Chapitre 1

Les nombres complexes

1.1 Introduction

Durant votre scolarité, vous avez appris que l'équation $x + 5 = 2$ n'a pas de solution dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, mais elle a une solution dans un ensemble plus grand : $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.
Et, l'équation $5x = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais elle en possède une dans un ensemble plus grand : $\mathbb{Q}$.
De même, l'équation $x^2 = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$, mais nous pouvons en trouver dans l'ensemble plus grand des nombres réels $\mathbb{R}$ ($x = \pm\sqrt{2}$).

Quand une équation n'a pas de solution dans un ensemble donné, une démarche consiste donc à chercher/construire un ensemble plus grand dans lequel cette équation aura des solutions.

Comme l'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, nous allons donc construire un ensemble plus grand, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$ dans lequel cette équation aura des solutions.

1.2 Définitions

Théorème

Il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$, appelé ***ensemble des nombres complexes*** *tel que*

- *L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*
- *Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté* ***i*** *qui vérifie la relation : $i^2 = -1$.*
- *L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une* ***addition*** *et d'une* ***multiplication*** *qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$.*

Définition

- *Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.*
- *Cette écriture est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.*
- *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Le réel x est appelé **partie réelle** de z et le réel y est appelé **partie imaginaire** de z . On note*

$$x = \mathcal{R}e(z) \quad et \quad y = \mathcal{I}m(z).$$

Remarque

Attention, la partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel !

Exemples

- Le nombre complexe $z = 3 - 2i$ est tel que $\mathcal{R}e\,(z) = 3$ et $\mathcal{I}m\,(z) = -2$.
- Le nombre complexe $z = \sqrt{3} + \sqrt{2}i$ est tel que $\mathcal{R}e\,(z) = \sqrt{3}$ et $\mathcal{I}m\,(z) = \sqrt{2}$.
- Le nombre complexe $z = 3$ est tel que $\mathcal{R}e\,(z) = 3$ et $\mathcal{I}m\,(z) = 0$.
- Le nombre complexe $z = 2i$ est tel que $\mathcal{R}e\,(z) = 0$ et $\mathcal{I}m\,(z) = 2$.

Remarque

Si la partie imaginaire de z est nulle i.e. $y = \mathcal{I}m(z) = 0$ alors $z = x$ et z est un nombre réel.

Définition

*Tout nombre complexe z dont la partie réelle est nulle et qui s'écrit donc $z = iy$ $(y \in \mathbb{R})$ s'appelle un **imaginaire pur**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.*

Théorème (égalité de deux nombres complexes)

- *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.*
  Autrement dit, si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2.$$

- *En particulier $z_1 = 0$ si et seulement si $x_1 = 0$ et $y_1 = 0$.*

Exemple

Soit $z = (2x - 1) + i(3 - y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ un nombre complexe.
Nous avons alors

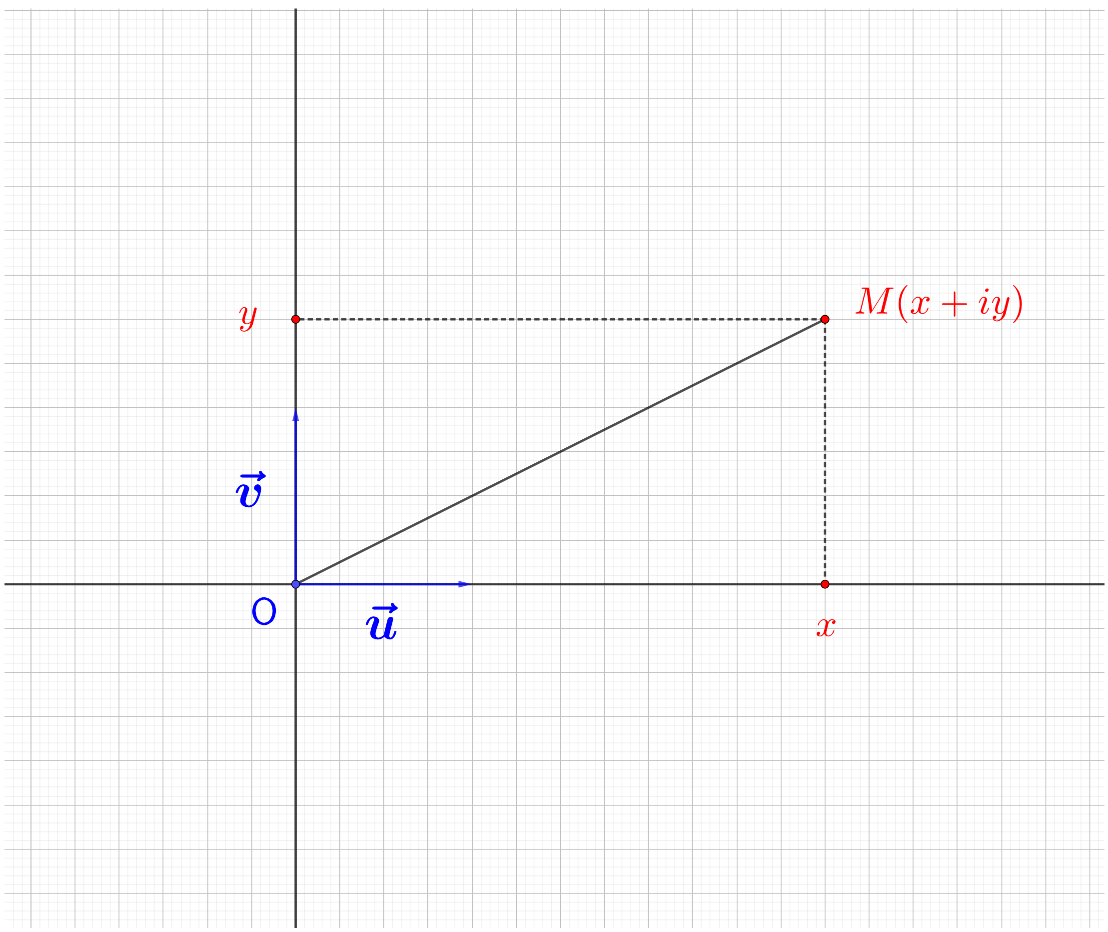
$$z = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ et } 3 - y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ et } y = 3.$$

1.3 Représentation géométrique des nombres complexes

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

Définition

- *À tout nombre complexe $z = x + iy$, nous pouvons associer le point $M(x;y)$ du plan et réciproquement.*
- *Le point $M(x;y)$ s'appelle **l'image** du nombre complexe $z = x + iy$.*
- *Le nombre complexe $z = x + iy$ s'appelle **l'affixe** du point $M(x;y)$.*



Remarques

- Les réels sont représentés sur l'axe des abscisses.
- Les imaginaires purs sont représentés sur l'axe des ordonnées.

1.4 Addition de nombres complexes

1.4.1 Addition

Par construction, l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$.

Définition

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes. Alors

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Ainsi

Proposition

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Nous avons alors

- $\mathcal{R}e(z_1 + z_2) = \mathcal{R}e(z_1) + \mathcal{R}e(z_2)$
- $\mathcal{I}m(z_1 + z_2) = \mathcal{I}m(z_1) + \mathcal{I}m(z_2)$

Exemples

- $(3 - 2i) + (5 + 4i) = 8 + 2i$
- $(3 - 2i) + (5 + 2i) = 8$
- $(3 - 2i) + (-3 + 4i) = 2i$

1.4.2 Opposé d'un nombre complexe, soustraction de nombres complexes

Définition

- *L'**opposé** du nombre complexe $z = x + iy$ est le le nombre complexe, noté $-z$ défini par : $-z = (-x) + (-y)i = -x - iy$.*
- *Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ alors*

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Ainsi

Proposition

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Nous avons alors

- $\mathcal{R}e(z_1 - z_2) = \mathcal{R}e(z_1) - \mathcal{R}e(z_2)$
- $\mathcal{I}m(z_1 - z_2) = \mathcal{I}m(z_1) - \mathcal{I}m(z_2)$

1.5 Multiplication de nombres complexes

1.5.1 Multiplication

Définition

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes. Alors

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = (x_1 \times x_2 - y_1 \times y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Ainsi

Proposition

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Nous avons alors

- $\mathcal{R}e(z_1 \times z_2) = \mathcal{R}e(z_1) \times \mathcal{R}e(z_2) - \mathcal{I}m(z_1) \times \mathcal{I}m(z_2)$
- $\mathcal{I}m(z_1 \times z_2) = \mathcal{R}e(z_1) \times \mathcal{I}m(z_2) + \mathcal{R}e(z_2) \times \mathcal{I}m(z_1)$

Exemples

- $(3-2i)\times(5+4i) = 3\times5+3\times4i-2i\times5-2i\times4i = 15+12i-10i-8i^2 = 15+12i-10i+8 = 23 + 2i.$
- $(3 - 2i) \times (5 + 2i) = 3 \times 5 + 3 \times 2i - 2i \times 5 - 2i \times 2i = 15 + 6i - 10i + 4 = 19 - 4i.$

On retiendra

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont donc les mêmes que dans $\mathbb{R}$ en remplaçant i^2 par -1.

1.5.2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle ***conjugué*** *de z et on note $\mathbf{\bar{z}}$ le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.*

Exemples

- Si $z = 3 + 4i$ alors $\bar{z} = 3 - 4i$.
- Si $z = 2 - i$ alors $\bar{z} = 2 + i$.
- Si $z = 5i$ alors $\bar{z} = -5i$.
- Si $z = 2$ alors $\bar{z} = 2$.

Proposition

Soit z un nombre complexe.

- $z + \bar{z} = 2\,\mathcal{R}e(z)$.
- $z - \bar{z} = 2i\,\mathcal{I}m(z)$.

Propriétés

- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \bar{z}$.
- $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\bar{z}$.

Théorème

- *Pour $z = x + iy$, nous avons*

$$z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

Démonstration

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

1.5.3 Inverse d'un nombre complexe non nul

Théorème

- *Pour tout nombre complexe z* **non nul**, *il existe un unique nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.*
- *Ce nombre s'appelle* ***l'inverse*** *de z et il est noté $\frac{1}{z}$.*

- *Nous avons alors*
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \times \bar{z}}.$$
- *Si $z = x + iy$ alors la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ est*
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Exemples

- Soit $z = 2 - 3i$. Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)\times(2+3i)} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$
- Soit $z = 1 + i$. Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)\times(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

1.5.4 Division de nombres complexes

Définition

Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ un nombre complexe et soit $z_2 = x_2 + iy_2$ un nombre complexe **non nul**. *Nous avons alors*
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2} = (x_1 + iy_1) \times \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}.$$

Exemples

- $\frac{2+i}{2-3i} = \frac{(2+i)\times(2+3i)}{(2-3i)\times(2+3i)} = \frac{1+8i}{13} = \frac{1}{13} + \frac{8}{13}i.$
- $\frac{4+3i}{1+i} = \frac{(4+3i)\times(1-i)}{(1+i)\times(1-i)} = \frac{7-i}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i.$
- $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)\times(1+i)}{(1-i)\times(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$
- $\frac{1}{4+3i} = \frac{(4-3i)}{(4+3i)\times(4-3i)} = \frac{4-3i}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i.$

On retiendra

Pour écrire sous forme algébrique l'inverse d'un nombre complexe ou le quotient de deux nombres complexes, il faut multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

1.6 Opérations avec les conjugués

Théorème

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Nous avons alors

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- $\overline{-z_1} = -\bar{z}_1$.
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1^n} = \bar{z}_1^n$ *($n \in \mathbb{N}$).*
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

1.7 Module d'un nombre complexe

Définition

On appelle ***module*** *d'un nombre complexe $z = x + iy$ la quantité positive*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Propriété

Si le nombre complexe z est l'affixe du point M, alors $|z| = OM$.

Exemples

- $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.
- $|8 - 6i| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.
- $|5| = 5$.
- $|-5| = 5$.
- $|5i| = 5$.
- $|-5i| = 5$.

Proposition (Proriétés du module)

Soient z et z' deux nombres complexes et soit λ un nombre réel. Nous avons

- $|\bar{z}| = |z|$.
- $|zz'| = |z||z'|$.
- $|\lambda z| = |\lambda||z|$ *(et en particulier $|-z| = |z|$).*
- $|z^n| = |z|^n$ *($n \in \mathbb{N}$).*
- *si $z \neq 0$ alors* $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
- *si $z \neq 0$ alors* $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.
- *Inégalité triangulaire :* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

1.8 Équations du second degré à coefficients réels

1.8.1 Un cas particulier

Considérons tout d'abord le cas particulier de l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 = a$$

où a est un nombre réel.
Nous savons déjà que :

- si $a = 0$ alors cette équation possède une unique solution à savoir $x = 0$.
- si $a \in \mathbb{R}^{+*}$ alors cette équation possède deux solutions dans $\mathbb{R}$ à savoir $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.
- si $a \in \mathbb{R}^{-*}$ alors cette équation ne possède pas de solution réelle.

Avec l'introduction des nombres complexes, nous pouvons maintenant montrer que dans le cas $a \in \mathbb{R}^{-*}$, l'équation $z^2 = a$ possède toutefois des solutions dans $\mathbb{C}$.

Proposition
Soit $a \in \mathbb{R}^{-*}$. L'équation $z^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z = i\sqrt{-a} \quad \text{et} \quad z = -i\sqrt{-a}.$$

Démonstration

$$z^2 = a \Leftrightarrow z^2 = i^2(-a) \Leftrightarrow z^2 = i^2(\sqrt{-a})^2 \Leftrightarrow z^2 - i^2(\sqrt{-a})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a}) = 0.$$

D'où le résultat.

Ainsi, nous savons maintenant résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$:

Théorème
Soit $a \in \mathbb{R}$ et considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = a$.

- *si $a = 0$, alors cette équation possède une unique solution à savoir $z = 0$.*
- *si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, alors cette équation possède deux solutions à savoir $z = \sqrt{a}$ et $z = -\sqrt{a}$ qui sont réelles.*
- *si $a \in \mathbb{R}^{-*}$, alors cette équation possède deux solutions à savoir $z = i\sqrt{-a}$ et $z = -i\sqrt{-a}$ qui sont imaginaires purs.*

1.8.2 Le cas général

Nous pouvons maintenant considérer le cas général des équations du second degré à coefficients réels :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, notre équation devient en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Nous sommes alors ramenés au cas particulier précédent et nous obtenons le résultat suivant :

Théorème

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$.
*On associe à cette équation la quantité réelle Δ, appelée **discriminant** de l'équation, définie par*

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

- *si $\Delta = 0$, alors l'équation possède une unique solution réelle :*

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- *si $\Delta > 0$, alors l'équation possède deux solutions réelles :*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- *si $\Delta < 0$, alors l'équation possède deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$