Giorno 4
Insiemi

Fin qui non abbiamo ancora fatto nulla. Abbiamo solo scoperto che:

1) i numeri naturali sono infiniti (quindi anche in prima elementare non si può parlare solo di roba finita anche se faccio 2+3). Cioè si può ma secondo me non si capisce cosa si lascia fuori e si lascia fuori il meglio.

2) esisteranno 2 tipi di numeri (cardinali e ordinali). Finché consideriamo numeri finiti non fa differenza, uno vale l'altro. Se consideriamo gli infiniti, invece, gli ordinali sono più fondamentali e "di più" dei cardinali.

3) i cardinali sono per contare le cose, gli ordinali per essere messi in fila (0, 1, 2, 3, ...). Coi numeri finiti fate entrambe le cose, con quelli infiniti molti ordinali diversi hanno la stessa cardinalità.

4) Abbiamo fatto gli assiomi di Peano per i numeri naturali. Questi permettono di definire le operazioni di somma e prodotto, di dimostrare un sacco di cose, ma non ci dicono cosa sono i numeri naturali. Negli approcci assiomatici uno non dice cosa sono le cose, dice le proprietà e usa solo quelle.

5) per un approccio non-assiomatico abbiamo bisogno di dire cosa è un insieme. Questo è un vero casino (sempre a causa degli insiemi infiniti).

Insieme: Prima cosa da dire è che gli insiemi possono avere elementi. Per dire che 3 è un numero naturale, chiamiamo $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e diciamo $3 \in \mathbb{N}$, che si legge 3 appartiene a $\mathbb{N}$.

Seconda cosa esiste un insieme senza elementi. Si chiama l'insieme vuoto, lo chiamiamo $\varnothing$. Siccome 2 insiemi sono uguali a meno che non produca un elemento che sta in uno ma non nell'altro, esiste un solo insieme vuoto o se preferite ogni insieme vuoto e uguale all'altro.

Come ho detto un insieme finito è la lista senza ripetizione dei suoi elementi. I primi minori di 10 sono l'insieme $P = \{2, 3, 5, 7\}$. Quanti elementi ha? (ah! non potete rispondere perché ancora non abbiamo definito la cardinalità di un insieme e pure coi numeri andiamo ancora maluccio.)

Quando si passa agli insiemi infiniti, si è pensato (direi nell'800) di definirli dando una proprietà $P(x)$ che quando è vera per x allora x appartiene a A ($x \in A$), quando è falsa, allora x non appartiene all'insieme A ($x \notin A$).

Ad esempio i numeri pari corrispondono alla proprietà $P(n)$: esiste $k \in N$ tale che $n = 2k$.

per $n = 0$, esiste $k = 0$ tale che $2 \cdot 0 = 0$, quindi 0 è pari.

per $n = 1$, non esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $2k = 1$, quindi 1 non è pari.

(ovviamente bisognerebbe dimostrare che non esiste, mi credete?)

per $n = 2$, esiste $k = 1$ tale che $2 \cdot 1 = 2$, quindi 2 è pari.

per $n = 6$, esiste $k = 3$ tale che $2 \cdot 3 = 6$, quindi 6 è pari.

[sto usando i numeri naturali di Peano per fare gli esempi]

L'insieme dei numeri pari $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ lo indichiamo pure in modo più impreciso come $A = \{0, 2, 4, ..., 2k, ...\}$ come se fosse un elenco. Lo indichiamo pure con $2\mathbb{N}$, ma sono solo syntax sugar.

L'unico piccola crepa nel nostro castello di buone intenzioni è che ci sono delle proprietà (antinomie) che non definiscono dei buoni insiemi.

Per gli informatici: quello che faccio è che definisco un linguaggio formale e una grammatica per scrivere enunciati e proposizioni. Dico proprio con una context free grammar. L'idea è che poi voglio definire un insieme come gli elementi che rendono vera una proposizione. Purtroppo non si riesce ad escludere le antinomie a livello sintattico. Cioè si può ma si è costretti a tipizzare fortemente il linguaggio e bisogna gerarchizzare i tipi molto più rigorosamente di come fate voi nei linguaggi di oggi. A quel punto dichiaro equivalenti 2 proposizioni che sono sempre vere o false sugli stessi oggetti e un insieme è una proposizione modulo equivalenti. Gli assiomi di Peano in buona sostanza sono una tale proposizione e definiscono l'insieme $\mathbb{N}$ (quando scrivo "per ogni $k \in \mathbb{N}$", sto dichiarando il tipo di k).