Giorno 23: equazioni lineari

Una equazione sono 2 espressioni (che possono contenere incognite) poste uguali tra loro.

Nota: È un'equazione $3x+2=2x$. Ma pure $2x+3y-4=3x=2y+1$.

Siccome 0 è essa stessa una espressione, $3x-1=0$ è anche un'equazione. Più semplicemente, prediamo una funzione $f:\mathbb{Q}^n\to\mathbb{Q}:(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mapsto f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ a cui è associata l'equazione $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$.

In particolare $0=0$ (oppure $x=x$), è soddisfatta da ogni valore di x, quindi qualunque valore di x è soluzione.

Invece non c'è nessun valore di x per cui $1=0$ (oppure $x+1=x$), che quindi è un'equazione senza soluzione. (Questa non ha soluzione è uno degli assiomi di Peano, tra l'altro. Ma allora l'abbiamo dimostrato? Certo, ma abbiamo assunto una paccata di assiomi tra cui quelli di Peano. Abbiamo detto che gli assiomi sono assunti per validi in un sistema formale e se abbiamo un modello diventano teoremi in un sistema assiomatico più grande.)

Se vi chiedo di risolvere $ax+b=0$ dovrei specificare quali sono le incognite e quali i parametri anche se in genere si intende che $x,y,z,\ldots$ sono le incognite.

Due equazioni sono dette *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni, cosicché risolvere l'una o l'altra non fa differenza. Risolvere una equazione significa scrivere una lista di equazioni equivalenti che alla fine diventano $x=5$ (oppure $0=0$ o $1=0$) che rendano manifesti i valori dell'incognita che soddisfano l'equazione.

Quindi l'unica cosa veramente rilevante è capire quando 2 equazioni sono equivalenti.

Nota: Sia data un'equazione $f(x)=g(x)$. Se sommiamo ad ambo i membri una stessa funzione $h(x)$ otteniamo una equazione $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$ che è equivalente all'equazione di partenza.

Infatti se $x=x_0$ è soluzione della prima $f(x_0)=g(x_0)$, allora abbiamo anche che $f(x_0)+h(x_0)=g(x_0)+h(x_0)$. Viceversa, se $f(x_0)+h(x_0)=g(x_0)+h(x_0)$ ovviamente $h(x_0)=h(x_0)$ e quindi deve essere $f(x_0)=g(x_0)$. Quindi x_0 è soluzione della prima se e solo se è soluzione della seconda.

Consideriamo ora l'equazione $f(x)h(x)=g(x)h(x)$. Se $x=x_0$ è soluzione della prima $f(x_0)=g(x_0)$, allora abbiamo anche che $f(x_0)h(x_0)=g(x_0)h(x_0)$ (purché x_0 sia nel dominio di $h(x)$). Viceversa, se $f(x_0)h(x_0)=g(x_0)h(x_0)$ ovviamente $h(x_0)=h(x_0)$ e quindi, se $h(x_0)\neq 0$, deve essere $f(x_0)=g(x_0)$. Ma se $h(x_0)=0$, allora $f(x_0)h(x_0)=g(x_0)h(x_0)$ anche se $f(x_0)\neq g(x_0)$. Quindi x_0 è soluzione della prima se (ma non solo se) è soluzione della seconda. Le 2 equazioni non sono equivalenti (a meno che la funzione $h(x)$ non sia priva di soluzioni).

Quando moltiplichiamo e dividiamo per qualcosa che dipende dalle incognite possiamo introdurre con ciò delle soluzioni della seconda equazione che non erano soluzioni della prima. Si può fare ma se lo facciamo poi dobbiamo verificare che i valori trovati siano stati soluzioni della prima equazione per eliminare le soluzioni spurie.

Ma se moltiplichiamo o dividiamo una equazione per una costante non nulla allora sicuramente otteniamo un'equazione equivalente (proprio perché la costante non nulla è anche una funzione che non si annulla mai.)

Più in generale se applichiamo la stessa funzione ad ambo i membri $h(f(x))=h(g(x))$ otteniamo una equazione equivalente se h è biettiva. Se h non è biettiva possiamo introdurre delle soluzioni spurie. Alla fine dobbiamo quindi verificare le soluzioni trovate per eliminare le eventuali soluzioni spie. Ad esempio consideriamo $x-1=3-2x$ (che ha come unica soluzione $x=\frac{4}{3}$) e invece di risolverla semplicemente applichiamo il quadrato ad ambo i membri $x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 12x + 9$ che si semplifica a $3x^2 - 10x + 8 = 0$. Questa si fattorizza come $\left(x - \frac{4}{3}\right)(3x - 6) = 0$. (Ora non vi preoccupate di come io abbia fattorizzato, preoccupatevi che la fattorizzazione sia giusta, verificando che il prodotto dà quello che c'era.)

Quest'ultima equazione ha 2 soluzioni, $x = \frac{4}{3}$ (come la prima) e $x = 2$ che è una soluzione spuria introdotta elevando a quadrato ambi i membri dovuta al fatto che la funzione $h(x) = x^2$ non è biettiva (visto che $(-x)^2 = x^2$).

In effetti, la soluzione spuria corrisponde alla soluzione dell'equazione $x - 1 = -(3 - 2x)$ $(x = 2)$ che ha lo stesso quadrato di quella da cui siamo partiti.

Immaginatevi una equazione come una bilancia a 2 piatti. Se aggiungiamo un chilo a entrambi i piatti oppure se togliamo una mela da entrambi i piatti, i 2 piatti se erano in equilibrio restano in equilibrio (qualunque sia il peso di una mela).

Quindi, riassumendo possiamo manipolare le equazioni sommando o sottraendo ad entrambi i membri quello che ci va, e moltiplicando o dividendo ambo i membri per quello che ci va purché non sia mai nullo. Più in generale possiamo applicare la stessa funzione ad ambo i membri ma se la funzione non è biettiva dobbiamo verificare le soluzioni trovate ed eliminare eventuali soluzioni spurie.

Quindi possiamo trovare la soluzione generale di una qualunque equazione si può scrivere nella forma $ax + b = 0$.

Nota: Sommate $-b$ ad entrambi i membri: $ax + b - b = ax + 0 = ax$, $0 - b = -b$, quindi $ax = -b$ è equivalente.

Se $a = 0$ questa equazione è equivalente a $0 = -b$ che è impossibile se $b \neq 0$ (non ci sono soluzioni) oppure indeterminata se $b = 0$ (qualunque x è soluzione).

Se $a \neq 0$, possiamo dividere per a: $ax\frac{1}{a} = x$ e $-b\frac{1}{a} = -\frac{b}{a}$, quindi abbiamo l'equazione $x = -\frac{b}{a}$ che è la soluzione cercata.

Tutto ciò è generale perché abbiamo definito numeri interi negativi e numeri razionali in modo da poterlo sempre fare.

Ma dovremmo iniziare affrontando un problema: cosa sono le equazioni lineari? Sui libri trovate che le equazioni lineari sono quelle che si scrivono come $ax + b = 0$ che è vero ma dovete avere chiaro in mente la differenza tra si scrivono così (queste sono lineari) e si *possono* scrivere così (tutte le equazioni lineari si possono scrivere così). L'equazione $x^2 + ax + c = x^2 + bx + d$ è un'equazione lineare $((a - b)x + (c - b) = 0)$. L'equazione

$$\frac{-x^2+2x-1}{x^2-1} = 1 \tag{1}$$

è lineare $(x + 3 = 3x + 3,\ 2x = 0)$.

Definire un'equazione lineare come un'equazione si può scrivere in una certa forma è come definire una frazione come $\frac{a}{b}$, definisce un numerale non un numero.

Nota: In verità noi possiamo definire cosa è una funzione $y = f(x)$ lineare e da questa un'equazione lineare $f(x) = 0$. Tra l'altro *lineare* in verità ha 2 significati (polinomio di primo grado e polinomi *omogenei* di primo grado), bisogna portare pazienza.

In ogni caso, una funzione è lineare (nel primo senso che è quello che si usa per le equazioni) se e soltanto se le soluzioni $(x, y) : y = f(x)$ si dispongono lungo una retta, cioè se e solo se, data una soluzione (x_0, y_0), tutte le altre sono nella forma $(x = x_0 + as, y = y_0 + bs)$ per ogni s e con a, b costanti.

Quindi una equazione è lineare se si ottiene da una funzione lineare $f(x) = 0$.

Quindi sappiamo risolvere tutte le equazioni lineari con una incognita.