Giorno 6
Relazioni e funzioni

Introduciamo 2 concetti molto importanti per dopo.

Dati 2 insiemi A e B, chiamiamo *relazione* da A a B un sottoinsieme $R \subset A \times B$. Diciamo che $a \in A$ è in relazione con $b \in B$ se e solo se $(a, b) \in R$

Esempio: definiamo una relazione su $\mathbb{N}$ (che significa da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$) che descrive la divisibilità. Diciamo che $(k, n) \in R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (che "k divide n" e scriviamo $k|n$) se il numero naturale k divide esattamente n. Ad esempio abbiamo 1|10, 2|10, 5|10, 10|10, ma non 3|10. Possiamo quindi pensare alla relazione | come il sottoinsieme

$$I = \{(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{ esiste } q \in \mathbb{N} : n = qk\}$$

Ci interessano 3 tipi di relazioni:

1) relazioni di equivalenza su un insieme A

2) relazioni di ordine su un insieme A

3) le funzioni da un insieme A a un insieme B (che può essere uguale a o diverso da A)

Una relazione di equivalenza $\sim$ è una relazione con le seguenti proprietà (liberamente ispirate da $=$)

1) $x \in A : x \sim x$ (ogni elemento di A è in relazione con se stesso)

2) $x, y \in A$: se $x \sim y$ allora anche $y \sim x$ (se x è un relazione con y allora anche y è in relazione con x)

3) $x, y \in A$: se $x \sim y$ e $y \sim z$ allora anche $x \sim z$.

Nota: La relazione di divisibilità gode della proprietà 1 (per ogni $n \in \mathbb{N} : n|n$). Gode pure della proprietà 3) ($k|n|m$ allora $k|m$). Ma non gode della proprietà 2) (3|6 na non 6|3). Quindi non è una relazione di equivalenza.

Esercizio: definiamo la relazione di equivalenza su $\mathbb{N}$. Diciamo che $n =_{(3)} k$ se esistono $q, p \in \mathbb{N}$ e $r \in \{0, 1, 2\}$ tale che $n = 3q + r$ e $k = 3p + r$. Ad esempio 7/3 ha resto 1, 10/3 ha resto 1, quindi abbiamo che $7 =_{(3)} 10$. Siccome 12/3 ha resto 0, non $12 \neq_{(3)} 10$. È facile convincersi che questa relazione d'equivalenza separa $\mathbb{N}$ in tre sottoinsiemi:

$R_0 = \{n \in \mathbb{N}$: resto di $n/3$ è $0\}$, cioè dei numeri che si dividono esattamente per 3.

$R_1 = \{n \in \mathbb{N}$: resto di $n/3$ è $1\}$, cioè dei numeri che hanno resto 1 quando li dividete per 3.

$R_2 = \{n \in \mathbb{N} : \text{resto di } n/3 \text{ è } 2\}$, cioè dei numeri che hanno resto 2 quando li dividete per 3.

Ogni numero naturale sta in uno e solo uno tra R_0, R_1, e R_2. In altre parole, l'unione $R_0 \cup R_1 \cup R_2 \mathbb{N}$ e $R_0 \cap R_1 = \varnothing$, $R_0 \cap R_2 = \varnothing$, $R_1 \cap R_2 = \varnothing$.

Questi sottoinsiemi R_0, R_1, R_2, si chiamano le classi di equivalenza della relazione $k =_{(3)} n$. Potete rimpiazzare 3 con ogni numero naturale k che definisce k classi di equivalenza a seconda del resto $r = 0, 1, ..., k-1$.

Nota: Questa costruzione è piuttosto generica. Ogni volta che voglio dividere un insieme A in classi di equivalenza, lo fate definendo una relazione di equivalenza in modo da spezzare l'insieme A nelle classi di equivalenza desiderate. Le 3 classi di equivalenza R_0, R_1, R_2, tengono conto dei possibili resti e trascurano il rapporto. Abbiamo che $10 = 3 \cdot 3 + 1$ e $7 = 3 \cdot 2 + 1$, quindi $10 =_{(3)} 7$ perché hanno lo stesso resto anche se il rapporto con 3 è diverso (3 e 2, rispettivamente). Le relazioni di equivalenza sono di preciso un modo di considerare equivalenti elementi diversi che però hanno in comune alcune caratteristiche (il resto), e considerare ininfluenti le altre (il rapporto).

Delle relazioni di ordine ce ne occupiamo dopo, che ce ne sono tipi sottilmente diversi.

Invece definiamo una funzione $f : A \to B$ una relazione tra A e B tale che per ogni $a \in A$ esiste uno e in solo elemento $b \in B$ tale che (a, b) sono in relazione. Se (a, b) sono un relazione scriviamo $b = f(a)$ e diciamo che b è l'immagine di a attraverso la funzione f. Per riassumere tutto ciò, scriviamo una funzione $f : A \to B : a \mapsto f(a)$ per dire pure che la funzione f associa a a l'elemento $f(a) = b$.

Nota: A questo punto probabilmente vi chiedete perché uno deve fare le cose così complicate invece di dire che una funzione è $y = 3x + 1$, tu mi dai un valore x e io uso la funzione per calcolarmi il valore di y. Il problema è che poi uso funzioni in contesti diversi (coi numeri ma pure tra insiemi di spazi, di equazioni, ...). In questo modo, facciamo il lavoro una volta sola anche se serve un po' di sforzo iniziale ad abituarsi useremo molto di più questi concetti che i numeri!

Esempi di funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ considerate la funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$ che ad ogni numero naturale associa il suo successivo. Questo è la funzione che compare negli assiomi di Peano. Solo bisogna sapere fare $n+1$ cioè aver definito la somma in $\mathbb{N}$. Gli assiomi di Peano sono emunciati prima di dire come si fa la somma. Abbiamo definito la somma su $\mathbb{N}$ usando la funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ invece che usare la somma per definire s.

Sono anche funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 2n$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n^2$, mentre non è una funzione $\sqrt{\ } : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \sqrt{n}$. Perché non è una buona funzione?

Nota: Guardate che a questo tipo di domande si risponde facilmente andando a prendere la definizione e capendo perché non funziona. Una funzione per un matematico è esattamente quello che c'è scritto nella definizione. Se un matematico definisce un cane come un quadrupede, allora per lui un gatto è un cane.

Una funzione $f : A \to B$ è detta biettiva se oltre al fatto che ad ogni elemento $a \in A$ corrisponde una e una sola immagine $f(a) \in B$ (se no f non è neanche una funzione) vale pure che per ogni $b \in B$ esiste un solo elenento $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (cioè se esiste una e una solo *controimmagine* di b)

Esercizio: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 2n$, $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n^2$ non sono biettive. Perché?

Per rispondere dovete trovare un numero naturale b che non è prodotto come immagine da nessun $a \in N$ oppure che è prodotto come immagine da più di un numero.

Esercizio: definiamo i numeri pari $P = \{n \in \mathbb{N} : \text{ esiste } k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$. La mappa $f : \mathbb{N} \to P : n \mapsto 2n$ è una funzione? È biettiva?

Ora abbiamo gli ingredienti per definire la cardinalità degli insiemi e dire cosa significa contare. La prossima volta.