III LIMITES - CONTINUITE - COMPARAISON DE FONCTIONS

1. Limite d'une fonction

1.1 Définitions

On appelle voisinage d'un réel x_0 toute partie V de $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $r > 0$ vérifiant

$$]x_0 - r, x_0 + r[\subset V.$$

On appelle voisinage de $+\infty$ toute partie V de $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$]a, +\infty[\subset V.$$

On appelle voisinage de $-\infty$ toute partie V de $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$]-\infty, a[\subset V.$$

On dit qu'une fonction f d'une variable réelle est définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ s'il existe un voisinage V de x_0 sur lequel f est définie.

Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; on dit que f est minorée (resp. majorée) sur E si l'ensemble $f(E)$ est minoré (resp. majoré).

Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; on dit que f est bornée sur E si l'ensemble $f(E)$ est borné, i.e est minoré et majoré.

1.2 Définitions

Soient f une fonction de domaine de définition D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$ et g une fonction de domaine de définition D_g à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les opérations sur les réels s'étendent très naturellement aux fonctions :

a) addition : on définit $f + g$ sur $D_f \cap D_g$ par

$$\forall x \in D_f \cap D_g,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

b) multiplication : on définit fg sur $D_f \cap D_g$ par

$$\forall x \in D_f \cap D_g,\ (fg)(x) = f(x)g(x)$$

c) multiplication par un réel λ : on définit λf sur D_f par

$$\forall x \in D_f,\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

1.3 Définitions

Soit x_0 un réel et soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit ℓ un réel : on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0, ou que f

a pour limite ℓ en x_0, si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0 et distinct de x_0, autrement dit si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et on note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.

Si f est définie au voisinage de x_0 sauf en x_0, on note plutôt $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} \ell$ pour bien souligner que f n'est pas définie en x_0.

On remarquera qu'il est indispensable que $x \neq x_0$ dans la définition de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ pour éviter que ℓ ne soit nécessairement égale à $f(x_0)$ dans le cas où f est définie en x_0 : en effet si $x = x_0$ était autorisé dans la définition, on aurait

$$\forall \varepsilon > 0,\ |f(x_0) - \ell| < \varepsilon$$

puisque $|x_0 - x_0| = 0 < \alpha$ pour tout $\alpha > 0$, d'où $f(x_0) = \ell$ d'après I 2.9.

On remarque également que, comme dans le cas des suites, on peut remplacer les inégalités à droite strictes dans la définition précédente par des inégalités larges : f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ 0 < |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell)| \leq \varepsilon.$$

On dit que f tend vers ℓ par valeurs supérieures ou que f tend vers ℓ^+ quand x tend vers x_0, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow 0 < f(x) - \ell < \varepsilon$$

On dit que f tend vers ℓ par valeurs inférieures ou que f tend vers ℓ^- quand x tend vers x_0, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow 0 < \ell - f(x) < \varepsilon$$

1.4 Exemple

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$:

on a $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ donc $|f(x)| \leq |x|$, d'où, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$0 < |x - 0| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$

et ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$.

1.5 Théorème

Soit x_0 un réel et soit f une fonction définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit ℓ un réel : alors f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D_f \setminus \{x_0\}$ convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Preuve : Supposons que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0, et considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D_f \setminus \{x_0\}$ convergeant vers x_0, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow 0 < |u_n - x_0| < \alpha$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |f(u_n) - \ell| < \varepsilon$$

et ainsi $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Réciproquement, supposons que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D_f \setminus \{x_0\}$ convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ; on va démontrer que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 par l'absurde : si f ne tend pas vers ℓ quand x tend vers x_0, alors

$$\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0, \exists\ x \in D_f,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

en particulier pour $\alpha = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\ u_n \in D_f,\ 0 < |u_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - \ell| \geq \varepsilon$$

ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 alors que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ, ce qui est contraire à l'hypothèse : donc f tend vers ℓ quand x tend vers x_0.

□

1.6 Proposition

Soit x_0 un réel et soit f une fonction définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Si f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0, alors cette limite est unique ;

b) Si $x_0 \in D_f$ et si f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0 :

$$\exists\ M \in \mathbb{R}^+, \exists\ r > 0,\ \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\ ,\ |f(x)| \leq M.$$

Preuve : laissée au lecteur qui pourra s'inspirer de celle faite dans le cas des suites (cf. II 2.5)

□

1.7 Proposition

Soit x_0 un réel et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$; on suppose que f tend vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 et que g tend vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0, alors on a

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$;

b) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \ell_1$;

c) $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2$.

Preuve : laissée au lecteur qui pourra s'inspirer de celle faite dans le cas des suites (cf. II 2.7)

□

1.8 Proposition

Soit x_0 un réel et soit f une fonction définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que $f(x) \longrightarrow a \in \mathbb{R}$ quand $x \longrightarrow x_0$; on considère une fonction g définie au voisinage de a (y compris en a) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $g(y) \longrightarrow g(a) \in \mathbb{R}$ quand $y \longrightarrow a$, alors

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(a).$$

Preuve :

Comme $\lim\limits_{y \to a} g(y) = g(a)$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|y - a| < \alpha \Longrightarrow |g(y) - g(a)| < \varepsilon$$

or $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, donc il existe $\beta > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - a| < \alpha$$

d'où

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |g \circ f(x) - g(a)| < \varepsilon$$

et ainsi $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(a)$.

□

1.9 Définitions

1) Soit x_0 un réel et soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf en x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

a) on dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 avec $x \neq x_0$ et on écrit $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists\, \alpha > 0,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A$$

b) on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 avec $x \neq x_0$ et on écrit $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists\ \alpha > 0,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) < -A$$

2) Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

a) on dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ A > 0, x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

b) on dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists\ B > 0, x > B \Longrightarrow f(x) > A$$

c) on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists\ B > 0, x > B \Longrightarrow f(x) < -A.$$

3) Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

a) on dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ A > 0, x < -A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

b) on dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists\ B > 0, x < -B \Longrightarrow f(x) > A$$

c) on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists\ B > 0, x < -B \Longrightarrow f(x) < -A.$$

1.10 Proposition

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors on a

a) si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ (resp. $-\infty$) et si g est bornée au voisinage de x_0, alors $(f+g)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ (resp. $-\infty$) ;

b) si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ et si $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ alors $(f+g)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$;

c) si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$ et si $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$ alors $(f+g)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$;

d) si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \in \mathbb{R}^*$ alors $(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{}$ (signe de $\ell)\infty$;

e) si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \in \mathbb{R}^*$ alors $(fg)(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -$ (signe de $\ell)\infty$;

f) si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est strictement positive et $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^+$;

g) si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est strictement négative et $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^-$;

h) si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^+$, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est strictement positive et $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$;

i) si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^-$, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est strictement négative et $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$.

Preuve : laissée au lecteur.

$\square$

1.11 Remarques

(a) si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$, on ne peut rien dire au sujet de la limite de $f+g$ en x_0 a priori ; c'est ce qu'on appelle une forme indéterminée.

(b) si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \pm\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, on ne peut rien dire au sujet de la limite de fg en x_0 a priori : on a aussi une forme indéterminée.

1.12 Définitions

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) on dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 à gauche ou que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0^- si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ x_0 - \alpha < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell)| < \varepsilon$$

et on note alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$.

b) on dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 à droite ou que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0^+ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ x_0 < x < x_0 + \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell)| < \varepsilon$$

et on note alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$.

c) on dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche ou que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0^- si

$$\forall A > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ x_0 - \alpha < x < x_0 \Longrightarrow f(x) > A$$

et on note alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

d) on dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 à droite ou que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0^+ si

$$\forall A > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ x_0 < x < x_0 + \alpha \Longrightarrow f(x) > A$$

et on note alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

e) on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche ou que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0^- si

$$\forall A > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ x_0 - \alpha < x < x_0 \Longrightarrow f(x) < -A$$

et on note alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

f) on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 à droite ou que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0^+ si

$$\forall A > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ x_0 < x < x_0 + \alpha \Longrightarrow f(x) < -A$$

et on note alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

1.13 Proposition

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0, sauf peut-être en x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; alors f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 si et seulement si elle admet ℓ comme limite à gauche et à droite de x_0.

Preuve : on va démontrer la proposition dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et laisser au lecteur la preuve dans le cas où $\ell = \pm\infty$:

si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, il est clair au vu des définitions que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Réciproquement, si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$, alors si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que

$$x_0 - \alpha_1 < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell)| < \varepsilon$$

et

$$x_0 < x < x_0 + \alpha_2 \Longrightarrow |f(x) - \ell)| < \varepsilon$$

en posant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on obtient alors

$$0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell)| < \varepsilon$$

et ainsi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

$\square$

1.14 Théorème

a) Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ où a et b sont éventuellement infinis ; alors f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b et on a

- si f est minorée sur I, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf f(]a, b[)$, sinon $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
- si f est majorée sur I, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup f(]a, b[)$, sinon $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

b) Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ où a et b sont éventuellement infinis ; alors f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b et on a

- si f est majorée sur I, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \sup f(]a, b[)$, sinon $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
- si f est minorée sur I, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \inf f(]a, b[)$, sinon $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$.

Preuve :

a) soit f croissante sur I :

1er cas : f est minorée sur I, alors $f(I)$ admet une borne inférieure m et ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in I$ tel que $m \leq f(c) \leq m + \varepsilon$ par définition de la borne inférieure. Or f est croissante sur I donc

$$a < x \leq c \Longrightarrow m \leq f(x) \leq f(c) \leq m + \varepsilon$$

donc f admet m comme limite à droite en a.

2ème cas : f n'est pas minorée sur I, alors pour tout $A > 0$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) < -A$. Or f est croissante sur I donc

$$a < x \leq c \Longrightarrow f(x) \leq f(c) < -A$$

donc f tend vers $-\infty$ à droite en a.

La preuve pour la limite à gauche en b se fait de manière analogue.

b) La preuve s'obtient en appliquant a) à la fonction $-f$.

$\square$

2 Continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$;

a) on dit que f est continue en x_0 si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ \alpha > 0, \ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

b) on dit que f est continue à gauche en x_0 si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0^- :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\quad x_0 - \alpha < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

c) on dit que f est continue à droite en x_0 si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0^+ :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\quad x_0 < x < x_0 + \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2.2 Proposition

a) Toute fonction constante est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

b) La fonction identité est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

c) La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

d) Toutes les fonctions dites "usuelles" sont continues en tout point de leur domaine de définition : cosinus, sinus, tangente (circulaires et hyperboliques), logarithme, exponentielle, puissances.

Preuve : on va montrer c) :

soit $x_0 \neq 0$, on a

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x_0|\ |x|}$$

pour $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \min(\varepsilon\frac{x_0^2}{2}, \frac{|x_0|}{2})$, alors $|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |x| > |x_0| - \alpha \geq \frac{|x_0|}{2}$, d'où

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \frac{|x - x_0|}{\frac{x_0^2}{2}} \leq \varepsilon$$

et ainsi

$$|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$\square$

2.3 Proposition

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.

Preuve : c'est une conséquence immédiate de 1.13.

$\square$

On va maintenant constater que la définition de la continuité donnée dans le chapitre II 2.8 coïncide avec celle donnée ci-dessus :

2.4 Théorème

Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle I centré en $x_0 \in \mathbb{R}$: alors f est continue en x_0 si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Preuve : c'est une conséquence immédiate de 1.5.

$\square$

2.5 Théorème

a) Soient f et g deux applications définies au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et continues en x_0, et λ un réel, alors $f+g$, λf et fg sont continues en x_0.

b) Soit f une application continue en x_0 et g une application continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Preuve : c'est une conséquence immédiate de 1.7.

$\square$

2.6 Corollaire

a) Les fonctions polynômes sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

b) Les fractions rationnelles sont continues en tout point de leur domaine de définition, i.e en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.

Il arrive qu'une fonction ne soit pas définie en un point mais admette tout de même une limite finie en ce point, d'où la définition suivante :

2.7 Définition et proposition

On considère une fonction f définie au voisinage d'un point x_0 sauf en x_0, admettant une limite finie ℓ quand $x \to x_0$ avec $x \neq x_0$: on appelle prolongement par continuité de f en x_0 la fonction $\tilde{f}$ définie sur $D_f \cup \{x_0\}$ par

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in D_f, \text{ et } \tilde{f}(x_0) = \ell$$

la fonction $\tilde{f}$ est alors continue en x_0. Par commodité, le plus souvent on note encore f la fonction ainsi prolongée à $D_f \cup \{x_0\}$.

2.8 Exemple

Soit $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$: $D_f = \mathbb{R}^*$ et on constate que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; on pose alors $f(0) = 0$ et la fonction ainsi prolongée est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

3 Continuité sur un intervalle

3.1 Définition

a) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I non vide de $\mathbb{R}$: on dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

b) Soient a et b des réels tels que $a < b$ et soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$: on dit que f est continue sur $[a, b]$ si f est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

3.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.

a) Soient a et b des points de I, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $y = f(c)$.

b) Si I est un intervalle ouvert $]a, b[$ avec a et b éventuellement infinis et si f admet une limite $\ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ à droite en a et une limite $\ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ à gauche en b, alors pour tout réel y strictement compris entre ℓ_1 et ℓ_2, il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que $y = f(c)$.

Preuve :

a) quitte à échanger les rôles de a et b et à remplacer f par $-f$, , on peut supposer que $a < b$ et $f(a) \leq f(b)$; si $f(a) = f(b)$, on peut prendre $c = a$. Supposons donc maintenant que $f(a) < f(b)$, alors nécessairement $a \neq b$: considérons l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) \leq y\}$$

A est non vide puisqu'il contient a, et est majoré par b donc il possède une borne supérieure c ; on va montrer que $y = f(c)$:

tout d'abord montrons que $c \in I$: $c \leq b$ puisque b est un majorant de A, de plus $a \in A$ donc $a \leq c$, donc $c \in [a, b] \subset I$: f est donc continue en c.

Considérons un réel $\varepsilon > 0$: comme f est continue en c, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ c - \alpha < x < c + \alpha \Longrightarrow f(x) - \varepsilon < f(c) < f(x) + \varepsilon$$

or $c - \alpha$ n'est pas un majorant de A donc il existe $t \in A$ tel que $c - \alpha < t \leq c$ d'où $f(c) < f(t) + \varepsilon \leq y + \varepsilon$ puisque $t \in A$.

Si $c = b$, alors $f(a) \leq y \leq f(c)$ d'où $y \leq f(c) \leq y + \varepsilon$ et ainsi $|f(c) - y| \leq \varepsilon$.

Si $c < b$, alors quitte à diminuer α, on a $c < b - \alpha$ et il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $c < x < c + \alpha < b$, alors $x \notin A$, alors que $x \in [a, b]$ donc $f(x) > y$ d'où $f(c) > f(x) - \varepsilon > y - \varepsilon$.

Ainsi, dans tous les cas, on a $|f(c) - y| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$: on en déduit que $f(c) = y$ d'après I.2.9.

b) Traitons, par exemple, le cas où $a = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ et où $b \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$: alors, si $y > \ell_1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y > \ell_1 + \varepsilon$; or $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell_1$ donc il existe $A > 0$ tel que

$$x < -A \Longrightarrow \ell_1 - \varepsilon < f(x) < \ell_1 + \varepsilon$$

on peut donc trouver un réel $x_0 \in]-\infty, b[$ tel que $f(x_0) < \ell_1 + \varepsilon < y$.

De même, comme $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$, on peut trouver un réel $x_1 \in]a, b[$ tel que $y < f(x_1)$.

On constate facilement que, dans tous les cas de figure, si y est strictement compris entre ℓ_1 et ℓ_2, il existe x_0 et $x_1 \in]a, b[$ tels que $f(x_0) < y < f(x_1)$ et il ne reste plus qu'à appliquer a).

$\square$

3.3 Corollaire

a) Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: s'il existe $a \in I$ et $b \in I$ tels que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$, alors il existe $c \in I$ (en fait c compris entre a et b) tel que $f(c) = 0$.

3.4 Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes : si on note $m = \inf f([a,b])$ et $M = \sup f([a,b])$, il existe c et $d \in [a,b]$ tels que $m = f(c)$ et $M = f(d)$ et on a $f([a,b]) = [m,M]$.

Preuve :

La preuve se fait par l'absurde : supposons que f n'est pas majorée sur $[a,b]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > n$, on construit ainsi une suite bornée de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \to +\infty$; d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. II.4.7), on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel $\ell \in [a,b]$, alors $f(x_{\varphi(n)}) \to f(\ell)$ puisque f est continue sur $[a,b]$, ce qui est impossible puisque $f(x_n) \to +\infty$ et donc $f(x_{\varphi(n)}) \to +\infty$ aussi : on en déduit que f est majorée par sur $[a,b]$ et donc l'ensemble $f([a,b])$ admet une borne supérieure M.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

ainsi la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers M ; or on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers un réel $\ell \in [a,b]$, alors $f(x_{\varphi(n)}) \to f(\ell)$, d'où $M = f(\ell)$.

La preuve est analogue pour montrer que f est minorée sur $[a,b]$ et que $\inf f([a,b])$ est atteinte sur $[a,b]$.

Enfin, le théorème des valeurs intermédiaires 3.2 nous donne $f([a,b]) = [m,M]$.

$\square$

3.5 Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors on a

a) $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I ;

b) f est une bijection de I sur $f(I)$;

c) la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et strictement monotone de même sens que f ;

d) la courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormé est symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Preuve :

quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante sur I, donc f est injective, en effet, si $x_1 \neq x_2$ dans I, on peut supposer que $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$, donc $f(x_1) \neq f(x_2)$.

a) et b) : on va faire la démonstration dans le cas où $I =]a,b[$ avec a et b éventuellement infinis (la preuve est analogue si l'intervalle est fermé ou semi-fermé) :

d'après 1.14 les limites $\ell_1 = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\ell_2 = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existent dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; comme f est strictement croissante sur I on a pour tout $t \in]a,b[$, $\ell_1 < f(t) < \ell_2$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires 3.2.b), pour tout $y \in]\ell_1, \ell_2[$, il existe $x \in]a, b[$ tel que $y = f(x)$, donc $f(]a, b[) =]\ell_1, \ell_2[$ et ainsi f est une bijection de $]a, b[$ sur $]\ell_1, \ell_2[$ puisque f est injective.

c) Montrons d'abord que f^{-1} est strictement croissante sur $f(]a, b[)$:

soient y_1 et $y_2 \in f(]a, b[)$ avec $y_1 < y_2$, alors il existe x_1 et x_2 uniques dans $]a, b[$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$; on a $x_1 \neq x_2$ puisque $y_1 \neq y_2$, et on ne peut pas avoir $x_1 > x_2$, car dans ce cas on aurait $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, donc $x_1 < x_2$, i.e $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Montrons maintenant que f^{-1} est continue sur $f(]a, b[)$: soit $y_0 \in f(]a, b[)$ et soit $x_0 = f^{-1}(y_0) \in]a, b[$; alors pour tout $\varepsilon > 0$ tel que

$$a < x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon < b$$

on a, puisque f est strictement croissante,

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$$

considérons alors $\alpha = \min(y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0)$: pour tout y tel que $|y - y_0| < \alpha$, on a

$$f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$$

donc

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(x) < x_0 + \varepsilon$$

puisque f^{-1} est strictement croissante. Donc f^{-1} est continue en y_0.

d) Comme f est une bijection de I sur $f(I)$, à tout couple $(x, f(x))$ de la courbe représentative de f est associé le couple $(f(x), x)$ de la courbe représentative de f^{-1} : ainsi les deux courbes se déduisent l'une de l'autre par la transformation du plan qui à tout point (x, y) associe le point (y, x), i.e la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

$\square$

On a une sorte de "réciproque" de ce théorème avec le résultat suivant :

3.6 Proposition

Soit f une fonction continue et injective sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors f est strictement monotone sur I.

Preuve :

Montrons d'abord que si a, b, c sont trois points de I tels que $a < b < c$, alors $f(b)$ est entre $f(a)$ et $f(c)$: supposons que ce n'est pas le cas, alors, par exemple, $f(c)$ est entre $f(a)$ et $f(b)$ et par conséquent il existe $t \in [a, b]$ tel que $f(c) = f(t)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, d'où $c = t$ puisque f est injective, ce qui est impossible puisque $c \notin [a, b]$; la preuve est analogue si $f(a)$ est entre $f(b)$ et $f(c)$.

Considérons maintenant deux points a et b de I tels que $a < b$, alors $f(a) \neq f(b)$ puisque f est injective ; quitte à remplacer f par $-f$ on peut alors supposer que $f(a) < f(b)$. Montrons que dans ce cas f est strictement croissante ; soient x et $y \in I$ tels que $x < y$, alors on a plusieurs cas de figure :

si $a < x < b < y$, alors $f(x)$ est entre $f(a)$ et $f(b)$ d'après le point précédent, et est distinct de $f(a)$ et $f(b)$ puisque f est injective, donc $f(a) < f(x) < f(b)$; de même, on a $f(a) < f(b) < f(y)$, d'où $f(x) < f(y)$;

si $a < b < x < y$, alors $f(b)$ est entre $f(a)$ et $f(x)$ d'après le point précédent, et est distinct de $f(a)$ et $f(x)$ puisque f est injective, donc $f(a) < f(b) < f(x)$; de même, on a $f(b) < f(x) < f(y)$, d'où $f(x) < f(y)$, etc... dans tous les cas, on obtient $f(x) < f(y)$.

Donc f est strictement croissante.

$\square$

4 Comparaison de fonctions

4.1 Théorème

Soient f et g deux applications définies sur un voisinage V d'un point $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et telles que $\forall x \in V,\ f(x) \leq g(x)$, alors on a

a) si f et g admettent des limites finies en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

b) si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$;

c) si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Preuve : analogue à celle faite pour les suites. (cf. II 4.1)

$\square$

4.2 Théorème "des gendarmes"

Soient f,g et h des applications définies sur un voisinage V d'un point $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et telles que $\forall x \in V,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$; alors si f et h admettent la même limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ quand $x \to x_0$, on a

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell.$$

Preuve : analogue à celle faite pour les suites. (cf. II 4.5)

$\square$

4.3 Définitions

Soient f et g deux applications définies au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;

a) on dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une application φ définie et bornée sur V vérifiant : $f(x) = g(x)\varphi(x), \forall x \in V$.

On écrit alors $f = O(g)$, ce qui se lit "f est un grand O de g" au voisinage de x_0 ;

b) on dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une application φ définie sur V vérifiant :

- $f(x) = g(x)\varphi(x), \forall x \in V$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.

On écrit alors $f = o(g)$, ce qui se lit "f est un petit o de g" au voisinage de x_0 ;

c) on dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une application φ définie sur V vérifiant :

- $f(x) = g(x)\varphi(x), \forall x \in V$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$.

On écrit alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

Dans le cas où x_0 est un réel, si la fonction g ne s'annule qu'au plus en x_0 sur V, on peut exprimer simplement les définitions précédentes à l'aide du quotient $\dfrac{f}{g}$:

4.4 Proposition

Soient f et g deux applications définies sur un voisinage V de $x_0 \in \mathbb{R}$; si g ne s'annule au plus qu'en x_0 sur V alors on a :

a) f est dominée par g au voisinage de x_0 si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur $V \setminus \{x_0\}$;

b) f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

c) f est équivalente à g au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

De même, dans le cas où $x_0 = +\infty$, on a le résultat suivant :

4.5 Proposition

Soient f et g deux applications définies sur un voisinage V de $+\infty$ tel que g ne s'annule pas sur V, alors on a :

a) f est dominée par g au voisinage de $+\infty$ si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur V ;

b) f est négligeable devant g au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

c) f est équivalente à g au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On laisse au lecteur le soin de transcrire cette proposition en $-\infty$.

4.6 Proposition

a) si $a_n \neq 0$, alors $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$: une fonction polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$.

b) Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, $(\ln x)^\beta = o(x^\alpha)$ au voisinage de $+\infty$.

c) Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, $x^\beta = o(e^{\alpha x})$ au voisinage de $+\infty$.

d) Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, $(\ln x)^\beta = o(e^{\alpha x})$ au voisinage de $+\infty$.

e) Pour tout $\alpha > 0$ et tous β et $\gamma \in \mathbb{R}$, $x^\beta (\ln x)^\gamma = o(e^{\alpha x})$ au voisinage de $+\infty$.

f) Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, $(|\ln x|)^\beta = o(\frac{1}{x^\alpha})$ au voisinage de 0^+.

Preuve : cf. exercice.

$\square$

4.7 Proposition

(a) Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ admettant une limite finie non nulle ℓ quand $x \longrightarrow x_0$, alors $f(x) \sim \ell$ au voisinage de x_0.

(b) Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; si $f \sim g$ au voisinage de x_0 et si g possède une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ quand $x \longrightarrow x_0$, alors $f(x) \longrightarrow \ell$ quand $x \longrightarrow x_0$.

(c) Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; si $f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) \leq 0$) pour tout $x \in V$, alors $g(x) \geq 0$ (resp. $g(x) \leq 0$) pour tout $x \in V$.

Preuve : analogue à celle faite pour les suites (cf. II 4.11).

$\square$

4.8 Proposition

La relation $\sim$ au voisinage d'un point x_0 est une relation d'équivalence, i.e elle vérifie les propriétés suivantes :

a) elle est réflexive, i.e pour toute application f définie au voisinage de x_0, on a $f \sim f$;

b) elle est symétrique, i.e pour toutes applications f et g définies au voisinage de x_0, $f \sim g \Longleftrightarrow g \sim f$;

c) elle est transitive, i.e pour toutes applications f,g et h définies au voisinage de x_0,

$$f \sim g \text{ et } g \sim h \Longrightarrow f \sim h.$$

Preuve : analogue à celle faite pour les suites. (cf. II 4.12)

$\square$

Les points 4.9 et 4.10 suivants font appel à des notions vues dans le cours "Compléments d'Analyse" : les étudiants qui ne suivent pas cette option n'auront qu'à admettre le corollaire 4.10.

4.9 Proposition et définition

Si f admet un d.l. à l'ordre n au point $x_0 \in \mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + a_{p+1}(x - x_0)^{p+1} + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0))^n$$

avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \sim a_p(x - x_0)^p$ au voisinage de x_0 : le monôme $a_p(x - x_0)^p$ (premier terme non nul du d.l) est appelé partie principale du d.l. de f au voisinage de x_0.

Preuve : Au voisinage de x_0, on a si $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x)}{a_p(x-x_0)^p} = 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x-x_0) + \cdots + \frac{a_n}{a_p}(x-x_0)^{n-p} + o((x-x_0)^{n-p})$$

d'où

$$\frac{f(x)}{a_p(x-x_0)^p} \longrightarrow 1 \text{ quand } x \longrightarrow x_0 \text{ et } x \neq x_0$$

et ainsi $f(x) \sim a_p(x-x_0)^p$ au voisinage de x_0.

□

4.10 Corollaire

au voisinage de 0, on a les équivalents suivants :

a) $\sin x \sim x$ et $\operatorname{sh} x \sim x$;

b) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ et $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$;

c) $e^x - 1 \sim x$;

d) $\ln(1+x) \sim x$;

e) $\arctan x \sim x$;

f) $\arcsin x \sim x$.

Plus généralement, si u est une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ telle que $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$, alors on a les équivalents suivants au voisinage de x_0 :

a) $\sin u(x) \sim u(x)$ et $\operatorname{sh} u(x) \sim u(x)$;

b) $1 - \cos u(x) \sim \frac{u^2(x)}{2}$ et $\operatorname{ch} u(x) - 1 \sim \frac{u^2(x)}{2}$;

c) $e^{u(x)} - 1 \sim u(x)$;

d) $\ln(1+u(x)) \sim u(x)$;

e) $\arctan u(x) \sim u(x)$;

f) $\arcsin u(x) \sim u(x)$.

4.11 Opérations sur les équivalents

Soient f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et ne s'annulant au plus qu'en x_0 sur un voisinage $]x_0 - r, x_0 + r[$ de x_0 si $x_0 \in \mathbb{R}$, alors on a

a) si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$;

b) si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 alors $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$;

c) si $f_1 \sim g_1$ et au voisinage de x_0 et si f_1 est strictement positive au voisinage de x_0 (d'où f_2 l'est aussi), alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f_1^\alpha \sim g_1^\alpha$ (si $\alpha \in \mathbb{N}$, il n'y a pas de condition de signe sur les fonctions) ;

d) $e^{f_1} \sim e^{g_1}$ au voisinage de x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1 - g_1) = 0$.

e) si f_1 et g_1 prennent des valeurs > 0 au voisinage de x_0 et si g_1 possède une limite (finie ou pas) distincte de 1 quand $x \longrightarrow x_0$, alors $f_1 \sim g_1$ au voisinage de x_0 entraîne $\ln f_1 \sim \ln g_1$.

Preuve : analogue à celle faite pour les suites. (cf. II 4.12)

□

4.12 Proposition

Considérons deux fonctions f et g définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors si $g = o(f)$ au voisinage de x_0, on a $f + g \sim f$ au voisinage de x_0.

Preuve : analogue à celle faite pour les suites. (cf. II 4.14)

4.13 Remarques

a) si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0, on n'a pas en général $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$:

en effet prenons $f_1(x) = x + x^2$, $g_1(x) = x$, $f_2(x) = -x + x^3$ et $g_2(x) = -x$, alors $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de 0 mais $(f_1 + f_2)(x) = x^2 + x^3$ n'est pas équivalente à $(g_1 + g_2)(x) = 0$.

b) si $f \sim g$ au voisinage de x_0, on n'a pas en général $e^f \sim e^g$:

en effet prenons $f(x) = x + x^2$, $g(x) = x^2$, alors on a bien $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$ mais $\dfrac{e^f}{e^g} = e^{f-g} = e^x \longrightarrow +\infty$ quand $x \longrightarrow +\infty$ donc e^f n'est pas équivalente à e^g au voisinage de $+\infty$.

c) si f et g prennent des valeurs > 0 au voisinage de x_0 et si $f \sim g$ au voisinage de x_0 , on n'a pas en général $\ln f \sim \ln g$:

en effet prenons $f(x) = 1 + x$, $g(x) = 1$, alors on a bien $f \sim g$ au voisinage de 0 mais $\ln f \sim x$ alors que $\ln g = 0$ au voisinage de 0, donc $\ln f$ n'est pas équivalente à $\ln g$ au voisinage de 0.

4.14 Exemples

a) Calculons la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + x - 4}{5x^3 - 4x^2 + 7x - 2}$:

au voisinage de $+\infty$, on a d'après 4.9, $2x^3 - 3x^2 + x - 4 \sim 2x^3$ et $5x^3 - 4x^2 + 7x - 2 \sim 5x^3$ donc, d'après 4.10, $f(x) \sim \dfrac{2x^3}{5x^3} \sim \dfrac{2}{5}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{2}{5}$.

b) Calculons la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$: au voisinage de 0, on a $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ d'après 4.9. De même, $\sin x \sim x$ et ainsi $\sin^2 x \sim x^2$ d'après 4.10, d'où

$$f(x) \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} \sim \frac{1}{2} \text{ et ainsi } \lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}.$$

c) Calculons la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 - 2x^2 + 5x - 2)}{\ln(x^2 + 3x - 1)}$: au voisinage de $+\infty$, on a

$x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \sim x^3$ et $x^3 \to +\infty \neq 1$ donc $\ln(x^3 - 2x^2 + 5x - 2) \sim \ln(x^3) \sim 3\ln x$, de même $\ln(x^2 + 3x - 1) \sim \ln(x^2) \sim 2\ln x$, d'où

$$f(x) \sim \frac{3\ln x}{2\ln x} \sim \frac{3}{2} \text{ et ainsi } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{2}.$$

d) Calculons la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{\tan(2x)}{3x}$:

au voisinage de 0, on a $\tan(2x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \sim \dfrac{2x}{1} = 2x$ puisque $\sin(2x) \sim 2x$ et $\cos(2x) \to 1$ quand $x \to 0$ (cf. 4.7, 4.10 et 4.11). D'où

$$f(x) \sim \frac{2x}{3x} \sim \frac{2}{3} \text{ et ainsi } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{3}.$$