Langages formels

Examen - 2 heures

Documents manuscrits et polycopiés du cours autorisés. Le sujet comporte 2 pages.

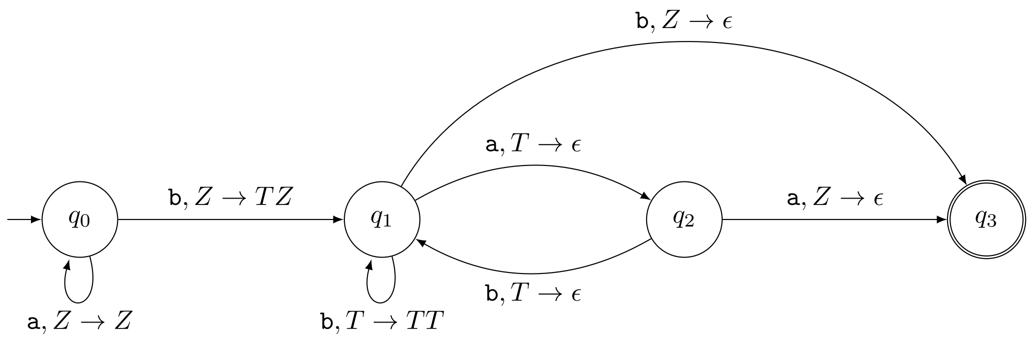
Chaque question vaut un certain nombre de **`pts`** *pouvant varier de 0 à 4. La note finale est directement proportionnelle au nombre total de* **`pts`** *obtenu. Le facteur de proportionnalité est le même pour tous les étudiants.*

Plusieurs des questions de l'énoncé nécessitent une réponse rédigée. L'utilisation d'une syntaxe, grammaire, et sémantique en accord avec la tradition écrite française est nécessaire.

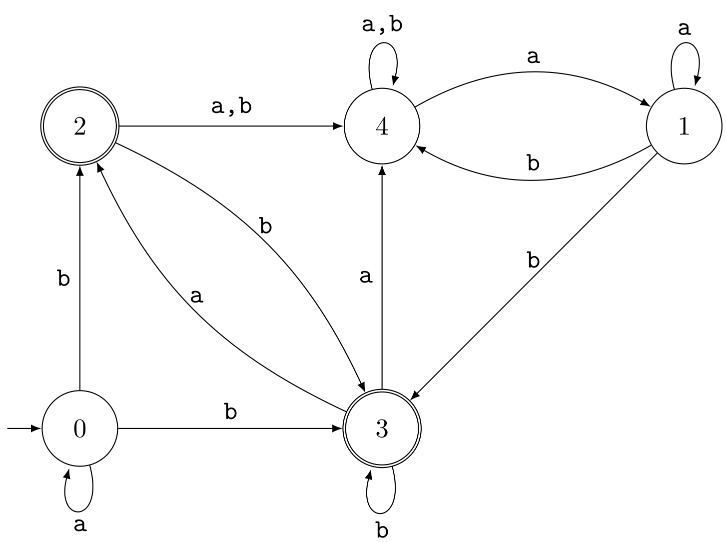
Questions de cours

Q 1) (2 `pts`) Parmi les 4 mots suivants, lesquels sont acceptés par l'automate à pile suivant par état acceptant ? Il n'est pas demandé de justifier.

— `abaa`
— `baaa`
— `abbaba`
— `abbabb`



Q 2) (3 `pts`) Déterminiser puis minimiser l'automate A_1 suivant.
Indications : l'automate déterministe, avant minimisation, a 6 états.



Q 3) (2 `pts`) On considère la grammaire G suivante :

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & AD \mid \mathtt{a} \\
A & \to & AS \mid D \mid \epsilon \\
D & \to & \mathtt{b} \mid \mathtt{c}D
\end{array}
$$

Donner des arbres de dérivation pour les 2 mots suivants :

— `aaaab`
— `bb`

Automates - Problème

Soit L un langage sur l'alphabet A et u un mot. On note $u^{-1}L$ l'ensemble des mots de L qui commencent par u, auxquels on a enlevé u.

Formellement :

$$u^{-1}L = \{v \in A^\star \mid uv \in L\}$$

Par exemple, si $L = \{\mathtt{abba}, \mathtt{baa}, \mathtt{aaab}\}$ alors $\mathtt{a}^{-1}L = \{\mathtt{bba}, \mathtt{aab}\}$ car seuls les mots `abba` et `aaab` de L commencent par le mot `a`. De même $(\mathtt{ab})^{-1}L = \{\mathtt{ba}\}$ car seul le mot `abba` commence par `ab`. Enfin, $(\mathtt{bb})^{-1}L = \emptyset$ car aucun mot de L ne commence par `bb`.

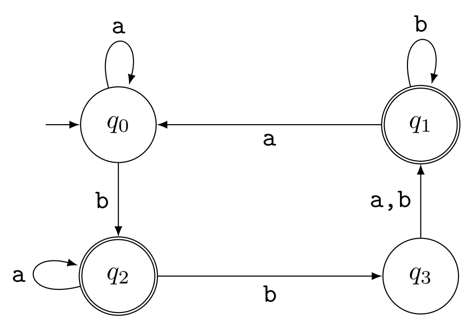
Q 4) (1 pts) Calculer $u^{-1}L$ pour

— $L = \{\mathtt{a}, \mathtt{ab}, \mathtt{abb}\}$ et $u = \mathtt{a}$

— $L = \{\mathtt{bba}, \mathtt{bbb}, \mathtt{bab}\}$ et $u = \mathtt{bb}$

Q 5) (2 pts) Soit L le langage des mots sur l'alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ qui ont un nombre pair de `a`. Donner une expression régulière pour L, $\mathtt{a}^{-1}L$, $(\mathtt{ab})^{-1}L$ et $(\mathtt{aa})^{-1}L$ (on veut donc 4 expressions régulières).

Q 6) (2 pts) Soit L un langage rationnel et u un mot quelconque. Montrez que $u^{-1}L$ est un langage rationnel. Pour cela, on expliquera comment transformer un automate déterministe qui reconnaît L en un automate qui reconnaît $u^{-1}L$, (a) d'abord dans le cas général (b) puis dans le cas particulier de l'automate $\mathcal{A}_1$ suivant pour $u = \mathtt{abb}$:



Notation polonaise

On se place dans l'alphabet $\{\mathtt{0,1,+,*}\}$ La notation polonaise (aussi appelée notation préfixée) est une notation des expressions où le symbole mathématique précède les opérandes, au lieu d'être entre les deux opérandes comme dans l'écriture traditionnelle. Par exemple, on écrira `+ 1 1` au lieu de `1 + 1` et `* 5 + 2 3` à la place de `5 * (2 + 3)`.

Une grammaire pour reconnaître les mots en notation polonaise inversée est la suivante :

$$\begin{array}{lcl} S & \to & +SS \mid *SS \mid E \\ E & \to & \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \end{array}$$

Q 7) (1 pts) Donner les arbres de dérivation pour `+11` et `+1*11`.

Q 8) (2 pts) Calculer l'automate des items LR(0). Vérifier qu'il n'y a pas de conflits Shift/Reduce ou Reduce/Reduce.

Q 9) (2 pts) En utilisant l'automate des items, faire l'analyse syntaxique de `+*111` et de `+111`.

Pour les questions suivantes, on s'intéressera à la grammaire simplifiée :

$$\mathtt{S} \to \mathtt{*SS} \mid 1$$

Si u est un mot et a une lettre (parmi `S`, `*`, et `1`), on note $|u|_a$ le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot u. Par exemple pour le mot $u = \mathtt{**1S1*S}$, on a $|u|_\mathtt{S} = 2$, $|u|_\mathtt{1} = 2$ et $|u|_* = 3$.

Q 10) (2 pts) Montrez par récurrence sur n que si $\mathtt{S} \Rightarrow^n u$ avec u sur l'alphabet $\{\mathtt{1,*,S}\}$ alors $|u|_\mathtt{S} + |u|_\mathtt{1} = |u|_* + 1$

Q 11) (2 pts) Soit L l'ensemble des mots reconnu par la grammaire simplifiée. Montrez que $L \cap \mathtt{*}^\star\mathtt{1}^\star$ n'est pas rationnel. En déduire que L n'est pas rationnel.