Giorno 24: equazioni quadratiche in una variabile.

Valgono tutti i discorsi fatti nel caso lineare. Una equazione è quadratica se si può mettere nella forma $ax^2 + bx + c = 0$. A scuola vi hanno dato la formula per risolvere queste equazioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

se il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, altrimenti per i discriminanti negativi non ci sono soluzioni. Per il discriminante nullo, c'è una sola soluzione

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \tag{2}$$

Non so se vi hanno dimostrato questa formula o se vi ricordate la dimostrazione. È una bella dimostrazione e vale la pena di ripercorrerla.

Nota: Notate che se $b = 0$ sappiamo risolvere

$$ax^2 + c = 0 \qquad x^2 = -\tfrac{c}{a} \tag{3}$$

Va detto che siccome non conosciamo il valore di a e c non sappiamo né il valore né il segno di $-\frac{c}{a}$, che non è necessariamente negativo.

Il valore di x è la definizione di radice quadrata $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ che è quel numero **positivo** che elevato a quadrato dà $-\frac{c}{a}$ (per cui ovviamente $-\frac{c}{a}$ deve essere positivo se no non ci sono soluzioni).

Quindi le soluzioni sono $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ se $-\frac{c}{a} > 0$, $x = 0$ se $-\frac{c}{a} = 0$, non ci sono soluzioni se $-\frac{c}{a} < 0$.

Quindi se riusciamo sempre a riportarci a questo caso, sappiamo trovare la soluzione di una generica equazione quadratica.

Il metodo per ridursi al caso che sappiamo risolvere è una delle invenzioni di Al-Khwārizmī. È stata tanto rilevante che gli è stato dato un nome: metodo del completamento dei quadrati.

Si tratta di ricostruire il prodotto notevole $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Infatti assumendo $a \neq 0$ (se no l'equazione è lineare e già sappiamo risolverla):

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c =& ax^2 + 2a\tfrac{b}{2a}x \pm a\tfrac{b^2}{4a^2} + c = \\ =& a(x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + \tfrac{b^2}{4a^2}) + c - a\tfrac{b^2}{4a^2} = \\ =& a(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Per semplicità poniamo $\Delta = b^2 - 4ac$ e $z = x + \frac{b}{2a}$, l'equazione diventa $az^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$. Questa la sappiamo risolvere come mostrato sopra $z = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Nota: Wait! Come hai fatto l'ultimo passaggio? Vi sto dicendo che $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ è quel numero che elevato a quadrato dà $\frac{\Delta}{4a^2}$. Beh, provate

$$\left(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \tfrac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \tfrac{\Delta}{4a^2} \tag{5}$$

checked!

Ricordando infine la definizione di z abbiamo

$$x = -\tfrac{b}{2a} \pm \tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \tfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{6}$$

Se non accettate i numeri negativi per voi

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad ax^2 + bx = -c \qquad ax^2 = -bx - c \tag{7}$$

sono tutte equazioni diverse e infatti una volta sta roba era eterna perché uno doveva fare n volte lo stesso conto per coprire tutti i casi.

Vedendo questo risultato si potrebbe immaginare che a questo punto sappiamo risolvere qualunque equazione polinomiale, ma la natura è malevola. Possiamo risolvere qualunque polinomio di quarto e quinto grado poi basta.

I polinomi di quinto grado non siamo capaci di risolverli in generale. Anzi, sappiamo dimostrare che non esiste una formula elementare per scrivere in generale una soluzione anche nei casi (i polinomi di grado dispari) in cui sappiamo (sapremo) che esiste una soluzione reale. Solo che quest'ultimo paragrafo copre i secoli da Cardano (1500) a Euler (1800) e ci dobbiamo tornare sopra più in là.

Per ora siamo contenti che sappiamo risolvere tutte le equazioni di primo e secondo grado come già sapeva fare Al-Khwārizmī.