Giorno 2
Cardinali, ordinali, numerali

Finora: esistono infiniti numeri naturali.

Che differenza c'è tra numeri cardinali, ordinali e numerali?

I cardinali servono per contare gli oggetti (zero, uno, due, ...), gli ordinali servono per l'ordine (primo, secondo, terzo, ...) definiscono maggiore e minore, le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{N}$.

I numerali sono diversi modi di rappresentare un numero: 11 si può scrivere 11 in base 10, 1011 in binario, B in esadecimale, X in romano. Quando i carcerati contano i giorni sul muro della cella le 4 stanghette verticali tagliate da una stanghetta obliqua sono un numerale per 5.

Non ci occupiamo di numerali, sono solo rappresentazioni. Esistono cardinali (uno, due, tre, ...) e ordinali (primo, secondo, terzo, ...).

Il problema è che finché parliamo di numeri finiti, cardinali e ordinali sono in corrispondenza 1-a-1. Ok dovremo dare definizioni per bene. Lo faremo. Ma se è così, serve uno solo dei 2 l'altro non serve.

MA quando consideriamo insiemi infiniti i numeri ordinali sono molti di più. Quindi gli ordinali sono molto meglio. Ci torniamo in modo più preciso.

Per ora stiamo ancora a partire! Ancora non abbiamo detto COSA è un numero naturale. Qui i matematici si dividono in 2. Metà predilige le proprietà, le enuncia e se non si cura di cosa sia. L'altra metà definisce cosa è un numero naturale (in genere come classe di equivalenza di insiemi finiti) e poi usando questa rappresentazione definire le operazioni (eg somma e prodotto) e per dimostrare le proprietà (eg commutativa, associativa, ...).

Siccome stiamo facendo turismo e nessuno ha fretta di arrivare, percorriamo entrambe le strade, ok?

Prima strada. Nell'800 Peano ha dato i seguenti assiomi per i numeri naturali.

1) 0 è un numero naturale.

2) esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e diciamo che $s(n)$ è il successore di n.

3) se x diverso da y allora $s(x)$ è diverso da $s(y)$

4) $s(x)$ non è mai 0 qualunque sia x

5) [Principio di induzione]

se U è un sottoinsieme di N e

a) $0 \in U$

b) se $n \in U$ allora $s(n) \in U$

allora $U = N$

Questi assiomi, con un bel po' di lavoro permettono di dimostrare OGNI proprietà dei numeri naturali (che sappiamo dimostrare altrimenti).

Se conveniamo che non c'è un numero più grande di tutti (no "∞" non è un numero naturale se no sapreste fare "$\infty + 1$"), l'insieme dei numeri è infinito (in-finito) perché non posso finire di contare?

Per ora lasciate perdere cosa sia un numero, quello che conta è che sono infiniti, che hanno un nome, e che potremo fare operazioni coi numeri.