Chapitre 4

Calcul des primitives et des intégrales - Partie I

4.1 Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle ***primitive de f sur I****, toute fonction F définie sur I telle que F soit dérivable sur I et $F' = f$ i.e.*

$$\forall\, x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I.
La fonction G est une primitive de f sur I si et seulement si il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + C$.

Démonstration

- Soit $C \in \mathbb{R}$ et soit $G = F + C$. La fonction G est dérivable sur I et $G' = F' = f$. Par conséquent G est bien une primitive de f sur I.
- Réciproquement, soit G une primitive de f sur I. La fonction $G - F$ est dérivable sur I et

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

La fonction $G - F$ est donc constante sur l'intervalle I, par conséquent il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in I, \quad (G - F)(x) = C$$

i.e.

$$\forall\ x \in I, \quad G(x) = F(x) + C.$$

Remarques importantes

- Attention, il est important de bien se placer sur un **intervalle** I !

  Exemple :

  Les deux fonctions

  $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(|x|) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \ln(|x|) - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \ln(|x|) + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \end{array}$$

  admettent pour dérivée :

  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}.$$

  Mais, elles ne diffèrent pas d'une constante ! En effet, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

- Attention, si une fonction admet une primitive sur un intervalle, celle-ci ne sera jamais unique. On ne dira donc jamais "la" primitive de la fonction sur l'intervalle mais "une" primitive de la fonction sur l'intervalle.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant des primitives sur I et soit $a \in I$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction f admet une **unique** *primitive F sur I telle que*

$$F(a) = \alpha.$$

Démonstration

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soient F et G deux primitives de f sur I telles que $F(a) = \alpha$ et $G(a) = \alpha$.
Comme F et G sont deux primitives de f sur I, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\ x \in I, \quad F(x) = G(x) + C.$$

En particulier pour $x = a$, nous avons $F(a) = G(a) + C$. Or $F(a) = G(a) = \alpha$, donc $C = 0$ et par conséquent $G = F$.

Proposition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et soient F et G deux primitives respectivement de f et g sur I.
Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

4.2 Intégrales

La théorie de l'intégration n'est pas au programme de ce semestre et il vous faudra encore attendre un peu pour avoir une définition correcte de l'intégrale. Ce semestre nous nous contenterons encore une fois de définition "intuitive" de l'intégrale déjà vue en terminale.

Définition
L'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$, notée $\int_a^b f(t)dt$, vous a été définie en Terminale comme étant l'aire ***algébrique*** *sous la courbe représentative de f. Ceci signifie que les portions d'aires situées sous l'axe des abscisses contribuent négativement au calcul d'aire.*

Remarque
Attention une intégrale représente donc un nombre.

Proposition (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue)
Soient f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I et soient $(a, b, c) \in I^3$. Nous avons alors

- *Linéarité*
$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$
- *Relation de Chasles*
$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$
- $$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$
- *Si $a < b$, alors*
$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

4.3 Intégrale fonction de la borne supérieure

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et soit $a \in I$. Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} F: I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$$

est dérivable et $F' = f$.
Autrement dit F est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Corollaire
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et F une primitive quelconque de f sur I.
Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a alors

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque
Ce théorème est fondamental car il établit un lien entre la notion d'aire-intégrale et la notion de primitive.

4.4 Calcul des primitives

Le calcul des primitives d'une fonction continue sur un intervalle I est donc important car la connaissance d'une primitive F permet de calculer pour tout $(a, b) \in I^2$ l'intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$.
Nous verrons bientôt que le calcul des primitives nous permettra de résoudre aussi des "équations différentielles".

4.4.1 Liste des primitives usuelles immédiates

Chaque fois que nous connaissons explicitement la dérivée f d'une fonction F, nous pouvons énoncer ce résultat à l'envers. Nous obtenons alors la liste suivante :

Fonction	Une primitive	Intervalle
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi[\ (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x \rvert)$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$

4.4.2 Primitives se ramenant facilement aux primitives usuelles

a Par linéarité

Nous avons vu que si F et G sont respectivement deux primitives sur I de f et g, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ (linéarité).
Ceci permet de calculer quelques primitives.

Exemple d'application
Déterminer une primitive de $x \mapsto \tan^2(x)$ sur $]-\pi/2;\pi/2[$.
Pour tout $x \in]-\pi/2;\pi/2[$, nous avons

$$\tan^2(x) = \left[1+\tan^2(x)\right] - 1 = \int_0^x (1+\tan^2(t))dt - \int_0^x 1dt = \tan(x) - x.$$

Comme $x \mapsto \tan(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1+\tan^2(x)$ sur $]-\pi/2;\pi/2[$ et comme $x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$ sur $]-\pi/2;\pi/2[$, alors une primitive de $x \mapsto \tan^2(x)$ sur $]-\pi/2;\pi/2[$ est $x \mapsto \tan(x) - x$.

b Par translation ou homothétie sur la variable

Soit k une constante réelle non nulle. Nous avons

Fonction	Dérivée	Intervalle
$x \mapsto (x+k)^n\ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto n(x+k)^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto (x+k)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \alpha(x+k)^{\alpha-1}$	$]-k;+\infty[$
$x \mapsto \ln\lvert x+k \rvert$	$x \mapsto \dfrac{1}{x+k}$	$]-\infty;-k[$ ou $]-k;+\infty[$
$x \mapsto \sin(kx)$	$x \mapsto k\cos(kx)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(kx)$	$x \mapsto -k\sin(kx)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^{kx}$	$x \mapsto ke^{kx}$	$\mathbb{R}$

Quand nous lisons ces formules de dérivation à l'envers, nous obtenons alors

Fonction	Une primitive	Intervalle
$x \mapsto (x+k)^n \ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \dfrac{1}{(n+1)}(x+k)^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto (x+k)^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \dfrac{1}{(\alpha+1)}(x+k)^{\alpha+1}$	$]-k;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x+k}$	$x \mapsto \ln\lvert x+k\rvert$	$]-\infty;-k[$ ou $]-k;+\infty[$
$x \mapsto \sin(kx)$	$x \mapsto -\dfrac{1}{k}\cos(kx)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(kx)$	$x \mapsto \dfrac{1}{k}\sin(kx)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^{kx}$	$x \mapsto \dfrac{1}{k}e^{kx}$	$\mathbb{R}$

Exemple d'application

Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos(2x)\cos(3x)$ sur $\mathbb{R}$.

Nous avons après linéarisation

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x)\cos(3x) = \frac{1}{2}(\cos(5x) + \cos(x)).$$

Comme $x \mapsto \dfrac{1}{5}\sin(x)$ est une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ et comme $x \mapsto \sin(x)$ est une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$, une primitive de $x \mapsto \cos(2x)\cos(3x)$ sur $\mathbb{R}$ est alors $x \mapsto \dfrac{1}{10}\sin(5x) + \dfrac{1}{2}\sin(x)$.

4.4.3 Par utilisation des formules simples de dérivations de fonctions composées

Rappelons que :

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ et e^u sont dérivables sur I et
$$(u^n)' = nu'u^{n-1}, \quad (e^u)' = u'e^u.$$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, strictement positive sur I alors u^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{u}$ sont dérivables sur I et
$$(u^\alpha)' = \alpha u'u^{\alpha-1}, \quad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et u ne s'annule pas sur I alors $\ln|u|$ est dérivable sur I et
$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}.$$

Par conséquent, si la fonction dont on recherche une primitive se présente de façon évidente sous ces formes, nous pouvons alors très facilement déterminer une primitive :

Fonction	Une primitive
$x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \mapsto e^{u(x)}$
$x \mapsto u'(x)u^n(x)\ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \dfrac{1}{(n+1)}u^{n+1}(x)$
$x \mapsto u'(x)u^\alpha(x)\ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \dfrac{1}{(\alpha+1)}u^{\alpha+1}(x)$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \ln\lvert u(x)\rvert$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$

Exemples

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
  La fonction se présente sous la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln(x)$. Une primitive est donc $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$.

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1; +\infty[$.
  La fonction se présente sous la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln(x)$. Une primitive est donc $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \tan(x)$ sur $]-\pi/2; \pi/2[$. Nous avons

$$\forall\ x \in]-\pi/2; \pi/2[, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

  La fonction se présente sous la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \cos(x)$. Une primitive est donc $x \mapsto -\ln(\cos(x))$.

4.5 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I admettant des dérivées continues sur I. Nous avons vu que la fonction uv est alors dérivable sur I et nous avons

$$\forall\ x \in I, \quad (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

ou encore

$$\forall\ x \in I, \quad u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$

Soit $a \in I$. En prenant les intégrales des deux membres nous obtenons alors

$$\forall\ x \in I, \quad \int_a^x u(t)v'(t)dt = [(uv)(t)]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t)dt.$$

Proposition **(Intégration Par Parties - IPP)**

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I admettant des dérivées continues sur I et soit $(a,b) \in I^2$. Nous avons alors :

- *Une primitive sur I de $x \mapsto u(x)v'(x)$ est*
$$x \mapsto u(x)v(x) - \int_a^x u'(x)v(x).$$
- $$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exemples

- Déterminer une primitive de $x \mapsto x\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.
Nous avons ici
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{array}{ll} u(x) = x, & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos(x), & v(x) = \sin(x) \end{array}$$
donc une primitive de $x \mapsto x\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ est
$$x \mapsto x\sin(x) - \int_0^x \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + 1.$$
- Pour $\alpha \neq -1$, calculer l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_1^2 x^\alpha \ln(x)dx$.
Nous avons
$$\forall\ x \in [1,2], \qquad \begin{array}{ll} u(x) = \ln(x), & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^\alpha, & v(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{array}$$
donc
$$\begin{aligned} I_\alpha &= \left[\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^\alpha}{(\alpha+1)}dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1})\ln(x)\right]_1^2 - \left[\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\right]_1^2 \\ &= \frac{2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)}\ln(2) - \frac{2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2}. \end{aligned}$$