Giorno 11: somma

Abbiamo definito la somma a seguito degli assiomi di Peano. Quando pensiamo ai numeri naturali come insiemi dati 2 insiemi finiti A_n e A_k di cardinalità n e k definiamo l'unione disgiunta

$$A_n \coprod A_k = (\{1\} \times A_n) \cup (\{2\} \times A_k)$$

Un elemento dell'unione disgiunta è o nella forma $(1, a)$ con $a \in A_n$ oppure $(2, b)$ con $b \in A_k$. In questo modo se $a \in A_n \cap A_k$ esistono 2 elementi $(1, a)$ e $(2, a)$ nell'unione disgiunta.

> **Nota:** Ricordate che un insieme non può contenere 2 volte lo stesso elemento quindi se vogliamo 2 copie dobbiamo truccarle perché non siano lo stesso elemento.

La somma $n + k$ è il numero che rappresenta la cardinalità di $A_n \coprod A_k$.

Siccome tra $A_n \coprod A_k$ e $A_k \coprod A_n$ esiste una mappa biettiva ($i : (1, a) \mapsto (2, a)$ e $i : (2, b) \mapsto (1, b)$), cioè hanno la stessa cardnalità, segue che $n + k = k + n$, cioè la proprietà commutativa.

Lo stesso vale per $A \coprod (B \coprod C) \simeq (A \coprod B) \coprod C$ che corrisponde alla mappa biettiva $i : (a, (b, c)) \mapsto ((a, b), c)$ che mostra la proprietà associativa:

$$n + (k + h) = (n + k) + h$$

Siccome $\varnothing \coprod A \simeq \{2\} \times A \simeq A$, si ha che $0 + n = n + 0 = a$, cioè 0 è elemento neutro per la somma.

Quindi abbiamo una operazione *somma* che prende 2 numeri naturali $n, m \in \mathbb{N}$ e gli associa un nuovo numero $n + m \in \mathbb{N}$. La somma si può fare sempre qualunque siano i numeri da cui si parte e i matematici amano le funzioni che non possono tornare errore (come sanno gli informatici che hanno usato qualche linguaggio funzionale). La somma alla fine ha solo queste proprietà:

ammette elemento neutro 0

è associativa

è commutativa.

La sottrazione ha un ruolo ancillare perché non sempre si può fare ($5 - 8 \notin \mathbb{N}$). È importante cominciare a saper calcolare le sottrazioni ma in $\mathbb{N}$ hanno poco ruolo, sarebbe meglio introdurle dopo in $\mathbb{Z}$. Ma quando scriviamo $n - m = c \in \mathbb{N}$ stiamo cercando $c \in \mathbb{N}$ tale che $m + c = n$.

Sia la somma che la sottrazione possono facilmente essere calcolati in $\mathbb{N}$, se ci avvaliamo della not6azione posizionale. Ogni numero si scrive come sequenza di cifre e la posizione della cifra nella sequenza denota unità, decine, centinaia, migliaia, ... Ad esempio 5023 significa che abbiamo 3 unità, 2 decine 0 centinaia e 5 migliaia. L'algoritmo per la somma è basato nel prendere 2 cifre, commarle e romperle in decine e unità. Se prendo 2 e 3 ottengo 5 unità e 0 decine. Se prendo 9 e 3 ottengo 2 unità e 1 decina. Se prendo 9 e 9 ottengo 8 unità e 1 decina.

Se devo sommare 5263 + 2669, parto dalle cifre delle unità (3 e 9, le combino e ottengo 2 unità e 1 decina, annoto 2 per le unità nel risultato e riporto 1 decina).

Poi passo alle decine (6 e 6, le combino e attengo 2 unità e 1 decina, più ilriporto precedente fa 2 unità e 1 decina). Annoto 3 nelle decine e riporto 1centinaia.

Poi passo alle centinaia (2 e 6, 8 unità (+ 1 riporto 9) e 0 decine) segno 9 centinaia e non riporto migliaia.

Poi passo alle migliaia (5 e 2, 7 unità e 0 decine) segno 7 migliaia.

Risultato 7932.

Bisogna solo imparare le somme delle cifre (le tabelline per la somma) e non dimenticarsi dei riporti. Per il resto l'algoritmo è quello che fate per sommare i numeri sul pallottoliere che infatti è uno strumento per simulare la notazione posizionale.

Altra storia per le proprietà associativa e commutative che invece bisogna *dimostrare*. Non basta dire che 2+3=3+2 come non basta dire che 2+2=2*2 per dimostrare che $n+n=n*n$ o che $16/64 = 1/4$ per dimostrare che $37/74 = 3/4$

Per la sottrazione, prima realizziamo che se vogliamo fare $n - m$ deve essere $n \geq m$ poi se questo è vero procediamo al contrario della somma, se serve prestando una decina.

5263 - 2669 = 2594

e si verifica che infatti 2669 + 2594 = 5263.

Bon così, assicuratevi solo di convincervi che potete sempre sommare 2 numeri naturali e togliere un naturale k più piccolo a qualunque naturale $n \geq k$. Lo potete fare in base 10, in base 3, in base 97. Più la base è grossa più sono grosse le tabelline da ricordare, più sono piccole e più sono i riporti (o i prestiti).

Tutto l'algoritmo è solo completa la decina. Se dovete sommare 5 numeri potete ordinarli in modo da semplificare il completamento delle decine (3+5+2+7+5+8= 3+7+2+8+5+5=30).

Un'ultima cosa, notate che possiamo scrivere $3 + 5 + 7$ solo perché sappiamo che $(3+5)+7 = 3+(5+7)$. Se la somma non fosse associativa siccome abbiamo definito solo la somma di 2 numeri, dovremmo specificare le parentesi per dire in quale ordine ci aspettiamo di fare le operazioni. Siccome la somme è associativa e commutativa possiamo sottintendere le paretesi e l'ordine degli addendi che tanto il risultato non cambia. Quindi $3 + 5 + 7 = (3 + 7) + 5 = 15$.

Come sempre le proprietà possono essere usate pure al contrario: $7 + 5 = (5 + 2) + 5 = (5 + 5) + 2 = 12$ con un po' di taglia e cuci e completa la decina.