Université de Lorraine
UFR MIM Année 2022-2023

L2info : Probabilités discrètes

Chapitre 1: Dénombrement

Exercice 1

Une urne contient 3 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules noires discernables entre elles. On tire 3 boules simultanément (sans ordre et sans remise).

a) Combien y a t'il de tirages possibles?
b) Combien y a t'il de tirages avec 3 boules de même couleur?
c) Combien y a t'il de tirages avec 3 boules de couleurs distinctes?
d) Combien y a t'il de tirages avec au plus une boule rouge?
e) Combien y a t'il de tirages avec au moins une boule rouge?

Exercice 2

On choisit des mains de 5 cartes (sans remise et sans ordre) dans un jeu de 32 cartes.
a) Combien y a t'il de mains possibles?
b) Combien y a t'il de mains avec un carré d'as?
c) Combien y a t'il de mains avec au moins avec un roi?
d) Combien y a t'il de mains avec exactement un valet et un pique?

Exercice 3

On remplit une grille de '1,N,2', c'est à dire il faut choisir 1, N ou 2 pour 13 résultats de match de football.
a) Combien y a t'il de choix possibles?
b) Combien y a t'il de choix possibles avec 7 résultats de match choisis 'N' ?
c) Combien y a t'il de choix possibles avec 2 résultats de match choisis 'N' et 3 choisis '1'?

Exercice 4

Une association comprenant 20 membres dont 12 hommes et 8 femmes, désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes. Calculer de combien de manières on peut former ce comité dans chacun des cas suivants:
a) Chaque membre de l'association accepte de faire partie du comité.
b) Deux des hommes refusent d'en faire partie.
c) M. M et Mme W refusent de sièger ensemble.

Exercice 5

a) Combien y a t'il de nombres distincts de 10 chiffres formés avec les chiffres 0,1,...,9?
b) Combien de ces nombres sont-ils multiples de 5?

Exercice 6

Les douze tomes d'une encyclopédie sont placés au hasard sur un rayonnage.
a) Combien y a t'il de manières différentes de les classer?
b) Combien y a t'il de manières différentes de les classer si les tomes 1 et 2 sont côtes à côtes dans cet ordre?

Exercice 7

Une usine a 12 machines à répartir dans 4 ateliers A_1, A_2, A_3, A_4. Combien y a t'il de manières de faire si: a) On n'impose pas le nombre de machines par atelier?
b) si on en met 4 dans A_1 et A_4 et 2 dans A_2 et A_3.

Exercice 8

On dispose d'une urne contenant 4 boules noires et 5 boules blanches distinctes. On tire successivement trois boules de l'urne sans remise et on tient compte de l'ordre de sortie des boules.
a) Combien y a t'il de tirages différents possibles?
b) Combien y a t'il de tirages différents possibles avec la première boule tirée blanche?
Quels sont les nombres de tirages qui donnent:
c) la deuxième boule tirée blanche?
d) la première boule et la deuxième boule tirée blanche, la troisième boule tirée noire?
e) deux boules blanches et une noire?
f) au moins une noire?

Exercice 9

Dans un jeu de 32 cartes, combien y a t'il de donnes différentes de huit cartes, parmi ces donnes, combien comportent
a) exactement 3 rois et 2 as?
b) au moins un as et au moins un roi?

Exercice 10

Un cirque possède 4 tigres, 3 lions et 2 pumas. Un numéro avec des fauves doit comporter 5 animaux.

a) Combien de numéros différents peut-on faire avec 3 espèces différentes? (on distingue tous les fauves entre eux)

b) Combien de numéros différents peut-on faire?

Exercice 11

De combien de manières différentes peut-on ranger 3 boules dans 5 casiers?

a) si elles sont discernables entre elles et on peut en mettre plusieurs par casier.

b) si elles sont discernables entre elles et on ne peut pas en mettre plusieurs par casier.

c) si elles sont indiscernables entre elles.

Exercice 12

Combien d'anagrammes peut on faire avec les lettres du mot ANAGRAMME?

Chapitre 2: Espaces probabilisables

Exercice 1

On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants:

A: les deux cartes tirées sont rouges, B: les deux cartes tirées sont un valet et un dix, C: les deux cartes tirées sont des figures.

Que représentent les événements suivants:

1. $(A \cap B) \backslash C$.
2. $(A \backslash C) \cap (B \backslash C)$.
3. $(A \cup B) \cap C$.

Exercice 2

Soient A, B, C trois événements d'un espace fondamental Ω. Décrire en fonction de A, B, C et des opérations élémentaires sur les ensembles les événements suivants:

a) A seulement se réalise.
b) A et B seulement se réalisent.
c) Aucun événement ne se réalise.
d) Un événement au plus parmi les trois se réalise.
e) Un événement exactement parmi les trois se réalise.
f) Un événement au moins parmi les trois se réalise.
g) Deux événements exactement parmi les trois se réalisent.
h) Au moins deux événements parmi les trois se réalisent.

Exercice 3

On lance deux dés de couleurs distinctes. Décrire l'espace fondamental Ω associé à une telle expérience.

A: les deux dés sont de parités différentes.
B: les deux dés sont pairs et la somme des points obtenus est inférieure ou égale à 3.
C: la somme des points est paire.
D: la somme des points est un multiple de 3.
E: la somme des points est un multiple de 6.
F: la somme des points est un multiple de 8.
G: la somme des points est un multiple de 13.

Exercice 4

Une personne choisit au hasard un nombre réel. Déterminer l'espace fondamental Ω associé à une telle expérience et exprimer les événements suivants comme sous ensemble de Ω.

A: le nombre choisi est positif ou nul.
B: le nombre choisi est strictement entre -1 et 2.
C: le nombre choisi est de valeur absolue supérieure ouégale à 1.
D: le nombre choisi est égal à -3.

E: le nombre choisi est différent de -3.

Montrer que ces événements peuvent être obtenus comme union, intersection, complémentaires d'intervalles ouverts.

Exercice 5

$\Omega = \{a, b, c, d\}$. Soit l'ensemble de parties $A = \{\{a, b, d\}, \{b, c\}\}$, déterminer la tribu sur Ω engendrée par A.

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des parties de Ω si $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. Soit l'ensemble de parties $A = \{\{a, d\}, \{b, e\}\}$, déterminer la tribu sur Ω engendrée par A.

Chapitre 3: Probabilités

Exercice 1

Soient P une probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et A, B et C trois événements de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Montrer que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Exercice 2

On considére l'application P définie par
$P = \frac{1}{3}\delta_{-2} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_1$.
1) Vérifier que P est une probabilité sur $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$.
2) Calculer: $P(\{-2\}), P(\{0\}), P(\{1\}), P(\{4\}), P(\{-2, 0\})$.
3) Calculer : $P(]-\infty, -3]), P(]-\infty, -1]), P(]-\infty, 2]), P(]-1, 2]), P(]-1, +\infty[)$.

Exercice 3

Déterminer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ correspondant au lancer de trois dès.
a) Calculer la probabilité d'obtenir un '4,2,1'?
b) Calculer la probabilité d'obtenir une somme divisible par 3?

Exercice 4

On remplit une grille de quinté lors d'une course de 18 chevaux (ie on choisit 5 chevaux sans remise et ordonnés)
a) Combien y a t'il de choix possibles?
b) Quelle est la probabilité que la grille soit gagnante dans l'ordre?
c) Quelle est la probabilité que la grille soit gagnante dans le désordre?

Exercice 5

On choisit des mains de 5 cartes (sans remise et sans ordre) dans un jeu de 32 cartes.
a) Combien y a t'il de mains possibles?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs et 2 piques?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un carré?
d) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 coeurs et un valet?

Exercice 6

On considére (Ω, F, P) un espace probabilisé et A_1, A_2, A_3, A_4 quatre événements sur cet espace.

On pose $S_1 = \Sigma_{i=1}^{4} P(A_i)$, $S_2 = \Sigma_{1 \leq i < j \leq 4} P(A_i \cap A_j)$,
$S_3 = \Sigma_{1 \leq i < j < k \leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$,
$S_4 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$.

1) Exprimer $P(U_{i=1}^4 A_i)$ en fonction de S_1, S_2, S_3, S_4.

Pendant un spectacle, on a malencontreusement permuté les quatre chapeaux qui se trouvaient au vestiaire dans des cases numérotées. On désigne par A_i l'événement: la personne i se voit remettre son chapeau.

2) Définissez Ω l'ensemble de toutes les permutations possibles des chapeaux et calculer son cardinal.

3) Calculer les valeurs de S_i.

4) Montrer que la probabilité p qu'une personne au moins parmi les quatre se voit remettre son propre chapeau est donnée par la formule:

$p = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$.

5) En déduire la probabilité p' pour qu'aucune personne ne se voit remettre son propre chapeau.

Exercice 7

Paradoxes de Méré

On lance 3 dés.

a) Calculer la probabilité que la somme des chiffres soit 11.

b) Calculer la probabilité que la somme des chiffres soit 12.

Exercice 8

---

a) Calculer la probabilité de gagner 5 numéros et le numéro chance au loto.

b) Calculer la probabilité de gagner au loto.

c) Calculer la probabilité de perdre au loto.

d) Calculer la probabilité de récupérer sa mise au loto.

Exercice 9

On choisit des mains de 5 cartes (sans remise) dans un jeu de 32 cartes.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 as?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir un brelan?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir un full?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir une paire et 3 cartes de hauteurs différentes?

e) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 paires?

Exercice 10

On choisit des mains de 5 cartes (sans remise et sans ordre) dans un jeu de 32 cartes.

a) Combien y a t'il de mains possibles?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 valets, 2 dames , 1 roi?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux as?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 piques et 1 valet?

Chapitre 4: Probabilité conditionnelle

Exercice 1

Une chaine fabriquant des calculatrices de poche fonctionne 24 heures par jour: 40/100 des calculatrices sont produites le jour, 30/100 le soir et 30/100 la nuit. De plus, 2/100 des calculatices produites le jour ou le soir sont défectueuses, tandis que la nuit, cette proportion passe à 3/100.

1) Quelle est la probabilité qu'une calculatrice soit défectueuse.

2) On prend une calculatrice au hasard et on remarque qu'elle est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'elle ait été produite le jour? le soir? la nuit?

On définit les événements suivants:

D: la calculatrice est défectueuse, J: la calculatrice a été produite le jour, S:la calculatrice a été produite le soir, N:la calculatrice a été produite la nuit.

Exercice 2

Un lot de 100 dés contient 25 dés truqués tels que la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$. On lance un dé de ce lot et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué?

Exercice 3

On a décelé dans un élevage de moutons, une probabilité 0.3 pour qu'un animal soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est 0.9. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive à T est 0.8.

Qu'elle est la probabilité pour qu'un mouton pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M.

Exercice 4

Soit deux urnes, l'une notée A contenant 2 boules rouges et 3 boules noires, l'autre notée B contenant 4 boules rouges et 1 boule noire.

On commence par choisir une des 2 urnes au hasard, dans laquelle on tire une boule dont on regarde la couleur et qu'on remet ensuite dans l'urne d'où elle provient. Alors, si la couleur est rouge, on tire à nouveau une boule dans la même urne, et si la boule est noire, on tire une boule dans l'autre urne.

Pour $i = 1$ ou 2, on note A_i (resp. B_i) l'événement:

" Le tirage numéro i a lieu dans l'urne A (resp. B)".

De même , on note r_i (resp. n_i) l'événement:

" Le tirage numéro i donne un boule rouge (resp. noire)".

Calculer les probabilités suivantes:

a) $P(A_1 \cap A_2)$, b) $P(A_2)$, c) $P(B_2)$, d) $P(A_1 \cup A_2)$, e) $P(A_2 \cap n_2)$, f) $P(n_2)$, g)$P(r_2/A_1)$, h) $P(A_1/r_2)$.

Exercice 5

Paul débute un jeu dans lequel il a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est 0.6 et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est 0.7.

On note pour tout n entier naturel non nul, G_n l'événement "Paul gagne la n-iéme partie" et F_n l'événement "Paul perd la n-iéme partie".

1) Déterminer les probabilités $P(G_1)$, $P(G_2/G_1)$ et $P(G_2/F_1)$. En déduire $P(G_2)$ et $P(F_2)$.

On pose pour tout n entier naturel non nul, $x_n = P(G_n)$ et $y_n = P(F_n)$.

2) Déterminer $P(F_{n+1}/G_n)$ et $P(G_{n+1}/F_n)$.

3) Montrer que pour tout n entier naturel non nul:

a) $x_{n+1} = 0.6x_n + 0.3y_n$.

b) $y_{n+1} = 0.4x_n + 0.7y_n$.

4) On pose $v_n = x_n + y_n$, $w_n = 4x_n - 3y_n$.

a) Montrer que v est une suite constante.

b) Montrer que w est une suite géométrique que l'on déterminera.

5) En déduire x_n et $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 6

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune des boules blanches et rouges. Les proportions de boules blanches p_1 $(0 < p_1 < 1)$ dans l'urne U et p_2 $(0 < p_2 < 1)$ dans l'urne V. On effectue des tirages successifs dans les urnes avec remise, après chaque tirage, de la boule tirée dans l'urne dont elle provient.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par U_n (resp. V_n) l'événement "le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U (resp. V) et par B_n (resp. R_n) l'événement "le n-ième boule tirée est blanche (resp. rouge)".

On procède alors à l'expérience suivante:

On choisit une urne au hasard is on tire une boule dans cette urne.

De plus, on adopte la règle suivante:

On tire la n-ième boule $(n \geq 2)$ dans la même (resp. l'autre) urne que la (n-1)ième boule si celle-ci est blanche (resp. rouge).

1) Calculer la probabilité des événements B_1,U_2 et V_2.

2) Déterminer une relation entre $P(U_{n+1})$ et $P(U_n)$.

3) Montrer que $P(U_n) = \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2} + (p_1 + p_2 - 1)^{n-1} \frac{p_2-p_1}{2(2-p_1-p_2)}$.

Exercice 7

On effectue sur chacune des pièces mécaniques fabriquées sur une chaine industrielle un test pour en contrôler la qualité et on désigne par B et T les événements suivants:

B: une pièce choisie est bonne. T: le test indique que la pièce est bonne.

On désigne par p la probabilité pour qu'une pièce choisie au hasard soit bonne, par x la probabilité pour que le test indique comme bonne une pièce qui est effectivement bonne et par y la probabilité pour que le test indique comme bonne une pièce qui est en réalité mauvaise. On suppose $p \neq 0$ et $p \neq 1$.

1) Calculer en fonction de p, x, y la probabilité pour qu'une pièce indiquée comme bonne par le test, soit effectivement bonne.

2) A quelle condition sur x et y la probabilité calculée à la question précédente est-elle supérieure à p?

3) A.N: $p = 0.8$, $x = 0.9$ et $y = 0.1$.

Pour chaque pièce,on décide d'effectuer deux fois le test de contrôle et d'accepter la pièce uniquement si elle est indiquée comme bonne aux deux contrôles successifs et on note T_1 (resp. T_2) l'événement:

T_1 (resp. T_2)= " le premier (resp. second) test indique que la pièce est bonne".

4) Calculer en fonction de p, x, y la probabilité pour qu'une pièce acceptée soit effectivement bonne. On reprend les mêmes données qu'en 3) pour l'A.N.

Exercice 8

Un parapluie a une probabilité p de se trouver dans l'un des 7 étages d'un immeuble. On l'a cherché en vain dans les 6 premiers étages. Quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier?

Exercice 9

Dans une population, 10 pour cent des personnes sont atteintes par une maladie. 30 pour cent des personnes sont vaccinés contre cette maladie. Il est 4 fois plus probable de contracter la maladie si on n'est pas vacciné que si on l'est. Quelle est la probabilité de contracter la maladie si on n'est pas vacciné?

Chapitre 5: Indépendance

Exercice 1

Montrer qu'une CNS pour que deux événements A et B soient indépendants est que: $P(A\bigcap B)P(\bar{A}\bigcap\bar{B}) = P(A\bigcap\bar{B})P(\bar{A}\bigcap B)$.

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

1) $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

2) Pour tous $B \in \mathcal{F}$, les événements A et B sont indépendants.

Exercice 3

On lance deux dés et on note la somme des points. Les deux dés ne sont pas truqués. Les événements $(S \leq 4)$ et $(4 \leq S \leq 7)$ sont-ils indépendants?

Exercice 4

Une urne contient 2 boules blanches, 4 boules rouges. On tire les boules sans remise.

a) Quelle est la probabilité de sortir une boule blanche au premier tirage?

b) Quelle est la probabilité de sortir une boule blanche au second tirage?

c) Quelle est la probabilité de sortir une boule blanche au troisième tirage?

d) Quelle est la probabilité de sortir une boule blanche au quatrième tirage?

Exercice 5

Dans une bataille, au moins 70 pour cent des soldats ont perdu un oeil, au moins 75 pour cent des soldats ont perdu une jambe, au moins 80 pour cent des soldats ont perdu une oreille, au moins 85 pour cent des soldats ont perdu un bras.

a) Combien de soldats au moins ont perdu les quatres si on suppose l'indépendance mutuelle des évènemets 'perdre une jambe, un bras, etc...'.

b) Combien de soldats au moins ont perdu les quatres si on ne suppose pas l'indépendance mutuelle des évènemets 'perdre une jambe, un bras, etc...'.

Exercice 6

On dispose de 2 pièces, une normale et une truquée. Cette pièce donne pile avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

1) On prend une pièce au hasard et on la lance, quelle est la probabilité d'obtenir pile?

2) On prend une pièce au hasard et on obtient pile, quelle est la probabilité d'avoir lancé la pièce truquée?

3) On lance les deux pièces, quelle est la probabilité d'obtenir des résultats semblables?

Exercice 7

Des composants électroniques ont une probabilité p de foctionner Un circuit électrique est constitué de 3 composants montés

a) en série

b) en parallèle

c) en mixte

Déterminer dans chaque cas la probabilité que le circuit fonctionne.

Exercice 1

On lance deux dés et on prend comme espace probabilisé $(\Omega = \{(i,j)/1 \leq i,j \leq 6\}, \mathcal{P}(\Omega), P)$, P est l'équiprobabilité.
On consid
'ere la variable aléatoire S représentant la somme des points obtenus.
1) Calculer la loi de probabilité de S.
2) Déterminer la fonction de répartition F_S de S.
3) Caculer à l'aide de F_S les quantités suivantes:
$P(S < 9)$, $P(S = 9)$, $P(S \leq 9)$, $P(2 \leq S \leq 9)$, $P(4 < S < 9)$, $P(S > 9)$.

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et X une V.A.R. définie sur cet espace de loi de probabilité

$$P_X = 1/2\delta_0 + \Sigma_{n=-3,-2,-1,1,2,3}\frac{1}{12}\delta_n.$$

1) Montrer que X est une V.A.D.
2) Calculer $P(X = k)$ pour $k \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, $P(2 \leq X \leq 9)$, $P(-2 \leq X \leq 2)$, $P(X = 0.5)$, $P(X < 0)$, $P(X > 3)$.
3) On définit sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ Y V.A.D. par $Y = X^2$. Calculer la loi de probabilité de Y.

Exercice 3

Soit a un entier strictement positif. X est une V.A.D. telle que $P(X = k) = \frac{1}{a(a+1)}$ si $k = 1, 2, ..., a(a+1)$.
1) Vérifier que X est bien une V.A.D.
2) Déterminer F_X.
3) Résoudre $F_X(x) = 1/2$.
4) Calculer $E(X)$. Quelle valeur doit-on donner à a pour que $E(X) = 7/2$.

Exercice 4

Soient X et Y des V.A.D. indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ à valeurs dans $\{1, ..., n\}$ (n entier naturel non nul) de loi uniforme.
1) Ecrire P_X et P_Y comme C.L. de masses de Dirac.
2) Soit $Z = \sup(X, Y)$ de $\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
a) Déterminer P_Z, F_Z.
b) Résoudre: $F_Z(x) = 1/2$.

Exercice 5

Un forain a deux roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la premiére, il y a 3 rouges et 7 blancs. Sur la deuxième, il y a 1 vert et 9 blancs. On gagne 50 euros si les 2 roues tombent sur rouge et vert. On gagne 5 euro si les 2 roues tombent sur blanc. On ne gagne rien si une seule roue tombe sur blanc.

a) On appelle x la mise pour jouer. Calculer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.

b) Déterminer x pour que le forain ait une espérance de gain égale à 5 euro pour chaque partie.

Exercice 6

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et X et Y des V.A.D. sur cet espace, X est de loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{5}$ et Y est indépendante de X et de loi de probabilité

$$P_Y = 1/5\delta_{-1} + 2/5\delta_0 + 2/5\delta_1.$$

1) Déterminer F_Y.
2) Résoudre $F_Y(x) = x + 1$.
3) Déterminer la loi de probabilité de Y^2.
4) Déterminer la loi de probabilité de $Z = \sup(Y^2, X)$.
5) Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 7

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et X et Y des V.A.D. sur cet espace, X est de loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{3}$ et Y est indépendante de X et de loi de probabilité

$$P_Y = 3/5\delta_{-1} + 1/5\delta_0 + 1/5\delta_1.$$

1) Déterminer F_Y.
2) Résoudre $F_Y(x) = \frac{1}{10}x + \frac{7}{10}$.
3) Déterminer la loi de probabilité de Y^2.
4) Déterminer la loi de probabilité de $Z = \sup(Y, X)$.
5) Soit T la V.A.D. définie par $T = \inf(Y^2, Z)$
a) Déterminer la loi de probabilité de T.
b) Calculer l'espérance et la variance de T.
6) Calculer $P(Z = T)$.
7) Les variables Z et T sont-elles indépendantes?

Exercice 8

Dans un garage, le nombre de voitures vendues en une semaine suit la loi de Poisson de paramètre 6.

1) Déterminer la probabilité de:
a) 4 voitures ont été vendues au cours d'une semaine.

b) Au moins deux voitures ont été vendues au cours d'une semaine.

2) Sachant qu"au moins une voiture a été vendue au cours de la semaine, déterminer la probabilité de:

a) 3 voitures exactement ont été vendues au cours de la semaine.

b) Au moins 2 voitures ont été vendues au cours de la semaine.

Exercice 9

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de X?

Exercice 10

Soient X et Y deux V.A.D. indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$ (n entier naturel non nul) de loi uniforme.

1) Déterminer la loi de probabilité de $Z = X + Y$.

2) Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 11

Les valeurs prises par une V.A.D. X de loi $B(n, p)$ sont affichées par un compteur de la manière suivante:

Si X prend une valeur non nulle, le compteur affiche cette même valeur, si X prend une valeur nulle, le compteur affiche au hasard n'importe quelle valeur entre 1 et n.

On note Y la V.A.D. représentant le nombre affiché par le compteur.

1) Déterminer la loi de probabilité de Y.

2) Calculer l'espérance de la variable Y.

Exercice 12

Si X, une V.A.D., suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On définit la V.A.D. Y de la manière suivante:

Si X prend une valeur impaire, alors Y prend la valeur 0, si X prend une valeur paire, alors Y prend la valeur $X/2$.

1) Déterminer la loi de probabilité de Y.

2) Calculer l'espérance de la variable Y.

Exercice 13

Si X et Y sont deux V.A.D. indépendantes de loi $B(n, p)$ et $B(m, p)$ respectivement.

1) Déterminer la fonction génératrice de X.

2) Calculer l'espérance et la variance de la variable X.

3) Déterminer la loi de probabilité de $X + Y$.

Exercice 14

Si X, une V.A.D., suit une loi géométrique $P_X = \alpha \Sigma_{k=0}^{+\infty} p^k \delta_k$.

1) Déterminer la valeur de α.

2) Déterminer la fonction génératrice de X et son rayon de convergence.

3) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

4) Montrer que pour tous entiers naturels k, n, on a:

$$P(X = n + k / X \geq n) = P(X = k).$$

Exercice 15

On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question, k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une réponse. On lui attribue un point par réponse. Soit X_1 le nombre de points obtenus. Quelle est la loi de X_1?

Exercice 16

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1) On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement 'l'objet provient de la chaîne A' .

2) On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y .

b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle P (X = k / Y = n). (Distinguer les cas $k \leq n$ et $k > n$).

c) En déduire $P((X = k) \cap (Y = n))$.

d) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 17

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge. On tire une boule de l'urne. Si la boule tirée est rouge, on s'arrête. Sinon, on remet la boule tirée dans l'urne et on recommence l'expérience. Soit N la variable aléatoire qui représente le nombre de tirages effectués lorsque la boule rouge apparaît pour la première fois.

1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire N.
2) Calculer l'espérance de la variable aléatoire N.
3) Calculer la plus petite valeur de l'entier n tel que P(N < n) $\geq$ 0,9.
4) Soit Y la variable aléatoire définie par Y= $\frac{1-(-1)^N}{2}$. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?
5) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire Y ?

Exercice 18

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0.15$.

Pour dépister la maladie M dans un étable de n vaches laitières, on fait une analysede lait, on procède de deux manières différentes:

Méthode 1: On effectue une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.

Méthode 2: On effectue une analyse sur un échantillon du mélange des laits de n vaches et si le résultat est positif, on effectue une analyse pour chaque vache. Soit X_n le nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode, on pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1) Déterminer la loi de Y_n puis l'espérance de cette variable en fonction de n.

2) On voudrait connaître la méthode la plus économique en fonction du nombre d'animaux.

a) Etudier la fonction $f : x \to ax + \ln x$ où a est un réel strictement négatif.

Montrer qu'elle admet un maximum positif lorsque l'on choisit $a = \ln 0.85$.

b) Trouver dans ce cas la plus grande valeur entière de x pour laquelle $f(x) > 0$.

c) Démontrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$.

En déduire suivant les valeurs de n la méthode que l'on a intérêt à adopter.

Exercice 19

Un étang contient 40 poissons dont 10 brochets. Un pêcheur s'arrête lorsqu'il a pris 5 poissons.

a) Quelle est la probabilité qu'il prenne 2 brochets?

b) Combien doit-il pêcher de poissons pour espérer prendre 3 brochets?

Exercice 20

Le nombre d'accidents graves qui se produisent chaque jour du mois de Juin dans l'agglomération messine suit une loi de Poisson de paramètre 3. On admet que les variables aléatoires correspondant à des jours différents sont indépendantes.

Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 60 accidents au cours du mois de Juin ?