Feuille 4, Modèle de Herbrand, formes normales

Exercice 1 Le domaine de Herbrand est formé des termes clos (sans variable) construits à partir de la signature. Chaque symbole de fonction est interprété par lui-même.

Pour les formules suivantes : donner le domaine de Herbrand et dire si les formules sont satisfiables.

1. $\forall x, (P(x) \wedge Q(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg Q(b)))$
2. $\forall x, ((P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(b))$
3. $\forall x, (P(x) \wedge \neg P(f(x)))$
4. $\forall xyz, (R(x, s(x)) \wedge (R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)) \wedge \neg R(x, x))$

Exercice 2 Pour chaque ensemble de formules suivant : donner la signature du langage, le domaine de Herbrand et dire si l'ensemble de formules est satisfiable ou non.

1. $\{\forall x, (P(x) \vee Q(x) \vee R(x)); \neg P(a); \neg Q(b); \neg R(c)\}$
2. $\{\forall x, P(x); \forall x, \neg Q(x); \forall x, (\neg P(f(x)) \vee Q(f(x)))\}$
3. $\{\forall x, P(x); \forall x, \neg P(f(x)); \forall x, P(f(f(x))); \forall x, (\neg P(f(f(x))) \vee \neg P(x) \vee P(f(x)))\}$

Exercice 3 On reprend le type Ocaml vu en cours pour représenter les formules propositionnelles

```
type connecteur = Impl | Et | Ou
type form = Var of int | Bot | Top
          | Neg of form | Bin of form * connecteur * form
```

Compléter les fonctions suivantes afin d'implanter les fonctions `clauseb` et `fncb` qui testent respectivement si une formule est une clause et si une formule est en forme normale conjonctive.

```
let rec clauseb = function
    Var n ->
  | Bot
  | Top ->
  | Neg f ->
  | Bin(f,Or,g) ->
  | Bin(f,Et,g) ->
  | Bin(f,Impl,g) ->
```

```
let rec fncb = function
    Var n ->
  | Bot
  | Top ->
  | Neg f ->
  | Bin(f,Ou,g) ->
  | Bin(f,Et,g) ->
  | Bin(f,Impl,g) ->
```

Exercice 4 *Formes normales.*

Dire si les formules suivantes sont des clauses, des formes normales conjonctives, des formes normales disjonctives ?

1. $p \wedge \neg q$
2. $p \vee \neg q$
3. $\neg(p \vee q)$
4. $p \wedge q \vee r$

Exercice 5 *Formes normales à partir d'une table de vérité.*

Donner les formes normales conjonctives et disjonctives des formules P et Q dont les tables de vérité sont les suivantes :

	a	b	c	P
1	V	V	V	V
2	V	V	F	F
3	V	F	V	V
4	V	F	F	F
5	F	V	V	V
6	F	V	F	F
7	F	F	V	V
8	F	F	F	V

	a	b	c	Q
1	V	V	V	V
2	V	V	F	F
3	V	F	V	V
4	V	F	F	V
5	F	V	V	F
6	F	V	F	V
7	F	F	V	F
8	F	F	F	V

Exercice 6 *Formes normales.*

1. A l'aide des lois de de Morgan et des lois de distributivité, mettre sous forme normale conjonctive et sous forme normale disjonctive les formules suivantes :
   (a) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \Rightarrow (r \vee s)$
   (b) $p \Rightarrow ((\neg q \vee r) \Rightarrow s)$
   (c) $\neg(p \vee \neg q) \wedge (q \Rightarrow (p \vee r))$
   (d) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \wedge \neg(q \Rightarrow p)$
   (e) $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
2. Donner pour chacune des formules ci-dessus un modèle.
3. Utiliser les exemples précédents pour répondre aux questions suivantes
   — Est-il possible d'avoir une formule qui soit simultanément en forme normale conjonctive et disjonctive ?
   — Est-ce vrai que toutes les formes normales conjonctives d'une formule donnée ont le même nombre de clauses ?
   — Est-ce vrai si on ne permet pas de répétitions de clauses dans une forme normale conjonctive, ni de clause qui se simplifie trivialement ?
4. (optionnel) Montrer par récurrence structurelle que toute formule P admet une forme normale disjonctive. On considèrera seulement le cas où la formule P est en forme normale négative (utilise uniquement les connecteurs $\bot$, $\top$, $\vee$ et $\wedge$ et des littéraux).

Exercice 7 On introduit le connecteur $\diamond$ (nor) dont la table de vérité est donnée par

x	y	$x \diamond y$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1. Donner une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive de la formule $x \diamond y$.
2. Donner les tables de vérité des formules $(x \diamond x)$, $((x \diamond x) \diamond x)$ et $(x \diamond y) \diamond (x \diamond y)$
3. Donner des formules équivalentes à $\top$, $\bot$, $\neg x$, $x \wedge y$, $x \vee y$ et $x \Rightarrow y$ qui n'utilisent que l'opérateur $\diamond$ et possiblement les variables x et y. On pourra justifier le résultat soit par des tables de vérité, soit en utilisant des équivalences avec les formules propositionnelles usuelles.
4. Définir par des équations récursives une fonction `nor` qui étant donnée une formule propositionnelle construite sur les connecteurs habituels, la transforme en une formule qui ne contient que des variables propositionnelles et le connecteur $\diamond$.
5. Donner le résultat de $\texttt{nor}(x \vee (y \vee z))$.