

Giorno 35: il legame tra geometria e algebra

Ai tempi di Descartes ci si è cominciati a rendere conto che data una funzione $y = f(x)$ possiamo disegnarne il grafico nel piano, nel senso che il grafico è l'insieme dei punti (x, y) tali che $y = f(x)$.

Nota: Se prendiamo $y = x$ questi corrispondono ai punti $(0, 0), (1, 1), (4, 4), \dots$ in generale i punti nella forma (x, x) per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se fissiamo un sistema di assi *cartesiani* ortogonale a ogni coppia corrisponde uno e un solo punto del piano che proiettato sul primo asse dà il punto $(x, 0)$ e proiettato sul secondo asse $(0, y)$.

Analogamente, $y = 3x - 1$ corrisponde alla retta che passa per i punti $(0, -1)$ e $(\frac{1}{3}, 0)$ e così per qualunque retta.

E così anche per le coniche. Ad esempio $y = x^2$ corrisponde a una parabola con l'asse sovrapposto all'asse y e il vertice nell'origine. Di queste parabole ne esistono infinite ($y = ax^2$) ma ad ogni valore del parametro corrisponde una linea nel piano che disegna una parabola e a ogni parabola (con asse parallelo all'asse y) corrisponde un'equazione $y = ax^2 + bx + c$.

Va detto che a quel tempo e dai tempi di Euclide le curve erano quelle che si disegnano con riga e compasso. Vi mettete nello spazio, disegnate un cono, lo intersecate con un piano e disegnate tutte le coniche. Le coniche si disegnano con riga e compasso perché coni e piani si disegnano con riga e compasso.

Di questa cosa si è accorto un matematico amatore che manda il suo lavoro a Cartesio. Nel lavoro si mostrava che ad ogni curva corrisponde un'equazione (di primo o secondo grado). Già questa osservazione quasi banale si presta a tante considerazioni. Un'equazione, per sé, è qui un legame tra 2 incognite x e y , non un'equazioni in una variabile come quelle che abbiamo visto finora, tipo $x^2 = 4$.

Nel secondo caso $x^2 = 4$ rappresenta, chiede di determinare, i valori di x che sono soluzioni dell'equazione, cioè in questo caso $x = \pm 2$. Anche questi 2 valori posso essere rappresentati su un asse, la retta dei reali che, in fondo, è un sistema di assi cartesiani in una dimensione sola. Si noti che una equazione in una variabile corrisponde a un insieme di punti (tanti quanti il grado del polinomio in genere) su una retta.

Se considero una equazione con 2 incognite, significa che in genere io scelgo il valore di x come mi pare e risolvo l'equazione per y . O detto in altre parole, considero x un parametro, non un'incognita, e risolvo l'equazione per l'incognita y . Questo significa che per ogni punto $(x, 0)$ sull'asse x ho un punto (x, y) sul grafico. Cioè se risolvo una equazione $y = f(x)$ in 2 variabili, non mi aspetto punti nel piano, mi aspetto una *curva* nel piano, che è il grafico della funzione f .

Se mi metto nello spazio e considero un'equazione con 3 incognite $z = f(x, y)$ allora per ogni punto $(x, y, 0)$ nel piano coordinato xy trovo un corrispondente z e quindi un punto (x, y, z) nello spazio. Lasciando variare x, y si ottiene una superficie nello spazio che è il grafico della funzione f di 2 variabili.

Nota: Non vi può sfuggire che se considero uno spazio con $n + 1$ coordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ e una equazione $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ il suo grafico è una superficie di dimensione n immersa in uno spazio di dimensione $n + 1$.

Se vi viene mal di testa è perché qui sta succedendo qualcosa di importante. L'algebra si sta mischiando con la geometria. Nell'algebra non facciamo nessuna fatica a immaginare equazioni con più incognite, in geometria non possiamo intuire spazi con più di 3 dimensioni. L'intuizione bisogna che venga sostituita dall'algebra.

Inizialmente il lavoro mandato a Cartesio era per rappresentare algebricamente le curve e le superfici di Euclide tramite le loro equazioni e poi usare i grafici per tornare a curve e superfici. Cartesio legge e subito intuisce che il metodo è molto più generale: possiamo rappresentare le equazioni come curve e superfici (e spazi di dimensione qualunque) ottenendo curve e superfici oltre quelle definite da Euclide. In un attimo ci troviamo con una infinità di curve e superfici che prima non erano riconosciute come enti geometrici perché non erano costruibili con righe e compasso, come $y^2 = x^3 - x$ diventa una curva (cubica).

È la nascita della geometria analitica, dove curve e superfici sono definiti come i grafici di equazioni.

Nota: C'è una storia carina di cui onestamente nn conosco tutti i dettagli. In antichità era noto il problema di determinare la lunghezza di una circonferenza, che come è noto a noi consiste nel determinare il valore di π . Erano noti valori approssimati, se è per questo pure agli egiziani di π .

Ma i greci volevano il valore vero di π e chiamavano il problema *della quadratura del cerchio*. Siccome la circonferenza misura $2\pi r$ corrisponde al perimetro di un quadrato di lato $l = \frac{\pi}{2}r$.

La cosa buffa è che era nota in antichità una soluzione che utilizzava una curva, detta la *quadratrice di Ippia* che però non era riconosciuta come curva perché, credo sia una cubica, non è costruibile con riga e compasso. Questo uniti ai metodi di esaustione che corrispondono a parte della moderna analisi matematica (derivate, limiti e integrali) forniva un metodo per costruire un segmento lungo π a partire da un segmento lungo 1. Nello stesso senso in cui usando un compasso, cioè una circonferenza possiamo fare le costruzioni di Euclide.

Proprio per quello, gli antichi non hanno riconosciuto la soluzione del problema, perché non conforme agli standard con cui erano scritti gli elementi di Euclide: solo rette e circonferenze, tutti procedimenti finiti.

Se vi ricordate di aver fatto costruzioni varie in disegno tecnico, ad esempio per dividere un angolo in 2, per costruire un pentagono di lato dato, etc. Beh quelle sono esattamente le costruzioni di Euclide. Tra l'altro non si può dividere qualunque angolo in 3 parti uguali, costruire un segmento lungo π dato un segmento lungo 1 e molte altre cose. Tra l'altro altro, gli origami prevedono di poter costruire cose più generali di euclide. Gli origami sono codificati da delle mosse base. Tutte le mosse base tranne una codificano esattamente le cose che si possono costruire secondo Euclide. L'ultima mossa permette di costruire cose in più (ad esempio trisecare un angolo). Ma credo che neanche gli origami riescono a costruire π (ma potrei sbagliare, ora controllo...)

A questo punto il vaso è aperto: prendete 2 superfici. Esse si intersecano in una linea. Quindi una linea nello spazio è scritta come le soluzioni di un sistema di 2 equazioni di 3 incognite. Le 2 equazioni danno una superficie ognuna. Il sistema dà intersezione.

E stiamo camminando su uno strapiombo. Un altro passetto e ci troviamo a parlare di superfici in dimensione n .

Un altro aspetto, più elementare, della geometria analitica ‘che la corrispondenza tra curve e equazioni dà modo di pensare al grafico di una funzione come

ad un oggetto singolo. Da ora in poi, le funzioni non saranno più pensate come corrispondenze tra valori. La retta $y = 2x$ corrisponde ai punti $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, -2)$, ... ma è meglio pensarla come la curva degli infiniti punti $(x, 2x)$ che costituiscono il suo grafico.

Le funzioni diventano oggetti in sé che possono essere studiati e avete già capito cosa questo significa nella mente un po' distorta dei matematici: le funzioni (continue) potete sommarle, moltiplicarle per un numero, moltiplicarle tra loro e quindi formano un anello. Quindi posso scrivere un'equazione le cui incognite rappresentano una funzione e risolverla. Prendete $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 1$ e cercate una funzione f tale che

$$4f - a = 0$$

Ora non ci interessa sviluppare la cosa, ma mi interessa farvi notare che è sempre la stessa operazione di astrazione che ci ha portato a definire i reali come classi di razionali (i razionali come classi di coppie di interi, gli interi come classi di coppie di naturali, i naturali come classi di insiemi finiti) e riconoscere che sono un campo e usarli come numeri. Una volta che sapete cosa è una funzione sui naturali poi avete gratis le funzioni sugli interi, sui razionali e sui reali. Quello che conta non sono i dettagli sono la struttura dell'astrazione.

Buonanotte!