Faculté des Sciences d'Orsay | Université Paris-Saclay
Licence Informatique, LDD Informatique, Mathématiques, semestre 5 | 2022–23
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) | 4 octobre 2022
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Devoir

Préambule

L'objet de ce devoir est d'explorer quelques propriétés des graphes exprimées en logique du premier ordre.

Lorsqu'on étudie les $graphesenmathmatiquesoueninformatique$, on s'appuie sur la théorie des ensembles : un graphe est donné par deux ensembles, l'ensemble des sommets $\mathcal{V}$ et l'ensemble des arêtes $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Pour deux sommets x et y, on a $(x, y) \in \mathcal{E}$ si et seulement si il existe une arête qui part du sommet x et arrive au sommet y. On peut exprimer les propriétés des graphes en utilisant tous les outils disponibles en théorie des ensembles (entiers, fonctions, égalité etc.) et on peut également en théorie des ensembles quantifier sur un graphe quelconque.

La théorie des graphes en **logique du premier ordre** repose sur un langage beaucoup plus pauvre dans lequel on considère les propriétés d'un seul graphe. Pour cela on introduit une signature avec deux symboles de prédicat d'arité 2 : un symbole E qui sert à caractériser les arêtes et l'égalité $=$. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des axiomes de la théorie de l'égalité associés à ce langage.

Une interprétation I de cette théorie est donnée par un domaine $\mathcal{D}$ et des interprétations $(E_I, =_I)$ des deux symboles de prédicat. Les interprétations E_I et $=_I$ sont des relations binaires sur $\mathcal{D}$ donc des sous ensembles de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. On va ici ne considérer que des modèles dits **équationnels** dans lesquels le symbole d'égalité de la logique est interprété par l'égalité (mathématique) de $\mathcal{D}$ (si le symbole d'égalité est interprété par une relation d'équivalence plus générale, il faut se placer dans l'espace quotient $\mathcal{D}/_{=_I}$ pour retrouver un modèle équationnel). L'interprétation I correspond à un graphe (au sens mathématique) dont les sommets sont les éléments de $\mathcal{D}$ et les arêtes correspondent à l'ensemble E_I. Réciproquement tout graphe $\mathcal{V}, \mathcal{E}$ définit une interprétation de la théorie des graphes avec pour domaine $\mathcal{V}$. L'interprétation du symbole E est l'ensemble des arêtes $\mathcal{E}$ et l'interprétation du symbole d'égalité est l'égalité sur $\mathcal{V}$.

Dans les questions qui suivent, lorsqu'il est demandé d'écrire une formule logique représentant une certaine propriété mathématique des graphes, il s'agit de l'exprimer **en utilisant uniquement les symboles de prédicats E et $=$ de la théorie des graphes et les connecteurs et quantificateurs logiques** (les quantifications portent uniquement sur des variables qui représentent un sommet quelconque), aucune autre notation "mathématique" n'est autorisée.

Questions

1. Traduire en formule logique de la théorie des graphes les propriétés suivantes :
   (a) De tout sommet qui a une arête qui boucle sur lui-même, il part également une arête sur un sommet différent.
   (b) Il n'y a pas de sommet isolé (un sommet est isolé s'il n'y a aucune arête qui part ou qui arrive sur ce sommet).
   (c) Il existe 3 sommets distincts reliés deux à deux par des arêtes (le sens de l'arête est indifférent)
2. Traduire en langue naturelle (en utilisant le vocabulaire usuel des graphes) les propriétés logiques suivantes
   (a) $\forall x\, y, E(x, y) \Rightarrow \neg E(y, x)$
   (b) $\forall x, \exists y\, z, E(x, y) \wedge E(x, z)$
   (c) $\exists x\, y, \neg E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$
3. Enoncer les axiomes de la théorie de l'égalité $\mathcal{G}$ associés au langage de la théorie des graphes.

4. On se donne les trois axiomes suivants :
   — $T \stackrel{\text{def}}{=} \forall x, \exists y, E(x,y)$,
   — $O \stackrel{\text{def}}{=} \exists y, \forall x, \neg E(x,y)$,
   — $I \stackrel{\text{def}}{=} \forall x\, y\, z, E(x,z) \wedge E(y,z) \Rightarrow x = y$

   (a) Montrer que tout modèle de ces trois axiomes a forcément un domaine infini.

   (b) Montrer que si on supprime n'importe lequel de ces trois axiomes, alors on peut trouver un modèle fini des deux axiomes restants.

5. On s'intéresse à la propriété d'existence d'un chemin entre deux sommets du graphe. D'un point de vue mathématique, on dira qu'il existe un chemin de taille n entre deux sommets x et y s'il existe des sommets $x_0, \ldots x_{n+1}$ avec $x_0 = x, x_{n+1} = y$ et pour $i = 0 \ldots n$, $(x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{E}$.

   Si une formule P contient une variable libre x, on pourra convenir de la noter $P[x]$. On pourra alors utiliser la notation $P[t]$ pour représenter la formule $P[x \leftarrow t]$ obtenue en remplaçant les occurrences libres de la variable x dans P par le terme t.

   (a) Reprendre la définition mathématiques pour expliciter à quelle condition il existe un chemin de longueur 0 entre x et y.
   Définir une formule logique $C_0[x,y]$ paramétrée par deux variables libres x et y qui est vraie si et seulement si x et y sont deux sommets reliés par un chemin de longueur 0.

   (b) On suppose qu'on a construit une formule $C_n[x,y]$ paramétrée par deux variables libres x et y qui est vraie si et seulement si x et y sont deux sommets reliés par un chemin de longueur n. Utiliser $C_n[x,y]$ (ou des instances de cette formule) pour construire une formule $C_{n+1}[x,y]$ paramétrée par deux variables libres x et y qui est vraie si et seulement si x et y sont deux sommets reliés par un chemin de longueur $n+1$.

   (c) Pour un entier quelconque $n \in \mathbb{N}$, la formule $C_n[x,y]$ est bien une formule de la théorie des graphes. Expliciter cette formule dans le cas particulier de $n = 2$ (c'est-à-dire donner la définition de $C_2[x,y]$ en n'utilisant que les symboles $E, =$ et les connecteurs et quantificateurs logiques).

6. On suppose qu'il existe une formule du premier ordre $C[x,y]$ dans le langage de la théorie des graphes qui est vraie dans un modèle si et seulement si il existe un chemin (de longueur quelconque) entre les sommets correspondant à x et y. On ajoute deux constantes a, b au langage, qui représentent donc des sommets.

   (a) Montrer que tout sous-ensemble fini de l'ensemble des formules $\mathcal{G} \cup \{\neg C_n[a,b] | n \in \mathbb{N}\} \cup \{C[a,b]\}$ est satisfiable.

   (b) Montrer que l'ensemble des formules $\mathcal{G} \cup \{\neg C_n[a,b] | n \in \mathbb{N}\} \cup \{C[a,b]\}$ est insatisfiable.

7. On admet dans cette question le théorème de compacité pour les formules de la logique du premier ordre. C'est-à-dire qu'un ensemble $\mathcal{A}$ quelconque de formules est satisfiable si et seulement si tout **sous-ensemble fini** de formules de $\mathcal{A}$ est satisfiable.

   En appliquant ce théorème à l'ensemble $\mathcal{G} \cup \{\neg C_n[a,b] | n \in \mathbb{N}\} \cup \{C[a,b]\}$, la question précédente montre une contradiction. Que peut-on en déduire par rapport aux hypothèses faites ?