

Giorno 3

Somme e prodotto

Definiamo i numeri seguenti in \mathbb{N}

$$0$$

$$1 = s(0)$$

$$2 = s(1) = s(s(0))$$

$$3 = s(2) = s(s(s(0)))$$

$$4 = s(3) = s(s(s(s(0))))$$

$$5 = s(4) = s(s(s(s(s(0)))))$$

$$6 = s(5) = s(s(s(s(s(s(0))))))$$

$$7 = s(6) = s(s(s(s(s(s(s(0)))))))$$

$$8 = s(7) = s(s(s(s(s(s(s(s(0))))))))$$

e avanti così.

Definiamo la *somma* $a + b$ con le proprietà

$$a + 0 = a$$

$$a + (s(b)) = s(a + b) = (a + b) + 1$$

Se devo fare

$$5 + 3 = 5 + s(s(1)) = s(5 + s(1)) = s(s(5 + s(0))) = s(s(s(5)))$$

che è definito come 8.

Definiamo la *prodotto* ab : $a \cdot 1 = a$ $a \cdot s(b) = a \cdot b + a$

Se devo fare

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot s(1) = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot s(s(1)) = 2 \cdot s(1) + 2 = (2 \cdot 1 + 2) + 2 = (2 + 2) + 2 = 4 + 2 = 6$$

Poi ci mettiamo con santa pazienza e dimostriamo le proprietà.

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ 0 elemento neutro}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ associativa}$$

$a + b = b + a$ commutativa

$a1 = 1a = a$ 1 elemento neutro

$(ab)c = a(bc)$ associativa

$ab = ba$ commutativa

$(a + b)c = ac + bc$ distributiva

Non credo siano importanti i dettagli ma se vuoi ne dimostriamo qualcuna.