CHAPITRE 4

Fonctions convexes

4.1. Définition

DÉFINITION 4.1.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $\mathbb{R}$. On dit que f est **convexe** sur I lorsque :

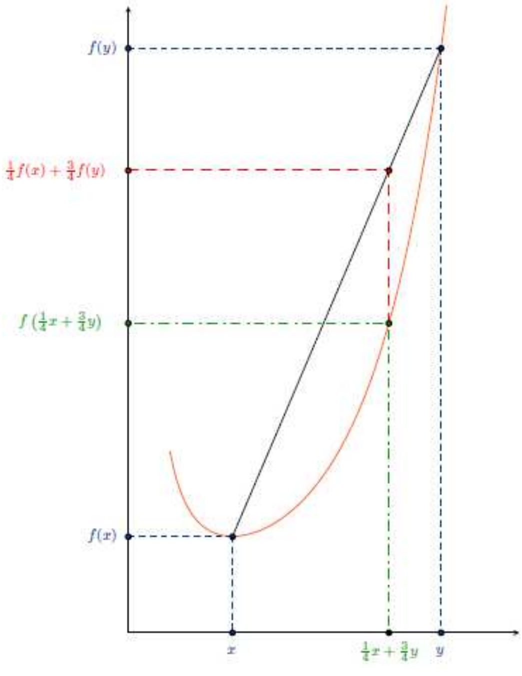
$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que f est **concave** si $-f$ est convexe, autrement dit si on a l'inégalité dans l'autre sens dans la formule précédente.

Interprétation graphique

Les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sont deux points de la courbe de f.

En reliant ces deux points par un segment, on obtient une corde. Lorsque $\lambda \in [0,1]$, le point de coordonnées $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$ est un point de la corde.



L'inégalité de la définition signifie que le point du graphe de f d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$ est situé en dessous du point de la corde de même abscisse.

Conclusion : f est convexe si et seulement si le graphe de f est au dessous de chacune de ses cordes.

Exemple 4.1.2. – $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
[en effet : soient $\lambda \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1-\lambda)y| = \lambda|x| + (1-\lambda)|y|$$

par l'inégalité triangulaire.]
– $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
[en effet : soient $\lambda \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 &= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - (1-\lambda)^2 y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= \lambda(1-\lambda)x^2 + \lambda(1-\lambda)y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= \lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2 - 2xy) \\
&= \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

car $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$.]

Remarque 4.1.3. Lorsque $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, l'inégalité de la Définition 4.1.1 est vraie pour un nombre quelconque de variables : on a en effet l'**inégalité de Jensen** : soient $n \geq 1$, $x_1, \ldots, x_n$ des points de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

En particulier (en prenant $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$)

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i).$$

En appliquant cela à la fonction carrée, on obtient par exemple :

$$\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} : \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Démonstration de l'inégalité de Jensen. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. Initialisation : si $n = 1$, alors $\lambda_1 = 1$ et la propriété est immédiate. Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$ et montrons-la au rang $n+1$. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ des réels positifs tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$. Si $\lambda_{n+1} = 1$ alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ et de nouveau l'inégalité est immédiate. Supposons donc $\lambda_{n+1} < 0$. On pose alors $X = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i$. On écrit

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1-\lambda_{n+1})X + \lambda_{n+1}x_{n+1}.$$

On obtient alors

$$
\begin{aligned}
f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) &\leq (1-\lambda_{n+1}) f(X) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \qquad \text{(car } f \text{ est convexe)} \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).
\end{aligned}
$$

□

4.2. D'autres caractérisations graphiques de la convexité

L'épigraphe de f est l'ensemble des points situés sur ou au dessus de la courbe de f, donc l'ensemble des points de coordonnées (x, y) avec $y \geq f(x)$. Une partie A du plan est dite convexe si, pour tous points M, M' dans A, le segment $[MM']$ est toujours contenu dans A.

Propriété 4.2.1. *La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

Démonstration. $\Rightarrow$: Supposons f convexe. Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points de l'épigraphe de f ; donc $y \geq f(x)$ et $y' \geq f(x')$. Un point du segment $[MM']$ a pour coordonnées $(\lambda x+(1-\lambda)x', \lambda y+(1-\lambda)y')$. Pour voir que ce point appartient à l'épigraphe, on calcule

$$
f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') \leq \lambda y + (1-\lambda) y'
$$

où la première inégalité provient du fait que f est convexe et la seconde égalité provient du fait que M et M' appartiennent à l'épigraphe.

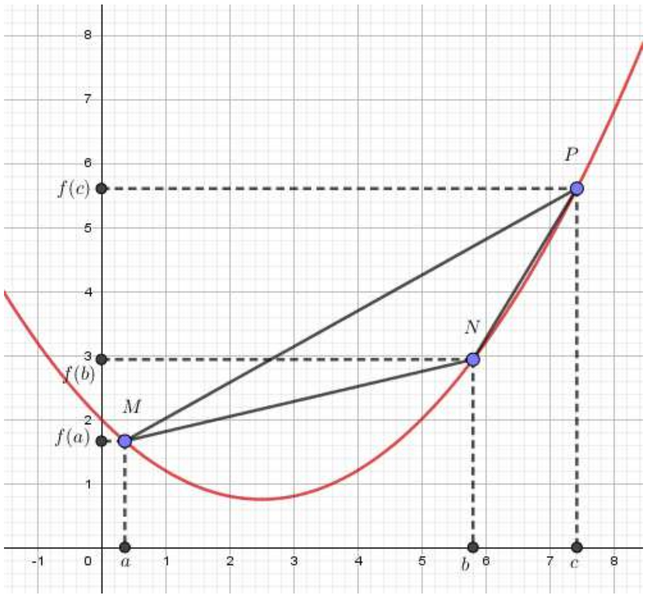
$\Leftarrow$: Supposons l'épigraphe de f convexe. Si M et M' sont deux points du graphe de f, alors le segment $[MM']$ est une corde du graphe. L'hypothèse que l'épigraphe est convexe entraîne que le graphe de f est situé au dessous de la corde $[MM']$. Donc le graphe de f est situé au dessous de chacune de ses cordes. D'après l'interprétation graphique de la Définition 4.1.1, cela entraîne que f est convexe. □

Propriété 4.2.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est convexe ;*

(ii) *pour tous $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, on a*

$$
(*) \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.
$$



Remarque 4.2.3. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \quad &\Leftrightarrow \quad (c-a)(f(b)-f(a)) \le (b-a)(f(c)-f(a)) \\
&\Leftrightarrow \quad (c-b)f(a)+(a-c)f(b)+(b-a)f(c) \ge 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b}
\end{aligned}$$

donc les trois inégalités contenues dans la formule $(*)$ sont en fait équivalentes.

Démonstration. On note par M, N, P les points du graphe de f d'abscisses a, b, c, donc les points de coordonnées $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$. L'encadrement $(*)$ est équivalent à la propriété d'avoir N au dessous du segment $[MP]$. La condition (ii) est donc équivalente à avoir que le graphe de f est au dessous de chacune de ses cordes. D'après l'interprétation graphique de la Définition 4.1.1, cette propriété équivaut à la convexité de f. $\square$

4.3. Convexité pour les fonctions régulières

Propriété 4.3.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *f est convexe ;*
(ii) *f' est croissante.*

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii) : on suppose f convexe. Soient $a, c \in I$ tels que $a < c$ et montrons que $f'(a) \le f'(c)$. Pour cela, soit $b \in]a, c[$. Par la Propriété 4.2.2, on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

En faisant tendre b vers a, on déduit d'une part

$$f'(a) \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

puis en faisant tendre b vers c, on déduit d'autre part

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq f'(c).$$

Au final, il résulte $f'(a) \leq f'(c)$ comme souhaité.

(ii)$\Rightarrow$(i) : on suppose f croissante. Soient $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$. Par le théorème des accroissements finis il existe $a_0 \in]a, b[$ et $b_0 \in]b, c[$ tels que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a_0) \quad \text{et} \quad \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(b_0).$$

Comme $a_0 < b_0$, le fait que f' est croissante entraîne $f'(a_0) \leq f'(b_0)$, donc

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

D'après la Remarque 4.2.3 on a donc

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Cela est vrai quels que soient a, b, c, donc par la Propriété 4.2.2, f est convexe. $\square$

La propriété suivante est conséquence de la précédente :

PROPRIÉTÉ 4.3.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est convexe ;*

(ii) *$f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

EXEMPLE 4.3.3. exp est convexe tandis que ln est concave.