Feuille 6 - Systèmes de déduction, unification, résolution

Exercice 1 *Séquents valides.*
Donner pour chacun des séquents suivants la formule associée. Dire si les séquents sont valides.

1. $(p \Rightarrow q \Rightarrow r), (p \Rightarrow q) \vdash \neg p, r$
2. $\vdash (p \wedge q), (\neg p \wedge \neg q)$
3. $p, \perp \vdash$
4. $\top \vdash$
5. $\vdash$

Appliquer les règles du système G à ces séquents, que constatez-vous ?

Exercice 2 *Preuve dans le système G.* En utilisant des arbres de dérivation dans le système G pour les formules suivantes, dire si elles sont valides ou non :

1. $\vdash ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
2. $\vdash ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg p \vee q) \Rightarrow p$

Exercice 3 *Séquents et quantificateurs.* Soient les deux séquents

1. $\exists x, \forall y, R(x, y) \vdash \forall z, \exists t, R(t, z)$
2. $\forall y, \exists x, R(x, y) \vdash \exists t, \forall z, R(t, z)$

Dire pour chacun s'il est valide ou non. Construire les arbres de dérivation en expliquant si le séquent n'est pas valide pourquoi la preuve ne peut être complétée.

Exercice 4 On s'intéresse ici à des formules qui contiennent le symbole d'équivallence $p \Leftrightarrow q$. On rappelle que $p \Leftrightarrow q$ est défini comme $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Dans la suite x, y et z désignent trois variables propositionnelles.

1. Donner la forme normale conjonctive des formules $(x \Leftrightarrow y)$ et $\neg(x \Leftrightarrow y)$.
2. Construire la table de vérité de la formule $(x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z))$. Cette formule est-elle valide ? satisfiable ?
3. On considère maintenant des séquents avec des formules contenant le symbole d'équivalence. Soit les deux règles dans lesquelles Γ et Δ sont des ensembles de formules et p et q sont des formules :

$$\frac{\Gamma, p \vdash \Delta, q \qquad \Gamma, q \vdash \Delta, p}{\Gamma \vdash \Delta, p \Leftrightarrow q} \qquad \frac{\Gamma, p, q \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash \Delta, p, q}{\Gamma, p \Leftrightarrow q \vdash \Delta}$$

   (a) Montrer que ces deux règles sont correctes (si une interprétation satisfait les deux prémisses alors elle satisfait la conclusion de la règle).
   (b) Montrer qu'elles sont inversibles (si une interprétation satisfait la conclusion de la règle alors elle satisfait les deux prémisses).
   (c) Construire en utilisant ces règles un arbre de preuve pour le séquent $\vdash x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))$.
   (d) La formule $x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))$ est-elle valide ?

Exercice 5 Soient E_1 et E_2 les ensembles de formules suivants :

$$E_1 = \{p \Leftrightarrow q, \neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow p)\} \qquad E_2 = \{(p \Rightarrow q), \neg q, \neg(q \Rightarrow p)\}$$

1. Construire pour E_1 puis pour E_2, les ensembles de clauses associés.
2. Chercher une réfutation pour chacun de ces ensembles.

Exercice 6 On se place dans le calcul propositionnel. On suppose que l'on dispose des programmes suivants :

— `deductionG` qui étant donné une formule A du calcul propositionnel renvoie vrai si et seulement si on peut construire dans le système G un arbre de dérivation complet dont la racine est le séquent avec la formule A comme conclusion ;

— `refutation` qui étant donné un ensemble de clauses propositionnelles E renvoie vrai si et seulement si on peut déduire par résolution à partir de E la clause vide $\perp$;

— `sat` qui étant donné un ensemble de clauses propositionnelles E renvoie vrai si et seulement si on peut construire une interprétation qui rend vraies l'ensemble des clauses de E ;

— `clausale` qui étant donnée une formule A renvoie l'ensemble des clauses correspondant à sa forme normale conjonctive.

1. Proposer trois solutions différentes pour implémenter une fonction `valide`(A) qui teste si la formule A est valide en utilisant respectivement les fonctions `deductionG`, `refutation` et `sat`.
2. Faire la même chose pour implémenter une fonction `satisfiable`(A) qui teste si la formule A est satisfiable et `insatisfiable`(A) qui teste si la formule A est insatisfiable.

Exercice 7 Nous rappelons la règle de résolution où C et C' sont des clauses, p une variable propositionnelle :

$$\frac{C \vee \neg p \qquad C' \vee p}{C \vee C'}$$

On rappelle que les clauses sont vues comme des ensembles de littéraux et donc lorsque l'on écrit $C \vee C'$ on ne garde qu'une seule instance de chaque littéral. Si la clause contient une variable propositionnelle et sa négation elle se simplifie en $\top$. Pour avoir moins d'étapes dans une preuve on propose d'utiliser la nouvelle règle suivante :

$$\frac{C \vee \neg p \vee \neg q \qquad C' \vee p \vee q}{C \vee C'}$$

où q est une variable propositionnelle différente de p.
Cette règle est-elle correcte ? Pourquoi ?

Exercice 8 *Unification*

On se donne une signature avec une constante $\mathtt{a}$ et un symbole de fonction f à trois arguments. Dire si les termes suivants sont unifiables, si oui donner l'unificateur le plus général, sinon expliquer pourquoi.

1. $f(x, x, y) \stackrel{?}{=} f(f(y, y, z), f(y, \mathtt{a}, z), \mathtt{a})$
2. $f(x, x, y) \stackrel{?}{=} f(f(y, y, z), f(y, x, z), \mathtt{a})$

Exercice 9 Soit les formules :

$$H_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\forall x, P(x) \vee Q(x)) \quad H_2 \stackrel{\text{def}}{=} \exists x, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \quad C \stackrel{\text{def}}{=} \exists x, Q(x)$$

.

1. Mettre en forme clausale l'ensemble de formules $\{H_1, H_2, \neg C\}$.
2. Trouver des instances closes contradictoires de ces formules et dériver la clause vide par résolution propositionnelle.
3. Faire directement une dérivation de la clause vide en utilisant la résolution dans le calcul des prédicats (c'est-à-dire les règles de renommage, factorisation et résolution binaire).

Exercice 10 *Résolution (examen session 1 - 2020)*

On modélise un monde dans lequel vivent des dragons [1]. On utilisera les symboles de prédicats suivants :

— $\mathtt{B}(x)$: le dragon x est bleu
— $\mathtt{H}(x)$: le dragon x est heureux
— $\mathtt{V}(x)$: le dragon x vole
— $\mathtt{P}(x,y)$: le dragon x est parent du dragon y (ou encore le dragon y est un enfant du dragon x)

1. Soient les formules :
   — $A \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, (\forall y, \mathtt{P}(x,y) \Rightarrow \mathtt{V}(y)) \Rightarrow \mathtt{H}(x)$
   — $B \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, \mathtt{B}(x) \Rightarrow \mathtt{V}(x)$
   — $C \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, (\exists y, \mathtt{B}(y) \wedge \mathtt{P}(y,x)) \Rightarrow \mathtt{B}(x)$
   — $D \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, \mathtt{B}(x) \Rightarrow \mathtt{H}(x)$

   En utilisant la résolution, montrer que $A, B, C \models D$. On détaillera les étapes de mise en forme clausale et de déduction.
2. Donner une interprétation des prédicats $\mathtt{B}$, $\mathtt{H}$ et $\mathtt{V}$ sur un domaine qui contient 3 dragons ($\mathtt{Puff}$, $\mathtt{Draco}$ et $\mathtt{Saphira}$), avec exactement deux dragons bleus, dans lequel le dragon $\mathtt{Puff}$ est heureux et qui vérifie simultanément les formules suivantes :
   (a) $\forall x, \mathtt{B}(x) \vee \mathtt{H}(x)$
   (b) $\exists x, \mathtt{B}(x) \wedge \mathtt{H}(x)$
   (c) $\forall x, \mathtt{V}(x) \Rightarrow \neg \mathtt{H}(x)$
   (d) $\exists x, \mathtt{V}(x)$

Exercice 11 On rappelle qu'une relation binaire est totale si pour tout x, il existe un y tel que x est en relation avec y.

Utiliser la méthode de résolution pour prouver que toute relation binaire symétrique, transitive et totale est réflexive.

1. D'après le cours "Logique et Principe de Résolution" de Dominique Pastre, Université de Paris