

# Chapitre 3

## Variables aléatoires discrètes

Cours proba-stats - Université Lorraine - L2 Informatique  
 Resp.: J. UNTERBERGER

10 janvier 2023

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Variables aléatoires</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.2	Loi d'une variable aléatoire réelle discrète . . . . .	2
1.3	Fonction de répartition . . . . .	3
1.3.1	Propriétés d'une fonction de répartition . . . . .	3
1.3.2	Lien entre loi et fonction de répartition . . . . .	3
1.4	Fonction d'une variable aléatoire . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Moments</b>	<b>4</b>
2.1	Espérance . . . . .	4
2.2	Théorème de transfert . . . . .	5
2.3	Variance . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Indépendance de variables aléatoires</b>	<b>7</b>
3.1	Définitions et caractérisation . . . . .	7
3.2	Espérance du produit et variance de la somme . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Lois discrètes usuelles</b>	<b>8</b>
4.1	Variable aléatoire certaine . . . . .	8
4.2	Loi de Bernoulli . . . . .	9
4.3	Loi binomiale . . . . .	10
4.4	Loi géométrique . . . . .	11
4.5	Loi de Poisson . . . . .	11
4.6	Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ . . . . .	12

# 1 Variables aléatoires

## 1.1 Définitions

**Définition** (Variable aléatoire réelle discrète).

On appelle **variable aléatoire réelle discrète** une application  $X$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $X(\Omega)$  est au plus dénombrable.

Si  $x \in X(\Omega)$ , alors l'ensemble  $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\}$  est un événement de  $\Omega$ .

☞ On note souvent les variables aléatoires avec les lettres  $X, Y, Z, \dots$ . Il faut garder en tête que malgré leur nom (variables), ce sont des applications de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 1.** Si on lance trois dés équilibrés, on peut noter  $X_1$  le résultat du premier dé,  $X_2$  le résultat du second et  $X_3$  le résultat du troisième.

Formellement, on pose  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$ . Avec ce formalisme,

$$\begin{array}{lll} X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & X_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x & (x, y, z) \mapsto y & (x, y, z) \mapsto z \end{array} \quad \text{et}$$

L'événement  $X_1 = 3$  est alors  $\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = 3\}$ . Autrement dit, c'est  $\{(3, y, z); y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$  ou encore  $\{3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Ainsi,

$$P(X_1 = 3) = P(\{3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}.$$

On peut aussi s'intéresser par exemple à la somme des trois dés en regardant  $X_1 + X_2 + X_3$ .

**Remarque.** En notation probabiliste, l'événement  $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\}$  est noté  $\{X \in A\}$ .

Ainsi, dans l'exemple précédent,

$$P(X_2 \in \{2, 5, 6\}) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{2, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \frac{6 \times 3 \times 6}{6^3} = \frac{1}{2}.$$

**Proposition.**

Soit  $X$  une v.a. réelle discrète, alors  $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$  est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1.$$

*Démonstration.* Si  $x$  et  $y$  sont deux éléments distincts de  $\Omega$ , les événements  $\{X = x\}$  et  $\{X = y\}$  sont incompatibles. De plus,

$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} = \{X \in X(\Omega)\} = \Omega.$$

□

## 1.2 Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

**Définition.**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète, on appelle **loi de  $X$**  la donnée de  $X(\Omega)$  et de la suite  $(p_k)$  définie par

$$p_k = P(X = x_k),$$

avec  $x_k$  parcourant  $X(\Omega)$ .

**Exemple 2.** On lance deux dés équilibrés, on note  $X_1$  le résultat du premier dé,  $X_2$  le résultat du second. Soit  $Y = X_1 + X_2$ . On a  $Y(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ . On peut représenter la loi de  $Y$  par un tableau.

### 1.3 Fonction de répartition

**Définition** (Fonction de répartition).

Soit  $X$  une variable aléatoire, on appelle **fonction de répartition de la variable  $X$**  la fonction  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

**Exemple 3.** Déterminer la fonction de répartition de la variable  $Y$  de l'exemple précédent (somme de deux dés).

#### 1.3.1 Propriétés d'une fonction de répartition

**Proposition.**

Si  $F_X$  est la fonction de répartition d'une v.a.  $X$ , alors

1.  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ ,
2.  $F_X$  est continue à droite sur  $\mathbb{R}$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ ,
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

#### 1.3.2 Lien entre loi et fonction de répartition

**Proposition.**

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire :

$$F_X(x) = \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \leq x} P(X = x_k),$$

et réciproquement

$$P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

*Démonstration.* La première relation découle directement du fait que les  $x_k$  sont disjoints et de l'égalité

$$[X \leq x] = \bigcup_{x_k \in X(\Omega), x_k \leq x} [X = x_k].$$

La deuxième relation découle de la première, qui nous donne :

$$F_X(x_k) = \sum_{i=0}^k P(X = x_i) = P(X = x_k) + F_X(x_{k-1}).$$

□

**Exemple 4.** Une urne contient  $p$  boules numérotées de 1 à  $p$ . On tire  $n$  boules avec remise, et on note  $X$  le plus grand des numéros tirés. Quelle est la loi de  $X$  ?

Soit  $X_i$  la v.a. correspondant au numéro du  $i$ -ème lancer. On a alors  $X = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la définition du max et l'indépendance donnent :

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \leq t) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq t) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t).$$

Or  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $F_{X_i}(k) = P(X_i \leq k) = \frac{k}{p}$ . Donc

$$F_X(k) = \left(\frac{k}{p}\right)^n.$$

La proposition précédente donne alors :  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1) = \left(\frac{k}{p}\right)^n - \left(\frac{k-1}{p}\right)^n.$$

## 1.4 Fonction d'une variable aléatoire

**Proposition** (Fonction d'une variable aléatoire).

Soit  $X$  une v.a. réelle discrète et  $f$  une fonction réelle dont le domaine de définition contient  $X(\Omega)$ . Alors, la fonction  $Y = f(X)$  définie sur  $\Omega$  par

$$Y(\omega) = f(X(\omega))$$

est également une variable aléatoire réelle discrète.

**Proposition** (Loi de  $Y$ ).

Pour tout  $y_i \in Y(\Omega)$ ,

$$P(Y = y_i) = \sum_{x_k \in X(\Omega), f(x_k) = y_i} P(X = x_k).$$

## 2 Moments

### 2.1 Espérance

**Définition** (Espérance).

Soit  $X$  une v.a. discrète. On dit que  $X$  est intégrable si :

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| P(X = x_k) < +\infty.$$

On appelle alors **espérance** de  $X$  le nombre réel

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k).$$

**Remarque.** Si  $X(\Omega)$  est fini,  $X$  est forcément intégrable.

Dans le cas où  $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k P(X = k).$$

**Proposition.**

Si  $X(\Omega) \subset [a, b]$ , alors  $a \leq E(X) \leq b$ .

*Démonstration.* On a :

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} a P(X = x_k) \leq E(X) \leq \sum_{x_k \in X(\Omega)} b P(X = x_k)$$

□

**Proposition (Inégalité de Markov).**

Soit  $X$  une v.a. discrète prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Alors, pour tout réel  $a$  strictement positif,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

*Démonstration.* Soit  $a > 0$ . Le calcul de l'espérance de  $X$  peut se décomposer en :

$$E(X) = \sum_{x_k < a} x_k P(X = x_k) + \sum_{x_k \geq a} x_k P(X = x_k).$$

Le premier terme est positif et le deuxième est supérieur ou égal à  $a P(X \geq a)$ .

□

## 2.2 Théorème de transfert

**Théorème (Théorème de transfert).**

Soit  $X$  une v.a. discrète et  $f$  une fonction réelle telle que dont le domaine de définition contient  $X(\Omega)$ , et soit  $Y = f(X)$ . Alors, si  $Y$  est intégrable,

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} f(x_k) P(X = x_k).$$

*Démonstration.* Admis.

□

**Proposition (Linéarité de l'espérance).**

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. intégrables définies sur le même univers  $\Omega$ , et soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

*Démonstration.* Admis.

□

Application : si on lance deux dés, l'espérance de la somme vaut 7.

### 2.3 Variance

#### Définition (Variance).

Soit  $X$  une v.a. On appelle **variance** de  $X$  la quantité

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k).$$

et **écart-type** de  $X$  la quantité

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Exemple 5.** Faire le calcul pour un lancer de dé.

#### Proposition.

Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $X$  une v.a., alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E\left((aX + b - E(aX + b))^2\right) \\ &= E\left((aX + b - aE(X) - b)^2\right) \\ &= a^2 E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

□

#### Proposition.

Soit  $X$  une v.a. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E(X^2 + E(X)^2 - 2E(X)X) \\ &= E(X^2) + E(E(X)^2) - 2E(E(X)X) \\ &= E(X^2) + E(X)^2 - 2E(X)E(X) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

□

#### Définition (Variable aléatoire centrée réduite associée à une v.a.).

On appelle **variable aléatoire centrée réduite associée** à une v.a.  $X$  la variable notée  $X^*$  telle que :

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}.$$

### 3 Indépendance de variables aléatoires

#### 3.1 Définitions et caractérisation

##### Définition.

Deux v.a. discrètes  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** si pour tout  $x \in X(\Omega)$ , pour tout  $y \in Y(\Omega)$ , les événements  $\{X = x\}$  et  $\{Y = y\}$  sont indépendants, c'est-à-dire

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \forall y \in Y(\Omega), \quad P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x) P(Y = y). \quad (1)$$

Plus généralement, les variables  $(X_i)_{i \in I}$  sont indépendantes si pour toute famille  $(x_i)_{i \in I}$  de nombres réels, les événements  $X_i = x_i$ ,  $i \in I$ , sont indépendants, c'est-à-dire si pour tout sous-ensemble non vide  $\{j_1, \dots, j_p\}$  de  $I$  et tous  $x_1 \in X_{j_1}(\Omega)$ ,  $\dots$ ,  $x_p \in X_{j_p}(\Omega)$ , on a

$$P(X_{j_1} = x_1 \text{ et } X_{j_2} = x_2 \text{ et } \dots \text{ et } X_{j_p} = x_p) = P(X_{j_1} = x_1) P(X_{j_2} = x_2) \dots P(X_{j_p} = x_p).$$

##### Proposition.

Les v.a. discrètes  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(X \in A) P(Y \in B). \quad (2)$$

*Démonstration.* Il est clair que si (2) est satisfaite, alors (1) est satisfaite : il suffit de prendre  $A = \{x\}$  et  $B = \{y\}$  dans (2) pour obtenir (1).

Réciproquement, supposons que  $X$  et  $Y$  vérifient (1). Soit  $A \subset X(\Omega)$  et  $B \subset Y(\Omega)$ . Comme

$$\{X \in A\} \cap \{Y \in B\} = \bigsqcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \{X = x \text{ et } Y = y\}$$

et comme l'union est finie ou dénombrable (car  $A$  et  $B$  sont finis ou dénombrables vu que  $X$  et  $Y$  sont discrètes), on a

$$\begin{aligned} P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) &= P\left(\bigsqcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \{X = x \text{ et } Y = y\}\right) = \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B}} P(X = x \text{ et } Y = y) \\ &= \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B}} P(X = x) P(Y = y) \quad \text{car on a supposé (1)} \\ &= \left(\sum_{x \in A} P(X = x)\right) \left(\sum_{y \in B} P(Y = y)\right) = P(X \in A) P(Y \in B). \end{aligned}$$

Ainsi,  $X$  et  $Y$  satisfont (2). □

##### Proposition.

Les v.a. *discrètes*  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si

$$\forall f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telles que } f(X) \text{ et } g(Y) \text{ soient des v.a., } f(X) \text{ et } g(Y) \text{ sont indépendantes.} \quad (3)$$

*Démonstration.* Il est clair que si (3) est satisfaite, alors  $X$  et  $Y$  sont indépendantes : il s'agit de prendre pour  $f$  et  $g$  les fonctions identité  $s \in \mathbb{R} \mapsto s$ .

Réciproquement, supposons que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et montrons (3). Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f(X)$  et  $g(Y)$  soient des v.a. Notons  $X^* = f(X)$  et  $Y^* = g(Y)$ . On veut montrer que  $X^*$  et  $Y^*$  sont indépendantes, c'est-à-dire

$$\forall x^* \in X^*(\Omega), \quad \forall y^* \in Y^*(\Omega), \quad P(\{X^* = x^*\} \cap \{Y^* = y^*\}) = P(X^* = x^*) P(Y^* = y^*).$$

Soient  $x^* \in X^*(\Omega)$  et  $y^* \in Y^*(\Omega)$ . Notons que

$$\{X^* = x^*\} = \{f(X) = x^*\} = \{X \in f^{-1}(\{x^*\})\} \quad \text{et de même} \quad \{Y^* = y^*\} = \{Y \in f^{-1}(\{y^*\})\}.$$

Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, elles vérifient (2), d'où

$$\begin{aligned} P(\{X^* = x^*\} \cap \{Y^* = y^*\}) &= P(\{X \in f^{-1}(\{x^*\})\} \cap \{Y \in f^{-1}(\{y^*\})\}) \\ &= P(\{X \in f^{-1}(\{x^*\})\}) P(\{Y \in f^{-1}(\{y^*\})\}) \\ &= P(X^* = x^*) P(Y^* = y^*), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait montrer. □

### 3.2 Espérance du produit et variance de la somme

#### Proposition.

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. discrètes indépendantes.

— Si  $X$  et  $Y$  sont intégrables, alors  $XY$  aussi et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

— Si  $X$  et  $Y$  sont de carré intégrable,  $X + Y$  aussi et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

☞ Ces deux égalités sont des conditions nécessaires d'indépendance, non des conditions suffisantes.

*Démonstration.* On admet le premier point. Le deuxième point en découle alors car :

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 \\ &= E(X^2 + Y^2 + 2XY) - (E(X)^2 + E(Y)^2 + 2E(X)E(Y)) \\ &= V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)). \end{aligned}$$

□

Cette proposition se généralise aisément à une famille de variables aléatoires indépendantes.

## 4 Lois discrètes usuelles

### 4.1 Variable aléatoire certaine

#### Définition (Variable aléatoire certaine).

Une variable aléatoire  $X$  est **certaine** si elle ne prend qu'une seule valeur  $a$ . On a alors

$$P(X = a) = 1.$$



**Proposition** (Espérance et variance d'une variable aléatoire certaine).

Si  $X$  est une variable aléatoire certaine telle que  $X(\Omega) = \{a\}$ , alors  $E(X) = a$  et  $V(X) = 0$ .

*Démonstration.*

$$E(X) = aP(X = a) = a,$$

et

$$V(X) = (a - E(X))^2 P(X = a) = 0^2 \times 1 = 0.$$

□

**Théorème** (Variable aléatoire de variance nulle).

Si  $X$  est une variable aléatoire finie de variance nulle, alors il existe un réel  $a$  pour lequel  $P(X = a) = 1$ .

*Démonstration.* On suppose que  $V(X) = 0$ . Alors,  $(X - E(X))^2$  est une v.a. d'espérance nulle. Si  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ , on a alors par le théorème de transfert :

$$\sum_k (x_k - E(X))^2 P(X = x_k) = 0.$$

Or pour tout  $k$ , les termes  $(x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$  ne prennent que des valeurs positives, donc ils sont tous nuls. Donc pour tout  $k$ , soit  $(x_k - E(X))^2 = 0$  et  $x_k = E(X)$ , soit  $P(X = x_k) = 0$ . Comme  $\sum_k P(X = x_k) = 1$ , il existe au moins un  $k_0$  tel que  $P(X = x_{k_0}) \neq 0$ . Mais alors, pour tout  $k \neq k_0$ ,  $x_k \neq E(X)$ , et donc  $(x_k - E(X))^2 \neq 0$ , d'où  $P(X = x_k) = 0$ . Ainsi,

$$P(X = x_{k_0}) = 1.$$

□

## 4.2 Loi de Bernoulli

**Définition** (Loi de Bernoulli).

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi **de Bernoulli** de paramètre  $p$  lorsque  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  et

$$P(X = 1) = p.$$

On note alors  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .

**Remarque.** On a alors  $P(X = 0) = 1 - p$ .

**Proposition** (Espérance et variance d'une variable aléatoire de Bernoulli).

Si  $X$  est une variable aléatoire telle que  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , alors  $E(X) = p$  et  $V(X) = p(1 - p)$ .

*Démonstration.* Il suffit de l'écrire :

$$E(X) = 1P(X = 1) + 0P(X = 0) = p,$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= (1 - E(X))^2 P(X = 1) + (0 - E(X))^2 P(X = 0) \\
&= (1 - p)^2 p + p^2 (1 - p) \\
&= p(1 - p)(1 - p + p) = p(1 - p).
\end{aligned}$$

□

**Exemple 6.** On suppose que  $X \sim \mathcal{B}(p)$ . Quelle est la loi de la variable aléatoire  $X^2$  ?

$X^2$  ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, et  $P(X^2 = 1) = P(X = 1) = p$  comme  $X$  est à valeurs positives. Donc  $X^2 \sim \mathcal{B}(p)$ .

**Définition** (Variable indicatrice d'un événement).

Soit  $E$  un événement de  $\Omega$ . La v.a.  $X$  telle que

$$\begin{cases} X(\omega) = 1 & \text{si } \omega \in E \\ X(\omega) = 0 & \text{si } \omega \notin E \end{cases}$$

est appelée la **variable indicatrice de l'événement**  $E$ . On la note  $\mathbb{1}_E$ .

**Remarque.** La variable indicatrice  $\mathbb{1}_E$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p = P(\omega \in E)$ .

### 4.3 Loi binomiale

**Définition** (Loi binomiale).

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi **binomiale** de paramètres  $p \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  lorsque  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On note alors  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

**Remarque.**  $X \sim \mathcal{B}(1, p) \Leftrightarrow X \sim \mathcal{B}(p)$ .

**Théorème.**

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . La variable  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  suit alors la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

Autrement dit, si on effectue  $n$  lancers successifs indépendants d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité  $p$ , le nombre total de piles obtenus suit une loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$  (on prend pour  $X_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce tombe sur pile au  $i$ -ème tirage, et 0 sinon).

**Proposition** (Espérance et variance d'une variable aléatoire binomiale).

Si  $X$  est une variable aléatoire telle que  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $E(X) = np$  et  $V(X) = np(1 - p)$ .

*Démonstration.* L'expression de l'espérance découle de la linéarité de l'espérance.

Pour la variance, on utilise le fait que les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes.

□

## 4.4 Loi géométrique

### Définition.

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi **géométrique** de paramètre  $p \in [0, 1]$  lorsque  $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

On note alors  $X \sim \mathcal{G}(p)$ .

Si on effectue des lancers successifs indépendants d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité  $p$ , le temps d'apparition du premier pile suit une loi géométrique de paramètre  $p$ .

### Proposition (Espérance et variance d'une variable aléatoire géométrique).

Si  $X$  est une variable aléatoire telle que  $X \sim \mathcal{G}(p)$ , alors  $E(X) = 1/p$  et  $V(X) = (1 - p)/p^2$ .

**Application** (Problème du collectionneur de coupons). Des boîtes de céréales contiennent chacune une vignette parmi  $n$  vignettes possibles. On veut posséder au moins un exemplaire de chacune des vignettes. Combien faut-il acheter en moyenne de boîtes de céréales pour cela ?

On note  $T$  la variable aléatoire qui représente le nombre de vignettes achetées avant d'obtenir les  $n$  vignettes de la collection.

On peut considérer que  $T$  est un temps : à chaque pas de temps une nouvelle vignette est achetée.

Pour  $i = 1, \dots, n$ , on note  $T_i$  le temps nécessaire pour avoir une  $i$ ème nouvelle vignette dans la collection.

On a

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n,$$

où  $T_1 = 1$ , et pour  $i \geq 1$ ,  $T_i$  suit une loi géométrique de paramètre  $\frac{n-(i-1)}{n}$ .

En effet, lorsque l'on a  $i$  vignettes, la probabilité d'en trouver une nouvelle est  $\frac{n-(i-1)}{n}$ . Donc  $E(T_i) = \frac{n}{n-(i-1)}$ . Et par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(T) &= E(T_1) + E(T_2) + \dots + E(T_n) \\ &= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} \\ &= n \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ &= n \log n + \gamma n + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

## 4.5 Loi de Poisson

### Définition.

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi **de Poisson** de paramètres  $\lambda > 0$  lorsque  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

### Proposition (Espérance et variance d'une loi de Poisson).

Si  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors  $E(X) = \lambda$  et  $V(X) = \lambda$ .

La loi de Poisson s'obtient comme limite de lois binomiales. Précisément, si  $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$  et  $np_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \lambda$ , alors

$$P(X_n = k) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} P(X = k).$$

On peut par exemple utiliser une loi de Poisson pour modéliser le nombre de bus arrivant en 1h si le temps d'attente moyen est  $1/\lambda$  h.

Si on suppose que pendant chaque petit intervalle de temps de longueur  $1/n$ , il y a une probabilité  $\lambda/n$  de voir arriver un bus (indépendamment pour des intervalles différents), on retrouve l'interprétation de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales.

**Proposition.**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes telles que  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ , alors  $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$ .

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^n P(X=k)P(Y=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} \end{aligned}$$

□

Idée :  $X$  et  $Y$  représentent deux lignes de bus indépendantes...

#### 4.6 Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

**Définition** (Loi uniforme).

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi **uniforme** sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  lorsque  $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note alors  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .

**Proposition** (Espérance et variance d'une variable uniforme).

Si  $X$  est une variable uniforme telle que  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ , alors  $E(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ .

*Démonstration.* Il suffit de faire le calcul :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2},$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} - \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \\
&= \frac{n+1}{2} \left( \frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2} \right) \\
&= \frac{n+1}{2} \left( \frac{4n+2-3n-3}{6} \right) \\
&= \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}$$

□

On peut généraliser la définition de la loi uniforme au cas d'un intervalle  $\llbracket a, b \rrbracket$  où  $a, b \in \mathbb{Z}$ .