Feuille 3 - Définitions récursives, Substitutions et interprétations

Exercice 1 *Récurrence sur les formules.*

1. On considère la fonction `simpl` définie par les équations suivantes dans lesquelles a est une variable propositionnelle choisie arbitrairement :

$$
\begin{array}{llll}
\texttt{simpl}(\top) & = a \vee \neg a & \texttt{simpl}(P \wedge Q) & = \neg(\neg\texttt{simpl}(P) \vee \neg\texttt{simpl}(Q)) \\
\texttt{simpl}(\bot) & = \neg(a \vee \neg a) & \texttt{simpl}(P \vee Q) & = \texttt{simpl}(P) \vee \texttt{simpl}(Q) \\
\texttt{simpl}(p) & = p \quad p \text{ variable propositionnelle} & \texttt{simpl}(P \Rightarrow Q) & = \neg\texttt{simpl}(P) \vee \texttt{simpl}(Q) \\
\texttt{simpl}(\neg P) & = \neg(\texttt{simpl}(P)) & &
\end{array}
$$

   — Donner la formule résultat de $\texttt{simpl}(x \wedge y \Rightarrow z)$.
   — Que fait la fonction `simpl` en général (comment $\texttt{simpl}(P)$ est relié à P et quelles sont ses propriétés syntaxiques) ?

2. Donner les équations récursives qui définissent une fonction `ht` qui mesure la hauteur d'une formule (nombre maximal de connecteurs emboités)

$$
\begin{array}{lll}
\texttt{ht}(P) & = ... & \texttt{si } P \texttt{ atomique} \\
\texttt{ht}(\neg P) & = ... & \\
\texttt{ht}(P \circ Q) & = ... & \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}
\end{array}
$$

3. Démontrer par récurrence sur la hauteur d'une formule P que pour toute formule P, $\texttt{simpl}(\text{P})$ ne contient pas le symbole $\Rightarrow$.

4. Pour prouver qu'une propriété $\phi(P)$ est vérifiée pour toutes les formules propositionnelles P, on peut raisonner par récurrence **structurelle** sur les formules, suivant le principe :

   — Si on peut montrer que :
   (a) $\phi(P)$ est vérifiée lorsque P est une formule atomique en particulier $\phi(\top)$ et $\phi(\bot)$;
   (b) pour une formule propositionnelle A quelconque, en supposant que $\phi(A)$ est vérifiée, on peut montrer $\phi(\neg A)$
   (c) pour des formules propositionnelles A et B quelconques, en supposant que $\phi(A)$ et $\phi(B)$ sont vérifiées, on peut montrer $\phi(A \wedge B)$ ainsi que $\phi(A \vee B)$ et $\phi(A \Rightarrow B)$
   — Alors on peut en déduire que pour tout $P \in \textsc{Prop}$, $\phi(P)$ est vérifiée.

   Utiliser ce schéma pour montrer la propriété attendue de $\texttt{simpl}(P)$.

5. (optionnel) Justifier la correction de ce schéma de preuve en le ramenant à une récurrence sur les entiers.
   — On suppose que les conditions (1) à (3) du principe de récurrence sur les formules sont satisfaites par la propriété ϕ. Montrer par récurrence sur n que pour toute formule P telle que $\texttt{ht}(P) \leq n$, on a $\phi(P)$ est vérifiée.
   — En déduire que $\phi(P)$ est vérifiée pour toutes les formules P.

Exercice 2 *Structure arborescente des formules, définition récursive.*

Soit la formule A définie comme $\neg P \Rightarrow Q \vee \neg(P \vee R)$.

1. Parenthéser la formule A en préservant le sens
2. Donner la forme arborescente de cette formule.
3. Pour quelles valeurs de P, Q et R, la formule A est-elle vraie ? (on essaiera de répondre sans construire l'ensemble de la table de vérité).

4. Donner une formule équivalente à $\neg(P \Rightarrow Q)$ qui n'utilise que la conjonction et la négation.
5. On souhaite écrire une fonction qui pour toute formule propositionnelle P calcule une nouvelle formule $\texttt{neg}(P)$ qui est logiquement équivalente à $\neg P$ mais qui au lieu d'ajouter un symbole de négation en tête de la formule, effectue de possibles simplifications et n'ajoute éventuellement un nouveau symbole de négation qu'au niveau d'une formule atomique. Pour cela on utilisera les propriétés suivantes :

$$\neg\bot \Leftrightarrow \top \qquad \neg\neg A \Leftrightarrow A \qquad \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \qquad \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

   (a) Calculer la valeur attendue pour $\texttt{neg}(A)$. Pour quelle valeur de P, Q et R cette formule est-elle vraie ?
   (b) Donner les équations récursives qui définissent $\texttt{neg}(P)$
   (c) Montrer par récurrence structurelle sur la formule P que $\texttt{neg}(P)$ est logiquement équivalent à $\neg P$.

Exercice 3 *Sous-formules.* On dit qu'une formule Q est une sous-formule de P si $Q = P$ ou bien si la formule Q apparait sous un connecteur de P. C'est-à-dire $P = \neg P'$ et Q est une sous-formule de P' ou bien $P = P_1 \circ P_2$ et Q est une sous-formule de P_1 ou bien une sous-formule de P_2 avec $\circ$ un des 4 connecteurs binaires : $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

1. Donner toutes les sous-formules de la formule $\neg(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \wedge q)$
2. Donner les équations qui définissent la fonction $\texttt{sf}$ dans $\textsc{Prop} \to \wp(\textsc{Prop})$ qui à une formule propositionnelle P associe l'ensemble de ses sous-formules.
3. Trouver un majorant du nombre de sous-formules d'une formule P qui utilise n connecteurs logiques. Donner un exemple où ce majorant est atteint. Prouver ce résultat par récurrence structurelle sur la formule.
4. (optionnel) Même question pour un minorant du nombre de sous-formules.

Exercice 4 On considère un langage avec des symboles de fonctions $\texttt{f}$ binaire, $\texttt{g}$ unaire et une constante $\texttt{a}$ ainsi qu'un symbole de prédicat $\texttt{R}$ binaire.

Donner les équations récursives qui définissent une fonction $\texttt{xin}$ qui étant donnée une formule P du calcul des prédicats sur le langage précédent, et une variable x, renvoie vrai si la variable x est libre dans la formule P et faux sinon.

Exercice 5 On considère un langage avec des symboles de fonctions $\texttt{f}$ binaire, $\texttt{g}$ unaire et une constante $\texttt{a}$ ainsi qu'un symbole de prédicat $\texttt{R}$ binaire.

Donner les formules résultats des substitutions suivantes :

1. $\texttt{R}(x, \texttt{g}(y))[x \leftarrow \texttt{f}(\texttt{a}, \texttt{g}(y)); y \leftarrow x]$
2. $\texttt{R}(x, \texttt{g}(y))[x \leftarrow \texttt{f}(\texttt{a}, \texttt{g}(y))][y \leftarrow x]$
3. $\forall x, \texttt{R}(x, \texttt{g}(y))[y \leftarrow \texttt{g}(z)]$
4. $\forall x, \texttt{R}(x, \texttt{g}(y))[y \leftarrow \texttt{g}(x)]$
5. $\forall x, \texttt{R}(x, \texttt{g}(y))[x \leftarrow z]$
6. $\forall x, \texttt{R}(x, \texttt{g}(y))[x \leftarrow y]$

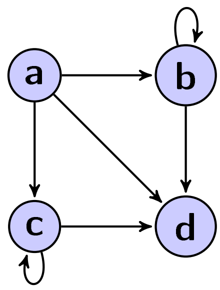
Exercice 6 *Modèles de relation, examen session 2 2014-15*

On se place dans un langage avec un symbole de prédicat binaire R. Soient les quatre formules de la logique du premier ordre suivantes :

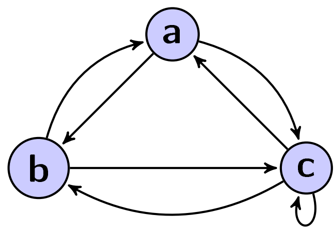
— F_1 : $\forall x, ((\exists y, \neg R(x,y)) \Rightarrow \exists y, (R(x,y) \wedge R(y,x)))$
— F_2 : $\forall x, \exists y, (R(x,y) \vee R(y,x))$
— F_3 : $\forall x\, y\, z, ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$
— F_4 : $\exists x, R(x,x)$

1. On se donne des interprétations de la relation R sous forme de graphes. Le domaine est l'ensemble des sommets du graphe et on a une arête du sommet x au sommet y exactement lorsque la relation $R(x,y)$ est vérifiée dans l'interprétation. Dans chacune des deux interprétations suivantes :
   (a) donner la liste des couples (x, y) tels que $R(x,y)$ est vraie dans l'interprétation ;

(b) dire lesquelles des formules F_1, F_2, F_3, F_4 précédentes sont vraies et lesquelles sont fausses. Justifier votre réponse.



modèle (A)



modèle (B)

2. Montrez que
   (a) la formule F_2 est conséquence logique de la formule F_1 ;
   (b) la formule F_4 est conséquence des deux formules F_1 et F_3.
3. A l'aide d'une variante du modèle A, montrer que F_4 n'est pas conséquence logique de F_2 et F_3.

Exercice 7 On se donne un langage avec un symbole de prédicat binaire pour l'égalité et les axiomes de la théorie de l'égalité.

On ne s'intéressera qu'aux modèles dits équationnels dans lesquels l'égalité de la théorie est interprétée par l'égalité du domaine.

1. On s'intéresse aux interprétations sur des domaines qui ont moins de n élements (au sens large). Que faut-il ajouter au langage et aux axiomes pour que ce soit le cas ? C'est-à-dire donner un ensemble d'axiomes dont les modèles équationnels sont exactement les interprétations qui ont un domaine dont le cardinal est inférieur ou égal à n.
2. On s'intéresse aux interprétations sur des domaines qui ont plus de n élements (au sens large). Que faut-il ajouter au langage et aux axiomes pour que ce soit le cas ?

Exercice 8 La théorie des entiers de Peano, s'appuie pour représenter les entiers sur un langage avec une constante 0 un symbole de fonction unaire S (également des symboles pour l'addition et la multiplication que nous ne considérons pas ici), un symbole de prédicat binaire pour l'égalité.

Les axiomes pour ces symboles dans cette théorie sont

— Les axiomes pour la reflexivité, symétrie et transitivité de l'égalité

— La stabilité de l'opération S par rapport à l'égalité

$$\forall x\, y, x = y \Rightarrow S(x) = S(y)$$

— Les axiomes de la théorie des entiers pour S

   1. $\forall x, \neg 0 = S(x)$
   2. l'injectivité de l'opération S :

$$\forall x\, y, S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$$

1. Montrer que tout modèle de ces formules a un domaine qui est infini.
2. Est-ce toujours le cas si on retire le premier axiome ?
3. Est-ce toujours le cas si on garde le premier axiome et qu'on retire le second ?
4. On se donne une théorie quelconque et on souhaite se limiter à des interprétations du langage qui ont un nombre infini d'éléments. Que faut-il ajouter au langage et aux axiomes pour que ce soit le cas ?

[3]

Exercice d'approfondissement

Exercice 9 *Exercice théorique modèles.* Le but de l'exercice est de montrer que dans un langage contenant uniquement m constantes $c_1, \ldots, c_m$ avec $(1 \leq m)$ et pas de fonction, alors une formule $\forall x_1 \ldots x_n, \exists y_1 \ldots y_p, A$ avec A sans quantificateur est valide si elle est vraie dans toute interprétation qui a moins de $n+m$ éléments.

1. (**Sous-interprétations**) Soit deux interprétations I et J d'une même signature. On dit que J est une sous-interprétation de I si
   — le domaine E de J est inclus dans le domaine D de I
   — l'interprétation f_J d'un symbole f dans J est la restriction à E de l'interprétation f_I du symbole f dans I, c'est-à-dire que l'interprétation des constantes est la même et appartient donc à E et que $\forall e_1, \ldots, e_n \in E, f_J(e_1, \ldots, e_n) = f_I(e_1, \ldots, e_n)$.
   — l'interprétation R_J d'un symbole de relation R dans J est la restriction à E de l'interprétation R_I du symbole R dans I, c'est-à-dire que $R_J = \{(u_1, \ldots, u_n) \in E^n | R_I(u_1, \ldots, u_n)\}$

   Par exemple sur une signature comportant les constantes 0 et 1, les opérations d'addition et de multiplication et la relation d'ordre $\leq$, l'interprétation usuelle des entiers naturels de domaine $\mathbb{N}$ est une sous-interprétation de l'interprétation usuelle des entiers relatifs de domaine $\mathbb{Z}$.

   Soit J une sous-interprétation de I et e un environnement dans J. Montrer les résultats suivants :
   (a) Pour tout terme t, $\texttt{val}_I(e,t) = \texttt{val}_J(e,t)$
   (b) Si A est une formule sans quantificateur alors
      i. $\texttt{val}_I(e,A) = \texttt{val}_J(e,A)$ si A est sans quantificateur
      ii. Si $\texttt{val}_I(e, \forall x_1 \ldots x_n, A) = V$ alors $\texttt{val}_J(e, \forall x_1 \ldots x_n, A) = V$
      iii. Si $\texttt{val}_J(e, \exists x_1 \ldots x_n, A) = V$ alors $\texttt{val}_I(e, \exists x_1 \ldots x_n, A) = V$
      iv. Donner un exemple avec les interprétations $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ qui montre que les réciproques des deux derniers réultats sont fausses.
2. On se donne un langage contenant uniquement m constantes $c_1, \ldots, c_m$ avec $(1 \leq m)$ et pas de fonction et une formule $B \stackrel{\text{def}}{=} \forall x_1 \ldots x_n, \exists y_1 \ldots y_p, A$ avec A sans quantificateur et on suppose que cette formule est vraie dans toute interprétation de cardinal inférieur à $n+m$.

   Soit $I = (D, F_I, R_I)$ une interprétation. Chaque constante c_i est interprétée par un élément de D. On note C le sous-ensemble de D formé des valeurs des constantes. Soient $d_1, \ldots, d_n \in D$ quelconques, soit J la sous interprétation de I construite en restreignant I sur le domaine $E \stackrel{\text{def}}{=} \{d_1, \ldots, d_n\} \cup C$.
   (a) Donner une borne du cardinal de E et en déduire que B est vrai dans J.
   (b) En déduire que B est vraie dans I
3. On se place dans un langage avec une constante 0, un symbole de fonction unaire f et un symbole de relation binaire E.

   Montrer que la formule $\forall x, (E(x,x) \wedge E(f(x), f(x)) \Rightarrow E(f(x), x) \vee E(f(f(x)), f(x)) \vee E(f(f(x)), x)$ est vraie dans toute interprétation de moins de 2 éléments. Cette formule est-elle valide en général ?

Exercice 10 *Logique monadique, examen 2017-18*

Les questions de ce problème sont largement indépendantes.

On considère une logique dont la signature est composée de deux prédicats unaires P, Q.

La signature donnée est un cas particulier de signature *monadique* c'est-à-dire avec uniquement des symboles de prédicat unaires et pas de symbole de fonction. Cette logique est décidable et on va justifier dans ce cas particulier que l'on peut toujours éliminer les quantificateurs.

Soit A une formule et I une interprétation du langage dont le domaine est $\mathcal{D}$. A tout élément du domaine $d \in \mathcal{D}$, on associe un couple de booléens qui sont les valeurs de vérité de $P(x)$ et $Q(x)$ dans un environnement dans lequel x a la valeur d, c'est-à-dire le couple $(\texttt{val}(x \mapsto d, P(x)), \texttt{val}(x \mapsto d, Q(x)))$. On note $\tau(d)$ ce couple.

1. Dans cette question on considère une interprétation particulière N dont le domaine est l'ensemble des entiers naturels, dans lequel le prédicat P est interprété par la propriété "être un entier pair" et le prédicat Q par la propriété "être une multiple de 3". Quelles sont les valeurs de $\tau(1)$, $\tau(2)$, $\tau(3)$, $\tau(4)$, $\tau(5)$, $\tau(6)$.

2. Combien de valeurs différentes prend $\tau(d)$ dans l'interprétation N de l'exemple précédent ? Combien de valeurs différentes peut prendre $\tau(d)$ dans le cas d'une interprétation I quelconque (donner un maximum et un minimum) ?
3. On introduit une relation binaire $d \simeq d'$ entre les éléments de $\mathcal{D}$ définie par $d \simeq d'$ si et seulement si $\tau(d) = \tau(d')$, c'est-à-dire que les valeurs de vérité des prédicats sont les mêmes pour d et d'. Il est facile de voir que $d \simeq d'$ est une relation d'équivalence qui a un nombre fini de classes d'équivalence.

   On dit que deux environnements ι et ι' sont équivalents si pour toute variable x, on a $\iota(x) \simeq \iota'(x)$. On note également $\iota \simeq \iota'$ cette équivalence entre environnements.

   Montrer que pour toute formule A et pour n'importe quels environnements ι et ι', si $\iota \simeq \iota'$ alors $\mathtt{val}(\iota, A) = \mathtt{val}(\iota', A)$ (on pourra raisonner par récurrence sur la formule A et traiter juste le cas de formules qui ne contiennent que le quantificateur $\forall$, et les connecteurs de négation et de conjonction).
4. On construit à partir de I une nouvelle interprétation I' en choisissant comme domaine un sous-ensemble $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ formé exactement d'un élément de $\mathcal{D}$ dans chaque classe d'équivalence. C'est-à-dire que
   — pour tout $d \in \mathcal{D}$, il existe $d' \in \mathcal{D}'$ tel que $d \simeq d'$
   — pour tout $x\, y \in \mathcal{D}'$, si $x \simeq y$ alors $x = y$

   (a) Justifier le fait que $\mathcal{D}'$ est un ensemble fini et donner une borne M sur sa taille.

   (b) Construire en suivant cette méthode une interprétation N' pour l'interprétation N de la question 1 (on indiquera le domaine et l'interprétation des deux prédicats sur ces valeurs).

   (c) Montrer que pour tout environnement ι de domaine $\mathcal{D}$, il existe un environnement ι' sur le domaine $\mathcal{D}'$ tel que $\iota \simeq \iota'$.

   (d) Montrer dans le cas général que pour n'importe quelle formule A et n'importe quel environnement ι' sur le domaine $\mathcal{D}'$ de l'interprétation I', la valeur de A dans l'environnement ι' est la même dans l'interprétation I et dans l'interprétation I', c'est-à-dire $\mathtt{val}_I(\iota', A) = \mathtt{val}_{I'}(\iota', A)$.
5. On introduit M nouvelles constantes $a_1, \ldots, a_M$ dans la signature.

   (a) Expliquer comment on peut transformer toute formule close A en une formule close A_M sans quantificateur telle que A est valide si et seulement si A_M est valide.

   (b) Appliquer votre méthode aux formules $(\forall x, P(x)) \Rightarrow (\exists x, P(x))$ et $(\exists x, P(x)) \Rightarrow (\forall x, P(x))$. Dire si les formules obtenues sont ou non valides.
6. En déduire une méthode pour décider de la validité d'une formule dans le langage.