

Mathématiques discrètes 2

Vincent Demange

vincent.demange@univ-lorraine.fr

2020



Ordonnancement et graphes

Ordonnancement et graphes

Problématique

Données : un projet

- ▶ composé de tâches de différentes durées
- ▶ et de contraintes d'antériorité entre les tâches

Objectifs

- ▶ ordonner les tâches
- ▶ connaître la durée minimale du projet
- ▶ savoir quand commencer une tâche
- ▶ déterminer les tâches qui peuvent être retardées
- ▶ etc.

Ordonnancement et graphes

Problématique

Exemple (données)

Tâche	Durée (en jours)	Tâches précédentes
A	3	aucune
B	2	aucune
C	4	A
D	5	A, B
E	3	C
F	4	C, D
G	3	E, F

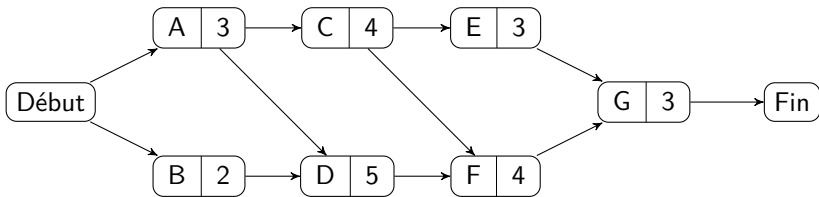
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : modélisation

Modélisation : graphe orienté

- ▶ les sommets sont les tâches
- ▶ (u, v) arc ssi u précède v
- ▶ ajout tâches fictives « Début » et « Fin » et arcs associés

Exemple



légende :

nom	durée
-----	-------

Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Formellement

d_k : durée tâche k

- ▶ **date au plus tôt** : plus petite date t_k telle que

$$t_i + d_i \leq t_k \quad \text{pour tout } i \text{ précédente}$$

- ▶ **date au plus tard** : plus grande date T_k telle que

$$T_k + d_k \leq T_j \quad \text{pour tout } j \text{ suivante}$$

i.e.
$$T_k \leq T_j - d_k$$

Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Calcul

d_k : durée tâche k $\Gamma^-(k)$: prédécesseurs $\Gamma^+(k)$: successeurs

- ▶ **date au plus tôt** :

$$t_k = \max_{i \in \Gamma^-(k)} t_i + d_i$$

- ▶ **date au plus tard** :

$$T_k = \min_{j \in \Gamma^+(k)} T_j - d_k$$

- ▶ pour **Début** et **Fin** :

$$d_{\text{Début}} = 0 \quad t_{\text{Début}} = 0 \quad T_{\text{Fin}} = t_{\text{Fin}}$$

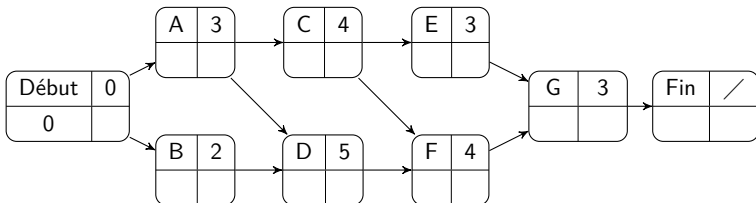
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

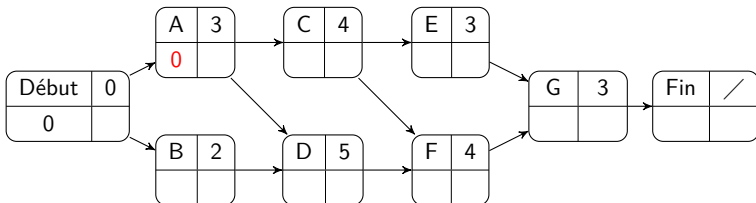
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

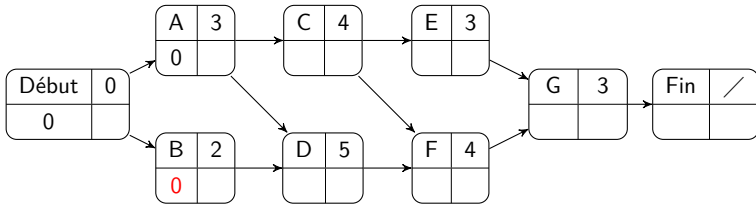
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

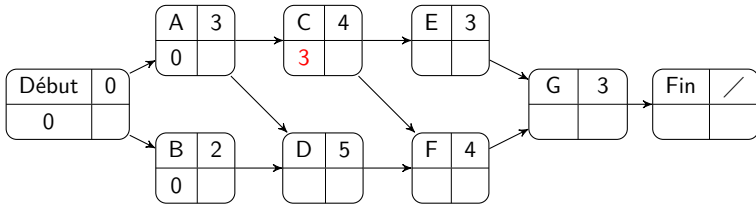
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

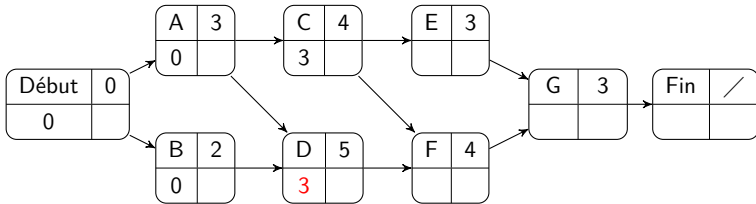
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

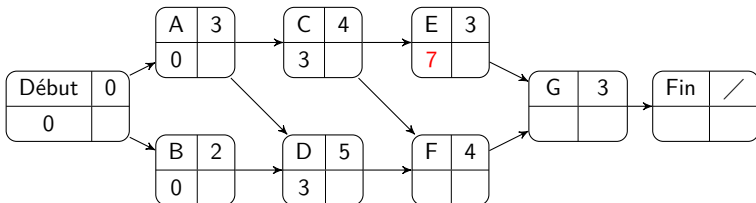
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

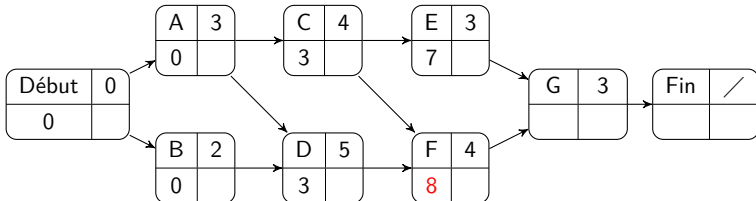
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

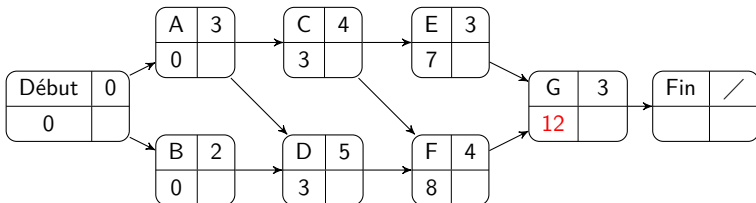
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

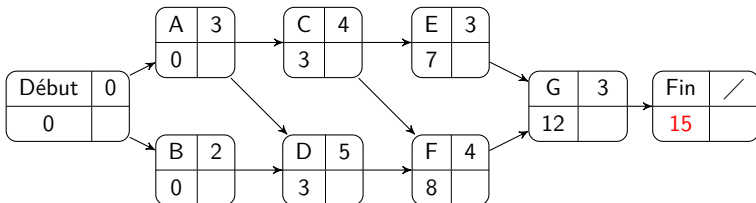
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

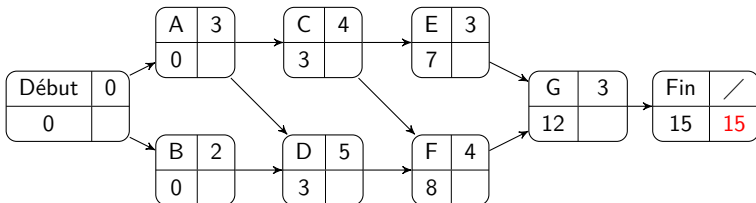
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

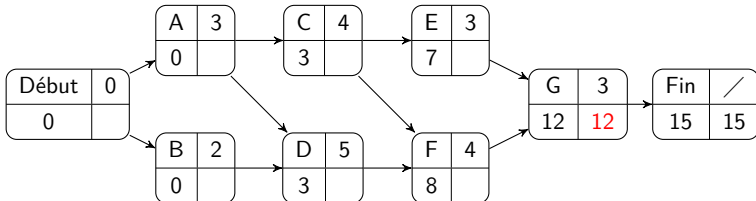
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

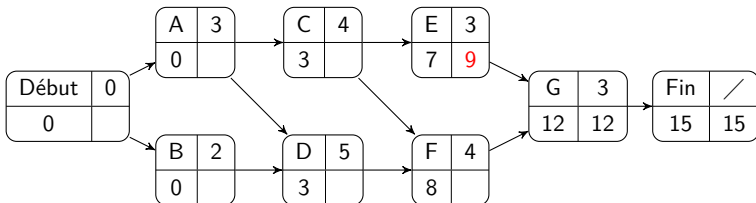
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

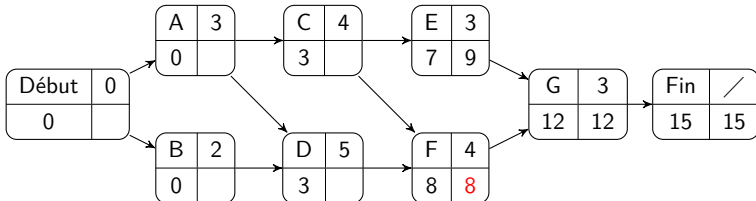
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

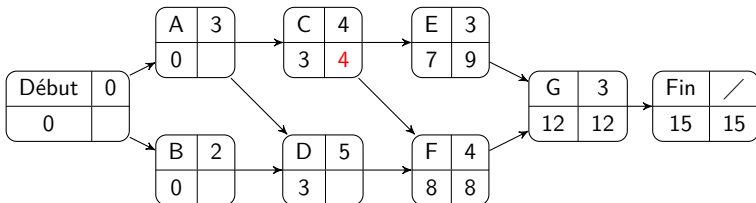
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

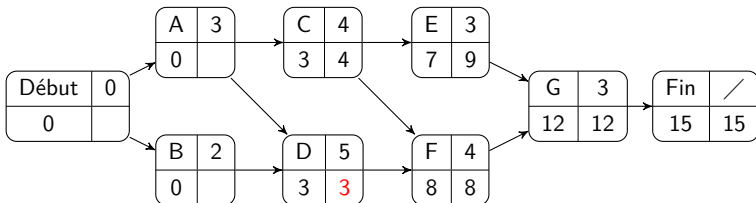
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

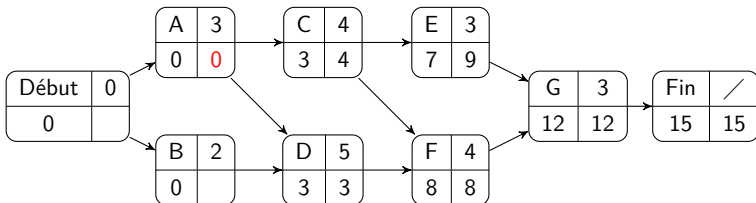
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

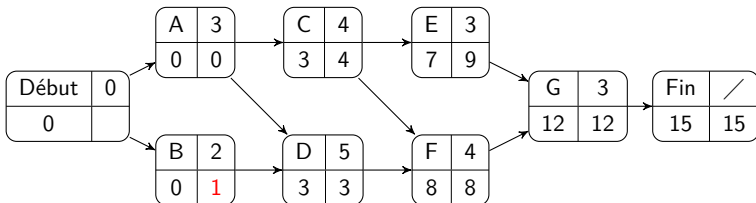
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

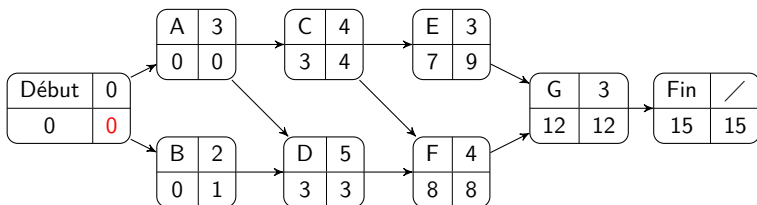
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

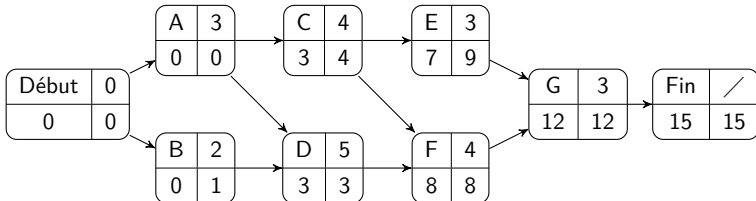
Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- ▶ **date au plus tôt** : date minimale pour commencer une tâche
- ▶ **date au plus tard** : date maximale pour commencer une tâche sans repousser date de fin du projet

Exemple



légende :

nom	durée
t_k	T_k

Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

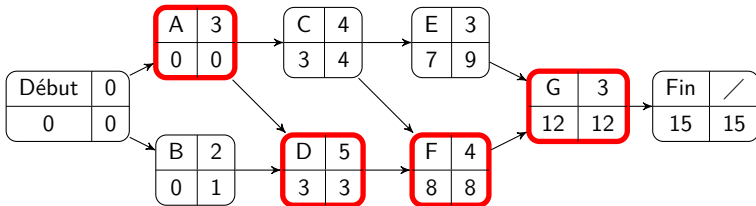
Définitions

- tâche critique : tâche ne pouvant être retardée

$$t_k = T_k$$

- chemin critique : chemin de Début à Fin composé de tâches critiques

Exemple



Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Définitions

- **marge totale** : retard maximum sans retarder fin projet

$$MT(k) = T_k - t_k$$

- **marge libre** : retard maximum sans retarder date plus tôt tâches postérieures

$$t_k + ML(k) + d_k \leq t_j \quad \text{pour tout } j \text{ suivante}$$

i.e.
$$ML(k) \leq t_j - t_k - d_k$$

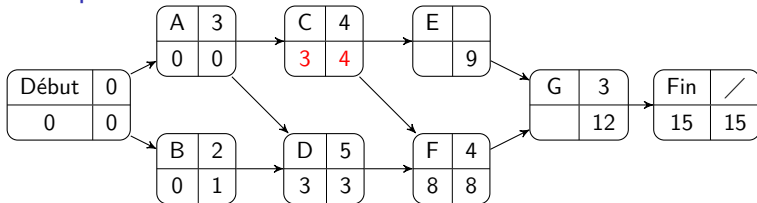
d'où

$$ML(k) = \min_{j \in \Gamma^+(k)} t_j - t_k - d_k$$

Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Exemple

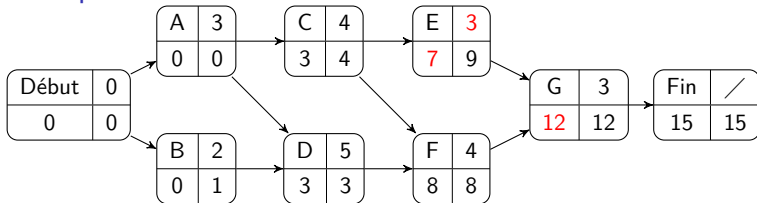


Tâches	A	B	C	D	E	F	G
Marge totale	0	1	1	0	2	0	0
Marge libre	0	1	0	0		0	0

Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Exemple

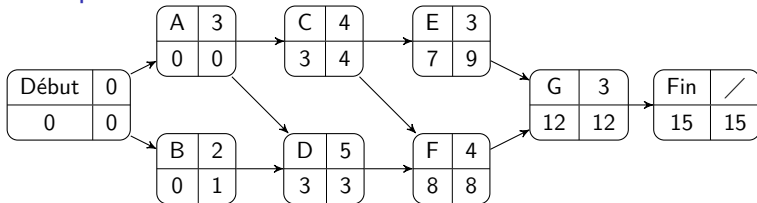


Tâches	A	B	C	D	E	F	G
Marge totale	0	1	1	0	2	0	0
Marge libre	0	1	0	0	2	0	0

Ordonnancement et graphes

MPM (Méthode des potentiels Métra) : résolution

Exemple



Tâches	A	B	C	D	E	F	G
Marge totale	0	1	1	0	2	0	0
Marge libre	0	1	0	0	2	0	0

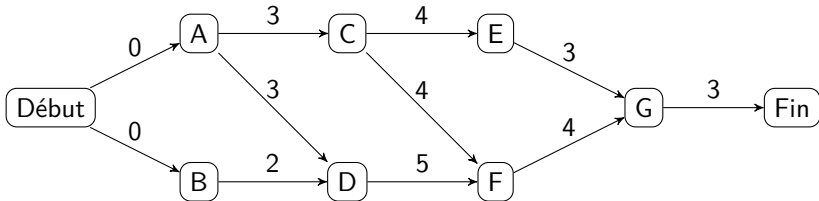
Ordonnancement et graphes

MPM : variante modélisation

Modélisation : graphe orienté

- ▶ les sommets sont les tâches
- ▶ (u, v) arc ssi u précède v
- ▶ ajout tâches fictives « Début » et « Fin » et arcs associés
- ▶ arcs (u, v) **pondérés par durée tâche u**

Exemple



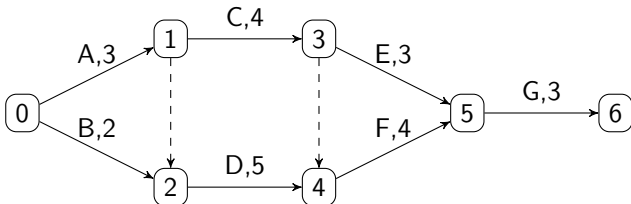
Ordonnancement et graphes

PERT (Program Evaluation and Review Technique) : modélisation

Modélisation : graphe orienté

- ▶ **les arcs sont les tâches**, étiquetés par nom et durée
- ▶ les sommets sont des étapes signifiant :
« les tâches qui précèdent sont terminées »
- ▶ ajout d'arcs fictifs de durée nulle *si besoin*

Exemple



Ordonnancement et graphes

Diagramme de Gantt

Objectifs : gestion de projet

- ▶ définition des tâches et précédences
- ▶ identification rapide des éléments importants : chemin(s) critique(s), marges, etc.
- ▶ outil de planification : état d'avancement, communication, etc.

Exemple (simple)

