Giorno 13: numeri interi

Ora che sappiamo vita, morte e miracoli (somma, prodotto e divisione con resto) di $\mathbb{N}$ dobbiamo scoprire i numeri interi. Il punto è il *riciclo*: non voglio tutte le volte ripartire da assiomi se posso evitarli. Se potessi evitarli gli assiomi sono sempre da evitare visto che arrivano senza dimostrazione.

Il punto è che possiamo definire i numeri interi (positivi e negativi) senza introdurre nuovi assiomi e le operazioni tra numeri interi (compresa la sottrazione) usando solo naturali e le loro operazioni.

> **Nota:** Ma prima, perché ho bisogno dei numeri negativi? Perché senza 5-8 non lo posso fare. Coi numeri negativi la sottrazione diventa una buona operazione che posso sempre fare e che diventa l'inversa della somma. In altre parole imparo a risolvere le equazioni del tip $x + a = b$ qualunque siano a e b.
>
> Questo pattern si ripeterà più volte. Inventiamo nuovi numeri per risolvere problemi in modo più generale. Varrà per le frazioni $\mathbb{Q}$ ($ax+b=c$) per i numeri reali ($x^2 = 2$) per i numeri complessi $x^2 = -1$.

Consideriamo le coppie di numeri naturali $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Diciamo che 2 coppie sono equivalenti $(a, b) \sim (c, d)$ se $a+d = b+c$. Questa è una relazione di equivalenza (dimostrare le proprietà che definiscono le relazioni di equivalenza). Definiamo un *numero intero* una classe di equivalenza $[(a, b)]$ che contiene tutte le coppie nella forma $(a + k, b + k)$ che infatti risultano equivalenti a (a, b). L'insieme di tutti i numeri interi si denota con $\mathbb{Z}$.

La *somma* di 2 numeri interi si definisce come $[(a, b)] + [(c, d)] = [(a+c, b+d)]$.

> **Nota:** Il risultato non dipende dal rappresentante scelto per i numeri interi, infatti, siano $(a+k, b+k)$ e $(c+h, d+h)$ altri rappresentanti la somma sarebbe
>
> $$[(a+k+d+h, b+k+c+h)] = [(a+d+(k+h), b+c+(k+h))] = [(a+d, b+c)]$$

Definiamo il *prodotto* in $\mathbb{Z}$ come

$$[(a, b)][(c, d)] = [(ac + bd, bc + ad)]$$

> **Nota:** Tra tutti i numeri interi possiamo scegliere un sottoinsieme $[(a, 0)]$. Se riscriviamo le operazioni per questi numeri interi abbiamo che essi rappresentano correttamente i numeri naturali.
>
> $$[(a, 0)] + [(b, 0)] = [(a + b, 0)] \qquad [(a, 0)][(b, 0)] = [(ab, 0)]$$
>
> Quindi identifichiamo $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : a \mapsto [(a, 0)]$.

Possiamo sempre scegliere per un numero intero un rappresentante specifico: Se $a \geq b$ scegliamo $[(a, b)] = [(a - b, 0)]$, se $a < b$ scegliamo $[(0, b - a)]$. E quindi inventiamo una notazione: denotiamo $[(a, 0)] = a \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $[(0, a)] = -a \in \mathbb{Z}$.

E come mai questo dovrebbe avere a che fare con i numeri interi?

> **Nota:** Esempio: calcolare $[(a, 0)] + [(0, a)] = [(a, a)] = [(0, 0)]$. Quindi $[(0, a)]$ è un numero intero che sommato con $[(a, 0)]$ dà 0.
>
> Notate che la sottrazione è una somma di numeri interi: $a - b = [(a, 0)] + [(0, b)]$ e per calcolare una *sottrazione* dobbiamo solo in generale fare 2 somme in $\mathbb{N}$.

I numeri interi contengono i numeri naturali $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : a \mapsto [(a,0)]$ e le operazioni definite sui naturali continuano a funzionare

$$i(a) + i(b) \mapsto [(a,0)] + [(b,0)] = [(a+b,0)] \mapsto i(a+b)$$

$$i(a)i(b) \mapsto [(a,0)][(b,0)] = [(ab,0)] \mapsto i(ab)$$

Esercizio: calcolare $1(-1)$ e $(-1)(-1)$.

$1(-1) = [(1,0)][(0,1)] = [(0,1)] = -1 \qquad (-1)(-1) = [(0,1)][(0,1)] = [(1,0)] = 1$

Salmodiate: *meno per più fa meno, meno per meno fa più.*

Se sapete moltiplicare i numeri naturali, sapete pure moltiplicare i numeri interi.

Abbiamo anche che

$$(-1)[(a,b)] = [(b,a)] =$$

quindi

$$[(a,b)] = [(a,0)] + [(0,b)] = [(a,0)] + (-1)[(b,0)] = a - b$$

quindi il numero intero $[(a,b)]$ coincide col numero intero $a - b$, a è la parte positiva, b la parte negativa.

In $\mathbb{Z}$ l'operazione di somma funziona molto meglio che in $\mathbb{N}$. Se in $\mathbb{N}$ non era sempre possibile, ora per qualunque $k \in \mathbb{Z}$ esiste un $-k \in \mathbb{Z}$ tale che $k - k = 0$, $-k$ si chiama *l'opposto di* k oppure l'inverso rispetto alla somma.

Quando abbiamo che un insieme (in questo caso $\mathbb{Z}$) ha una operazione (in questo caso $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, che risulta associativa, commutativa, esiste l'elemento neutro 0, e ogni elemento k ha un opposto $-k$. Quando è così questo si chiama un gruppo commutativo. Gruppi commutativi ce ne sono tanti e siccome in ogni gruppo commutativo usiamo solo le proprietà che ne fanno un gruppo commutativo, se so risolvere l'equazione $x + a = b$ in un gruppo so risolverla in tutti i gruppi. Da qui l'astrazione di risolvere l'equazione senza neanche sapere se a e b sono numeri interi, frazioni, vettori, funzioni continue, operatori su spazi di Hilbert o rotazioni del piano, tanto è uguale.

Quindi in $\mathbb{Z}$ c'è una sottrazione $a - b$ ben definita, che però è diventata la somma di a con $-b$. La divisione è sempre brutta perché $6 : 4$ continua a non avere un risultato in $\mathbb{Z}$.