Giorno 14: numeri razionali

Ora giochiamo lo stesso gioco per definire i numeri razionali $\mathbb{Q}$ su cui abbiamo che anche la divisione è ben definita.

> **Nota:** Da piccoli vi hanno detto che una frazione è una roba che si scrive con 2 numeri interi $n, d \in \mathbb{Z}$ (con $d \neq 0$) e si scrive $\frac{n}{d}$.
>
> Poi vi hanno insegnato a sommare e moltiplicare le frazioni. E lì è spesso per molti finito il mondo. Il fatto è che è antipatico definire le cose così perché $\frac{n}{d}$ è il numerale di un numero razionale. Invece noi che siamo uomini di mondo, prima definiamo i numeri razionali e poi introduciamo le frazioni come notazione per rappresentare i razionali. Come abbiamo introdotto la notazione $-a = [(0, a)]$ per rappresentare i numeri negativi.

Consideriamo le coppie di numeri interi $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, con $b \neq 0$. Dichiariamo equivalenti 2 coppie $(a, b) \sim (c, d)$ se e solo se $ad = cb$.

Un numero razionale è una classe di equivalenza $[(a, b)]$ che è un sottoinsieme che contiene tutte le coppie $[(a, b)] = \{(ak, bk) : k \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$. L'insieme dei numeri razionali si scrive come $\mathbb{Q}$.

Sui numeri razionali definite la somma e il prodotto come

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)] \qquad [(a, b)][(c, d)] = [(ac, bd)]$$

Quindi se sapete sommare e moltiplicare numeri interi, sapete farlo pure per le frazioni.

Potete definire la mappa $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} : a \mapsto [(a, 1)]$, che rappresenta i numeri interi come razionali preservando le operazioni

$$i(a) + i(b) = [(a, 1)] + [(b, 1)] = [(a + b, 1)] = i(a + b)$$
$$i(a)i(b) = [(a, 1)][(b, 1)] = [(ab, 1)] = i(ab)$$

come prima abbiamo mostrato che i numeri naturali erano particolari numeri interi.

Se prendete $[(a, 1)] \in \mathbb{Q}$ e lo moltiplicate per $[(1, a)]$ otteniamo $[(a, 1)][(1, a)] = [(a, a)] = [(1, 1)]$. Quindi $[(1, a)]$ è quel numero in $\mathbb{Q}$ che moltiplicato per il numero intero a (pensato come numero razionale) dà 1. Questo si chiama il *reciproco* di a, o l'inverso rispetto al prodotto.

Ora che sappiamo operare in $\mathbb{Q}$ con somma e prodotto, sono entrambe associative e commutative, entrambe ammettono elemento neutro $[0, 1]$ e $[(1, 1)]$ ed entrambe ammettono inverso (tranne per il reciproco di 0), $-[(a, b)] = [(-a, b)]$ e $[(a, b)]^{-1} = [(b, a)]$ e in più vale in generale la proprietà distributiva della somma rispetto alla moltiplicazione, allora diciamo che $\mathbb{Q}$ è un *campo*.

In un campo se abbiamo l'equazione $AX + B = C$ possiamo risolverla come

$$AX + B = C \qquad AX = C - B \qquad X = A^{-1}(C - B)$$

Infine diciamo che il numero razionale $[(a, b)]$ si può scrivere come $\frac{a}{b}$. In $\mathbb{Q}$ abbiamo la divisione ben definita (a parte che non si può dividere per 0), nel senso che la divisione di $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ è quel numero $q \in Q$ tale che $q\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$. Se scriviamo $q = n/m$ possiamo espandere quest'ultima condizione

$$\frac{n}{m}\frac{c}{d} = \frac{nc}{md} = \frac{a}{b}$$

che è vera se e e solo se $ncb = amd$ che è vera se $n = ad$ e $m = cb$ (infatti $adcb = acbd$). Quindi abbiamo la divisione

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Abbiamo anche il principio di semplificazione per le frazioni $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$ sempre quando $k \neq 0$.

Se ci pensate, avete ora quasi tutto quello che avete fatto alle elementari e qualcosa delle medie. Tutto quello che vi serve per risolvere qualunque equazione lineare in $\mathbb{Q}$. Abbiamo un bel contesto in cui sommare e dividere numeri in modo generale. Come si sa dai tempi di Pitagora, non sappiamo ancora risolvere le radici quadrate di tutti i numeri razionali. Ad esempio non sappiamo risolvere in $\mathbb{Q}$ l'equazione $x^2 = 2$.

E questo è fastidioso, nel senso che abbiamo un campo $\mathbb{Q}$ possiamo scrivere un'equazione in $\mathbb{Q}$ che però non possiamo risolvere in $\mathbb{Q}$ (come nei naturali possiamo scrivere $x + 3 = 0$ ma non possiamo risolverla, e come negli interi possiamo scrivere $3x = 2$ ma non possiamo risolverla). La situazione migliora a ogni giro (possiamo risolvere $x + 3 = 0$ in $\mathbb{Z}$ e $3x = 2$ in $\mathbb{Q}$) ma sempre troviamo nuove equazioni che non possono essere risolte dove sono definite.

E notate che non abbiamo ancora parlato di virgola, la frazione $3/2$ per noi è una frazione e ancora neanche sappiamo cosa significa 1.5, tantomeno che $3/2 = 1.5$. Anche senza saperlo abbiamo risolto tutte le equazioni lineari.

Lasciatemi aggiungere una cosa: Il gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ è abbastanza semplice, logicamente possiamo dimostrare che è un ambiente scevro da contraddizioni e in cui possiamo decidere di ogni proposizione se è vera o falsa. Già per $(\mathbb{Q}, +, *)$ vale il teorema di Gödel, cioè possiamo *dimostrare* che ci sono proposizioni indecidibili (una delle quali è che il sistema formale è coerente, un'altra è il problema dell'arresto). Non siamo neanche in 4 elementare e siamo già esposti al teorema di indecidibilità di Gödel!

Che volete farci: *la natura è malevola* pure quando parlavamo di numeri naturali eravamo comunque esposti agli infiniti visto che i numeri naturali sono infiniti.

Mi piace chiudere ricordando che in greco *máthema* è *ciò che si impara*, per dire che chi dice che la matematica è naturale banfa. La matematica si deve imparare perché non è lo stato naturale se no le scimmie sarebbero matematiche.