Giorno 15: numeri decimali

Tra i razionali ce ne sono di particolare per cui possiamo usare una notazione diversa. Ad esempio

$$\frac{12}{10} = 1.2 \qquad \frac{314}{100} = 3.14 \qquad \frac{66666}{10000} = 6.6666$$

sono numeri razionali che hanno un denominatore che è una potenza di 10. Il carattere . ci informa di quale potenza di 10 si tratta. Questi numerali si chiamano *notazione decimale*.

Se volete sommare 1.2 e 3.14 sappiamo già farlo

$$1.2 + 3.14 = \frac{12}{10} + \frac{314}{100} = \frac{120}{100} + \frac{314}{100} = \frac{434}{100} = 4.34$$

E questo è semplicemente il motivo per cui alle elementari ci tenevano tanto a farci allineare a destra i numeri da sommare, oltre alle cose tipo *sommate i numeri come se non ci fosse la virgola e poi rimettetela a posto*. Lo stesso vale per la moltiplicazione

$$1.2 * 3.14 = \frac{12}{10}\frac{314}{100} = \frac{12*314}{1000} = \frac{3768}{1000} = 3.768$$

Nota: Ditemi se è così pure per voi, ma io ricordo che quando abbiamo fatto da piccoli i numeri decimali, i decimali all'inizio non erano approssimazioni di qualcosa (e.g. di numeri irrazionali). Quando si scriveva 1.2 era 1.2, era esattamente $\frac{12}{10}$, non l'arrotondamento di 1.2005. Gli arrotondamenti sono venuti dopo. Quindi, all'inizio, il punto era esattamente di estendere le operazioni e gli algoritmi per calcolarle ai numeri con la virgola. Quindi mi pare sia *esattamente* quello che abbiamo fatto qui.

Ovviamente, questa non è neppure matematica davvero. È una cosa che riguarda i numerali e il fatto che siamo affezionati alla base 10. Anche se lo rifate in una base qualsiasi, stiamo sempre parlando di un modo fantasioso di scrivere alcune frazioni particolare. Quando avete $\frac{1}{4}$ questo possiamo scriverlo esattamente in forma decimale $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$ oppure $\frac{30}{4} = \frac{750}{100} = 7.5$.

Ma ci sono altri numeri razionali che non si possono scrivere in forma decimale. Ad esempio, $\frac{1}{3}$ non può essere scritto esattamente in forma decimale (con un numero finito di cifre decimali) perché posso moltiplicare 3 per qualunque cosa ma non potrà mai essere potenza di 10.

Nota: Se devo avere $3a = 10^k = 2^k 5^k$, siccome 3 è primo deve dividere $3|2^k$ oppure $3|5^k$ e nessuno dei 2 può essere. Quindi qualunque sia a, $3a$ non può essere una potenza di 10.

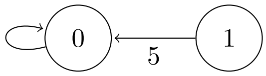
In altre parole, i razionali sono meglio dei decimali ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$ non hanno una espressione esatta decimale). Oltretutto, quali frazioni non hanno espressione decimale esatta dipende dalla base che usiamo.

Nota: in base 3 i numeri *terziali* sono $\frac{(201)_3}{(100)_3} = (2.01)_3 = \frac{19}{9} = 2*3^0 + 0*\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ si scrive in forma terziale come $(2.01)_3$ e ovviamente conveniamo di sottintendere la base 10 (e di usare la notazione decimale per le basi).

In forma terziale abbiamo $\frac{1}{3} = (0.1)_3$ che è esatta e non periodica mentre lo stesso $\frac{1}{3}$ è periodico come numero decimale.

Anche se, in fondo è quindi una faccenda di notazione numerale, è interessante vedere perché e quali numeri sono periodici in base 10.

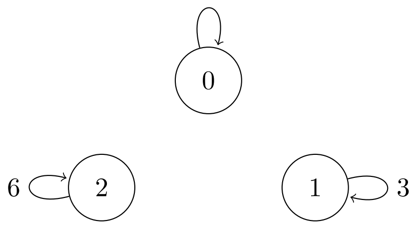
La risposta può essere cercata nel fatto che quando si dividono 2 numeri interi si ottiene un resto e da lì le cifre decimali in successione. Si ottengono dei cicli di cifre che possono intrappolarci per sempre. Per esempio, quando prendiamo un numero e lo dividiamo per 2 il resto può essere 0 o 1 e a seconda del resto che troviamo ad un certo punto poi proseguiamo seguendo le linee del grafico



(1)

Quindi da dovunque partiamo arriviamo ad una sequenza infinita di zeri, cioè le frazioni $\frac{n}{2}$ non sono periodiche.

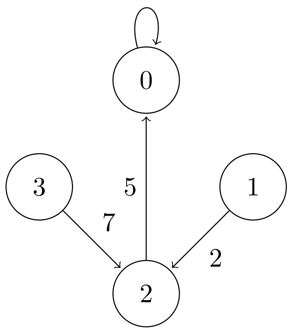
Quando dividiamo per 3 il resto può essere 0 o 1 o 2 e a seconda del resto che troviamo seguiamo



(2)

Quindi o un numero si divide per 3 oppure il risultato è periodico con periodo di una cifra sola, o 3 o 6.

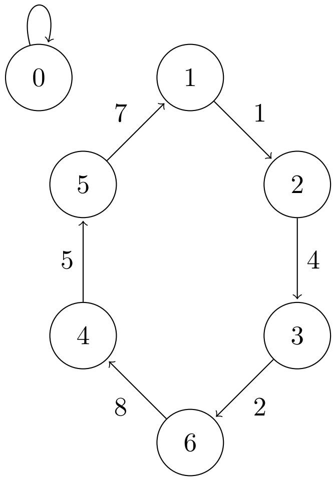
Se dividiamo per 4 abbiamo resto 0,1,2 o 3 e seguiamo le regole



(3)

quindi ancora nessun numero periodico.

Ci sono cose bellissime da scoprire, ad esempio dividendo per 7 abbiamo



(4)

Quindi dividendo un numero per 7 o si divide esattamente, oppure ha sempre un periodo di 6 cifre, che sono sempre prese nel ciclo (142857), cioè con lo stesso ordine solo iniziando da un punto qualunque.

Tutto ciò ha un certo fascino, può essere un buon esercizio sulle divisioni.

Quindi, riassumendo, come prima -3 e le frazioni, i decimali sono una notazione per denotare un po' di numeri. Ma i razionali $\mathbb{Q}$ sono comunque un insieme ben fatto di numeri su cui fermarsi. I numeri reali hanno bisogno di qualche nozione di limite infinito, quindi li rimandiamo. Per ora ci riteniamo soddisfatti da $\mathbb{Q}$ su cui sappiamo sommare e moltiplicare e quindi sottrarre e dividere in modo generico (a parte la non esistenza della divisione per 0).

A proposito, quanti sono i numeri razionali? Come mai Pitagora ha realizzato che qualcosa non era descritto da un numero razionale? Ci sono numeri peggiori dei numeri irrazionali?