Chapitre 5

Fonctions usuelles - Partie II

Dans ce chapitre, nous allons introduire de nouvelles fonctions "usuelles". Le point commun entre toutes ces fonctions est qu'elles sont toutes définies comme étant des fonctions réciproques.

L'introduction de ces fonctions va nous permettre en particulier "d'enrichir" notre liste des dérivées/primitives "usuelles".

5.1 Fonctions circulaires réciproques

5.1.1 Fonction arc sinus

La fonction sinus étant périodique, elle ne peut pas être injective. Elle n'est donc pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ et par conséquent nous ne pouvons pas définir une fonction réciproque réciproque de la fonction sinus.
Toutefois, la **restriction** de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ est continue, strictement croissante à valeurs dans $[-1;1]$. Elle définit donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1;1]$ et cette restriction admet alors une fonction réciproque.

Définition

- *On appelle* ***arc sinus*** *et on note* **arcsin** *la fonction réciproque de la restriction de la fonction sinus à l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ *à valeurs dans* $[-1;1]$.
- *L'arc sinus du réel* $y \in [-1;1]$ *est l'unique solution dans l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ *de l'équation d'inconnue* x *:* $\sin(x) = y$. *On le note* $\arcsin(y)$.
- *On a*

$$\text{pour tout } y \in [-1;1], \quad \sin(\arcsin(y)) = y,$$
$$\text{pour tout } x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) = x.$$

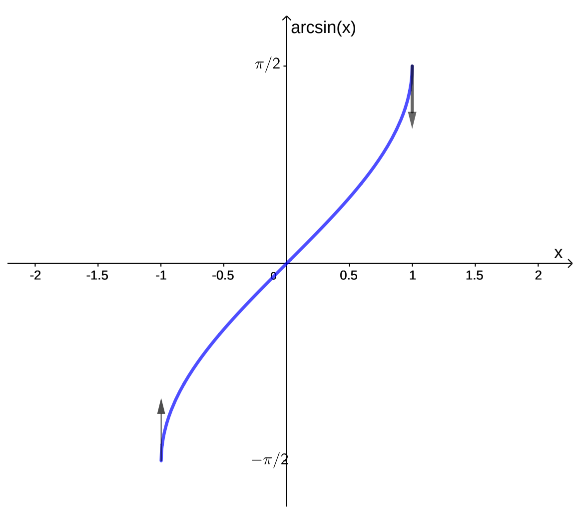
Propriétés

- *La fonction arc sinus est définie sur* $[-1;1]$ *à valeurs dans* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
- *La fonction arc sinus est continue, strictement croissante sur* $[-1;1]$
- *La fonction arc sinus est impaire*
- *Nous avons*
$$\text{pour tout } x \in [-1;1], \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$
- *La fonction arc sinus est dérivable sur* $]-1;1[$ *et*
$$\text{pour tout } x \in]-1;1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tableau de variation

x	-1		0		1
$\arcsin'(x)$	$\|$		$+$		$\|$
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Courbe représentative



5.1.2 Fonction arc cosinus

De même, la **restriction** de la fonction cosinus à l'intervalle $[0;\pi]$ est continue, strictement décroissante à valeurs dans $[-1;1]$. Elle définit donc une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$ et elle admet alors une fonction réciproque.

Définition

- *On appelle* ***arc cosinus*** *et on note* **arccos** *la fonction réciproque de la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle* $[0;\pi]$ *à valeurs dans* $[-1;1]$.
- *L'arc cosinus du réel* $y \in [-1;1]$ *est l'unique solution dans l'intervalle* $[0;\pi]$ *de l'équation d'inconnue* x *:* $\cos(x) = y$. *On le note* $\arccos(y)$.
- *On a*

$$\text{pour tout } y \in [-1;1], \quad \cos(\arccos(y)) = y,$$

$$\text{pour tout } x \in [0;\pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x.$$

Propriétés

- *La fonction arc cosinus est définie sur* $[-1;1]$ *à valeurs dans* $[0;\pi]$
- *La fonction arc cosinus est continue, strictement décroissante sur* $[-1;1]$
- *Nous avons*

$$\text{pour tout } x \in [-1;1], \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

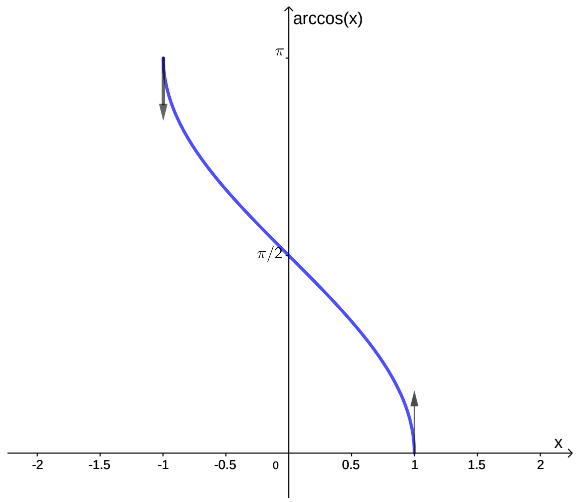
- *La fonction arc cosinus est dérivable sur* $]-1;1[$ *et*

$$\text{pour tout } x \in]-1;1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tableau de variation

x	-1	0	1
$\arccos'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$
$\arccos(x)$	π	$\searrow \frac{\pi}{2} \searrow$	0

Courbe représentative



5.1.3 Fonction arc tangente

La **restriction** de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ est continue, strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle définit donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ et elle admet alors une fonction réciproque.

Définition

- *On appelle **arc tangente** et on note **arctan** la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
- *L'arc tangente du réel $y \in \mathbb{R}$ est l'unique solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ de l'équation d'inconnue x : $\tan(x) = y$. On le note $\arctan(y)$.*
- *On a*

$$\text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(y)) = y,$$

$$\text{pour tout } x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) = x.$$

Propriétés

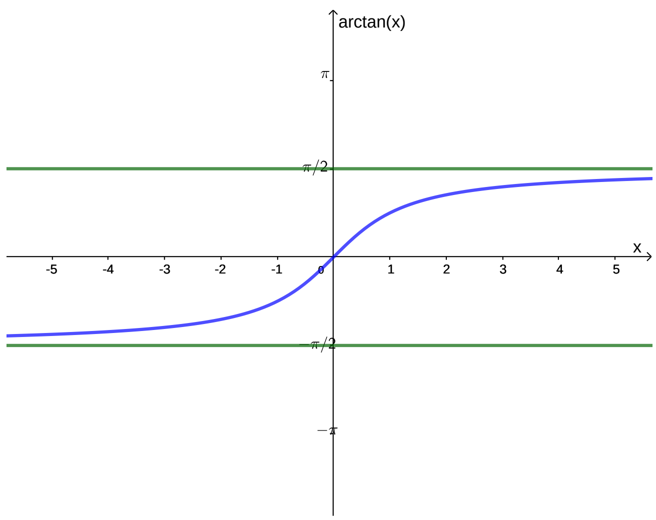
- *La fonction arc tangente est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$*
- *La fonction arc tangente est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$*
- *La fonction arc tangente est impaire*
- *La fonction arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Tableau de variation

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$\arctan'(x)$	$+$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2} \nearrow 0 \nearrow \frac{\pi}{2}$

<u>Courbe représentative</u>



5.2 Fonctions hyperboliques réciproques

5.2.1 Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et elle admet par conséquent une fonction réciproque.

<u>Définition</u>

- *On appelle* ***<u>argument sinus hyperbolique</u>*** *et on note <u>argsh</u> la fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
- *L'argument sinus hyperbolique du réel y est l'unique solution dans l'intervalle $\mathbb{R}$ de l'équation d'inconnue x : $\mathrm{sh}(x) = y$. On le note argsh(y).*
- *On a*

$$\text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(\mathit{argsh}(y)) = y,$$

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \mathit{argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x.$$

Propriétés

- *La fonction argument sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$*
- *La fonction argument sinus hyperbolique est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$*
- *La fonction argument sinus hyperbolique est impaire*
- *Nous avons*

$$\text{pour tout } x \in [-1;1], \quad \text{ch}(argsh(x)) = \sqrt{1+x^2}.$$

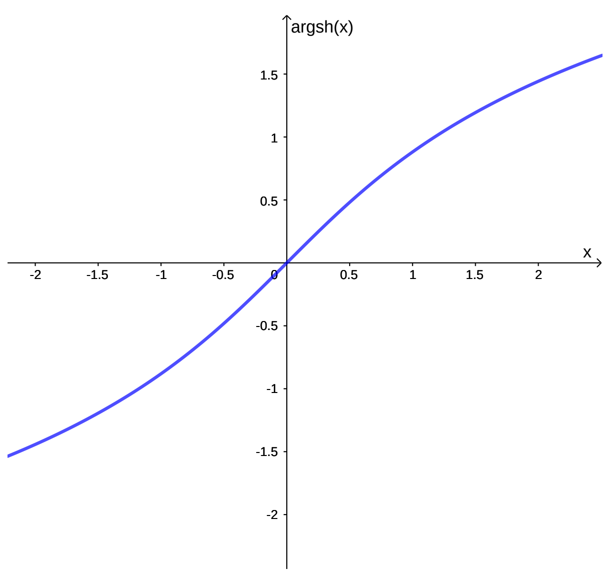
- *La fonction argument sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{argsh}'(x)$		$+$	
$\text{argsh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative



Remarque

Nous pourrions nous passer de l'introduction de la fonction argument sinus hyperbolique. En effet nous avons aussi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \text{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Toutefois, il est peut-être plus aisé de retenir qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est $x \mapsto \text{argsh}(x)$! Ceci se montre facilement. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
y = \text{argsh}(x) &\iff x = \text{sh}(y) \\
&\iff x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&\iff e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \\
&\iff \begin{cases} e^y = z \\ z^2 - 2xz - 1 = 0 \end{cases} \\
&\iff e^y = x + \sqrt{x^2+1} > 0 \quad \text{ou} \quad e^y = x - \sqrt{x^2+1} < 0 \\
&\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})
\end{aligned}$$

Donc, $y = \text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

5.2.2 Fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique étant paire, elle ne peut donc pas être bijective. Toutefois, la **restriction** de la fonction cosinus hyperbolique à l'intervalle $[0; +\infty[$ est continue strictement croissante à valeurs dans $[1; +\infty[$. Elle définit donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$ et elle admet alors une fonction réciproque.

Définition

- *On appelle* ***argument cosinus hyperbolique*** *et on note argch la fonction réciproque de la restriction de la fonction cosinus hyperbolique à l'intervalle $[0; +\infty[$ à valeurs dans $[1; +\infty[$.*
- *L'argument cosinus hyperbolique du réel $y \in [1; +\infty[$ est l'unique solution dans l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation d'inconnue x : $\text{ch}(x) = y$. On le note $argch(y)$.*
- *On a*

$$\text{pour tout } y \in [1; +\infty[, \quad \text{ch}(argch(y)) = y,$$

$$\text{pour tout } x \in [0; +\infty[, \quad argch(\text{ch}(x)) = x.$$

Propriétés

- *La fonction argument cosinus hyperbolique est définie sur $[1; +\infty[$ à valeurs dans $[0; +\infty[$*
- *La fonction argument cosinus hyperbolique est continue, strictement croissante sur $[1; +\infty[$*
- *Nous avons*

$$\text{pour tout } x \in [1; +\infty[, \quad \text{sh}(argch(x)) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

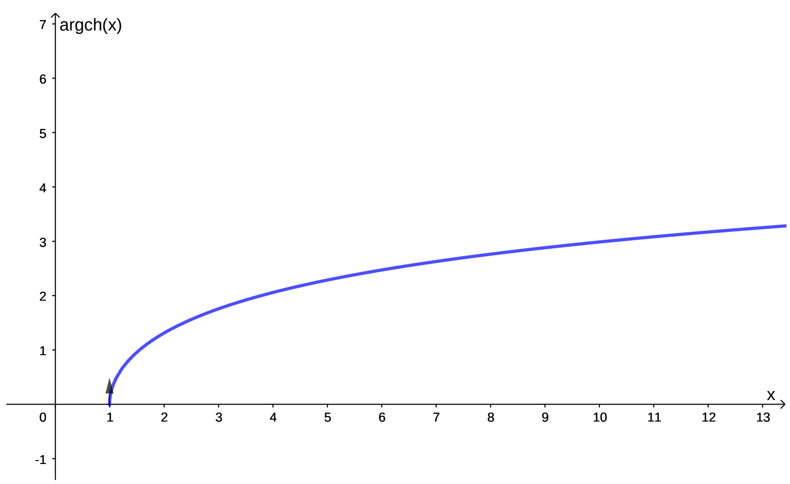
■ *La fonction argument cosinus hyperbolique est dérivable sur* $]1;+\infty[$ *et*

$$\text{pour tout } x \in]1;+\infty[, \quad \mathit{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Tableau de variation

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\text{argch}'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
$\text{argch}(x)$	$0 \nearrow \infty$

Courbe représentative



Remarque

Encore une fois, nous pourrions nous passer de l'introduction de la fonction argument cosinus hyperbolique. En effet nous avons aussi :

$$\forall\ x \in [1;+\infty[, \quad \text{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Mais encore une fois, il est peut-être plus aisé de retenir qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1;+\infty[$ est $x \mapsto \text{argch}(x)$!

De nouveau, ceci se montre facilement. Soit $x \in [1; +\infty[$. Nous avons

$$\begin{aligned}
y = \operatorname{argch}(x) &\iff x = \operatorname{ch}(y) \\
&\iff x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\
&\iff e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \\
&\iff \begin{cases} e^y = z \\ z^2 - 2xz + 1 = 0 \end{cases} \\
&\iff e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 \quad \text{ou} \quad e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} \in]0; 1[\\
&\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \geq 0 \quad \text{ou} \quad y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) < 0
\end{aligned}$$

Or, $y = \operatorname{argch}(x) \in [0; +\infty[$. Donc $y = \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Remarque

Nous venons de voir que $x \mapsto \operatorname{argch}(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1; +\infty[$.
Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est aussi définie sur $]-\infty; -1[$.
On retiendra qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]-\infty; -1[$ est $x \mapsto -\operatorname{argch}(-x)$.