Giorno 34: soluzioni dei polinomi cubici

La stessa tecnica che abbiamo usato per risolvere le equazioni quadratiche, un po' più complicata, ci porta a risolvere le equazioni cubiche $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

> **Nota:** Cominciamo a mostrare che sappiamo risolvere $x^3+c=0$, che corrisponde alla definizione di radice cubica $x=-\sqrt[3]{c}$.
>
> Perché senza il $\pm$ davanti?

Quindi basterebbe completare i cubi $(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

> **Nota:** Purtroppo non è facilissimo da fare:
>
> $$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d =& ax^3+3aBx^2+3aB^2x+aB^3+C = \\ =& a(x^3+3Bx^2+3B^2x+B^3)+C = \\ =& a(x+B)^3+C=0 \end{aligned} \tag{1}$$
>
> Quindi bisognerebbe solo trovare B in modo che valgano
>
> $$aB^3+C=d \qquad 3aB=b \qquad 3aB^2=c \tag{2}$$
>
> La prima determina $C=d-aB^3$, ma le altre 2 in generale sono 2 equazioni per una incognita B, in generale non ci sono soluzioni visto che ognuna delle 2 equazioni determinato B a 2 valori in generale diversi.
>
> Ma almeno abbiamo imparato un po' meno, cioè a scrivere un polinomio di 3 grado come
>
> $$ax^3+bx^2+cx+d = a(x+B)^3+Dx+C=0 \tag{3}$$
>
> per cui bisogna trovare B, C, D in modo che valgano
>
> $$3aB=b \qquad aB^3+C=d \qquad 3aB^2+D=c \tag{4}$$
>
> e possiamo scegliere $B=\frac{b}{3a}$ e poi $D=c-\frac{b^2}{3a}$ e $C=d-\frac{b^3}{27a^2}$
>
> Con queste scelte abbiamo
>
> $$\begin{aligned} & ax^3+3a\tfrac{b}{3a}x^2+3a\tfrac{b^2}{9a^2}x+a\tfrac{b^3}{27a^3}+cx-\tfrac{b^2}{3a}x+d-\tfrac{b^3}{27a^2} = \\ & = ax^3+bx^2+cx+d \end{aligned} \tag{5}$$
>
> In altre parole siamo sempre in grado di riducri ad un polinomio $x^3-Bx-C=0$ senza il termine x^2, che è detta *cubica depressa*. :o)

Se sapessimo risolvere una cubica depressa sapremmo risolvere una cubica qualsiasi. Ma questo è *"facile"* (perché qualcuno—credo il solito Euler- ha scoperto una radice per noi nella forma $x=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$). Infatti elevando al cubo

$$x^3 = 3\sqrt[3]{pq}x+p+q \tag{6}$$

e quindi basta avere

$$B=3\sqrt[3]{pq} \qquad C=p+q \tag{7}$$

che possiamo risolvere $q=C-p$, $B=3\sqrt[3]{pC-p^2}$, $27p^2-27pC+B^3=0$ che possiamo risolvere per p risolvendo l'equazione quadratica. Otteniamo

$$p=\frac{C}{2}+\sqrt{\frac{C^2}{4}-\frac{B^3}{27}} \qquad q=\frac{C}{2}-\sqrt{\frac{C^2}{4}-\frac{B^3}{27}} \tag{8}$$

possiamo anche verificare direttamente che

$$x_* = \sqrt[3]{\frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} - \frac{B^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{C}{2} - \sqrt{\frac{C^2}{4} - \frac{B^3}{27}}} \tag{9}$$

è soluzione di $x^3 = Bx + C$.

Una volta che abbiamo trovato una soluzione possiamo dividere il polinomio $x^3 - Bx - C$ per $(x - x_*)$ e ottenere un polinomio quadratico che sappiamo risolvere.

Nota: Si noti che ad esempio per $x^3 = 6x + 4$ le formula fornisce la soluzione

$$x_* = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 8}} \tag{10}$$

che non ha senso visto che non esiste nessun numero razionale (o reale) il cui quadrato è -4.

Questo anche se il polinomio $x^3 = 6x + 4$ di sicuro ha una radice reale (come tutti i polinomi di grado dispari ma per un teorema che non possiamo ancora enunciare).

Ma pure peggio di così se consideriamo $p_3 = x^3 - 15x + 4 = 0$ che ha evidentemente una soluzione in $x = -4$, quindi fattorizza $(x + 4)$ come $x^3 - 15x + 4 = (x+4)(x^2 - 4x + 1)$ come si ottiene effettuando la divisione (o si verifica facendo il prodotto). A questo punto $x^2 - 4x + 1 = 0$ ha altre 2 soluzioni reali visto che $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$, più precisamente le soluzioni sono

$$x_1 = 2 + \sqrt{3} \qquad\qquad x_2 = 2 - \sqrt{3} \tag{11}$$

Quindi abbiamo la fattorizzazione

$$x^3 - 15x + 4 = (x + 4)(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}) \tag{12}$$

cioè il polinomio p_3 ha 3 soluzioni reali ben definite.

Ma comunque se applichiamo la formula abbiamo

$$x_* = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4 - 5^3}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{4 - 5^3}} \tag{13}$$

che non si può calcolare (senza introdurre i numeri complessi) e non corrisponde a nessuna delle 3 soluzioni note (che sono ovviamente tutte le soluzioni essendo 3).

Quando introdurremi i numeri complessi avremo

$$x_* = -\sqrt[3]{2 - 11i} - \sqrt[3]{2 + 11i} = -4 \tag{14}$$

che infatti è una soluzione. Come faccia x_* a poter essere calcolato passando attraverso formule insensate tra i numeri reali, dando poi un risultato vero è ciò che ha portato alla scoperta/invenzione dei numeri reali.

[Provate a chiedere a un fisico (che faccia meccanica quantistica) se secondo lui i numeri complessi esistono oppure sono un'invenzione matematica e vedete cosa vi risponde.]

Una cosa simile si può fare coi polinomi di grado 4. Poi si *dimostra* che non esiste una formula analoga che possa dare le soluzioni di un polinomio di grado uguale a superiore a 5. La dimostrazione al momento è oltre le nostre possibilità. Ma il risultato è talmente strano che va detto.