计算物理学(A)第五次作业

物理学院　陈伟杰 1500011335

June 1, 2018

1 迎风差分格式解一阶对流方程

一阶对流方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1}$$

迎风差分格式：

$$\begin{aligned}\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\Delta t}+a\frac{u_k^n-u_{k-1}^n}{\Delta x}=0 \quad (a>0)\\ \frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\Delta t}+a\frac{u_{k+1}^n-u_k^n}{\Delta x}=0 \quad (a>0)\end{aligned} \tag{2}$$

取$a=1$，高斯波包入射，分别在不同的Δt和Δx条件下用迎风差格式求解上述方程，绘制动态演化图像(upwind1.gif，upwind2.gif，upwind3.gif)，分别截取$t>4$ s的某时刻图像如下：

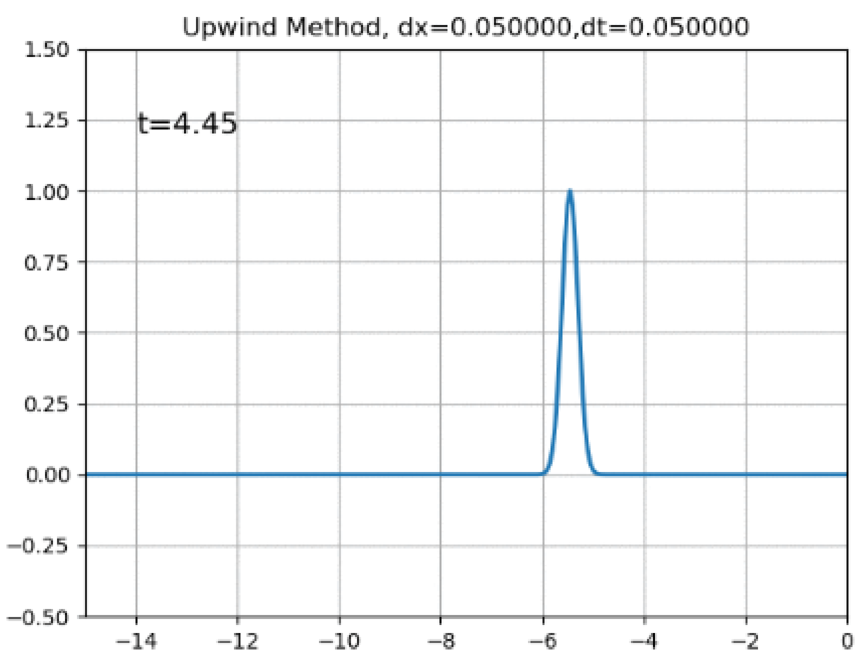

Figure 1: $\Delta x=0.05$，$\Delta t=0.05$

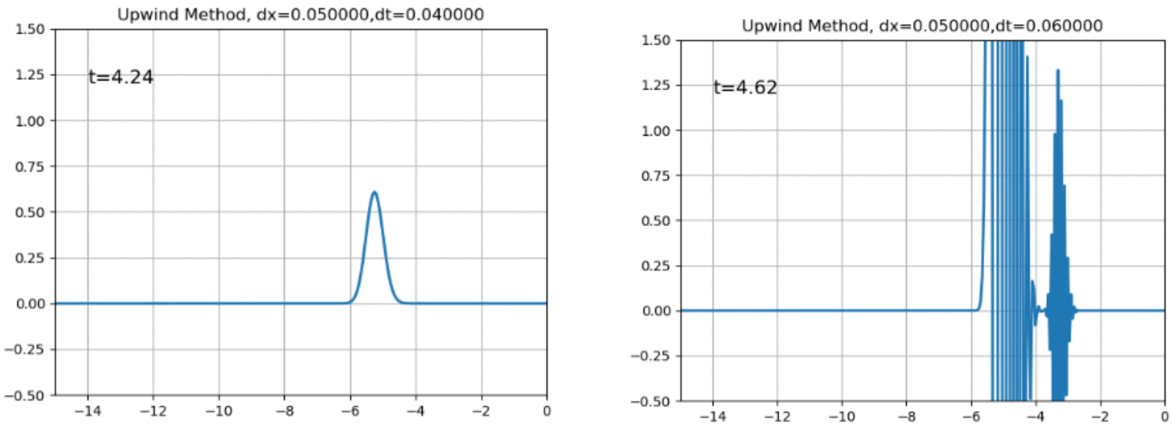

Figure 2: (左)$\Delta x = 0.05$，$\Delta t = 0.04$；(右)$\Delta x = 0.05$，$\Delta t = 0.06$

注意到由CFL稳定性条件要求迭代矩阵A的谱半径小于等于1，即$|a|\Delta t \leq \Delta x$，这个条件是误差稳定条件，意味着若满足这个条件，则第k步数值解的误差ϵ_k随着迭代次数的增加不会放大。若不满足此条件，可以观察到[2]明显出现误差累计爆炸。但是这个条件只能保证误差不增，但是当$|a|\Delta t < \Delta x$时，虽然误差被控制住，但是解的模也随着迭代减小[2]。特别地，$|a|\Delta t = \Delta x/$时，恰好沿对流方程的特征线进行迭代，因此在迎风格式下是无误差的[1]。

2 孤立子求解

KdeV方程：

$$\begin{cases} u_t + \epsilon u u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = cos(\pi x) \end{cases} \tag{3}$$

取$\epsilon = 1$，$\delta = 0.022$，$x \in [0,2]$，$t \in [0,2.5]$，将x的值域分为144份，t的值域分为75000份，绘制动态演化图像(soliton.gif)，截取几个画面如下：

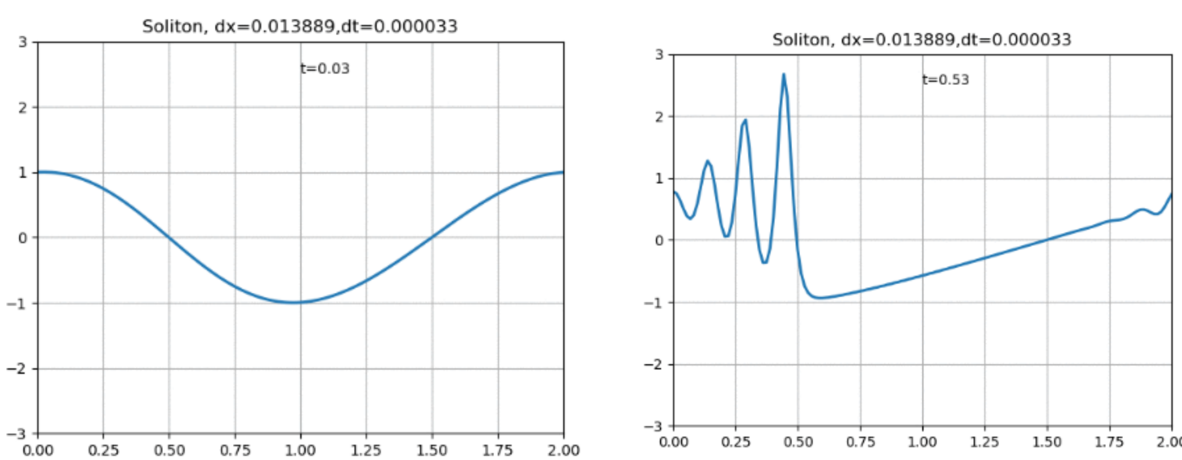

Figure 3: (左)t =0.03 s；(右)t =0.53 s

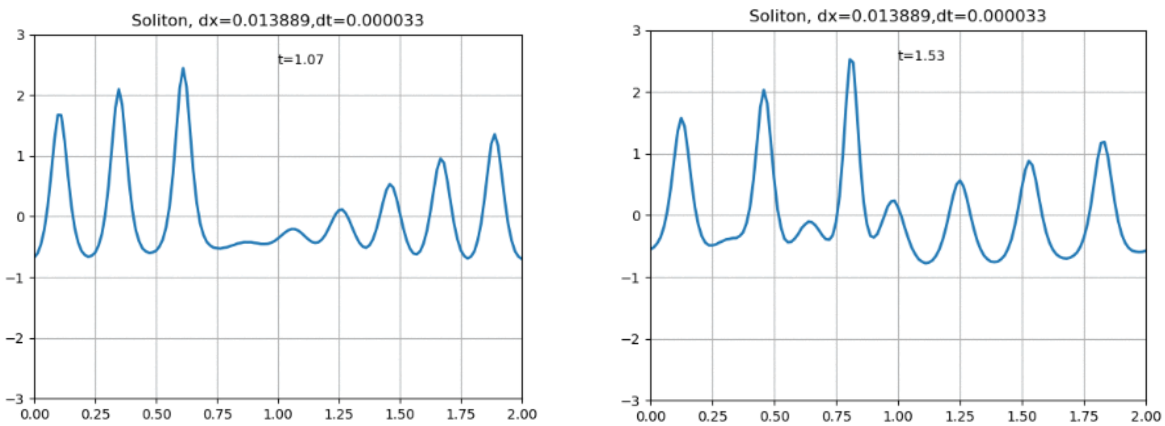

Figure 4: (左)t =1.07 s；(右)t =1.53 s

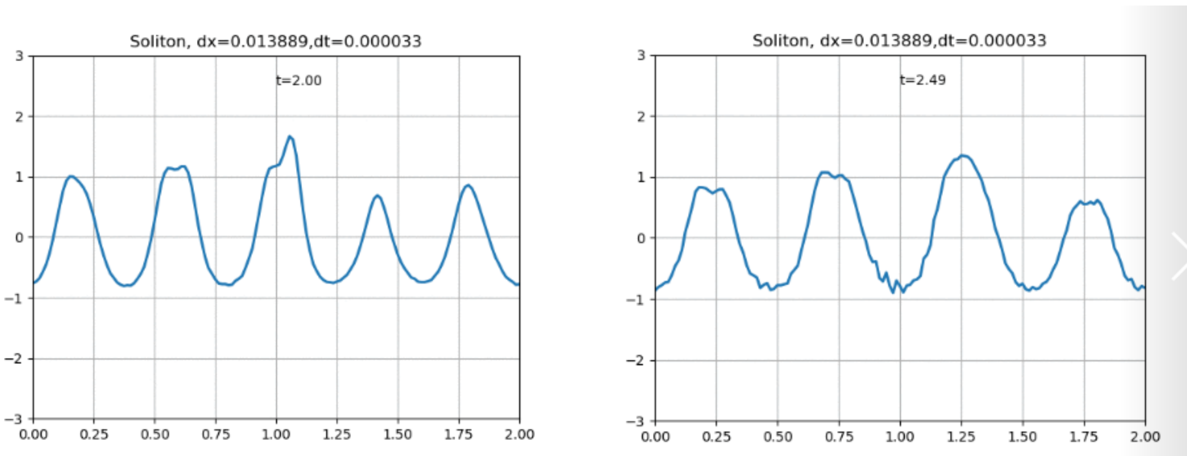

Figure 5: (左)t =2.00 s；(右)t =2.49 s

在$t \in [0,2]$的范围内，解的光滑性保持得比较好，但是t >2.2 s之后锯齿状条纹增多，这是由于数值解法造成误差累积。