Giorno 20: modelli

Finora abbiamo visto un sistema assiomatico (gli assiomi di Peano per gli ordinali naturali). Questo è fatto come descritto ieri. Il *successivo* e *numero naturale* sono termini indefiniti. Gli assiomi sono quelli che abbiamo scritto. Abbiamo definito somma e prodotto e abbiamo dimostrato alcuni teoremi ($5 + 3 = 8$).

Lo abbiamo fatto in modo un po' informale, secondo i canoni della logica del prim'ordine e i sistemi di dimostrazione annessi avremmo dovuto annotare una lista di enunciati e con quale regola di produzione è stata prodotta a partire da quali premesse. Ma noi siamo fighi e ribelli e facciamo le cose come ci pare.

Da quello che abbiamo detto in realtà manco sappiamo cosa significa successivo e numero naturale. La semantica è suggerita dai nomi, aiuta ma non è necessaria e non segue dagli assiomi né dai teoremi successivi.

Possiamo dire che gli assiomi si *inventano* ma una volta fissati gli assiomi in linea di principio i teoremi che da questi si possono dimostrare sono stabiliti per sempre anche se noi ancora non li conosciamo. Una volta stabiliti gli assiomi, noi certamente *scopriamo* le dimostrazioni e i teoremi.

Abbiamo anche discusso che i sistemi assiomatici possono essere coerenti, indipendenti e completi. Gödel ha dimostrato che il sistema di Peano non è completo. Ci sono enunciati che non possono essere dimostrati vero o falsi (tra cui la coerenza).

Ma chi ci garantisce che è un sistema coerente? Chi ci assicura che domani non scopriremo che $1 = 0$? (Già un assioma ci dice che $1 := s(0) \neq 0$.)

Per alcuni sistemi assiomatici molto semplici qualche volta questo è possibile dimostrarlo direttamente nel sistema stesso. Ma Gödel ci assicura che la coerenza in Peano non è decidibile.

Altre volte (e pure per Peano) è possibile dare una prova relativa di coerenza fornendone un modello.

Un modello consiste nel considerare un altro sistema assiomatico (in genere più complesso di quello che stiamo analizzando). Nel sistema grande (nel caso di Peano il sistema assiomatico di teoria degli insiemi) noi possiamo trovare oggetti (insiemi) che realizzano i termini indefiniti di Peano in modo che gli assiomi diventano teoremi nel sistema grande.

> **Nota:** Potete definire 0 come l'insieme $\varnothing$. E noto $n \in \mathbb{N}$ come insieme possiamo definire il successivo come l'insieme $s(n) = n \cup \{n\}$. Poi possiamo dimostrare come teoremi in teoria degli insiemi che valgono gli altri assiomi come teoremi.
>
> Fatto questo abbiamo un modello del sistema assiomatico di Peano all'interno di teoria degli insiemi. Se, **se**, teoria degli insiemi è coerente allora Peano è coerente, per questo si chiama dimostrazione relativa di coerenza.

In un modello c'è una semantica interna alla teoria grande del sistema piccolo. È tutto meno astratto, ma in genere la teoria grande è altrettanto possibile sia incoerente rispetto alla teoria piccola. Nella teoria degli insiemi uno *scopre* gli assiomi di Peano come teoremi.

Talvolta il medesimo sistema può avere modelli diversi anche in teorie diverse.

Notate che invece per definire interi e razionali, abbiamo preso un'altra strada. Non abbiamo definito un nuovo sistema assiomatico, Abbiamo esteso con definizioni il sistema di Peano. Noi lo abbiamo fatto usando il suo modello ma possiamo dimostrare tutto come teoremi in Peano. Se facciamo finta di sapere cosa è un numero naturale, abbiamo un modo di scoprire i numeri interi e razionali. Noi diamo delle definizioni ma la possibilità di considerare coppie di naturali (o interi) e la possibilità di scegliere operazioni su questi nuovi numeri è già implicita negli assiomi di Peano.

Questi si chiamano modelli, poi possiamo specificare una specie di modelli materiali in cui i termini indefiniti vengono associati a oggetti reali e gli assiomi a loro proprietà. In questo senso talvolta si interpretano gli oggetti matematici come oggetti reali e gli assiomi come le loro proprietà. Questi sistemi materiali sono il fondamento dell[uso della matematica nelle scienze naturali. **Secondo me**, non sono matematica nel senso di cui sopra. Per sapere se un oggetto reale ha una proprietà occorre fare un esperimento, non una dimostrazione.

Il meccanismo alla base dei sistemi materiali è interessante, ne parliamo un'altra volta, ma secondo me un po' oltre la matematica e spostato nella direzione delle scienze naturali.