Mathématiques discrètes 1

Partiel du 22/11/2021

Partie 1: ensembles, relations, fonctions, treillis

Consignes :

- Le sujet est divisé en deux parties. **Chaque partie doit être rédigée sur des copies distinctes**.
- Les seuls documents autorisés pour cette partie sont : un pense-bête d'une page recto-verso et les supports de cours. La calculatrice est autorisée (mais inutile).
- Toute réponse doit être justifiée. Le vocabulaire et les notations adéquates doivent être utilisées.

Exercice 1. (5 points)

Soient les deux ensembles $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. (0,5 points) Donner $\mathcal{P}(B)$ en extension.

> **Solution:**
>
> $$\begin{aligned}\mathcal{P}(B) = \{ \; & \emptyset, \\ & \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ & \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \\ & \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \\ & \{1,2,3,4\} \; \}\end{aligned}$$

2. Dire s'il existe (et donner un exemple) ou non (et dire pourquoi) :

   (a) (0,25 points) une application injective de A vers B ;

   (b) (0,25 points) une application injective de B vers A ;

   (c) (0,25 points) une application surjective de A vers B ;

   (d) (0,25 points) une application surjective de B vers A ;

   (e) (0,25 points) une application bijective de A vers B.

> **Solution:** Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$ définies par :
>
> | x | a | b | c | d | e |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $f(x)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 |
>
> | y | 1 | 2 | 3 | 4 |
> |---|---|---|---|---|
> | $g(y)$ | a | b | c | d |
>
> (a) il n'existe pas d'application injective de A vers B car $|A| > |B|$;
>
> (b) g est une application injective de B vers A ;
>
> (c) f est une application surjective de A vers B ;
>
> (d) il n'existe pas d'application surjective de B vers A car $|B| < |A|$;
>
> (e) il n'existe pas d'application bijective de A vers B car il n'existe pas d'application injective de A vers B.

3. On ordonne A par la relation d'ordre $\preceq$ définie par : $a \preceq a$, $a \preceq d$, $b \preceq a$, $b \preceq b$, $b \preceq d$, $c \preceq c$, $c \preceq d$, $d \preceq d$, $e \preceq a$, $e \preceq c$, $e \preceq d$ et $e \preceq e$.

(a) (1 point) Donner le diagramme de Hasse représentant cette relation d'ordre.

> **Solution:** En utilisant la méthode du cours qui consiste à trouver successivement les éléments minimaux et les placer par niveaux, on obtient :
>
> $$\begin{tikzcd} M_2: & & d \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ M_1: & a \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & c \arrow[d, dash] \\ M_0: & b & & e \end{tikzcd}$$

(b) (0,5 points) En déduire les éléments maximaux, minimaux, ainsi que le minimum et le maximum de A selon $\preceq$ s'ils existent.

> **Solution:**
> — un seul élément maximal : d ;
> — deux éléments minimaux : b et e ;
> — aucun élément minimum ;
> — un élément maximum : d.

(c) (0,75 points) Donner une relation d'ordre R sur B et une application $f : A \to B$ croissante i.e. telle que :

$$\forall x, y \in A \quad x \preceq y \Rightarrow f(x) \; R \; f(y)$$

> **Solution:** On peut associer à chaque élément de A son niveau par f (augmenté de 1) et utiliser l'ordre usuel $\leq$ sur les entiers pour R. On a alors
>
> | x | a | b | c | d | e |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $f(x)$ | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 |
>
> est bien croissante. Par exemple $b \preceq a$ et on a bien $f(b) = 1 \leq 2 = f(a)$.

(d) (1 point) Peut-on pour chaque couple $(x, y) \in A^2$ donner un élément $x \wedge y \in A$ et un élément $x \vee y \in A$ tel que $(A, \preceq, \wedge, \vee)$ soit un treillis ? Si oui donner $x \vee y$ et $x \wedge y$ pour tout couple $(x, y) \in A^2$, si non donner un contre-exemple.

> **Solution:** Il n'existe pas d'élément à la fois plus petit que b et que e, par conséquent $b \wedge e$ ne peut exister et on ne peut associer à A une structure de treillis en considérant l'ordre $\preceq$.

Exercice 2. (5 points)

1. (2 points) Soient A, B et C des ensembles d'éléments d'un univers U. Répondre aux questions suivantes en justifiant par une preuve ou un contre-exemple :

(a) (1 point) A-t-on $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (C \setminus B)$?

> **Solution:** Non, contre-exemple : avec $A = B = C = \{a, b\}$ on a $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset \setminus C = \emptyset$, mais $A \setminus (C \setminus B) = A \setminus \emptyset = A \neq \emptyset$.
> Plus généralement quand $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, l'énoncé n'est pas valide.

(b) (1 point) A-t-on $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$?

Solution: La propriété est bien vérifiée :

$\boxed{\subseteq}$ Soit $x \in (A \setminus B) \setminus C$. Alors par définition $x \in A \setminus B$ et $x \notin C$, et donc $x \in A$, $x \notin B$ et $x \notin C$.

D'où $x \in A \setminus C$, et alors $x \in (A \setminus C) \setminus B$.

$\boxed{\supseteq}$ De même que précédemment.

2. (1,5 points) Soit $(\mathcal{B}, \preceq, \wedge, \vee, \perp, \top, \overline{})$ une algèbre de Boole et $a, b, c \in \mathcal{B}$. En indiquant les propriétés utilisées, démontrer que :

$$\text{si } a \wedge c = b \wedge c \text{ et } a \wedge \overline{c} = b \wedge \overline{c} \text{ alors } a = b$$

Solution: Supposons $a \wedge c = b \wedge c$ (H_1) et $a \wedge \overline{c} = b \wedge \overline{c}$ (H_2). Alors

$$\begin{aligned}
a &= a \wedge \top && (\top \text{ neutre pour } \wedge)\\
&= a \wedge (c \vee \overline{c}) && (\text{déf. complémentaire})\\
&= (a \wedge c) \vee (a \wedge \overline{c}) && (\text{distributivité})\\
&= (b \wedge c) \vee (b \wedge \overline{c}) && (\mathrm{H}_1 \text{ et } \mathrm{H}_2)\\
&= b \wedge (c \vee \overline{c}) && (\text{distributivité})\\
&= b \wedge \top && (\text{déf. complémentaire})\\
&= b && (\top \text{ neutre pour } \wedge)
\end{aligned}$$

3. (1,5 points) Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble univers U, et $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications.

Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Rappel : pour tout élément x de A, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Solution: Supposons que $g \circ f$ est surjective (H_1) et g est injective (H_2).

Soit $y \in B$. Alors $g(y) \in C$, et comme $g \circ f$ est surjective (par H_1) on a $x \in A$ tel que $g \circ f(x) = g(y)$, i.e. $g(f(x)) = g(y)$. Or g étant injective (par H_2) alors $f(x) = y$, i.e. y admet un antécédent par f.

Conclusion : f est surjective.