Feuille d'exercice 3

Exercice 1 – Récurrence sur les formules

1.

$$\begin{aligned} simpl(x \wedge y \Rightarrow z) &= \neg simpl(x \wedge y) \vee z \\ &= \neg(\neg(\neg x \vee \neg y)) \vee z \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} ht(P) &= 0 && \text{si P atomique} \\ ht(\neg(P)) &= 1 + ht(P) \\ ht(P \circ Q) &= 1 + \max(ht(P), ht(Q)) && \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow\} \end{aligned}$$

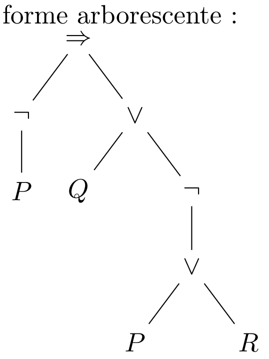
3. Montrons que pour toutes formules P, $simpl(P)$ ne contient pas le symbole $\Rightarrow$:
   $\varphi(n)$: Pour toute formule (P), Si $ht(P) =$ n alors $simpl(P)$ ne contine pas $\Rightarrow$
   - **cas de bases :** $\varphi(0)$: Si $ht(P) = 0$ $simpl(P)$ ne rajoute jamais le symbole '$\Rightarrow$'
   - **cas de récursif :** Supossons $\varphi(n)$ vrai.
     Prenons P de hauteur $n + 1$:
     3 cas : $C = \{P \wedge Q, P \vee Q, P \Rightarrow Q\}$
     Si $P' \in C$ d'après $\varphi(n)$ $simpl(P)$ et $simpl(Q)$ ne contient pas de symbole '$\Rightarrow$' (car P et Q sont de hauteur n) or $simpl(P')$ ne rajout jamais le symbole '$\Rightarrow$' donc P' ne contient pas le symbole '$\Rightarrow$'
4. Montrond par récurrence structurelle que $simpl(P)$ ne contient pas de $\Rightarrow$:

   $simple(\top)$: $a \vee \neg a$
   $simple(\bot)$: $\neg(a \vee \neg a)$
   $simpl(p)$: p

   Supposons la propritété vrai pour P_1 et P_2
   $simpl(\neg P_1)$: $\neg(simpl(P_1))$ vrai car $simpl(P_1)$ ne contient pas de $\Rightarrow$.
   $simpl(P_1 \wedge P_2)$: $\neg(\neg simpl(P_1) \vee \neg simpl(P_2))$ vrai par H.P
   $simpl(P_1 \vee P_2)$: $simpl(P_1) \vee simpl(P_2)$ vrai par H.P
   $simpl(P_1 \Rightarrow P_2)$: $\neg simpl(P_1) \vee simpl(P_2)$ vrai par H.P
5. Voir question 3.

Exercice 2 – Structure arborescente des formules, définition récursive.
$a := \neg P \Rightarrow Q \vee \neg(P \vee R)$

1. $(\neg P) \Rightarrow (Q \vee \neg(P \vee R))$
2. forme arborescente :



3. A est vrai quand : P est vrai ou quand Q est vrai ou P et R Faux.
4. $P \wedge \neg Q$
5. (a) $neg(A)$ est vrai quand : P est faut et Q est faut et P ou R est vrai.

(b)

$$\begin{aligned}
neg(\top) &= \bot \\
neg(\bot) &= \top \\
neg(p) &= \neg p && \text{p une variable propositionnelle} \\
neg(\neg P) &= P \\
neg(P \wedge Q) &= neg(P) \vee neg(Q) \\
neg(P \vee Q) &= neg(P) \wedge neg(Q) \\
neg(P \Rightarrow Q) &= P \wedge neg(Q)
\end{aligned}$$

(c) évident $(\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q)$ pareil pour $\vee$
$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

Exercice 3 – Sous formules

1. $\neg(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \wedge q)$
   $\{p \wedge q, q \wedge r, p \vee (q \wedge r), \neg(p \vee (q \wedge r)), \neg(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \wedge q), p, q, r\}$
2.

$$\begin{aligned}
sf(\top) &= \{\} \\
sf(\bot) &= \{\} \\
sf(p) &= \{p\} \\
sf(\neg P) &= sf(P) \cup \{\neg P\} \\
sf(P \wedge Q) &= sf(P) \cup sf(Q) \cup \{P \wedge Q\} \\
sf(P \vee Q) &= sf(P) \cup sf(Q) \cup \{P \vee Q\} \\
sf(P \Rightarrow Q) &= sf(P) \cup sf(Q) \cup \{P \Rightarrow Q\}
\end{aligned}$$

3.

Exercice 4 –

Exercice 5 –

Exercice 6 – Modèles de relation, examen session 2 2014/15

Exercice 7 – 1. $\exists x_1, \dots, x_n, \forall x, x = x_1 \vee \dots \vee x = x_n$ au plus $n-1$ éléments

2. $B_n = \forall x_1, \dots, x_n, \exists x, x \neq x_1 \wedge \dots \wedge x \neq x_n$ au plus $n-1$ éléments

Exercice 8 – La théorie des entiers de Peano :

$$I \models \begin{cases} \forall x \neg 0 = S(x) \\ \forall x, y, S(x) = S(y) \Rightarrow x = y \end{cases}$$

1. $a_n = Val_I(S^n(0))$
   $\mathfrak{D} = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
   $a_n = a_p, n < p$ n plus petit possible.
   — $n = 0$: $Val(0) = Val(S^p(0))$
     avec $p > 0$ $x \mapsto Val(S^{p-1}(0))$ impossible
   — $n > 0$:

$$\begin{aligned}
Val(S^n(0)) &= Val(S^p(0)) \\
Val(S^{n-1}(0)) &= Val(S^{p-1}(0)) \\
Val(S(S^{n-1}(0))) &= Val(S(S^{p-1}(0))) \\
Val(S^{n-1}(0)) &= Val(S^{p-1}(0)) \\
a_{n-1} &= a_{p-1}
\end{aligned}$$

2. $\mathfrak{D} = \{0\}$ $S(x) = 0$
3. $\mathfrak{D} = \{0, 1\}$ $S(x) = 1$
4.

Exercice 9 –

Exercice 10 – Logique monadique, examen 2017/18

1. $\tau(1) = (F, F), \tau(2) = (V, F), \tau(3) = (F, V), \tau(4) = (V, F), \tau(5) = (F, F), \tau(6) = (V, V)$
2. Il peut y avoir 4 valeurs différentes dans l'interprétation N
   dans une interprétation quelquconque il y a maximum 4 et minimum 1 valeurs différentes
3. $val(i, A) = val(i', A)$ Supposon vrai $A := val(i, A) = val(i', A)$
   —
   $$\begin{aligned} val(i, \neg A) &= neg(val(i, A)) \\ &= neg(val(i', A)) \\ &= val(i', A) \end{aligned}$$
   —
   $$\begin{aligned} val(i, A \wedge B) &= et(val(i, A), val(i, B)) \\ &= et(val(i', A), val(i', B)) \\ &= val(i', A \wedge B) \end{aligned}$$
   pareil pour $\vee$ mais avec la fonction $ou()$
   —
   $$\begin{aligned} val(i, P(X)) =& x \mapsto i(x) \models P(x) \\ & x \mapsto i'(x) \models P(x) \end{aligned}$$
   —
   $$\begin{aligned} I, i \models \forall x, A &\Leftrightarrow \forall d \in \mathcal{D}, I, i + \{x \mapsto d\} \models A \\ &\Leftrightarrow \forall d \in \mathcal{D}, I, i' + \{x \mapsto d\} \models A \qquad \text{par H.P et } i + \{x \mapsto d\} \backsimeq i' + \{x \mapsto d\} \\ &\Leftrightarrow I, i' \models \forall x, A \end{aligned}$$

4. (a)