8}$$

e non è che poi sia impossibile immaginare che $a = -6$ e $b = 3$ risolvono le condizioni

$$a + b = -3 \qquad ab = -18 \tag{9}$$

Ora il vostro problema è che è considerato maleducato risolvere la situazione riferendosi alla formula generale quando si può vedere la fattorizzazione a occhio.

Nota: Ci fate la figura dei pirla come uno che scarta la difesa, il portiere, stoppa sulla linea della porta, indietreggia a cannoneggia per bucare la rete. E rilassati. Poi mica è vietato, è solo da pirla.

Infine, talvolta, non siamo in grado di fattorizzare ma si vede a occhio una soluzione. Ad esempio, se considero $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ non ci vuole molto a realizzare che $x = 1$ è una soluzione e che si può dividere $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 1)$

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 2x - 1 &= (x-1)(x^2) + 3x^2 - 2x - 1 \\ x^3 + 2x^2 - 2x - 1 &= (x-1)(x^2 + 3x) + x - 1 \\ x^3 + 2x^2 - 2x - 1 &= (x-1)(x^2 + 3x + 1) \end{aligned} \tag{10}$$

e poi ci si può concentrale sul polinomio di secondo grado $x^2 + 3x + 1$.