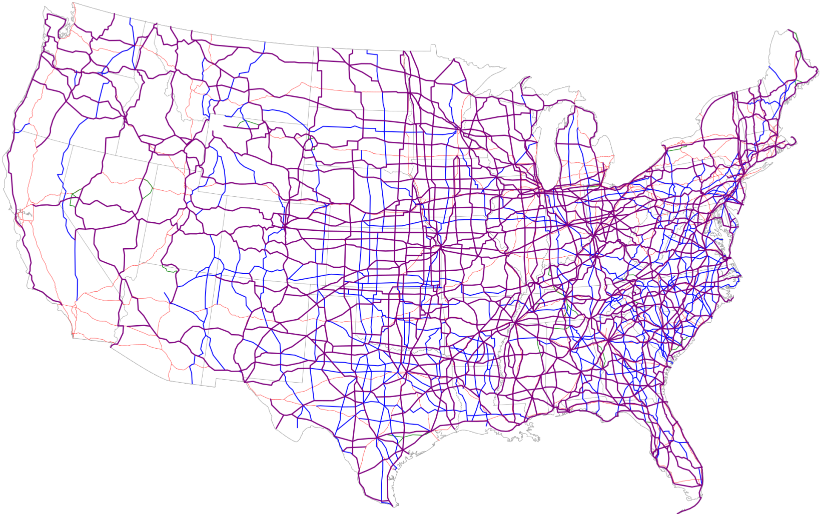
Graphes

Introduction

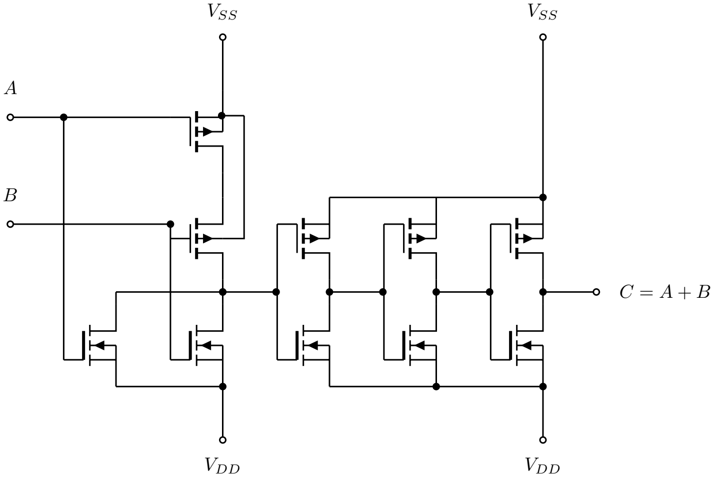
Exemples



Réseau autoroutier des états-unis

Introduction

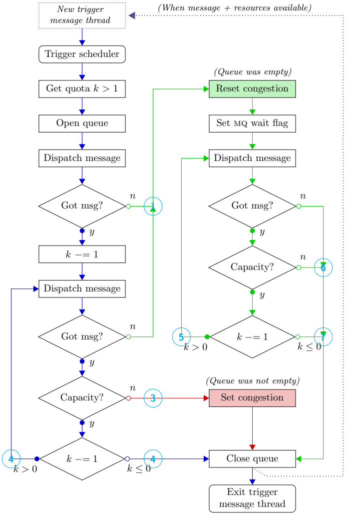
Exemples



Circuit électronique simple

Introduction

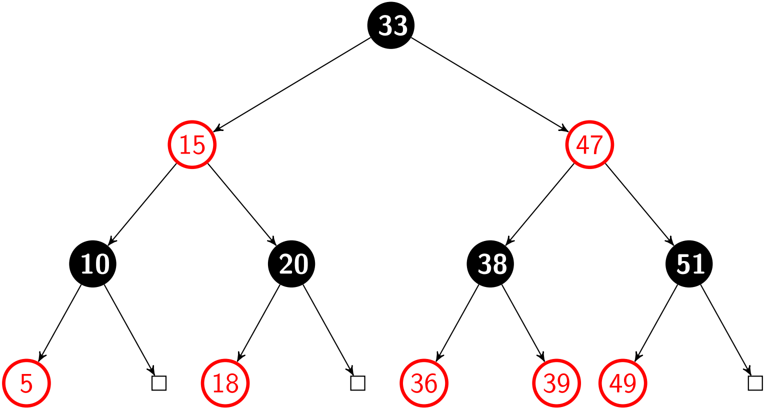
Exemples



Flot de contrôle de programme

Introduction

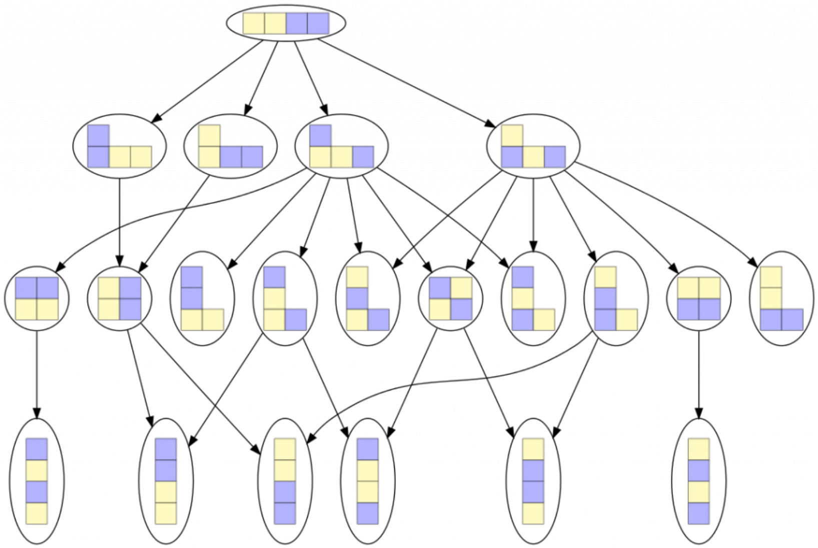
Exemples



Structure de données (arbre rouge/noir)

Introduction

Exemples



Énumération des possibilités d'un jeu à deux joueurs

Introduction

Exemples

Quelques problèmes

- existence d'un chemin entre deux villes
- plus court chemin (temps, distance, etc.) entre deux villes

- minimiser les intersections d'un circuit imprimé
- analyser/optimiser code d'un circuit/programme

- calculer le coût (temps/espace) d'une structure de données

- construction d'une stratégie gagnante

Informations utiles à la résolution :

- des éléments (villes, instructions, configurations)
- liens entre eux (autoroutes, branchement, étape de jeu)

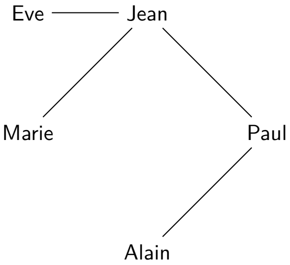
Introduction

Vocabulaire

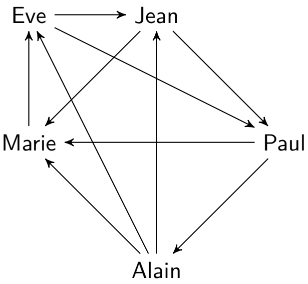
Graphe

- les éléments sont appelés **nœuds** ou **sommets**
- les liens sont appelés **arêtes**, et **arcs** si orientés

Représentation graphique



relation de connaissance

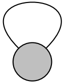


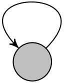
résultats d'un tournoi

Introduction

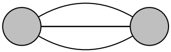
Vocabulaire

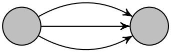
Boucle

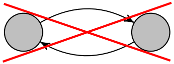




Arête/arc multiple







Graphe

- simple : sans boucle ni arête/arc multiple
- non-orienté : ne possédant que des arêtes
- orienté : ne possédant que des arcs
- pondéré : poids sur les arêtes/arcs
- fini : nombre fini de sommets et d'arêtes/arcs

$G = (V, E)$ graphe où — V pour vertex/vertices, E pour edge(s)

V : ensemble des sommets — e.g. $V = \{u, v, w\}$

E : ensemble des arêtes/arcs

$e \in E$: e paire/singleton de V si non-orienté — $e = \{u, v\}$

e couple de V si orienté — $e = (u, v)$

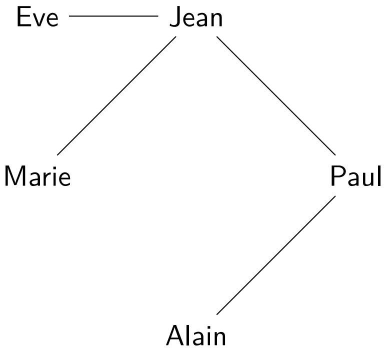
Limitations

- arêtes multiples non modélisables
- pondérations à ajouter à la structure G — e.g. $p : E \to \mathbb{R}$

Introduction

Modélisation : ensembliste

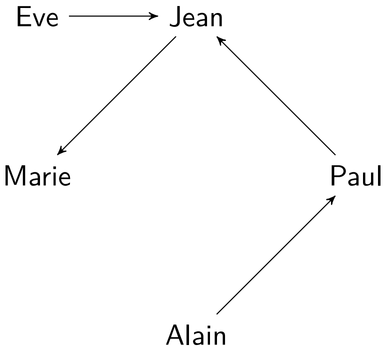
Exemple : graphe simple non-orienté



$$V = \{\text{Eve, Jean, Marie, Paul, Alain}\}$$

$$E = \{\ \{\text{Eve, Jean}\}, \{\text{Jean, Marie}\}, \{\text{Jean, Paul}\}, \{\text{Paul, Alain}\}\ \}$$

Exemple : graphe simple orienté



$$V = \{\text{Eve, Jean, Marie, Paul, Alain}\}$$

$$E = \{\ (\text{Eve, Jean}), (\text{Jean, Marie}), (\text{Paul, Jean}), (\text{Alain, Paul})\ \}$$

Introduction

Modélisation : matrice d'adjacence

Principe

- fixer un ordre des sommets : $v_1, v_2, \ldots, v_n$
- définir une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si arête/arc de } v_i \text{ à } v_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Limitations

- souvent beaucoup de 0

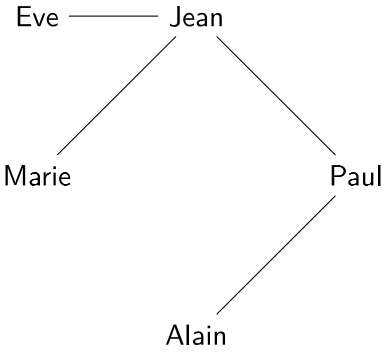
Remarques

- matrice symétrique pour graphe non-orienté
- adaptable pour arêtes/arcs multiples **ou bien** pondérations
- opérations matricielles disponibles

Introduction

Modélisation : matrice d'adjacence

Exemple : graphe simple non-orienté



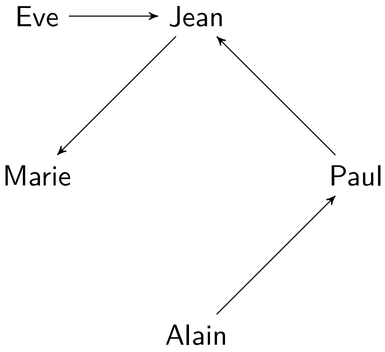
ordre : Eve, Jean, Marie, Paul, Alain

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & E & J & M & P & A \\ \hline E & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ J & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ M & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ P & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ A & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Introduction

Modélisation : matrice d'adjacence

Exemple : graphe simple orienté



ordre : Eve, Jean, Marie, Paul, Alain

$$M = \begin{array}{c} \\ E \\ J \\ M \\ P \\ A \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E & J & M & P & A \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Introduction

Modélisation : listes d'adjacence

Principe

- associer une liste à chaque sommet u
- v dans la liste de u *ssi* arête/arc de u à v

Limitations

- parcours d'une liste coûteux en temps

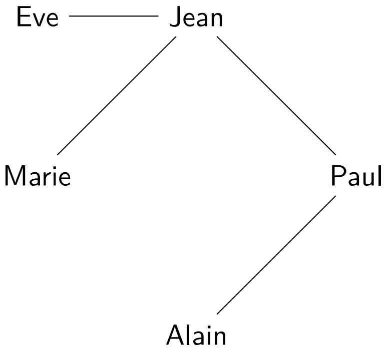
Remarques

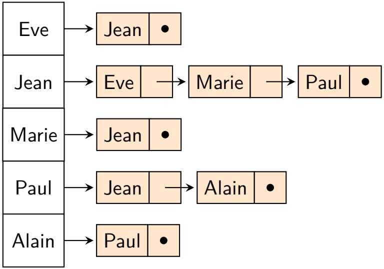
- économique en espace mémoire (pas de 0 inutiles)
- adaptable pour arêtes/arcs multiples **et** pondérations

Introduction

Modélisation : listes d'adjacence

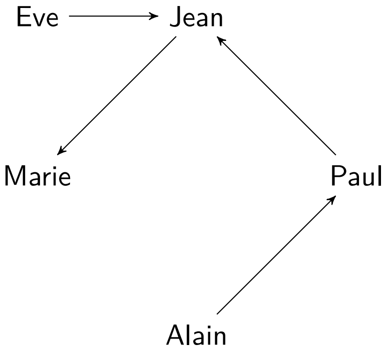
Exemple : graphe simple non-orienté

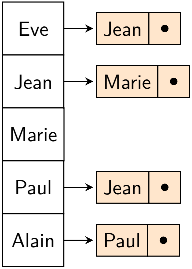




Modélisation : listes d'adjacence

Exemple : graphe simple orienté





Graphes simples non-orientés

Vocabulaire de base

Dans cette section $G = (V, E)$ est un graphe simple non-orienté

Vocabulaire

Si $e = \{u, v\} \in E$ arête de G :

- u et v sont *adjacents* dans G
- u et v sont *voisins* dans G
- u et v sont les *extrémités* de l'arête $\{u, v\}$
- u et e sont *incidents*

Voisinage

Le *voisinage* d'un sommet $u \in V$ dans G est

$$\mathrm{N}_G(u) := \{v \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

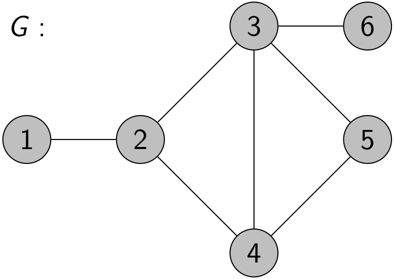
Degré

Le *degré* d'un sommet $u \in V$ de G est

$$\mathrm{d}_G(u) = |\,\mathrm{N}_G(u)|$$

Exemple

G :



$\mathrm{d}_G(1) = 1$

$\mathrm{d}_G(2) = 3$

$\mathrm{d}_G(3) = 4$

$\mathrm{d}_G(4) = 3$

$\mathrm{d}_G(5) = 2$

$\mathrm{d}_G(6) = 1$

Formule de la somme des degrés

$$\sum_{u \in V} \mathrm{d}_G(u) = 2|E|$$

Idée

Chaque arête $\{u, v\}$ est comptée 2 fois : pour $\mathrm{d}_G(u)$ et $\mathrm{d}_G(v)$

Preuve

Par récurrence sur $|E|$: i.e. $\forall G = (V, E),\ |E| = n \Rightarrow \sum_{u \in V} \mathrm{d}_G(u) = 2|E|$

- $|\mathrm{E}|=0$: trivial car $\mathrm{d}_G(u) = 0$ pour tout $u \in V$
- $|\mathrm{E}|=\mathrm{n}+1$: Soit $e = \{v, w\} \in E$. Posons $G' := (V, E')$ où $E' := E \setminus \{e\}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in V} \mathrm{d}_G(u) &= \mathrm{d}_G(v) + \mathrm{d}_G(w) + \sum_{u \in V \setminus \{v,w\}} \mathrm{d}_G(u) \\
&= \mathrm{d}_{G'}(v) + 1 + \mathrm{d}_{G'}(w) + 1 + \sum_{u \in V \setminus \{v,w\}} \mathrm{d}_{G'}(u) \\
&= 1 + 1 + \sum_{u \in V} \mathrm{d}_{G'}(u) \\
&= 1 + 1 + 2|E'| \qquad \text{(par H.R.)} \\
&= 2(|E'| + 1) \\
&= 2|E| \qquad \square
\end{aligned}$$

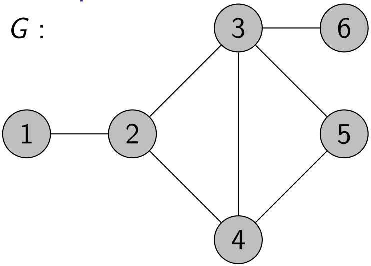
Complémentaire

Le *complémentaire* $\overline{G}$ du graphe $G = (V, E)$ est $\overline{G} := (V, \overline{E})$ où :

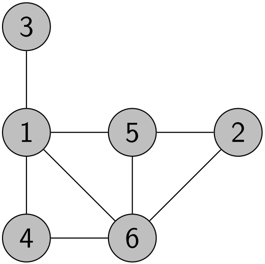
$$\overline{E} := \{\{u, v\} \subseteq V \mid \{u, v\} \notin E \text{ et } u \neq v\}$$

Exemple

G :



$\overline{G}$:



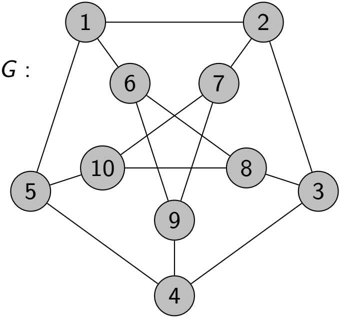
Sous-graphe

$G' = (V', E')$ *sous-graphe* de $G = (V, E)$ ssi

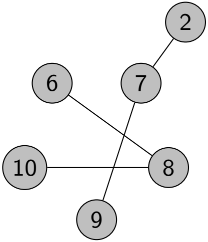
$$V' \subseteq V \quad \text{et} \quad E' \subseteq E \quad \text{et} \quad E' \subseteq \mathcal{P}(V')$$

Exemple

G :



G' :

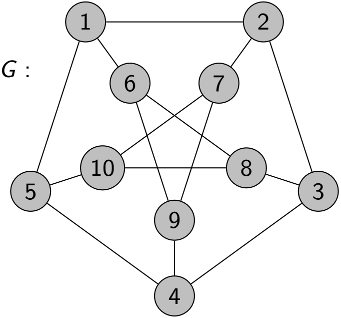


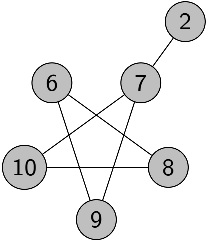
Sous-graphe engendré

Pour $V' \subseteq V$ le *sous-graphe de* $G = (V, E)$ *engendré par* V' est $G[V'] := (V', E')$ avec $E' := E \cap \mathcal{P}(V')$

Exemple

G :





$G[\{2, 6, 7, 8, 9, 10\}]$

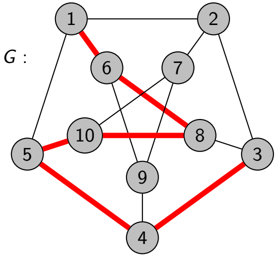
Chaîne

Une *chaîne* de longueur $k \geq 0$ de G est une suite $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ de sommets de G telle que

$$\forall i \in [\![1, k]\!] \qquad \{v_{i-1}, v_i\} \in E$$

La chaîne est *élémentaire* si ses sommets sont tous différents, et *simple* si les arêtes traversées sont toutes différentes.

Exemple



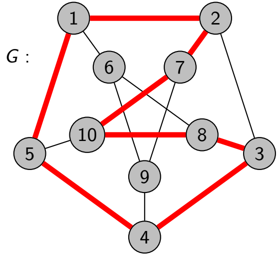
- $(1, 6, 8, 10, 5, 4, 3)$ chaîne élémentaire simple de longueur 6
- $(3, 4, 5, 10, 8, 6, 1)$ désigne la même chaîne
- $(1, 6, 8, 6)$ chaîne non simple non élémentaire de longueur 3
- $(1, 6, 8, 3, 2, 1, 5)$ chaîne simple non élémentaire de longueur 6

Cycle

Un *cycle* de longueur k de G est une chaîne simple $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ de G où $v_k = v_0$.

Le cycle est *élémentaire* si les sommets $v_1, \dots, v_k$ sont tous différents.

Exemple



- $(1, 2, 7, 10, 8, 3, 4, 5, 1)$ est un cycle élémentaire de G de longueur 8
- $(10, 8, 3, 4, 5, 1, 2, 7, 10)$ est le même cycle
- $(1, 2, 1)$ n'est pas un cycle

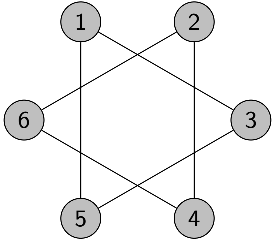
Connexité

$G = (V, E)$ est dit *connexe* ssi

$$\forall u \neq v \in V \qquad \text{il existe une chaîne entre } u \text{ et } v \text{ dans } G$$

Exemple

G :



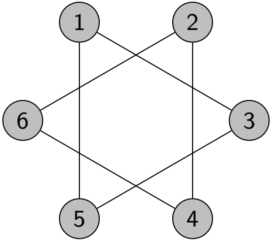
G non connexe : aucune chaîne entre 1 et 2

Composante connexe

Une *composante connexe* de G est un sous-graphe connexe maximal (pour l'inclusion des sommets et arêtes) de G.

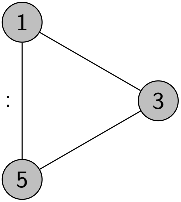
Exemple

G :

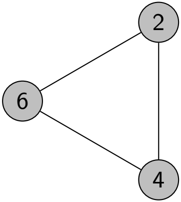


G possède 2 composantes connexes :

$G[\{1,3,5\}]$:



$G[\{2,4,6\}]$:



Graphe chaîne

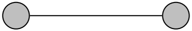
$P_n := (V_n, E_n)$ *graphe chaîne* sur $n \geq 1$ sommets où   P pour *path*

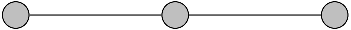
$$V_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

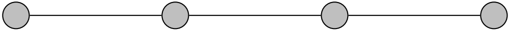
$$E_n = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$$

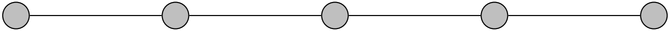
Exemples

P_1: 

P_2: 

P_3: 

P_4: 

P_5: 

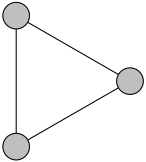
Graphe cycle

$C_n := (V_n, E_n)$ *graphe cycle* sur $n \geq 3$ sommets où

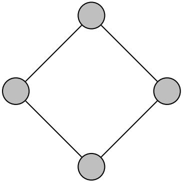
$$V_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$$
$$E_n = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$$

Exemples

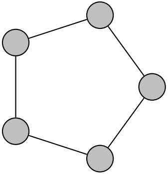
C_3:



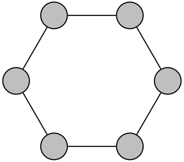
C_4:



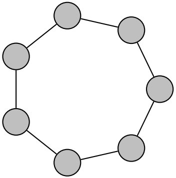
C_5:



C_6:



C_7:



Familles de graphes

Graphe complet

Graphe complet

$K_n := (V_n, E_n)$ *graphe complet* sur $n \geq 1$ sommets où

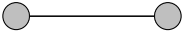
$$V_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

$$E_n = \{\{u, w\} \subseteq V_n \mid u \neq w\}$$

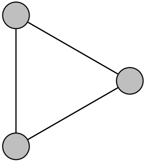
Exemples

K_1:

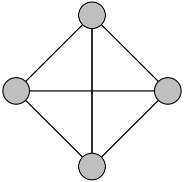
K_2:



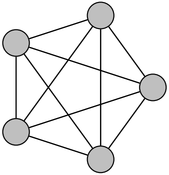
K_3:



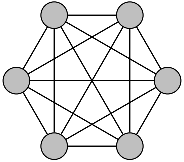
K_4:



K_5:



K_6:



Graphe biparti

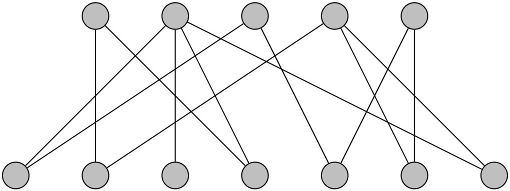
$G = (V, E)$ *graphe biparti* si V peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 tels que

$$\forall e = \{u, v\} \in E \qquad \begin{array}{rl} & u \in V_1 \text{ et } v \in V_2 \\ \text{ou bien} & u \in V_2 \text{ et } v \in V_1 \end{array}$$

On note alors $G = (V_1; V_2, E)$.

Exemple

V_1 :



V_2 :

Caractérisation d'un graphe biparti

$G = (V, E)$ graphe simple non orienté est biparti *si et seulement si* G n'a pas de cycle de longueur impaire.

Preuve

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $G = (V_1; V_2, E)$ biparti et $c = (u_0, u_1, \ldots, u_{2p+1})$ cycle de longueur impaire avec $u_0 = u_{2p+1}$.
Si $u_0 \in V_1$ alors $u_1 \in V_2$, etc., $u_{2p} \in V_1$ et $u_{2p+1} \in V_2$, impossible car $u_0 = u_{2p+1}$ et $u_0 \in V_1$. De même si $u_0 \in V_2$

$\boxed{\Leftarrow}$ Admis.

Utilise notion d'arbre couvrant pour partitionner les sommets.

□

Familles de graphes

Graphe biparti complet

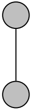
Graphe biparti complet

$K_{m,n} := (V_m; V_n, E_{m,n})$ *graphe biparti complet* sur $n, m \geq 1$ sommets où

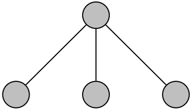
$$\begin{aligned} V_m &= \{u_1, \ldots, u_m\} \\ V_n &= \{v_1, \ldots, v_n\} \\ E_{m,n} &= \{\{u, v\} \mid u \in V_m \text{ et } v \in V_n\} \end{aligned}$$

Exemples

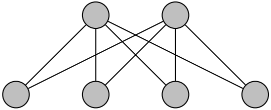
$K_{1,1}$:



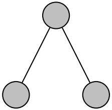
$K_{1,3}$:



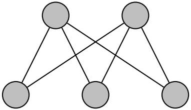
$K_{2,4}$:



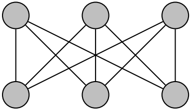
$K_{1,2}$:



$K_{2,3}$:



$K_{3,3}$:



Familles de graphes

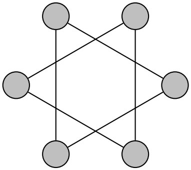
Graphe régulier

Graphe régulier

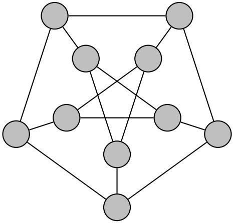
$G = (V, E)$ est un *graphe k-régulier* pour $k \geq 0$ si

$$\forall v \in V \qquad \mathrm{d}_G(v) = k$$

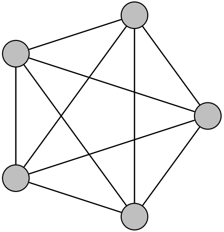
Exemples



2-régulier



3-régulier



4-régulier

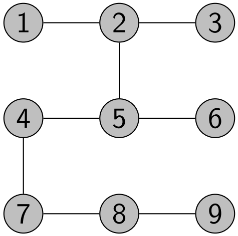
Familles de graphes

Arbre

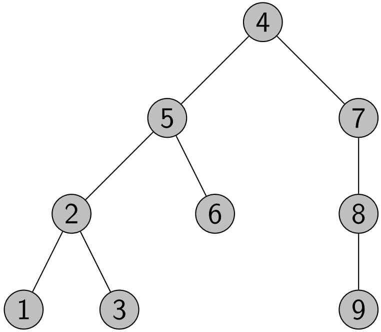
Arbre

Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle.
On peut distinguer un sommet *racine*.

Exemples



G connexe acyclique

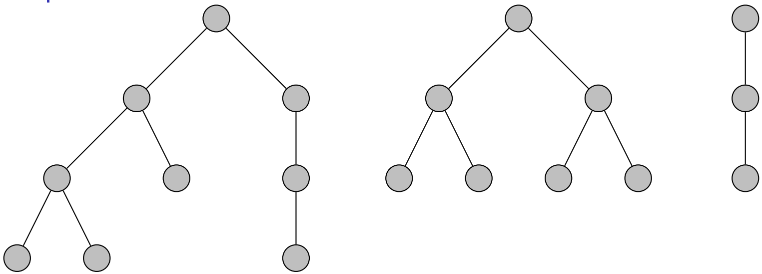


G enraciné en 4

Forêt

Une *forêt* est un graphe dont les composantes connexes sont des arbres.

Exemple



Graphes simples orientés

Vocabulaire de base

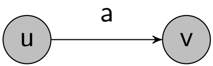
Dans cette section $G = (V, A)$ est un graphe orienté sans arc multiple.

Vocabulaire

Si $a = (u, v) \in A$ arc de G :

- u et v sont *adjacents*, *voisins* dans G
- u et a sont *incidents*, de même pour v

- u est l'*origine* de a
- v est l'*extrémité* de a
- a est un arc *sortant* de u
- a est un arc *entrant* sur v



Voisinage : prédécesseurs et successeurs

- Les *prédécesseurs* d'un sommet $v \in V$ dans G sont

$$\Gamma_G^-(v) := \{u \in V \mid (u, v) \in A\}$$

- Les *successeurs* d'un sommet $u \in V$ dans G sont

$$\Gamma_G^+(u) := \{v \in V \mid (u, v) \in A\}$$

- Le *voisinage* d'un sommet $u \in V$ de G est

$$\mathrm{N}_G(u) := \Gamma_G^-(u) \cup \Gamma_G^+(u)$$

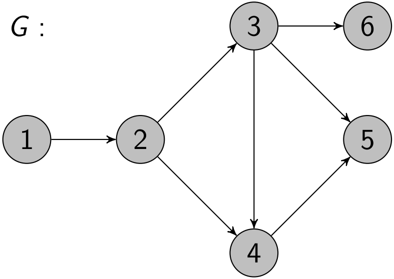
Degré

Les *degrés entrant* et *sortant* d'un sommet $u \in V$ de G sont

$$\mathrm{d}_G^-(u) = |\Gamma_G^-(u)| \qquad \mathrm{d}_G^+(u) = |\Gamma_G^+(u)|$$

Exemple

G :



$$\begin{array}{ll}
\mathrm{d}_G^-(1) = 0 & \mathrm{d}_G^+(1) = 1 \\
\mathrm{d}_G^-(2) = 1 & \mathrm{d}_G^+(2) = 2 \\
\mathrm{d}_G^-(3) = 1 & \mathrm{d}_G^+(3) = 3 \\
\mathrm{d}_G^-(4) = 2 & \mathrm{d}_G^+(4) = 1 \\
\mathrm{d}_G^-(5) = 2 & \mathrm{d}_G^+(5) = 0 \\
\mathrm{d}_G^-(6) = 1 & \mathrm{d}_G^+(6) = 0
\end{array}$$

Formule de la somme des degrés

$$\sum_{u \in V} \mathrm{d}_G^-(u) = \sum_{u \in V} \mathrm{d}_G^+(u) = |A|$$

Preuve

Similaire cas non orienté. À faire pour s'entraîner !

Graphes simples orientés

Transposition des concepts non-orientés

- complémentaire :
  $\overline{G} := (V, \overline{A})$ où $\overline{A} := \complement_{V \times V} A \setminus \{(u, u) \mid u \in V\}$
- sous-graphe : $G' = (V', A')$ où $V' \subseteq V$ et $A' \subseteq A \cap V' \times V'$
- sous-graphe engendré : $G[V'] := (V', A')$ où $A' := A \cap V' \times V'$
- chemin : suite $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ de V où $(v_{i-1}, v_i) \in A$ et $k \geq 1$
- circuit : chemin simple fermé
- forte connexité :
  chemin entre tout couple de sommets distincts
- composante fortement connexe : sous-graphe fortement connexe maximal

Les autres concepts des graphes non-orientés restent applicables à $G' = (V, E)$, version non orientée de G où :

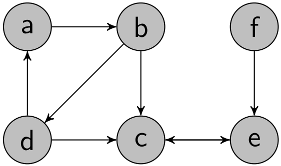
$$E := \{\{u, v\} \subseteq V \mid (u, v) \in A\}$$

Graphes simples orientés

Transposition des concepts non-orientés

Exemples

G :



- (a, b, c, e) chemin élémentaire simple
- (a, b, c, d) chaîne élémentaire simple
- (a, b, d, a) circuit élémentaire
- (a, b, c, d, a) cycle élémentaire simple
- G connexe mais non fortement connexe : aucun chemin de a à f
- 3 composantes fortement connexes : $G[\{a, b, d\}]$, $G[\{c, e\}]$ et $G[\{f\}]$