

Giorno 16: cardinalità dei numeri razionali

Quanti sono i numeri razionali? Qual è la cardinalità di \mathbb{Q} ?

Vediamo. Ogni numero razionale è rappresentato da una coppia di interi, siccome $[(-n, d)] = [(n, -d)]$ sono lo stesso numero razionale possiamo pensarli come punti a coordinate intere (o come vettori a componenti intere) del mezzo piano superiore.

Nota: non guardate sotto il tappeto, c'è qualcosa che sbava là sotto!

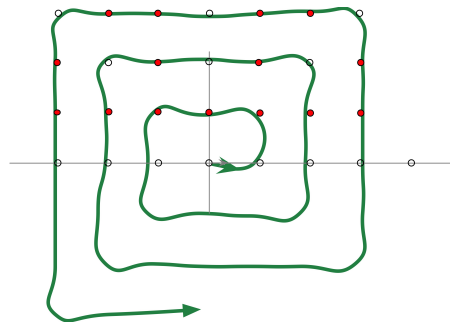


Figura 1: I numeri razionali come punti del piano e ordinamento

Poi fate una spirale come quella in figura e ordinate i pallini che incontrate nell'ordine in cui li incontrate. In pratica state costruendo una mappa $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Siccome prima o poi passate per tutti i numeri razionali la mappa è biettiva e quindi \mathbb{N} e \mathbb{Q} hanno la stessa cardinalità. La cardinalità di \mathbb{Q} è infatti \aleph_0 , i numeri razionali sono numerabili.

Notate che l'ordinamento che state definendo non è l'usuale ordinamento $q \leq q'$ che non è un buon ordinamento, mentre quello che definisce la lista è (come quello di \mathbb{N}) un buon ordinamento.

L'ordinamento di un insieme non è parte dell'insieme, uno *definisce* un ordinamento su un insieme e le definizioni sono libere, in un paese civile uno definisce le cose che vuole, basta che la definizione sia ben data. Quindi \mathbb{Q} può vestire ordinamenti diversi in situazioni diverse come voi potete cambiarvi la gonna senza smettere di essere voi.

Immaginate l'hotel di Hilbert con le stanze chiamate con nomi in \mathbb{Q} e ordinate secondo l'ordinamento usuale lungo un corridoio. Tra qualunque 2 stanze q_1 e q_2 ci sarebbero infinite camere q con $q_1 \leq q \leq q_2$ che darebbe all'hotel un aspetto molto più inquietante, vero?

Nota: Ok, tutto qui, basta che non mi chiediate a quale ordinale corrisponde il buon ordinamento che avete definito su \mathbb{Q} . Se ci pensate la risposta è facile, avete tutto quello che serve per rispondere. [per essere chiaro quando ho cominciato a scrivere questa frase non sapevo la risposta, volevo evitarla anche se stava davanti a me in piena luce.]