Giorno 28: criteri di convergenza per successioni

Data una successione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ come facciamo a sapere se converge (cioè se esiste il limite $\lim_{k\to\infty} a_k = q$)?

In $\mathbb{Q}$ abbiamo una distanza $d(q_1, q_2) = |q_1 - q_2|$.

Una *successione di Cauchy* è una successione $a : k \to a_k$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $N, K > n$ si ha $d(a_N, a_K) < \epsilon$.

In pratica significa che quando la successione arriva a a_n poi tutti i punti seguenti non si allontanano da a_n più di $\epsilon/2$, e se rimpiccioliamo ϵ basta alzare n e questo resta vero. Significa che se pensate una successione come un punto che passeggia in $\mathbb{Q}$, alla fine questo si muove poco quanto vogliamo, la sua velocità diventa sempre più piccola.

Data una successione a_k, possiamo costruire infinite successioni $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : i \mapsto a_{k(i+1)} - a_{i(k)}$ con $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione crescente, cioè $k(i+1) > k(i)$. Una successione è di Cauchy se tutte queste successione ha limite $q = 0$.

Teorema: se esiste il limite $\lim_{k\to\infty} a_k = q$ allora la successione è di Cauchy.

> **Nota:** Dim: se esiste il limite allora per ogni intorno $I_q = (q-\epsilon, q+\epsilon)$ di q esiste un $n \in N$ tale che per qualunque $N > n$ abbiamo che $a_N \in I_q$, cioè $d(a_N, q) < \epsilon$. Ma allora $d(a_N, a_K) < d(a_N, q) + d(a_K, q) < 2\epsilon$ (disuguaglianza triangolare), cioè $d(a_N, a_K)$ è reso piccolo a piacere.

Purtroppo in $\mathbb{Q}$ non è vero il viceversa (che invece è vero per successioni reali). Esistono successioni di Cauchy che non convergono.

> **Nota:** Prendete la successione $a : k \mapsto \frac{\sqrt{2\ 10^{2k}}}{10^k}$. questo corrisponde alla successione 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, $\ldots$, $\sqrt{2}$. Questa successione è di Cauchy, ma avrebbe un limite $\sqrt{2}$ ma abbiamo visto che questo numero non è un numero razionale.
>
> In pratica il motivo per cui le successioni di Cauchy non convergono in $\mathbb{Q}$ quando convergono a un numero irrazionale. I numeri irrazionali sono buchi in $\mathbb{Q}$ e una successione può avvicinarsi al buco tanto quanto ci pare, arriverebbe al buco che però non è un numero razionale e quindi non possiamo dire che la successione converge in $\mathbb{Q}$. Ok dai è un cavillo legale. Lo è ma in matematica bisogna scrivere le leggi senza cavilli.
>
> Ok, vi ho risparmiato qualche dettaglio ma se non vi torna lo scrivo meglio,

E qui viene l'idea: prendiamo l'insieme delle successioni di Cauchy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ e le chiamiamo *numeri reali*. L'insieme dei numeri reali lo denotiamo con $\mathbb{R}$. Le successioni costanti in $\mathbb{Q}$ sono sempre di Cauchy, quindi abbiamo che $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Ad ogni successione in $\mathbb{Q}$, possiamo quindi associare una successione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ ogni successione di Cauchy converge per costruzione (il limite è il numero di $\mathbb{R}$) rappresentato dalla successione stessa.

Bel piano, ma c'è solo un problema, che ci sono infinite successioni di Cauchy che tendono allo stesso numero reale. Ma questo problema sappiamo già come curarlo, definiamo una relazione di equivalenza tra successioni di equivalenza.

Diciamo che 2 successioni di Cauchy sono equivalenti se e solo se la successione che otteniamo prendendo gli elementi pari alla prima e quelli dispari dalla seconda successione è essa stessa una successione di Cauchy.

> **Nota:** Questo è vero se le 2 successioni hanno lo stesso limite (in $\mathbb{R}$), quindi è un modo di esprimere che le 2 successioni hanno lo stesso limite.

A questo punto un numero reale è una classe di equivalenza di successioni di Cauchy equivalenti. Quindi i numeri irrazionali (inclusi i trascendenti) sono numeri reali (è facile costruire una successione di Cauchy razionale che converge ad un numero reale fissato come abbiamo fatto per $\sqrt{2}$).

Se tornate indietro a quando abbiamo definito i numeri decimali $\frac{n}{10^k}$ (con k cifre decimali). Un numero irrazionale è quindi una successione di numeri decimale infinita come abbiamo fatto per $\sqrt{2}$.

> **Nota:** Qui c'è un solo problema. Considerate i numeri $2.600000\dots$ e $2.59999999\dots$. Possiamo definire la successione Δ come sopra
>
> $$2 \quad 2 \quad 2.5 \quad 2.6 \quad 2.59 \quad 2.6 \quad 2.599 \quad 2.6 \quad 2.5999 \quad 2.6 \quad \dots \tag{1}$$
>
> che è di Cauchy, quindi le 2 successioni che corrispondono alle espressioni decimali $2.600000\dots$ e $2.59999999\dots$ sono lo stesso numero reale $\frac{5}{2}$ (che è pure razionale).
>
> In altre parole le espressioni decimali infinite non sono i numeri reali. Ogni numero reale è una successione infinita di numeri decimali (se è razionale la successione è periodica da un certo punto in poi). Ma le espressioni che finiscono in $\bar{9}$ e quelle che finiscono in $\bar{0}$ sono lo stesso numero.
>
> Quando fate l'argomento diagonale di Cantor, dovete assicurare di non ottenere una successione che finisce con $\bar{9}$.

Se vi ricordate, vi hanno massacrato con una regola per convertire i numeri periodici in frazioni che nessuno ricorda come l'algoritmo per estrarre a mano la radice quadrata. Proviamo a rifarlo qui? Non è che dobbiamo cercare su wiki!

Se prendiamo $q = 3.45\overline{123}$ e vogliamo scriverlo come frazione, non è che possiamo farlo in tanti modi. Come abbiamo fatto in altri casi simili andiamo per approssimazioni successive. La prima approssimazione è certamente $q_1 = \frac{345}{10^2}$ e resta $q - q_1 = 0.00\overline{123}$. Quindi possiamo approssimare il primo periodo come $q_2 = q_1 + \frac{123}{10^5}$ e avanza $q - q_2 = 0.00000\overline{123}$.

Se approssimiamo al secondo periodo abbiamo $q_3 = q_2 + \frac{123}{10^8}$ e resta $q - q_3 = 0.00000000\overline{123}$. Quindi abbiamo una serie

$$q = \frac{345}{10^2} + \frac{123}{10^5} + \frac{123}{10^8} + \frac{123}{10^{11}} + \frac{123}{10^{14}} + \cdots = \frac{345}{10^2} + \frac{123}{10^5}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \dots\right) \tag{2}$$

che sappiamo sommare (visto che nella forma $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z}$)

$$q = \frac{345}{10^2} + \frac{123}{10^5}\frac{1}{1-0.001} = \frac{345}{10^2} + \frac{123}{10^5}\frac{10^3}{10^3-1} = \frac{1}{10^2}\left(345 + \frac{123}{999}\right) \tag{3}$$

Scommetto che se cercate su wiki trovate una prescrizione generale fatta di antiperiodi, periodi, 10^k e 99999 che corrisponde a quello che abbiamo fatto qui.

Quando si dice sprecare gli anni migliori dell'infanzia per niente.

C'è comunque un altro modo di definire i numeri reali, dovuto a Dedekind. Quello delle sequenze di Cauchy è più generale (potete ripeterlo su ogni spazio topologico metrico per ottenere uno spazio senza buchi che si chiama uno spazio completo). Ma le classi di Dedekind sono carine che meritano un giorno per loro.