Chapitre 6

Résolution des systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss

Dans ce chapitre nous allons décrire la méthode du pivot de Gauss pour résoudre les systèmes linéaires.

6.1 Définitions

Définition
On appelle **système de n équations linéaires à p inconnues** *($(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$) la donnée de n relations appelées* **équations du système***, ayant p* **inconnues** *x_1, $x_2, \ldots,$ x_p.*

Définition
Un tel système est dit **linéaire** *si toutes les équations sont de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

où $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ et b sont des nombres réels.

Exemple
Le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ 5x_1 - 4x_2 - 4x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

est un système linéaire à 4 équations et 3 inconnues : x_1, x_2 et x_3.

Contre-exemple

Le système à 2 équations et 3 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1^2 + 2x_2 - 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 - x_2x_3 + 2x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

n'est pas linéaire car il fait apparaitre dans les équations le terme x_1^2 et le terme x_2x_3.

Remarque

Dans un système linéaire, les inconnues seront notées tantôt x, y, z,... tantôt x_1, x_2,..., x_p (en fonction du nombre p d'inconnues).

Définition

Dans l'équation

$$a_1x_2 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b,$$

le nombre b est appelé **second membre** *de l'équation et les nombres $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ les* **coefficients** *du premier membre.*

Définition

On appelle **solution du système linéaire** *un $p-$uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ vérifiant toutes les équations du système.*

Résoudre le système linéaire *signifie déterminer l'ensemble de toutes les solutions du systèmes linéaires.*

Exemple

Le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 7 \\ 6x - 4y & = & 8 \end{array}\right.$$

admet pour solution le couple $(2, 1)$. C'est l'unique solution de ce système linéaire. Nous avons donc :

$$\mathcal{S} = \{(2, 1)\}.$$

6.2 Systèmes équivalents

Considérons les deux systèmes linéaires

$$(1) \left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 7 \\ 6x - 4y & = & 8 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (2) \left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 7 \\ 8x - y & = & 15 \end{array}\right.$$

Si le couple (x_0, y_0) est une solution du système (1), nous avons alors ; $2x_0 + 3y_0 = 7$ et $6x_0 - 4y_0 = 8$ et donc aussi $8x_0 - y_0 = 15$. Par conséquent le couple (x_0, y_0) est aussi une solution du système (2).
Inversement on montre que si (x_0, y_0) est une solution du système (2), alors (x_0, y_0) est aussi une solution du système (1).
Les deux systèmes linéaires ont donc le même ensemble des solutions. On dit qu'ils sont équivalents.

Définition
Deux systèmes linéaires (S) et (T) à p inconnues sont dits **équivalents** *si seulement si ils ont le même ensemble des solutions.*

Proposition
Soient trois systèmes linéaires (S) (T) et (U) à p inconnues. Si les systèmes (S) et (T) sont équivalents et si les systèmes (T) et (U) sont équivalents alors les systèmes (S) et (U) sont équivalents (transitivité).

6.3 Opérations élémentaires de première espèce

Pour résoudre les systèmes linéaires, nous allons décrire des techniques qui consistent à construire des systèmes équivalents à un système donné. Par application répétée de ces techniques, nous transformerons alors le système à résoudre en un système équivalent qui sera plus "simple" à résoudre. Nous obtiendrons ainsi l'ensemble des solutions du système linéaire initial.

Décrivons maintenant, une première technique.

Soit le système linéaire à p inconnues et n équations :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 & (E_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p & = & b_i & (E_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n & (E_n) \end{array}\right.$$

Choisissons un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ et deux équations (E_i) et (E_j) avec $\boldsymbol{i \neq j}$ et formons un nouveau système linéaire (S') en conservant toutes les équations inchangées sauf l'équation (E_i) qui est remplacée par l'équation $(E_i) + \lambda(E_j)$ c'est-à-dire l'équation :

$$(a_{i,1} + \lambda a_{j,1})x_1 + (a_{i,2} + \lambda a_{j,2})x_2 + \cdots + (a_{i,p} + \lambda a_{j,p})x_p = (b_i + \lambda b_j) \quad (E_i) + \lambda(E_j).$$

Le système (S') est toujours un système à p inconnues et n équations. De plus, il est équivalent à au système (S) c'est-à-dire que les deux systèmes ont le même ensemble des solutions.

Définition

On appelle **transformation élémentaire de première espèce** *l'opération consistant à transformer un système (S) en système (S') en remplaçant une des équations (E_i) par l'équation $(E_i) + \lambda(E_j)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{i \neq j}$ et en conservant toutes les autres équations inchangées.*

Proposition

Une opération élémentaire de première espèce transforme un système donné en un système équivalent.

6.4 Approche de la méthode du pivot

Considérons les deux équations (E_i) et (E_j) du système linéaire (S) :

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,k}x_k + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i \quad (E_i)$$

$$a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,k}x_k + \cdots + a_{j,p}x_p = b_j \quad (E_j)$$

Considérons maintenant un coefficient **non nul** $a_{j,k}$ de l'équation (E_j) et posons $\lambda = -\frac{a_{i,k}}{a_{j,k}}$. Alors nous avons :

$$(a_{i,1}+\lambda a_{j,1})x_1+(a_{i,2}+\lambda a_{j,2})x_2+\cdots+\underbrace{(a_{i,k} + \lambda a_{j,k})}_{=0}x_k+\cdots+(a_{i,p}+\lambda a_{j,p})x_p = (b_i+\lambda b_j) \quad (E_i)+\lambda(E_j).$$

Dans l'équation $(E_i) + \lambda(E_j)$, le coefficient devant l'inconnue x_k est nul !

Continuons sur un exemple :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} 3\ x_1 + 2\ x_2 - 5\ x_3 & = & 4 & (E_1) \\ 4\ x_1 - x_2 + 2\ x_3 & = & 5 & (E_2) \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 & (E_3) \\ 5\ x_1 - 4\ x_2 + 9\ x_3 & = & 6 & (E_4) \end{array}\right.$$

Nous choisissons $j = 2$. Le coefficient de x_2 dans (E_2) est -1, il est donc non nul.
Nous remplaçons alors dans le système (S) l'équation (E_1) par $(E_1) + 2(E_2)$ et nous obtenons ainsi le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{lcll} 11\ x_1 + 0\ x_2 - x_3 & = & 14 & (E_1') \\ 4\ x_1 - x_2 + 2\ x_3 & = & 5 & (E_2) \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 & (E_3) \\ 5\ x_1 - 4\ x_2 + 9\ x_3 & = & 6 & (E_4) \end{array}\right.$$

Nous pouvons recommencer et remplacer successivement l'équation (E_3) par $(E_3) + (E_2)$, puis l'équation (E_4) par $(E_1) - 4(E_2)$. Nous obtenons alors le système équivalent :

$$(S')\left\{\begin{array}{lcll} 11\ x_1 + 0\ x_2 - x_3 & = & 14 & (E_1') \\ 4\ x_1 - x_2 + 2\ x_3 & = & 5 & (E_2') = (E_2) \\ 5\ x_1 + 0\ x_2 + x_3 & = & 6 & (E_3') \\ -11\ x_1 + 0\ x_2 + x_3 & = & -14 & (E_4') \end{array}\right.$$

Le système (S') est équivalent au système (S) et il est simple que le sytème initial. En effet pour le résoudre, il suffit de déterminer les deux inconnues x_1 et x_3 à l'aide des équations (E_1'), (E_3') et (E_4') qui ne contiennent plus l'inconnue x_2. L'équation (E_2') nous permettra ensuite de déterminer l'inconnue x_2.

Nous pouvons maintenant essayer de faire avec l'inconnue x_3 ce que nous avons fait avec l'inconnue x_2. Nous laissons (E_1') inchangée et nous remplaçons

$$(E_2') \text{ par } (E_2') + 2(E_1')$$

$$(E_3') \text{ par } (E_3') + (E_1')$$

$$(E_4') \text{ par } (E_4') + (E_1')$$

Nous obtenons alors le système équivalent :

$$(S'')\left\{\begin{array}{lcll} 11x_1 + 0x_2 - x_3 & = & 14 & (E_1'') = (E_1') \\ 26x_1 - x_2 + 0x_3 & = & 33 & (E_2'') \\ 16x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 20 & (E_3'') \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 0 & (E_4'') \end{array}\right.$$

Remarquons que la quatrième équation disparait. Elle exprime une condition vide.
L'équation (E_3'') donne directement x_1 et par conséquent, nous pouvons déduire x_3 et x_2 des équations (E_1'') et (E_2'').
Nous pourrions nous arrêter là, mais poursuivons tout de même le travail avec l'inconnue x_1.
Nous laissons donc l'équation (E_3'') inchangée et nous remplaçons

$$(E_1'') \text{ par } (E_1'') - \frac{11}{16}(E_3'')$$

$$(E_2'') \text{ par } (E_2'') - \frac{26}{16}(E_3'')$$

Nous obtenons finalement le système

$$(T)\left\{\begin{array}{lcll} 0x_1+0x_2-x_3 & = & \frac{1}{4} & (E_1''') \\ 0x_1-x_2+0x_3 & = & \frac{1}{2} & (E_2''') \\ 16x_1+0x_2+0x_3 & = & 20 & (E_3''')=(E_3'') \\ 0x_1+0x_2+0x_3 & = & 0 & (E_4''') \end{array}\right.$$

Comme nous avons uniquement appliqué des opérations de première espèce, le système (T) est équivalent au système initial (S). Ces deux systèmes linéaires ont donc le même ensemble des solutions et celui-ci est très facile à déterminer pour le système (T) !

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)\right\}.$$

Présentation des calculs

Pour simplifier et améliorer la présentation des calculs, nous ferons "disparaitre" les inconnues. Pour cela nous formerons le tableau des coefficients du système en séparant les coefficients du second membre par une ligne verticale.

Pour le système (S) traité précédemment

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} 3\ x_1+2\ x_2-5\ x_3 & = & 4 \\ 4\ x_1-x_2+2\ x_3 & = & 5 \\ x_1+x_2-x_3 & = & 1 \\ 5\ x_1-4\ x_2+9\ x_3 & = & 6 \end{array}\right. \quad \text{cela donne donc} \quad \begin{array}{rrr|l} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 9 & 6 \end{array}$$

Réciproquement, nous devons savoir réécrire à tout moment le système linéaire à partir du tableau des coefficients.

Pour **réduire** une colonne, nous devons donc choisir dans celle-ci un élément **non nul**. Nous l'appellerons **un pivot**.

Il nous sera très utile de pouvoir repérer un pivot à tous les stades de la réduction, c'est pourquoi nous encadrerons les pivots.

Reprenons les calculs menés sur l'exemple précédent sous cette forme. Le premier pivot que nous avons choisi est le "-1" de la deuxième ligne (équation) :

$$\begin{array}{rrr|l} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & \boxed{-1} & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 9 & 6 \end{array}$$

Le passage de (S) a (S') a alors consisté

- à laisser la ligne du pivot inchangée
- à multiplier la ligne du pivot par 2 puis à l'ajouter à la première ligne
- à multiplier la ligne du pivot par 1 puis à l'ajouter à la troisième ligne
- à multiplier la ligne du pivot par -4 puis à l'ajouter à la quatrième ligne

Nous avons alors obtenu

$$\begin{array}{rrr|r} 11 & 0 & -1 & 14 \\ 4 & \boxed{-1} & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ -11 & 0 & 1 & -14 \end{array}$$

Nous avons ensuite choisi comme second pivot le "-1" de la première ligne

$$\begin{array}{rrr|r} 11 & 0 & \boxed{-1} & 14 \\ 4 & \boxed{-1} & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ -11 & 0 & 1 & -14 \end{array} \quad \text{pour obtenir} \quad \begin{array}{rrr|r} 11 & 0 & \boxed{-1} & 14 \\ 26 & \boxed{-1} & 0 & 33 \\ 16 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Enfin, nous avons choisi pour dernier pivot le "16" de la troisième ligne

$$\begin{array}{rrr|r} 11 & 0 & \boxed{-1} & 14 \\ 26 & \boxed{-1} & 0 & 33 \\ \boxed{16} & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{pour obtenir} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & \boxed{-1} & \frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & \frac{1}{2} \\ \boxed{16} & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ce dernier tableau de coefficients représente alors le système

$$(T) \begin{cases} -x_3 = \frac{1}{4} \\ -x_2 = \frac{1}{2} \\ 16x_1 = 20 \end{cases}$$

6.5 Règles de choix d'un pivot - Méthode du pivot de Gauss

Considérons le système linéaire dont le tableau est

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

Pour réduire la première colonne, nous choisissons le "1" de la dernière ligne et nous obtenons alors

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -3 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

La première colonne étant maintenant réduite, nous souhaitons réduire une des trois colonnes restantes. Nous devons donc choisir un second pivot dans l'une des trois dernières colonnes.
Il ne doit pas être nul et il ne doit pas être sur la même ligne que le premier pivot !
En effet, si nous choisissons un pivot sur la dernière ligne nous obtenons

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -3 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & \boxed{1} & 1 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -7 & -4 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & \boxed{1} & 1 \end{array}$$

Nous avons détruit la réduction de la première colonne !

Règles de choix des pivots

Pour choisir un pivot, nous devons respecter les règles suivantes :

- *Un pivot est choisi dans le premier membre du tableau (à gauche du trait).*
- *Un pivot est non nul.*
- *On ne peut pas choisir un pivot dans une ligne (et dans une colonne) où il y a déjà un pivot.*

Dans le respect de ces règles, tous les choix sont possibles et il y a donc de multiples variantes de la méthode suivant le choix des pivots.

Nous pouvons maintenant décrire l'algorithme :

Méthode du pivot de Gauss

Tant qu'il est possible de choisir un pivot, on répète les actions suivantes :

- *On choisit un pivot en respectant les règles précédentes.*
- *On réduit la colonne correspondante.*

La réduction du tableau des coefficients est donc finie lorsque nous ne pouvons plus choisir de pivot.

Pour chaque nouveau pivot, il y a presque toujours un choix. En effet, sauf pour le dernier pivot, il existe en général plusieurs coefficients non nuls qui vérifient les règles prescrites.
D'un point de vue mathématique, ce choix peut être fait arbitrairement. Toutefois, d'un point de vue pratique et pour faciliter les calculs nous retiendrons les règles suivantes :

Choix pratique des pivots

- Si les coefficients sont des entiers, alors pour éviter des calculs avec des fractions, nous privilégierons, lorsque cela est possible, des pivots égaux à 1 ou -1.
- Pour réduire les calculs à effectuer, nous privilégierons les pivots se situant dans des colonnes et/ou des lignes qui ont déjà des 0.

Terminons maintenant cette section en finissant la résolution du système linéaire précédent :

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \boxed{-1} & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -3 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \boxed{-1} & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & -12 \\ \boxed{1} & 3 & 0 & 3 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & -12 \\ \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & -2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -\frac{9}{5} \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & -12 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{5} \end{array}$$

Notre système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} -x_3 = -\frac{9}{5} \\ -5\ x_2 = -9 \\ -4\ x_4 = -12 \\ x_1 = -\frac{37}{5} \end{cases}$$

qui admet une unique solution d'où : $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\dfrac{37}{5}, \dfrac{9}{5}, \dfrac{9}{5}, 3 \right) \right\}$.

6.6 Analyse du tableau réduit - Description des solutions

Poursuivons maintenant en traitant quelques exemples supplémentaires.

Exemple 1

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & -1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Nous ne pouvons plus prendre de pivot, la réduction est donc terminée. Nous obtenons ainsi le système :

$$\begin{cases} -x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{3} \\ (0 = 0) \\ 3\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Introduisons quelques définitions

Définition

- *Les équations correspondant aux lignes où figure un pivot sont appelées* **équations principales**.
- *Les équations correspondant aux lignes où ne figure pas un pivot sont appelées* **équations auxiliaires**.
- *Les inconnues correspondant aux colonnes où figure un pivot sont appelées* **inconnues principales**.
- *Les inconnues correspondant aux colonnes où ne figure pas un pivot sont appelées* **inconnues auxiliaires**.

Dans l'exemple 1, les équations (E_1), (E_2) et (E_4) sont des équations principales, tandis que l'équation (E_3) est une équation auxiliaire.
Les inconnues x_1, x_2 et x_4 sont des inconnues principales et l'inconnue x_3 est une inconnue auxiliaire.

Méthode pour déterminer les solutions

- **Existence de solutions**

  Ce sont les équations auxiliaires qui servent pour discuter de l'existence de solutions.
- **Description des solutions**

  Ce sont les équations principales qui servent pour décrire les solutions lorsqu'il y a des solutions.

  Nous obtenons toutes les solutions du système linéaire en exprimant les inconnues principales en fonction des inconnues auxiliaires et en donnant aux inconnues auxiliaires des valeurs arbitraires.

Dans l'exemple 1, l'équation auxiliaire (E_3) exprime une condition vide. Il y a donc des solutions. Exprimons alors les inconnues principales x_1, x_2 et x_4 en fonction de l'inconnue auxiliaire

x_3 qui prend des valeurs arbitraires :

$$\begin{cases} x_4 = x_3 \\ x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \\ x_3 = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'ensemble des solution est alors :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \lambda, \lambda \right) ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque

Nous avons une infinité de solutions.

Exemple 2

Considérons le système linéaire dont le tableau est

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}$$

Une réduction possible du tableau est alors

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & \boxed{1} & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & \boxed{1} & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & -4 \\ -2 & 0 & -1 & -7 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & \boxed{1} & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & -4 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -11 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & \boxed{1} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -15 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -11 \end{array}$$

La réduction est maintenant terminée.

L'équation auxiliaire (E_2) donne alors $0\ x_1 + 0\ x_2 + 0\ x_3 = 2$ ce qui est impossible.

Le système n'admet donc pas de solution :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Remarque

Comme indiqué précédemment, ce sont les équations auxiliaires qui nous permettent de déterminer si le système linéaire admet des solutions ou non.

Exemple 3

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Nous considérons maintenant le système dont le tableau est :

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & 1 & 1 & a \\ 5 & 1 & 1 & b \\ 4 & 1 & 2 & c \\ 3 & 1 & 0 & d \end{array}$$

Attention, ici les nombres a ,b ,c et d sont donnés, ce ne sont pas les inconnues ! Il s'agit donc, étant donné (a,b,c,d), de déterminer tous les triplets (x_1,x_2,x_3) solutions, ceux-ci dépendant certainement de (a,b,c,d).
Une réduction possible du tableau est alors

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & \boxed{1} & a \\ 5 & 1 & 1 & b \\ 4 & 1 & 2 & c \\ 3 & 1 & 0 & d \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & \boxed{1} & a \\ 3 & 0 & 0 & -a+b \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -2a+c \\ 3 & 1 & 0 & d \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \boxed{1} & -a+c \\ 3 & 0 & 0 & -a+b \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -2a+c \\ \boxed{3} & 0 & 0 & -2a+c+d \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{a}{3}+\frac{c}{3}-\frac{2}{3}d \\ 0 & 0 & 0 & a+b-c-d \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -2a+c \\ \boxed{3} & 0 & 0 & -2a+c+d \end{array}$$

La réduction est maintenant terminée.
Regardons en premier lieu, l'équation auxiliaire (E_2). Elle donne l'équation

$$0\ x_1 + 0\ x_2 + 0\ x_3 = a+b-c-d$$

qui va conduire à une discussion :

- Si $\underline{a+b-c-d \neq 0}$,
  alors l'équation est impossible et il n'y a donc pas de solution :
  $$\mathcal{S}_{(a,b,c,d)} = \emptyset.$$
- Si $\underline{a+b-c-d = 0}$,
  alors cette équation exprime une condition vide. Il y a donc au moins une solution et nous allons utiliser les équations principales pour décrire l'ensemble des solutions. Ici, toutes les inconnues sont des inconnues principales. Nous obtenons alors
  $$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{a}{3}+\frac{c}{3}-\frac{2}{3}d \\ x_2 = 2a-c \\ x_1 = -\frac{2}{3}a+\frac{c}{3}+\frac{d}{3} \end{array} \right.$$
  Il y a donc dans ce cas une unique solution :
  $$\mathcal{S}_{(a,b,c,d)} = \left\{ \left(-\frac{2}{3}a+\frac{c}{3}+\frac{d}{3}, 2a-c, \frac{a}{3}+\frac{c}{3}-\frac{2}{3}d \right) \right\}.$$

Remarque
Suivant les valeurs de (a,b,c,d), nous avons soit une unique solution, soit aucune solution.

Exemple 4
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Nous considérons maintenant le système dont le tableau est :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & -3 & -1 & 1 & c \\ 4 & -3 & 2 & -1 & d \end{array}$$

Une réduction possible du tableau est alors

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & -3 & -1 & \boxed{1} & c \\ 4 & -3 & 2 & -1 & d \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{rrrr|r} 2 & -4 & \boxed{1} & 0 & a+c \\ 3 & -2 & 0 & 0 & b+c \\ 1 & -3 & -1 & \boxed{1} & c \\ 5 & -6 & 1 & 0 & c+d \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{rrrr|r} 2 & -4 & \boxed{1} & 0 & a+c \\ 3 & -2 & 0 & 0 & b+c \\ 3 & -7 & 0 & \boxed{1} & a+2c \\ \boxed{3} & -2 & 0 & 0 & -a+d \end{array}$$

$$\to \quad \begin{array}{rrrr|r} 0 & -\frac{8}{3} & \boxed{1} & 0 & \frac{5}{3}a+c-\frac{2}{3}d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+c-d \\ 0 & -5 & 0 & \boxed{1} & 2a+2c-d \\ \boxed{3} & -2 & 0 & 0 & -a+d \end{array}$$

La réduction est maintenant terminée.

L'équation (E_2) est une équation auxiliaire. Elle va donc nous permettre de déterminer pour quelles valeurs de a, b, c et d le système admet des solutions :

- Si $\underline{a+b+c-d \neq 0}$,
  alors l'équation est impossible et il n'y a donc pas de solution :
  $$\mathcal{S}_{(a,b,c,d)} = \emptyset.$$
- Si $\underline{a+b+c-d = 0}$,
  alors le système linéaire admet au moins une solution. Ici, x_1, x_3 et x_4 sont des inconnues principales et x_2 est une inconnue auxiliaire. Pour obtenir les solutions, nous devons exprimer les inconnues principales en fonction de l'inconnue auxiliaire, celle-ci pouvant prendre une valeur arbitraire. Nous obtenons ainsi
  $$\begin{cases} x_3 = \frac{5}{3}a + c - \frac{2}{3}d + \frac{8}{3}x_2 \\ x_4 = 2a + 2c - d + 5x_2 \\ x_1 = -\frac{a}{3} + \frac{d}{3} + \frac{2}{3}x_2 \\ x_2 = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$
  L'ensemble des solutions est donc
  $$\mathcal{S}_{(a,b,c,d)} = \left\{ \left(-\frac{a}{3} + \frac{d}{3} + \frac{2}{3}\lambda, \lambda, \frac{5}{3}a + c - \frac{2}{3}d + \frac{8}{3}\lambda, 2a + 2c - d + 5\lambda \right) ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque

Suivant les valeurs de (a,b,c,d), nous avons soit une aucune solution, soit une infinité de solutions.

Exemple 5

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Nous considérons maintenant le système dont le tableau est :

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & 1 & -1 & b \\ 0 & -2 & -3 & 1 & c \end{array}$$

Une réduction possible du tableau est alors

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & 1 & -1 & b \\ 0 & -2 & -3 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 2 & -3a+b \\ 0 & -2 & -3 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & -2a+b \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 2 & -3a+b \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 6a-2b+c \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 4a-b+c \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -4 & 9a-3b+2c \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 6a-2b+c \end{array}\right)$$

La réduction est maintenant terminée.
Comme, il n'y a pas d'équation auxiliaire, quelque soit (a, b, c) le système possède des solutions.
Nous exprimons alors les inconnues principales en fonction de l'inconnue auxiliaire, celle-ci pouvant prendre une valeur arbitraire :

$$\begin{cases} x_1 = 4a - b + c + 2x_4 \\ x_2 = -9a + 3b - 2c - 4x_4 \\ x_3 = 6a - 2b + c + 3x_4 \\ x_4 = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S}_{(a,b,c)} = \{(4a - b + c + 2\lambda, -9a + 3b - 2c - 4\lambda, 6a - 2b + c + 3\lambda, \lambda)\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Remarque
Nous avons une infinité de solutions.

6.7 Autres opérations élémentaires sur les tableaux

Pour faciliter la réduction du tableau des coefficients et donc faciliter les calculs, nous pourrons aussi mener les opérations élémentaires suivantes qui transformeront toujours le système en un système équivalent.

Si tous les coefficients d'une même ligne sont multiples d'un même nombre $\lambda \neq 0$,

$$\lambda a_{i,1}x_1 + \lambda a_{i,2}x_2 + \cdots + \lambda a_{i,p}x_p = \lambda b_i \quad (E_i)$$

alors nous pouvons multiplier la ligne par $\frac{1}{\lambda}$

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i \quad \frac{1}{\lambda}(E_i) = (E'_1)$$

et nous conservons un système équivalent.

Définition
On appelle **transformation élémentaire de deuxième espèce** *l'opération consistant à transformer un système* (S) *en système* (S') *en multipliant une des équations* (E_i) *par un scalaire* **non nul** *et en conservant toutes les autres équations inchangées.*

Proposition
Une opération élémentaire de deuxième espèce transforme un système donné en un système équivalent.

Parfois, il pourra être aussi intéressant de changer l'ordre des équations. Cette opération ne change pas le système.

Définition
On appelle **transformation élémentaire de troisième espèce** *l'opération consistant à transformer un système* (S) *en système* (S') *en échangeant deux équations* (E_i) *et* (E_j) *et en conservant toutes les autres équations inchangées.*

Proposition
Une opération élémentaire de troisième espèce transforme un système donné en un système équivalent.

6.8 Cas particuliers

Nous terminerons ce chapitre par quelques remarques :

- Un système linéaire admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.
- Un système linéaire homogène, c'est-à-dire un système dont les coefficients du second membre sont tous nuls, a toujours au moins une solution à savoir $(0, 0, \ldots, 0)$.
  Les équations auxiliaires, si elles existent, donnent alors toujours lieu à une condition vide.
- Si le nombre de pivots est égal au nombre d'équations du système, c'est-à-dire au nombre de lignes du tableau, alors le système linéaire admet au moins une solution.
  Il n'y a pas d'équation auxiliaire dans ce cas.

- Si le nombre de pivots est égal au nombre d'inconnues du système, c'est-à-dire au nombre de colonnes du tableau, alors le système linéaire admet au plus une solution.
  Il n'y a pas d'inconnue auxiliaire dans ce cas.
- Si le nombre de pivots est égal au nombre d'équations et au nombre d'inconnues, c'est-à-dire au nombre de ligne et de colonne du tableau, alors le système linéaire admet une unique solution.

Remarque finale

Comme nous l'avons remarqué, en fonction du choix des pivots, il y a de nombreuses possibilités pour mener la réduction du tableau des coefficients.
Toutefois, dans tous les cas, le nombre de pivot pour effectuer la réduction est le même !
Ceci vous sera expliqué et démontré lors du cours d'algèbre linéaire.