Feuille 1 - Langage logique, révisions Calcul Propositionnel

Exercice 1 La contraposée d'une formule $P \Rightarrow Q$ est la formule $\neg Q \Rightarrow \neg P$, la réciproque est la formule $Q \Rightarrow P$, la contraposée de la réciproque est la formule $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

1. Exprimer par des phrases ces 4 formules en prenant pour P la propriété « il est midi » et pour Q la propriété « j'ai faim ».
2. Pour P et Q arbitraires construire les tables de vérité de ces quatre formules, lesquelles sont équivalentes ?
3. Attention aux usages courants qui ne respectent pas toujours les règles de la logique. Soit la formule P « Max a bu » et la formule Q « Max ne peut pas conduire ». On suppose que la formule $P \Rightarrow Q$ est vérifiée. Peut-on en déduire que si Max n'a pas bu alors il peut conduire ?

Exercice 2 *Table de vérité*
Soient les formules $A \stackrel{\text{def}}{=} P \wedge Q \Rightarrow R$ et $B \stackrel{\text{def}}{=} P \Rightarrow Q \Rightarrow R$.

1. Ajouter des parenthèses autour des connecteurs sans changer le sens de ces formules.
2. Donner les tables de vérité de ces deux formules. Que constate-t-on ?
3. Reprendre les mêmes questions avec les formules $P \vee Q \Rightarrow R$ et les formules $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.

Exercice 3 *Enigme, d'après Smullyan, partiel 2013*
Une femme qui cherche un mari présente à ses prétendants 3 coffres numérotés de 1 à 3. Un seul de ces coffres contient son portrait qu'il faut découvrir. Chaque coffre comporte une inscription :

1. Le portrait est dans ce coffre
2. Le portrait n'est pas dans ce coffre
3. Le portrait n'est pas dans le coffre 1

Questions. On introduit des variables propositionnelles P_1 pour représenter le fait que le portrait est dans le coffre 1 et P_2 pour représenter le fait que le portrait est dans le coffre 2.

1. Donner une formule qui utilise les variables P_1 et P_2 et qui est vraie exactement lorsque le portrait est dans le coffre 3.
2. Donner une formule qui utilise les variables P_1 et P_2 et qui représente le fait que le portrait est exactement dans un des coffres.
3. Donner des formules I_1, I_2 et I_3 qui utilisent les variables P_1 et P_2 et qui représentent les inscriptions sur chacun des coffres.
4. Sachant qu'une seule des formules I_1, I_2 et I_3 est vraie, en déduire dans quel coffre est caché le portrait.

Exercice 4 Un logicien affirme “les personnes qui aiment la montagne aiment aussi la campagne”.

1. Sachant que monsieur X n'aime pas la campagne, peut-on en déduire s'il aime ou non la montagne ?
2. Si Madame Y n'aime pas la montagne, peut-on en déduire si elle aime ou non la campagne ?
3. Que dire des phrases
   (a) “les personnes qui n'aiment pas la montagne n'aiment pas la campagne”.
   (b) “les personnes qui n'aiment pas la campagne n'aiment pas la montagne”.
   (c) “les personnes qui aiment la campagne aiment aussi la montagne”.

   sont-elles équivalentes à l'affirmation du logicien ? lesquelles sont équivalentes entre elles ?

4. Traduire la phrase du logicien et les trois affirmations précédentes en des formules logiques qui utilisent des symboles de prédicat unaires `aime-montagne` et `aime-campagne`
5. Donner deux formules logiques différentes qui expriment la négation de l'affirmation du logicien.

Exercice 5 *Calcul booléen et programmation*

p, q et r sont 3 variables propositionnelles. Soit le pseudo-programme :

```
if (p⇒q) then print "a"
else if (q∨r) then print "b"
else if (¬p) then print "c"
else print "d"
```

1. Sachant que p, q et r peuvent prendre n'importe quelle valeur vrai ou faux, combien y-a-t-il d'entrées possibles pour ce programme ?
2. Quelles valeurs parmi "a", "b", "c" et "d", le programme peut-il afficher ?
3. Soit un langage dans lequel un programme P est une instruction élémentaire (comme `print "b"`) ou une conditionnelle **if** C **then** P_1 **else** P_2 avec C une condition logique et P_1 et P_2 des programmes dans le même langage. On dispose d'une fonction `sat` qui pour une condition C renvoie vrai ssi C est satisfiable (il existe des entrées qui rendent vraie C). Construire une fonction `verif` qui pour un programme P, renvoie vrai s'il existe des entrées qui permettent d'exécuter chaque instruction élémentaire de P
4. Le problème de savoir si toutes les instructions élémentaires d'un programme peuvent être exécutées est-il décidable en général ?

Exercice 6 *Formalisation logique*

On modélise un monde dans lequel vivent des dragons. On utilisera les symboles de prédicats suivants :
— $\mathtt{B}(x), \mathtt{H}(x), \mathtt{V}(x)$: le dragon x est bleu, est heureux, vole
— $\mathtt{P}(x, y)$: le dragon x est parent du dragon y (ou encore le dragon y est un enfant du dragon x)
— $x = y$: les dragons x et y sont égaux

1. Donner les formules logiques correspondant aux phrases suivantes :
   (a) Tous les dragons bleus volent/ Il existe un dragon bleu qui vole
   (b) Tout dragon a exactement deux parents
   (c) Un dragon dont tous les enfants peuvent voler est heureux
   (d) Tout dragon qui a au moins un parent bleu est lui-même bleu
   (e) Il n'y a pas de dragon heureux qui ne vole pas
2. Traduire en français (ou anglais) les formules logiques suivantes :
   (a) $\forall x\, y\, z, \mathtt{V}(x) \Rightarrow \mathtt{P}(x, y) \Rightarrow \mathtt{P}(x, z) \Rightarrow y = z$
   (b) $\forall x, \exists y, \mathtt{P}(x, y) \wedge \mathtt{H}(y)$
   (c) $\exists y, \forall x, \mathtt{P}(x, y) \wedge \mathtt{H}(y)$

Autres énigmes

Exercice 7 *Enigme.* Trois collègues, Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Albert ou Charles, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.
4. Si Charles commande un dessert, Albert fait de même.

Questions

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles
2. Que peut on en déduire sur qui commande un dessert ?
3. Pouvait-on arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

Exercice 8 *Partiel 2012.* Un homme qui semble divaguer déclare à toute la clientèle d'un café :

1. Le jour où je ne bois pas et où je dors, je ne suis pas content.
2. Le jour où je bois, je ne suis pas content et je dors.
3. Le jour où je ne mange pas, ou bien je ne suis pas content, ou bien je dors ou les deux.
4. Le jour où je mange, ou bien je suis content, ou bien je bois ou les deux.
5. Aujourd'hui, je suis content.

Questions

1. Introduire des variables propositionnelles pour représenter les principales notions et donner les formules correspondantes à chacune des affirmations précédentes.
2. On considère que toutes les affirmations précédentes sont vraies.
   (a) Par raisonnement élémentaire à partir des affirmations, montrer qu'il n'a pas bu.
   (b) Répondre en les justifiant par un raisonnement ou une table de vérité aux questions suivantes : a-t-il mangé ? a-t-il dormi ?