Mathématiques discrètes 2
Examen du 28/05/2019

Consignes :

- Les seuls documents autorisés sont : les supports de cours, et une feuille A4 manuscrite.
- La calculatrice est autorisée.
- Le vocabulaire et les notations adéquates doivent être utilisés.

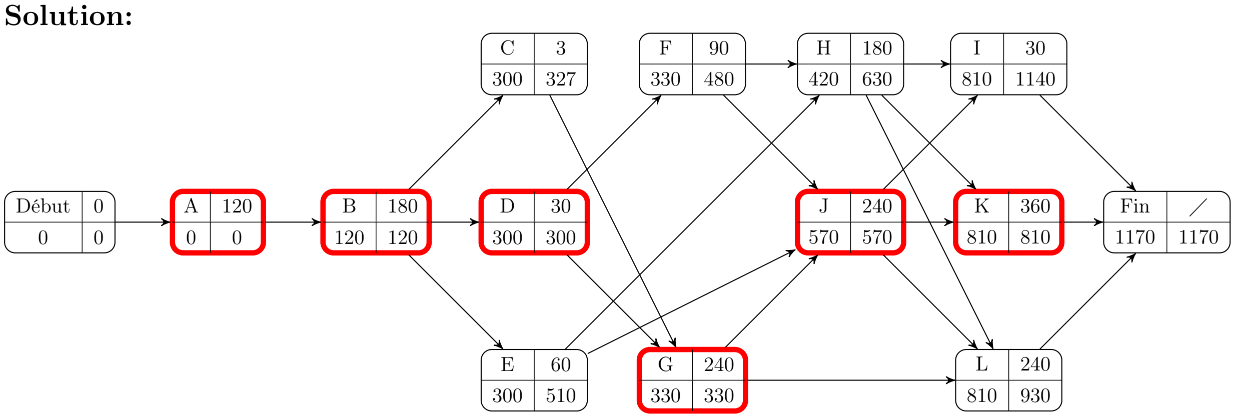
Exercice 1. (12 points)

Afin d'exploiter un nouveau site minier, un certain nombre de tâches doivent être effectuées. Le tableau suivant liste les différentes tâches avec leurs contraintes de précédence :

Code	Description	Durée (jours)	Tâches précédentes
A	Obtenir la permission d'exploitation	120	
B	Établir une piste de 6 km	180	A
C	Transport et installation de deux sondes	3	B
D	Établir un bâtiment temporaire dédié aux travailleurs	30	B
E	Goudronner la piste	60	B
F	Approvisionner en eau	90	D
G	Sonder	240	C, D
H	Mettre en place trois fosses	180	E, F
I	Transport et installation du matériel d'exploitation au fond	30	H, J
J	Construire les bureaux et hébergements pour travailleurs	240	E, F, G
K	Tracé et tassement du fond	360	H, J
L	Construire une installation d'épuration du minerai	240	G, H, J

1. À l'aide de la méthode MPM :
   (a) (2 points) représenter le graphe associé au projet (minimiser le nombre de niveaux) ;
   (b) (2 points) donner pour chaque tâche sa date au plus tôt ainsi que sa date au plus tard ;
   (c) (1 point) indiquer les tâches critiques et donner (au moins) un chemin critique.

Solution:



2. (1 point) Existe-t-il des contraintes inutiles dans le projet ? Pourquoi ?

Solution: Dans le graphe, l'arc (G, L) est inutile car il existe déjà un chemin de G vers L en passant par J. La précédence mentionnant la tâche G pour la tâche L est donc inutile (cf. TD). Il n'y a pas d'autre contrainte inutile.

3. (1 point) Donner la durée minimale totale du projet.

Solution: La durée minimale du projet est de 1170 jours.

4. (2 points) Calculer les marges totales et libres de chacune des tâches du projet.

Solution:

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Marge totale	0	0	27	0	210	150	0	210	330	0	0	120
Marge libre	0	0	27	0	60	0	0	210	330	0	0	120

5. (a) (0,5 points) Donner une tâche k telle que sa marge totale $\mathrm{MT}(k)$ soit différente de 0 et sa marge libre $\mathrm{ML}(k)$ soit égale à 0.
   (b) (0,5 points) Que se passe-t-il pour la date de fin du projet si cette tâche k est décalée d'un nombre de jours $n \leq \mathrm{MT}(k)$?
   (c) (0,5 points) Que se passe-t-il pour les tâches suivantes si cette tâche k est décalée d'un nombre de jours $n \leq \mathrm{MT}(k)$?

Solution:
(a) La seule tâche possible est la tâche F avec $\mathrm{MT}(F) = 150$ et $\mathrm{ML}(F) = 0$.
(b) La fin du projet n'est pas modifiée.
(c) La date de début au plus tôt des tâches suivantes peut être décalée (ici H est décalée d'autant).

6. (a) (0,5 points) Donner une tâche k telle que $\mathrm{MT}(k) > \mathrm{ML}(k)$ et $\mathrm{ML}(k) \neq 0$.
   (b) (0,5 points) Que se passe-t-il pour la date de fin du projet si cette tâche k est décalée d'un nombre de jours $n \leq \mathrm{ML}(k)$?
   (c) (0,5 points) Que se passe-t-il pour les tâches suivantes si cette tâche k est décalée d'un nombre de jours $n \leq \mathrm{ML}(k)$?

Solution:
(a) La seule tâche possible est la tâche E avec $\mathrm{MT}(E) = 210$ et $\mathrm{ML}(E) = 60$.
(b) La fin du projet n'est pas modifiée.
(c) La date de début au plus tôt des tâches suivantes n'est pas modifiée non plus.

Exercice 2. (3 points)

Montrer que dans tout projet, et pour toute tâche k on a

$$\mathrm{ML}(k) \leq \mathrm{MT}(k)$$

Indication : on pourra utiliser le fait que $t_i \leq T_i$ pour toute tâche i d'un projet.

Solution: Soit k une tâche.

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{ML}(k) & \leq & \mathrm{MT}(k) \\ \stackrel{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} & \min\limits_{j\in\Gamma^+(k)} t_j - t_k - d_k & \leq & T_k - t_k \\ \Leftrightarrow & \left(\min\limits_{j\in\Gamma^+(k)} t_j\right) - t_k - d_k & \leq & T_k - t_k \\ \Leftrightarrow & \left(\min\limits_{j\in\Gamma^+(k)} t_j\right) - d_k & \leq & T_k \\ \stackrel{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} & \left(\min\limits_{j\in\Gamma^+(k)} t_j\right) - d_k & \leq & \min\limits_{j\in\Gamma^+(k)} T_j - d_k \\ \Leftrightarrow & \left(\min\limits_{j\in\Gamma^+(k)} t_j\right) - d_k & \leq & \left(\min\limits_{j\in\Gamma^+(k)} T_j\right) - d_k \\ \Leftrightarrow & \min\limits_{j\in\Gamma^+(k)} t_j & \leq & \min\limits_{j\in\Gamma^+(k)} T_j \end{array}$$

cette dernière inégalité étant vérifiée puisque pour toute tâche $j \in \Gamma^+(k)$ on a $t_j \leq T_j$.

Exercice 3. (5 points)

Dans cet exercice on demande des méthodes qu'il n'est pas nécessaire d'écrire en pseudo-code.

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe (orienté ou non) avec $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, et M sa matrice d'adjacence associée de dimensions $n \times n$.

La distance entre deux sommets v_i et v_j, notée $d_G(v_i, v_j)$, est la longueur (en nombre d'arcs/arêtes) du plus court chemin de v_i à v_j.

1. (1,5 points) À l'aide des puissances booléennes de la matrice M, donner une méthode qui, étant donnés deux sommets v_i et v_j, permet de calculer $d_G(v_i, v_j)$, et donner son temps de calcul asymptotique.

Solution: Le coefficient $m_{i,j}^{[l]}$ vaut 1 s'il existe un chemin de v_i à v_j de longueur l. Il suffit donc de calculer les puissances successives $M^{[l]}$ et s'arrêter pour le plus petit l tel que $m_{i,j}^{[l]} = 1$ (et $m_{i,j}^{[l-1]} = 0$). Ainsi $d_G(v_i, v_j) = l$.
Au pire il est nécessaire de calculer toutes les puissances de $M^{[l]}$ pour l allant de 2 à $n-1$, soit n multiplications matricielles en $O(n^3)$ chacune, pour un temps de calcul total en $O(n^4)$.

Le diamètre de G est la plus longue des distances entre les sommets :

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{v_i \neq v_j \in V} d_G(v_i, v_j)$$

2. Soit d le diamètre du graphe G.
   (a) (0,5 points) Que peut-on dire des nombres $d_G(v_i, v_j)$ pour tout $v_i \neq v_j$ par rapport à d ?

   Solution: Par définition du diamètre (comme maximum), pour $v_i \neq v_j$, on a

   $$d_G(v_i, v_j) \leq d$$

   (b) (0,5 points) Existe-t-il un couple de sommets v_i et v_j tels que $d - 1 < d_G(v_i, v_j)$ et pourquoi ?

   Solution: Par définition du maximum, on a (au moins) un couple de sommets v_i et v_j tels que $\mathrm{diam}(G) = d = d_G(v_i, v_j)$. Par conséquent $d - 1 < d_G(v_i, v_j)$.

3. (1,5 points) En déduire, en adaptant la réponse à la question 1, une méthode pour calculer $\text{diam}(G)$, et analyser son temps de calcul asymptotique. *Indication : penser à la somme booléenne de matrices.*

Solution: On calcule successivement

$$\widehat{M_l} = M^{[1]} \oplus M^{[2]} \oplus \ldots \oplus M^{[l]}$$

et on s'arrête au plus petit l tel que $\widehat{M_l}$ ne contient que des 1 (sauf peut-être sur la diagonale). Ainsi $l = \text{diam}(G)$.
Au plus il est nécessaire de calculer les puissances booléennes pour l allant de 2 à $n-1$. Pour chaque itération il faudra alors calculer une somme booléenne en $O(n^2)$, un produit booléen de matrices en $O(n^3)$, et une vérification des éléments de la matrice résultat en $O(n^2)$. Soit un temps total de $O(n^4)$.

4. (1 point) À l'aide de parcours de graphes, donner une méthode pour calculer $\text{diam}(G)$ et analyser son temps de calcul asymptotique.

Solution: Pour chaque sommet v_i on effectue un parcours en largeur du graphe G à partir de v_i et on retient la longueur l_i du plus long chemin vers un autre sommet. Le diamètre sera alors

$$\text{diam}(G) = \max_{v_i \in V} l_i$$

Il faut faire n parcours en largeur coûtant chacun $O(n+m)$ avec m le nombre d'arcs/arêtes pour un temps de $O(n \times (n+m)) = O(n^2 + nm)$, plus le calcul du maximum en $O(n)$. Soit un temps total en $O(n^2 + nm)$, et si on considère qu'il y a de l'ordre de $O(n^2)$ arcs/arêtes un temps de $O(n^3)$, ce qui est mieux que par calcul matriciel.