Giorno 8
L'hotel di Hilbert (versione cardinale)

L'hotel Hilbert è un albergo in un'amena località montana non meglio precisata che ha $\aleph_0$ stanze. Un giorno l'albergo risulta completo al momento della cena.

Nel mezzo della notte tempestosa un nuovo cliente bussa alla porta cercando una stanza per passare la notte al sicuro. In un primo momento il portiere risponde che sono al completo poi, mosso a compassione per il nuovo venuto, pensandoci un po' ha un'idea e trasmette in tutte le camere il seguente messaggio:

Stiamo affrontando un'emergenza, chiediamo ad ogni cliente a seguire le seguenti istruzioni: Se state occupando la nella stanza k, vi preghiamo di prendere la vostra roba e trasferirvi nella stanza $k+1$. In cambio, riceverete uno sconto del 10% sul conto.

Dopo di ciò, la stanza 0 è rimasta vuota visto che nessuno ci si è trasferito a fronte del suo occupante che ora dorme seneramente nella stanza 1. Il nuovo cliente quindi viene sistemato della stanza 0, non prima di essersi offerta a pagare di tasca sua il mancato incasso dovuto allo sconto. A questo proposito, il portiere ha gentilmente declinato l'offerta argomentando che malgrado le tariffe molto basse dell'albergo e lo sconto, l'incasso totale non sarebbe diminuto finché l'albergo fosse risultato completo o, per quel che conta, anche avesse avuto un numero finito di stanze vuote, o comunque con un numero numerabile di stanze occupate (ad esempio solo quelle pari).

Più tardi nella notte, un'altra infinita comitiva si presenta alla porta chiedendo una stanza per evitare la tempesta. A quel punto il portiere trasmette il seguente messaggio:

Mi spiace disturbarvi ancora ma stiamo affrontando una nuova emergenza. Vi chiediamo gentilmente di alzarvi, prendere le vostre cose, e se state nella stanza k trasferitevi nella stanza $2k+1$. In cambio, riceverete un ulteriore sconto del 10%.

Ciò a reso disponibili tutte le stanze pari che così hanno potuto essere destinate alla comitiva giunta nella notte. Sembra che l'hotel di Hilbert non possa esaurire le stanze, [Ma può, come vedremo.]

Se ci pensate, tutta la storiella dice che la cosa particolare dell'albergo con $\aleph_0$ stanze è che le posso numerare coi numeri naturali $\mathbb{N}$. Tuttavia le sole stanze pari, quelle dispari da sole, e tutte le stanze hanno la stessa cardinalità. Non ci credete?

Allora controllate che la mappa $f : \mathbb{N} \to P : n \mapsto 2n$, dove

$$P = \{0, 2, 4, \dots, 2k, \dots\}$$

è biettiva, così come la mappa $g : \mathbb{N} \to P : n \mapsto 2n + 1$, dove

$$D = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1, \dots\}$$

Ok se ci pensate, magari dite: *e grazie dai sono entrambe infinite quindi sono tanti quanti.* Se è così ripetete con me: *la natura è malevola e non perde occasione di rendere le cose semplici meravigliosamente complicate.* Avete in parte ragione ma vedremo che ci sono infiniti e infiniti (se no perché la cardinalità di $\mathbb{N}$ l'avrei chiamata $\aleph_0$? Perché mi avanzava uno 0 o perché alla fine mi servirà una cosa più grande $\aleph_1$, poi una più grande $\aleph_2$, ... ?).

Ma ora non possiamo occuparcene, prima dobbiamo definire i numeri interi, quelli razionali, quelli reali e vedremo che la cardinailtà dei numeri reali è più grande di quella di $\mathbb{N}$, cioè che i numeri reali sono una infinità non numerabile.

E vi sembra possibile quella sia la fine della storia? No, eh, vedete che la natura è malevola?

Prossime tappe: relazioni di ordine e buon ordine, così possiamo definire una rappresentazione (un modello) per i numeri ordinali. Poi ci dobbiamo occupare di definire i numeri interi, i razionali e i reali, estendendo le operazioni e definendone altre (ad esempio: la sottrazione, la divisione, le radici quadrate). A quel punto siamo arrivati ai tempi di Pitagora (che, non lui, diciamo la sua scuola, ha scoperto che $\sqrt{2}$ non è razionale).

Per questa strada estenderemo 2 volte l'hotel di Hilbert. A quel punto il finale di Interstellar vi sembrerà banalotto.