

Giorno 19: sistemi assiomatici

Un sistema assiomatico è costituito da:

termini indefiniti: un insieme di parole assunte senza definizione.

assiomi: un insieme di enunciati assunti senza dimostrazione.

un sistema formale: per derivare nuovi enunciati da quelli noti, in genere assumiamo la logica del prim'ordine.

definizioni: si possono definire nuovi termini fornendone una definizione univoca in termini di assiomi, termini primitivi e teoremi disponibili ad un dato momento per evitare circoli viziosi.

teoremi: sono enunciati che possono essere scritti in termini di termini primitivi, assiomi, definizioni e teoremi disponibili ad un certo momento. Un teorema deve essere derivato da assiomi e teoremi per mezzo delle regole di produzione della logica del prim'ordine. Una tale derivazione si chiama dimostrazione.

Nota: Un teorema non è un enunciato, è un enunciato *con una dimostrazione*. La logica del prim'ordine è usata esattamente come canone per derivare nuovi enunciati da quelli noti (assiomi o teoremi). La derivazione è esattamente una lista di enunciati prodotti usando le regole di produzione specificati nella logica del prim'ordine.

Lasciatemi sottolineare che le regole di produzione che abbiamo specificato sono fatte per collegare enunciati tra loro in modo che siano *validi*, cioè che non si può verificare mai che la conseguenza sia falsa se tutte le premesse sono vere. La validità non chiede che le premesse siano vere, non afferma che la tesi è vera. Le regole di produzione sono espresse nella logica del prim'ordine in cui gli enunciati sono rappresentati da costanti proposizionali, cioè lettere (tipo P) che rappresentano proposizioni specifiche. Nella logica del prim'ordine equando si discute la validità non avete neanche a disposizione cosa dicano gli enunciati che si stanno collegati.

Questo è un fatto. Quando scriviamo che $1 + 1 = 2$ lo dimostriamo definendo $1 = s(0)$ e $2 = s(1)$ e poi si usa la definizione di somma $a + s(b) = s(a + b)$ (definizione somma) e $a + 0 = a$ (definizione 0) oltre agli assiomi di Peano.

$$\begin{array}{ll} 1 + 1 = 1 + s(0) & \text{(definizione 1)} \\ 1 + 1 = s(1 + 0) & \text{(definizione somma)} \\ 1 + 1 = s(1) & \text{(definizione 0)} \\ 1 + 1 = 2 & \text{(definizione 2)} \end{array} \quad (1)$$

non abbiamo nessun vantaggio sostanziale a sapere cosa sono 1, 2, +, 0, s . Tra l'altro s è una relazione indefinita, 0 è detto esistere da un assioma, 1, 2 sono termini definiti.

Un sistema assiomatico può presentare delle patologie.

Se in un sistema non posso dimostrare risultati contraddittori (ad esempio

$$(P).and.(.not.P) \quad (2)$$

che è sicuramente falso) il sistema (gli assiomi) è *coerente*.

Se in un sistema di qualsiasi enunciato posso dimostrare P oppure $.not.(P)$ il sistema (gli assiomi) si dicono *completi*.

Se in un sistema non posso dimostrare un assioma, allora il sistema (gli assiomi) si dice *indipendente*.

La completezza e l'indipendenza sono auspicabili, ma la coerenza è necessaria. In un sistema incoerente, abbiamo dimostrato un enunciato sicuramente falso, e si può mostrare che uno può derivare qualunque enunciato da una ipotesi sicuramente falsa. Abbiamo riconosciuto che la validità di una dimostrazione è riposta nell'assicurare che la tesi non può essere falsa se le ipotesi sono vere. Ma se le ipotesi sono sicuramente false, non c'è nulla da assicurare. Da una premessa falsa segue qualunque cosa.

Quindi in un sistema assiomatico incoerente ogni proposizione è dimostrabile e un tale sistema quindi non serve a nulla. Forse possiamo dire che lo scopo della matematica non è di dimostrare che le cose sono vere e nel produrre dimostrazione di tali enunciati (fosse questo basterebbe un unico sistema formale incoerente) ma di sapere che alcuni sono falsi. Per questa ragione la coerenza è necessaria, della completezza e dell'indipendenza possiamo fare a meno.

Quando guardiamo ad un teorema, l'unica cosa che sappiamo che non può capitare è che la tesi sia falsa quando tutte le ipotesi sono vere. Se le ipotesi sono state dimostrate anch'esse, la tesi è vera *se sono veri gli assiomi*.

La matematica non parla di vero o falso parla di dimostrabilità di enunciati, che loro possono essere veri o falsi. Sapere che un enunciato può essere dimostrato non ci dice se questo è vero o falso, ci dice che deriva dagli assiomi. Se chiedete a me non sapete neanche che gli assiomi sono veri o falsi, sapete che li assumete validi senza dimostrazione. Assumere una cosa per valida, non significa che la ritenete vera, significa che la ritenete valida senza dimostrazione.

In questo contesto, ditemi voi cosa serve il significato dei termini indefiniti? Voi conoscete Socrate? Avete mai visto un triangolo al supermercato? Un numero?

La matematica non solo non parla del mondo reale, non parla neanche di vero e falso, parla solo di enunciati validi cioè di quali enunciati possono essere dimostrati a partire dagli assiomi. È il prezzo che si paga se si vuole avere certezze, possiamo avere certezze sul nulla oppure non sapere nulla di tutto.

Nota: Quando sono state scoperte o inventate le geometrie non euclidee sono state prodotte modificando il quinto postulato di Euclide (per un punto fuori da una retta passa un'unica parallela) in altri assiomi in contraddizione con esso (ad esempio: non esistono parallele oppure per un punto esistono infinite parallele). Poi si vede che le geometrie non-euclidee sono coerenti tanto quanto quelle Euclidee.

Ora se gli assiomi dovessero essere veri come fanno ad essere veri assiomi contraddittori anche se in sistemi assiomatici diversi?

Se ne esce solo dicendo che in certi casi valgono gli assiomi di Euclide talvolta gli altri. Si sopravvive solo dicendo che la validità non parla di verità e falsità, un enunciato non è valido o non valido, è valido in un sistema formale e magari non valido in un altro.

Se fate un giro su Wiki vedete che si usa un sacco di vero e falso. La mia **opinione** è che questa semantica sia comoda per noi ma non sta scritta nella matematica. La matematica è senza significato, non parla di vero o falso parla di quali proposizioni possono essere derivate da altre. La matematica è una questione di relazioni tra enunciati che chiamiamo validità e che descriviamo dando una dimostrazione.