CHAPITRE 3

Extrema locaux d'une fonction.

3.1. Définition

DÉFINITION 3.1.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$.

(a) On dit que f présente un **maximum global** (resp. minimum global) au point a, si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f(a)$).

(b) On dit que f a un **maximum local** (resp. minimum local) au point a, s'il existe $\eta > 0$ tel que, pour $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. pour $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$ on ait $f(x) \geq f(a)$).

REMARQUE 3.1.2. Si f présente un maximum (ou minimum) global en a, alors a fortiori f présente un maximum (ou minimum) local en a.

EXEMPLE 3.1.3. (a) La fonction carrée $x \mapsto x^2$ présente un minimum global en 0.

(b) La fonction $x \mapsto -(x-1)^2 + 3$ présente un maximum global en 1.

(c) Rappel du cours d'Analyse 1, théorème de Heine : toute fonction f continue sur un segment $[c, d]$ est bornée et atteint ses bornes, donc elle admet un minimum global et un maximum global.

3.2. Condition nécessaire et condition suffisante pour un extremum local pour une fonction régulière

3.2.1. Extrema et dérivées premières.

PROPRIÉTÉ 3.2.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a un point intérieur de I (i.e., pas une borne de l'intervalle). On suppose que f dérivable au point a. Si f présente un maximum local ou un minimum local au point a, alors $f'(a) = 0$.*

REMARQUE 3.2.2. (a) La réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, pourtant cette fonction ne présente pas d'extremum local en 0.

(b) La propriété ne dit rien sur le fait d'avoir un extremum local sur une borne de l'intervalle I.

DÉMONSTRATION. Supposons que f présente un maximum local en a. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$ on a $f(x) \leq f(a)$. Comme a est un point intérieur de I, quitte à choisir η plus petit si nécessaire, on peut supposer $]a-\eta, a+\eta[\subset I$. Pour $x < a$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et en passant à la limite lorsque $x \to a^-$, on obtient

$$f'(a) \geq 0.$$

De même pour $x > a$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

et en passant à la limite lorsque $x \to a^+$, on obtient

$$f'(a) \leq 0.$$

D'où $f'(a) = 0$. □

Exemple 3.2.3. Si $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$, alors f est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc y est bornée et atteint ses bornes. De plus f est dérivable et $f'(x) = -\sin(x) + \cos(x)$ s'annule sur $[0, \pi]$ en $x_0 = \pi/4$. On a $f(x_0) = \sqrt{2}$, $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$. Donc

- le maximum de f sur $[0, \pi]$ est atteint en $\pi/4$ et vaut $\sqrt{2}$,
- son minimum est atteint en π et vaut -1. Il s'agit donc a fortiori d'un minimum local, mais pourtant $f'(\pi) \neq 0$.

3.2.2. Extrema et dérivées secondes.

Propriété 3.2.4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit a un point de I. On suppose que f est deux fois dérivable en a, et que a est un point critique de f, i.e., $f'(a) = 0$. Alors :*

(1) *si $f''(a) > 0$, alors f présente un minimum local en a,*

(2) *si $f''(a) < 0$, alors f présente un maximum local en a.*

(Et si $f''(a) = 0$, alors on ne peut rien conclure.)

On a en fait une propriété plus générale :

Propriété 3.2.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit a un point de I. On suppose que f est n fois dérivable en a (avec $n \geq 2$), et que a est un point critique de f, i.e., $f'(a) = 0$. On suppose en outre qu'il existe $p \in \{2, \ldots, n\}$ tel que $f^{(p)}(a) \neq 0$ et on note par p le plus petit entier vérifiant cela. Alors :*

(1) *Si p est pair, f présente un extremum local en a, plus précisément si $f^{(p)}(a) > 0$, alors f présente un minimum local en a, et si $f^{(p)}(a) < 0$, alors f présente un maximum local en a.*

(2) *Si p est impair, alors f ne présente pas d'extremum local en a.*

Démonstration. On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre p en a, et puisque $f'(a) = 0$, on obtient

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x - a)^p + (x - a)^p \phi(x),$$

où ϕ est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de limite nulle en a. Alors

$$f(x) - f(a) \sim_a (x - a)^p \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$$

et donc, dans un voisinage de a, la quantité $f(x) - f(a)$ a le même signe que $f^{(p)}(a)(x - a)^p$.

Lorsque p est pair : si $f^{(p)}(a) > 0$, on a l'inégalité $f(x) > f(a)$ au voisinage de a, et f présente un minimum local en a, et si $f^{(p)}(a) < 0$, on a, dans un voisinage de a, l'inégalité $f(x) < f(a)$, de sorte que f présente un maximum local en a.

Lorsque p est impair : $f^{(p)}(a)(x-a)^p$ change de signe au voisinage de a, donc $f(x) - f(a)$ aussi, ce qui entraîne qu'il n'y a pas d'extremum local en a dans ce cas. □

Exemple 3.2.6. Si

$$f(x) = \sin^3(x) + 2\cos(x) + x^2 \text{ et } g(x) = f(x) - x^3,$$

alors au voisinage de 0, on a

$$f(x) = (x + o(x^2))^3 + 2(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}) + x^2 = 2 + x^3 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

et

$$g(x) = 2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

donc f n'admet pas d'extremum en 0 mais g admet un minimum local en 0 qui vaut 2.