HW 1: 陈伟杰 1901111420

4.11 (a) $\min_{x} \|Ax-b\|_\infty$ 可被改写为：$\begin{cases} \min_{x,k} & k \\ \text{s.t.} & Ax-b \le k\vec{1} \\ & Ax-b \ge -k\vec{1} \end{cases}$

对 $\forall x$, $-k \le (Ax-b)_i \le k$

$\Rightarrow k \ge \max_i |(Ax-b)_i| = \|Ax-b\|_\infty$

$\Rightarrow \min_{x,k} k = \min_x \|Ax-b\|_\infty$

∴ LP形式问题最优解与原问题的最优解等价

(b). $\min_x \|Ax-b\|_1$ 可被改写为：$\begin{cases} \min_{x,k} & 1^T k \\ \text{s.t.} & Ax-b \le k \\ & Ax-b \ge -k \end{cases}$

对 $\forall x$, 有 $-k_i \le (Ax-b)_i \le k_i$

$\Rightarrow k_i \ge |(Ax-b)_i|$

$1^T k = \sum_i k_i = \sum_i |(Ax-b)_i| = \|Ax-b\|_1$

$\Rightarrow \min_{x,k} 1^T k = \min_x \|Ax-b\|_1$

∴ LP形式的最优解与原问题最优解等价.

(c). 与(b)类似，可改写为

$$\begin{cases} \min\limits_{x,k} & \mathbf{1}^T k \\ \text{s.t.} & Ax - b \ge -k \\ & Ax - b \le k \\ & -\vec{1} \le x \le \vec{1} \end{cases}$$

(d). 与(c)类似. 可改写为:

$$\begin{cases} \min\limits_{x,k} & \mathbf{1}^T k \\ \text{s.t.} & -k \le x \le k \\ & -\vec{1} \le Ax - b \le \vec{1} \end{cases}$$

(e). 与(a),(b)类似: 可改写为:

$$\begin{cases} \min\limits_{x,k,s} & \mathbf{1}^T k + s \\ \text{s.t.} & -k \le Ax - b \le k \\ & -s\vec{1} \le x \le s\vec{1} \end{cases}$$

4.12 LP形式:

$$\begin{cases} \min\limits_{x} & C = \sum\limits_{i,j} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} & l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \\ & b_i = \sum\limits_{j}^{n} x_{ji} - \sum\limits_{j}^{n} x_{ij} \end{cases}$$

4.25 若存在严格超平面，使得：

$$\begin{cases} a^T x + b > 0 & \text{for } x \in \bigcup_{i=1}^{K} \mathcal{E}_i \\ a^T x + b < 0 & \text{for } x \in \bigcup_{i=K+1}^{K+L} \mathcal{E}_i \end{cases}$$

则有

$$\begin{cases} a^T x + b \geq 1, & \text{for } x \in \bigcup_{i=1}^{K} \mathcal{E}_i \\ a^T x + b \leq -1, & \text{for } x \in \bigcup_{i=K+1}^{K+L} \mathcal{E}_i \end{cases}$$

其中 $\mathcal{E}_i = \{P_i u + q_i \mid \|u\|_2 \leq 1\}$

$i = 1, \dots, K+L$

则 a, b 满足：

$$\begin{cases} \inf\limits_{\|u\|_2 \leq 1} (a^T P_i u + a^T q_i + b) \geq 1, & i = 1, \dots, K \\ \sup\limits_{\|u\|_2 \leq 1} (a^T P_i u + a^T q_i + b) \leq -1 & i = K+1, \dots, K+L \end{cases}$$

对 $\forall i$,

$$\inf_{\|u\|_2 \leq 1} (a^T P_i u + a^T q_i + b) = -\|a^T P_i\|_2 + a^T q_i + b$$

$$\sup_{\|u\|_2 \leq 1} (a^T P_i u + a^T q_i + b) = \|a^T P_i\|_2 + a^T q_i + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{None} \\ \text{s.t.} \ -\|P_i^T a\|^2 + a^T q_i + b \geq 1, & i = 1, \dots, K \\ \quad \|P_i^T a\|^2 + a^T q_i + b \leq -1, & i = K+1, \dots, K+L \end{cases}$$

即为SOCP形式

4.27 已知 $v+Bw=Ax+b$, $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $x\in\mathbb{R}^n$

$x\succeq 0$

若 $x_i=0$, $w_i^2/x_i=\begin{cases}0, & w_i=0\\ \infty, & o.w.\end{cases}$

则对于给定 x，优化 v,w

$$f=v^Tv+w^T\mathrm{diag}(x)^{-1}w$$

$$=(Ax+b-Bw)^T(Ax+b-Bw)+w^T\mathrm{diag}(x)^{-1}w$$

$$=w^T(B^TB+\mathrm{diag}(x)^{-1})w-2(Ax+b)^TBw+(Ax+b)^T(Ax+b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}=2(B^TB+\mathrm{diag}(x)^{-1})w-2B^T(Ax+b)=0$$

$$\Rightarrow (B^TB+\mathrm{diag}(x)^{-1})w=B^Tv+B^TBw$$

$$\Rightarrow w=\mathrm{diag}(x)B^Tv$$

则有 $(I+B\mathrm{diag}(x)B^T)v=Ax+b$

$$\Rightarrow v=(I+B\mathrm{diag}(x)B^T)^{-1}(Ax+b),\quad w=\mathrm{diag}(x)B^T(I+B\mathrm{diag}(x)B^T)^{-1}(Ax+b)$$

$$\Rightarrow v^Tv+w^T\mathrm{diag}(x)w=(Ax+b)^T(I+B\mathrm{diag}(x)B^T)^{-1}(Ax+b)$$

因此两问题等价.

由 4.26 的结论，可改写为：$\begin{cases}\min & t+\mathbf{1}^Ts\\ \text{s.t.} & v^Tv\le t\\ & w_i^2\le s_ix_i,\ i=1,\dots,n\\ & x\succeq 0\end{cases}$

转换约束为：
$$\begin{cases} \left\| \begin{bmatrix} 2v \\ t-1 \end{bmatrix} \right\|_2 \le t+1 \\ \left\| \begin{bmatrix} 2w_i \\ s_i-x_i \end{bmatrix} \right\|_2 \le s_i+x_i \quad , i=1,\dots,n \\ x \succeq 0 \end{cases}$$

即为SOCP形式

Additional Exercises

3.11 已知 $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \succ 0\}$

(a). 利用 Schur 补，可改写为：
$$\begin{cases} \min & t \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} F(x) & c \\ c^T & t \end{bmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

(b) 类似 (a)，可改写为：
$$\begin{cases} \min & t \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} F(x) & c_i \\ c_i^T & t \end{bmatrix} \succeq 0 \quad , i=1,\dots,K \end{cases}$$

(c) $f(x) = \sup\limits_{\|c\|_2 \le 1} c^T F(x)^{-1} c \iff f(x) = \lambda_{max}(F(x)^{-1})$ 即 $F(x)^{-1}$ 的最大特征值.

$f(x) \le t \iff F(x)^{-1} \preceq tI$

由 Schur 补可得：
$$\begin{cases} \min & t \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} F(x) & I \\ I & tI \end{bmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

(d). $f(x) = \mathbb{E}\left(c^T F(x)^{-1} c\right)$，已知 $\mathbb{E}\, c = \bar{c}$，$\mathbb{E}\,(c-\bar{c})(c-\bar{c})^T = S$

$$\Rightarrow f(x) = \mathbb{E}\left(c-\bar{c}+\bar{c}\right)^T F(x)^{-1}\left(c-\bar{c}+\bar{c}\right)$$

$$= \bar{c}^T F(x)\bar{c} + \mathbb{E}\left(c-\bar{c}\right)^T F(x)^{-1}\left(c-\bar{c}\right)$$

$$= \bar{c}^T F(x)\bar{c} + \mathbb{E}\left\{\mathrm{Tr}\left[F(x)^{-1}(c-\bar{c})(c-\bar{c})^T\right]\right\}$$

$$= \bar{c}^T F(x)\bar{c} + \mathrm{Tr}\left(F(x)^{-1} S\right)$$

令 $S = \sum_{k=1}^{m} s_k s_k^T$，则原问题等价于 $\min\ \bar{c}^T F(x)^{-1}\bar{c} + \sum_{k=1}^{m} s_k^T F(x)^{-1} s_k$

类似前面有：

$$\begin{cases} \min & t_0 + \sum_{k=1}^{m} t_k \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} F(x) & \bar{c} \\ \bar{c}^T & t_0 \end{bmatrix} \succeq 0 \\ & \begin{bmatrix} F(x) & s_k \\ s_k^T & t_k \end{bmatrix} \succeq 0, \quad k=1,\dots,m \end{cases}$$

3.12. 该问题等价于 $X \succeq B^T A^{-1} B$. $\Rightarrow$ $\operatorname{Tr} X \geq \operatorname{Tr}(B^T A^{-1} B)$ 对 $\forall$ 可行 X

仅当 $X = B^T A^{-1} B$ 时等号成立. (Schur 补)

另一方面: $\operatorname{Tr}(B^T A^{-1} B) = \inf\limits_{X} F(X, A, B)$

令 $F(X, A, B) = \operatorname{Tr} X$, $\operatorname{dom} F = \left\{ (X, A, B) \in S^m \times S^m \times S^m \;\middle|\; A \succ 0, \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & X \end{bmatrix} \succeq 0 \right\}$

F 在 (X, A, B) 上是凸函数, 故 $\inf\limits_{X \in S^m} F$ 是 (A, B) 的凸函数.

$\Rightarrow$ $\operatorname{Tr}(B^{-1} A^{-1} B)$ 是 (A, B) 的凸函数.