Relations

Relations

Définitions

Relation n-aire

$$R \subseteq E_1 \times \ldots \times E_n$$

Relation n-aire sur E

$$R \subseteq E^n$$

Notation relation binaire

$$\begin{aligned} x\ R\ y \quad &:\Leftrightarrow \quad (x, y) \in R \\ x\ \not R\ y \quad &:\Leftrightarrow \quad (x, y) \notin R \end{aligned}$$

Exemple

- $R := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = y + 1\}$. $R \subseteq \mathbb{N}^2$ relation binaire sur $\mathbb{N}$

Relations

Définitions

Soit $R \subseteq E^2$ relation binaire sur E

Réflexive	$\forall x \in E$	$x \, R \, x$
Irréflexive	$\forall x \in E$	$x \not R \, x$
Transitive	$\forall x, y, z \in E$	$x \, R \, y$ et $y \, R \, z \Rightarrow x \, R \, z$
Symétrique	$\forall x, y \in E$	$x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
Antisymétrique	$\forall x, y \in E$	$x \, R \, y$ et $y \, R \, x \Rightarrow x = y$

Exemples

Soit $A := \{a, b, c\}$

1. $R_1 := \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ est réflexive
2. $R_2 := \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$ est symétrique
3. $R_3 := \{(a, b), (b, c), (a, c), (b, b)\}$ est transitive
4. $R_4 := \{(a, c), (a, b)\}$ est irréflexive et antisymétrique

Relation d'équivalence

R réflexive, transitive et symétrique

Classe d'équivalence

$$[e]_R := \{x \in E \mid e\ R\ x\}$$

Exemple

$E := \{a, b, c\}$ et $R := \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$

$$[a]_R = \{a, b\} \qquad [b]_R = \{a, b\} \qquad [c]_R = \{c\}$$

Relation d'équivalence vers partition

Si R relation d'équivalence sur E alors

$$\{[e]_R \in \mathcal{P}(E) \mid e \in E\} \text{ est une partition de } E$$

Partition vers classe d'équivalence

Si P partition de E et

$$x \, R \, y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists Z \in P \quad x \in Z \text{ et } y \in Z$$

alors R relation d'équivalence sur E

Exemple

$E := \{a, b, c, d, e\}$ et $P := \{\{a, b\}, \{c, d, e\}\}$

$$a \, R \, b \qquad c \, R \, d \qquad e \, R \, c \qquad d \, R \, e \qquad a \, \not R \, c$$

Relation d'ordre

R réflexive, transitive et antisymétrique

Exemples

- $\leq$ relation d'ordre sur $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$
- $\mid$ relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$

$a \mid b$ signifie « a divise b »

Relations

Ordre

Relation d'ordre totale

R relation d'ordre et $\quad \forall x, y \in E \quad x \, R \, y$ ou $y \, R \, x$

Ensemble ordonné

(E, R) ensemble ordonné : $\quad R$ relation d'ordre
totalement ordonné : $\quad R$ relation d'ordre totale
partiellement ordonné : $\quad R$ relation d'ordre non totale

Exemples

- $(\mathbb{N}, \leq)$ ensemble totalement ordonné
- $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ ensemble partiellement ordonné (si $|E| \geq 2$)
- $(\mathbb{Z}, \mid)$ partiellement ordonné car ni $2|3$ ni $3|2$

Soient $(E, \preceq)$ ensemble ordonné et $A \subseteq E$

t maximal de A

$$\begin{aligned} & \forall x \in A \quad x \neq t \Rightarrow t \npreceq x \\ \iff & \forall x \in A \quad t \preceq x \Rightarrow x = t \end{aligned}$$

t minimal de A

$$\begin{aligned} & \forall x \in A \quad x \neq t \Rightarrow x \npreceq t \\ \iff & \forall x \in A \quad x \preceq t \Rightarrow x = t \end{aligned}$$

Exemples

$E := \{2, 3, 4, 5, 8, 12, 24, 25\}$ et $m \preceq n :\Leftrightarrow m \mid n$.

- $2, 3, 5$ sont des éléments minimaux de E
- 24 et 25 sont des éléments maximaux de E
- 2 est élément minimal de $\{2, 4, 12\}$, et 12 élément maximal

Relations

Ordre

Soit $(E, \preceq)$ ensemble ordonné et $A \subseteq E$

t élément maximum de A

$$\forall x \in A \quad x \preceq t$$

t élément minimum de A

$$\forall x \in A \quad t \preceq x$$

Exemples

- $(\mathbb{N}, \leq)$ admet 0 pour minimum mais aucun maximum
- $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ admet $\emptyset$ pour minimum et E pour maximum
- $(\mathbb{Z}, \mid)$ admet 1 pour minimum et 0 pour maximum

Relations

Ordre

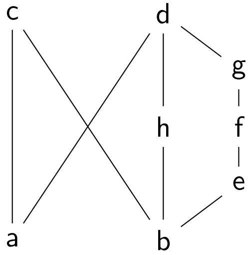
Soit $(E, \preceq)$ ensemble ordonné

Représentation graphique (Diagramme de Hasse)

- un point du plan pour chaque élément de E
- si $x \prec y$ alors x en dessous de y $\qquad x \prec y :\Leftrightarrow x \preceq y$ et $x \neq y$
- x et y reliés **ssi** $x \prec y$ et aucun $z \in E$ tel que $x \prec z \prec y$

Exemple

$a \preceq a, c, d$
$b \preceq b, c, d, e, f, g, h$
$c \preceq c$
$d \preceq d$
$e \preceq d, e, f, g$
$f \preceq d, f, g$
$g \preceq d, g$
$h \preceq d, h$



$e \npreceq c$
$h \npreceq g$
$f \npreceq c$

Soit $(E, \preceq)$ ensemble ordonné

Construction diagramme

1. le niveau initial est $i = 1$
2. extraire les minimaux et les placer au niveau courant
3. réitérer au niveau suivant $i + 1$ autant que nécessaire
4. relier x à y si x en dessous de y et aucun chemin de x à y

Exemple (à faire)

$$\begin{array}{ll} a \prec c & c \prec d \\ a \prec d & e \prec f \\ b \prec c & e \prec g \\ b \prec d & \end{array}$$

Algorithme

$i \leftarrow 1$
$E_1 \leftarrow E$
$R_1 \leftarrow \preceq$
tant que $E_i \neq \emptyset$ **faire**
    $M_i \leftarrow \{x \in E_i \mid x \text{ minimal de } (E_i, R_i)\}$
    $E_{i+1} \leftarrow E_i \setminus M_i$
    $R_{i+1} \leftarrow R_i \cap (E_{i+1} \times E_{i+1})$
pour *j de 1 à $i-1$* **faire**
    placer les points M_j au niveau j
    pour *k de $j-1$ à 1* **faire**
        pour chaque $x \in M_k$ **faire**
            pour chaque $y \in M_j$ **faire**
                si *$x \prec y$ et pas de chemin de x à y* **alors**
                    relier x et y

Relations

Ordre

Soit $(E, \preceq)$ ensemble ordonné

$\preceq$ bien fondé

$$\forall X \subseteq E \quad X \neq \emptyset \Rightarrow \exists \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{X} \quad m \text{ minimal de } X$$

$\preceq$ bon ordre

$$\forall X \subseteq E \quad X \neq \emptyset \Rightarrow \exists \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{X} \quad m \text{ minimum de } X$$

Propriété

$$\preceq \text{ bon ordre} \quad \Leftrightarrow \quad \preceq \text{ bien fondé et total}$$

Exemples

- $(\mathbb{N}, \mid)$ est bien fondé, mais pas un bon ordre (car $3 \not\mid 5$ et $5 \not\mid 3$)
- $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien ordonné
- $(\mathbb{Q}^+, \leq)$ n'est pas bien fondé : inf de $\{q \in \mathbb{Q}^+ \mid 2 \leq q^2\}$ est $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^+$