
CHAPITRE 3

ESPACES VECTORIELS

Table des matières

1. Introduction	1
2. Espaces vectoriels	2
3. Sous-espaces vectoriels	12
4. Opérations sur les sous-espaces vectoriels	14
5. Sous-espace vectoriels supplémentaires	18
6. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs	20
7. Familles génératrices, familles libres	24
8. Base d'un espace vectoriel	28

1. Introduction

Dans un chapitre précédent, nous avons vu la façon dont la méthode de Gauss permet de résoudre un système d'équations linéaires. Nous avons systématiquement utilisé des combinaisons linéaires des lignes. Nous passons ici à une étude générale de combinaisons linéaires.

Nous avons besoin d'un cadre. Dans le chapitre sur les systèmes linéaires, nous avons utilisé tantôt des vecteurs de \mathbb{R}^2 , tantôt des vecteurs de \mathbb{R}^3 et tantôt des vecteurs d'espaces de dimensions supérieurs. Notre premier réflexe serait donc de travailler dans \mathbb{R}^n , en laissant n non spécifié. Cela aurait l'avantage que n'importe lequel des résultats resterait valide pour \mathbb{R}^2 , pour \mathbb{R}^3 et pour beaucoup d'autres espaces, simultanément.

Mais, si le fait que les résultats s'appliquent à plusieurs espaces à la fois est avantageux, alors ne s'en tenir qu'à \mathbb{R}^n serait restrictif. Nous aimerions que nos résultats s'appliquent aux combinaisons de vecteurs colonnes ou lignes, mais aussi dans tout ensemble où les combinaisons linéaires utilisées ont du sens. Nous appellerons un tel ensemble un espace vectoriel. Nos résultats, au lieu d'être formulés comme suit : *"Chaque fois que nous avons un ensemble*

dans lequel nous pouvons prendre judicieusement des combinaisons linéaires ...” il sera indiqué “Dans n’importe quel espace vectoriel ...”.

Dans tout ce chapitre ainsi que les suivants, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

2. Espaces vectoriels

2.1. Loi de composition externe. — Soit E un ensemble non vide.

Définition 2.1. — On appelle loi de composition externe (ou produit externe ou multiplication scalaire) opérant de \mathbb{K} sur E toute application

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, \vec{v}) &\mapsto \lambda \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Une loi de composition externe est usuellement notée par un point. Les éléments de \mathbb{K} sont appelés **scalaires**. Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et seront, dans un premier temps, notés surmontés d’une flèche.

Exemple 2.2. — La multiplication scalaire par un réel sur la direction du plan ou de l’espace géométrique est une loi de composition externe, qui à tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et \vec{v} vecteur, associe le vecteur $\lambda \cdot \vec{v}$.

Définition 2.3. — On suppose que E est muni d’un produit externe. Une partie A de E est stable pour ce produit externe si

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in A, \quad \lambda \cdot \vec{v} \in A.$$

On peut alors considérer l’application restreinte

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times A &\rightarrow A \\ (\lambda, \vec{v}) &\mapsto \lambda \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

qui définit un produit externe de \mathbb{K} sur A appelé produit externe induit.

Exemples 2.4. — (a) \emptyset et E sont des parties stables pour n’importe quel produit externe sur E .

(b) Sur la direction du plan ou de l’espace géométrique, l’ensemble A formé des vecteurs colinéaires à un vecteur donné \vec{v} est une partie stable pour le produit externe sur E introduit dans Exemple 2.2.

2.2. Définition d'un espace vectoriel. — Nous étudierons des structures à deux opérations, une addition et une multiplication scalaire, qui sont soumises à des conditions simples. Nous réfléchirons davantage sur les conditions plus tard, mais en première lecture, nous verrons à quel point elles sont raisonnables. Par exemple, toute opération que l'on peut appeler une addition (par exemple, addition de vecteurs colonnes, addition de vecteurs lignes ou addition de nombres réels) satisfera certainement aux conditions (1) à (5) ci-dessous.

Définition 2.5. — Soient E un ensemble, $+$ une loi de composition interne sur E et \cdot une loi de composition externe opérant de \mathbb{K} sur E .

On dit que le triplet $(E, +, \cdot)$, ou plus brièvement E , est un espace vectoriel sur \mathbb{K} , ou un \mathbb{K} -espace vectoriel si,

(1) l'ensemble E est stable par l'addition :

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in E, \quad \vec{v} + \vec{w} \in E$$

(2) l'addition des vecteurs est commutative :

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in E, \quad \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$

(3) l'addition des vecteurs est associative :

$$\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in E, \quad (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$$

(4) il existe un vecteur nul $\vec{0} \in E$ neutre pour l'addition :

$$\exists \vec{0} \in E, \forall \vec{v} \in E, \quad \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

(5) tout vecteur $\vec{v} \in E$ admet un inverse additif $\vec{w} \in E$, tel que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, le vecteur \vec{w} sera noté $-\vec{v}$ et sera appelé opposé de \vec{v} ;

$$\forall \vec{v} \in E, \exists (-\vec{v}) \in E, \quad \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

(6) l'ensemble E est stable par la multiplication scalaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in E, \quad \lambda \cdot \vec{v} \in E$$

(7) l'addition dans \mathbb{K} distribue la multiplication scalaire

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$$

(8) la multiplication des scalaires distribue l'addition des vecteurs :

$$\forall \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in E, \quad \lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$$

(9) la multiplication dans \mathbb{K} associée à la multiplication scalaire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in E, \quad (\lambda \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$$

(10) la multiplication par le scalaire 1 est l'opération identité :

$$\forall \vec{v} \in E, \quad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$$

Remarques 2.6. — (a) Il faut distinguer entre :

- les scalaires qui sont des éléments de \mathbb{K} ;
- les vecteurs qui sont des éléments de l'espace E .

En particulier, on distingue le scalaire $0 \in \mathbb{K}$ et le vecteur nul $\vec{0} \in E$, celui-ci sera noté parfois $\vec{0}_E$.

L'ensemble des scalaires \mathbb{K} sera appelé le **corps** des scalaires.

(b) La définition comprend deux types d'"addition" et deux types de "multiplication", et peut donc sembler confuse à première vue.

Par exemple, dans la condition (7), le "+" à gauche est l'addition de deux nombres tandis que le "+" à droite est l'addition de deux vecteurs de E . Ces expressions ne sont pas ambiguës à cause du contexte; par exemple, λ et μ sont des nombres, donc $\lambda + \mu$ ne peut signifier que l'addition de nombres. De la même manière, le côté gauche de (9) $\lambda\mu$ est la multiplication ordinaire des nombres, tandis que son côté droit $\lambda \cdot \vec{v}$ est la multiplication scalaire définie pour cet espace vectoriel.

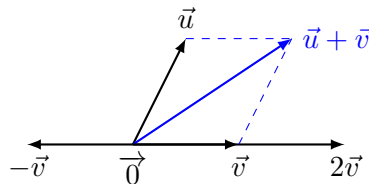
(c) Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel on peut faire les quatre opérations :

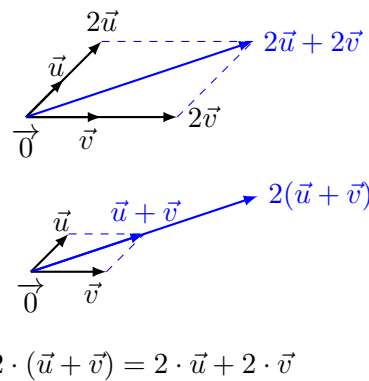
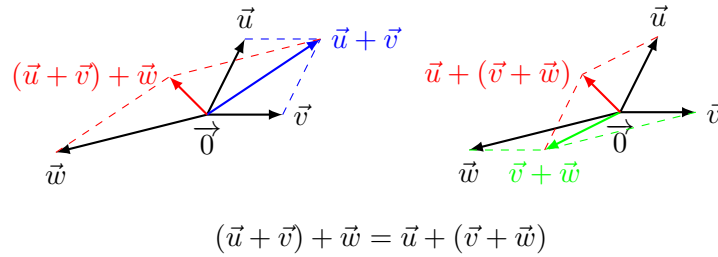
- additionner deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} *i.e.* calculer $\vec{v} + \vec{w}$;
- faire la différence de deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} *i.e.* calculer $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$;
- multiplier un vecteur \vec{v} par un scalaire λ *i.e.* calculer $\lambda \cdot \vec{v}$;
- diviser un vecteur \vec{v} par un scalaire non nul λ *i.e.* calculer $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{v}$;

(d) Attention, on ne peut pas multiplier deux vecteurs, ni diviser un vecteur par un autre vecteur car les lois correspondantes ne sont pas à priori définies.

2.3. Visualisation géométrique d'un espace vectoriel. — Nous avons donné dans le chapitre 1, une première idée sur l'interprétation géométrique d'un espace vectoriel.

Pour visualiser géométriquement un espace vectoriel, on choisira un élément central correspondant au vecteur nul et on représente tous les vecteurs (dans leur position naturelle) en prenant le vecteur nul pour origine; par exemple on peut visualiser dans l'espace les opérations : addition des vecteurs et multiplication scalaire.





2.4. Exemples d'espaces vectoriels. — La meilleure façon de comprendre la définition 2.5 d'un espace vectoriel est de passer en revue les exemples ci-dessous et, pour chacun d'eux, de vérifier les dix conditions. Le premier exemple comprend ces vérifications, rédigées en détail. Utilisez-le comme modèle pour les autres. Sont particulièrement importantes les conditions de stabilité, (1) et (6). Ils spécifient que les opérations d'addition et de multiplication scalaire sont toujours raisonnables – elles sont définies pour chaque paire de vecteurs et chaque vecteur et chaque scalaire – et le résultat de l'opération est un élément de l'ensemble.

Exemple 2.7. — Considérons la droite de \mathbb{R}^2 passant par l'origine,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 3x\}.$$

Nous vérifierons qu'il s'agit bien d'un \mathbb{R} -espace vectoriel, au sens habituel des opérations "+" et "." que nous avons défini au chapitre 1,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Ces opérations sont celle de \mathbb{R}^2 , restreinte à E .

Nous allons vérifier les dix propriétés. Nous commençons d'abord par les propriétés concernant l'addition des vecteurs de (1) à (6). Soient deux vecteurs

de E ,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

donc $y_1 = 2x_1$ et $y_2 = 2x_2$.

Pour la condition (1), le vecteur somme

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

vérifie $y_1 + y_2 = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2)$ et il est donc dans E , par suite E est stable par $+$.

Pour la condition (2), il suffit de comparer les deux vecteurs

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix}$$

pour s'en rendre compte qu'ils sont égaux.

Pour la condition (3) la vérification est similaire,

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + x_3 \\ (y_1 + y_2) + y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) \\ y_1 + (y_2 + y_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Pour la condition (4) nous devons produire un vecteur qui agit comme l'élément zéro. Le vecteur des zéros fera l'affaire,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notez que $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ puisque sa deuxième composante est le triple de sa première.

Pour (5), on voit que pour n'importe quel $\vec{v} \in E$, on peut produire son opposé dans E ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $-\vec{v}$ convient et c'est bien un vecteur de E puisque $-y = 3(-x)$.

La vérification des cinq dernières conditions liées à la multiplication scalaire est similaire.

Pour (6), la stabilité par multiplication scalaire, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$, on a

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

est également un élément de E : le fait que sa deuxième composante est trois fois sa première $\lambda y = 3(\lambda x)$ découle de $\vec{v} \in E$.

Ceci permet aussi de vérifier (7)

$$(\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x \\ (\lambda + \mu)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x \\ \lambda y + \mu y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pour (8) on a

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2) \\ \lambda(y_1 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda x_2 \\ \lambda y_1 + \lambda y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour (9)

$$(\lambda\mu) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda\mu)x \\ (\lambda\mu)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu x) \\ \lambda(\mu y) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \left(\mu \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

et la dixième condition est également simple

$$1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x \\ 1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.8 (Structure de \mathbb{K}^n). — Le plan entier, l'ensemble \mathbb{R}^2 , est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour les opérations usuelles "+" et ".".

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Les vérifications sont les mêmes que dans l'exemple 2.7 (et même plus simples, car sans condition).

De manière générale, on a

Proposition 2.9. — \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel avec les opérations habituelles d'addition de vecteurs et de multiplication scalaire, de vecteur nul $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Attention \mathbb{R}^n n'est pas un \mathbb{C} -espace vectoriel, car il n'est pas stable par la multiplication scalaire par des complexes.

Exemple 2.10. — L'exemple 2.7 donne un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 comme un espace vectoriel. Pour le contraste, considérons le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 ,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \text{ et } y = 3x\}$$

Même si cet ensemble est stable par l'addition, ce n'est pas un espace vectoriel sur \mathbb{R} , car il n'est pas stable par la multiplication scalaire,

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur résultat de cette multiplication scalaire n'est pas dans E puisque sa première composante n'est pas un entier.

Exemple 2.11. — L'ensemble formé du seul élément

$$\{(0, 0, 0, 0)\}$$

est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Toutes les conditions de (1) à (10) sont évidentes.

Un espace vectoriel doit contenir au moins un élément, son vecteur nul. Un espace vectoriel contenant un seul vecteur est formé du seul vecteur nul.

Exemple 2.12 (Solutions d'un système linéaire homogène)

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n variables est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour les opérations héritées de \mathbb{R}^n . Par exemple, pour la stabilité par l'addition, considérons une équation typique du système $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ et supposons que les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

sont solutions du système. Ces deux vecteurs vont donc satisfaire à l'équation typique, leur somme $\vec{v} + \vec{w}$ et la multiplication de \vec{v} par tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. La vérification des autres conditions est similaire à l'exemple 2.7.

Les exemples présentés ci-dessus concernent des ensembles de vecteurs de colonnes/lignes avec les opérations habituelles.

Mais les espaces vectoriels ne se réduisent pas à des collections de vecteurs colonnes/lignes. Vous trouverez ci-dessous d'autres types d'espaces vectoriels. L'expression "espace vectoriel" ne signifie pas "collection de vecteurs de colonnes/lignes". Il s'agit plutôt d'un ensemble dans lequel toute combinaison linéaire est possible.

Exemple 2.13 (Structure de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$). — Soient X un ensemble et $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions de X dans \mathbb{K} . Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in E$, on définit $\lambda \cdot f : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $f + g : X \rightarrow \mathbb{K}$ par

$$\forall x \in X, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \text{ et } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

On définit ainsi un produit externe de \mathbb{K} sur E et une addition sur E .

Proposition 2.14. — $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel dont le vecteur nul est la fonction nulle.

Démonstration. — Les propriétés liées à l'addition dans E sont faciles à vérifier. On peut notamment vérifier que le vecteur nul est la fonction nulle $X \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto 0$.

Pour les propriétés liées à la multiplication scalaire, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in E$. Pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} [(\lambda + \mu) \cdot f](x) &= (\lambda + \mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda \cdot f)(x) + (\mu \cdot f)(x), \\ [\lambda \cdot (f + g)](x) &= \lambda(f + g)(x) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x), \\ [(\lambda \mu) \cdot f](x) &= (\lambda \mu)f(x) = \lambda(\mu f(x)) = [\lambda \cdot (\mu \cdot f)](x), \\ (1 \cdot f)(x) &= 1 \times f(x) = f(x). \end{aligned}$$

□

Exemple 2.15. — Pour $X = \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, les ensembles $\mathcal{F}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathcal{I}, \mathbb{C})$ sont respectivement un \mathbb{R} -espace vectoriel et \mathbb{C} -espace vectoriel.

Pour $X = \mathbb{N}$, les ensembles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites réelles et complexes sont respectivement un \mathbb{R} -espace vectoriel et \mathbb{C} -espace vectoriel.

Exemple 2.16 (Structure de $\mathcal{F}(X, F)$). — Soient X un ensemble et F un \mathbb{K} -espace vectoriel de vecteur nul $\vec{0}_F$. On note $E = \mathcal{F}(X, F)$ l'ensemble des applications de X dans F . Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in E$, on définit $\lambda \cdot f : X \rightarrow F$ et $f + g : X \rightarrow F$ par

$$\forall x \in X, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \text{ et } (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Proposition 2.17. — $(\mathcal{F}(X, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel dont le vecteur nul est la fonction constante égale à $\vec{0}_F$.

La démonstration est identique à celle de la proposition 2.14

Exemple 2.18 (Structure de $\mathbb{K}[X]$). — Soit $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} et à une indéterminée.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$, $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$$\lambda \cdot P = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)X + \cdots + (\lambda a_n)X^n$$

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_s + b_s)X^s$$

où $s = \max(n, m)$.

Proposition 2.19. — L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de vecteur nul est égal au polynôme nul (polynôme dont tous les coefficients sont nuls).

Démonstration. — Laissez au lecteur. □

Exemple 2.20 (Structure de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$). — Considérons l'ensemble des matrices à deux lignes et deux colonnes $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et à coefficients dans \mathbb{K} ,

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\}$$

muni des opérations naturelles entrée-par-entrée :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.21. — $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel dont le vecteur nul est la matrice nulle (dont toutes les entrées sont nulles).

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Exemple 2.22 (Solutions d'équations différentielles homogènes)

L'ensemble

$$E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0\}$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{R} pour les opérations (désormais naturelles)

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x).$$

Exemple 2.23 (Structure de $E \times F$). — Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\vec{v}, \vec{w}), (\vec{v}', \vec{w}') \in E \times F$ on pose

$$\lambda \cdot (\vec{v}, \vec{w}) = (\lambda \cdot \vec{v}, \lambda \cdot \vec{w}) \text{ et } (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}', \vec{w}') = (\vec{v} + \vec{v}', \vec{w} + \vec{w}')$$

On définit ainsi un produit externe de \mathbb{K} sur $E \times F$ et une loi de composition interne additive sur $E \times F$.

Proposition 2.24. — $E \times F$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de vecteur nul $\vec{0}_{E \times F} = (\vec{0}_E, \vec{0}_F)$

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

2.5. Calcul dans un \mathbb{K} -espace vectoriel. — Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 2.25. — $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ et } \forall \vec{v} \in E$

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \vec{v}) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) \cdot \vec{v}.$$

Démonstration. — Par récurrence sur n en utilisant $\lambda \vec{v} + \mu \vec{v} = (\lambda + \mu) \cdot \vec{v}$. □

Proposition 2.26. — $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in E$

$$\sum_{k=1}^n \lambda \cdot \vec{v}_k = \lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^n \vec{v}_k \right).$$

Démonstration. — Par récurrence sur n en utilisant $\lambda \vec{v} + \lambda \vec{w} = \lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w})$. \square

Proposition 2.27. — $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall \vec{v} \in E$

$$0 \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Démonstration. — On a $0 \cdot \vec{v} = (0 + 0) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}$ et en ajoutant l'opposé du vecteur $0 \cdot \vec{v}$ de part et d'autre, on obtient $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$.

$\lambda \cdot \vec{0} = \lambda \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0}$ et en ajoutant l'opposé du vecteur $\lambda \cdot \vec{0}$ de part et d'autre, on obtient $\vec{0} = \lambda \cdot \vec{0}$. \square

Proposition 2.28. — $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall \vec{v} \in E$

$$\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}.$$

Démonstration. — Supposons $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$ et $\lambda \neq 0$. Donc $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot \vec{v}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ou encore $(\frac{1}{\lambda} \times \lambda) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ d'où $\vec{v} = 1 \cdot \vec{v} = \vec{0}$. \square

Corollaire 2.29. — $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\forall \vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$,

$$\lambda \cdot \vec{v} = \mu \cdot \vec{v} \Rightarrow \lambda = \mu$$

Démonstration. — Supposons $\lambda \cdot \vec{v} = \mu \cdot \vec{v}$, alors $\lambda \cdot \vec{v} - \mu \cdot \vec{v} = \vec{0}$ puis $\lambda \cdot \vec{v} + (-\mu) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ et enfin $(\lambda - \mu) \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Puisque $\vec{v} \neq \vec{0}$, on obtient $\lambda - \mu = 0$ c-à-d. $\lambda = \mu$. \square

2.6. Conclusion. — Notre étude au chapitre 1 de la réduction de Gauss nous a amenée à considérer des collections de combinaisons linéaires. Nous avons donc défini dans ce chapitre un espace vectoriel comme étant une structure dans laquelle nous pouvons former de telles combinaisons, sous réserve de conditions simples sur les opérations d'addition et de multiplication scalaire. En d'autres termes : les espaces vectoriels sont le bon contexte dans lequel étudier la linéarité.

Du fait qu'ils forment un chapitre entier le lecteur pourrait supposer que notre but dans ce module est l'étude des systèmes linéaires.

La vérité est que nous n'utiliserons pas tant les espaces vectoriels dans l'étude des systèmes linéaires, mais les systèmes linéaires nous ont amenés à l'étude des espaces vectoriels.

La grande variété d'exemples tirés de ce chapitre montre que l'étude des espaces vectoriels est intéressante et importante en soi.

Les systèmes linéaires ne disparaîtront pas. Mais à partir de maintenant, nos principaux objectifs d'étude seront les espaces vectoriels.

A partir de la section suivante les vecteurs ne seront plus surmontés de flèche. Nous omettrons le point pour la multiplication scalaire $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$. Enfin nous noterons le vecteur nul en "gras" $\mathbf{0}_E$ ou $\mathbf{0}$ s'il n'y a pas de confusion.

3. Sous-espaces vectoriels

Dans l'exemple 2.7, nous avons vu un espace vectoriel qui est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , à savoir une droite passant par l'origine,

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}.$$

Là, l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 contient en son sein un autre espace vectoriel pour les mêmes lois, à savoir F .

Définition 3.1. — Une partie non vide F d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un **sous-espace vectoriel** (en abrégé s.e.v.) de E si et seulement si la restriction à F de l'addition et de la multiplication scalaire confèrent à F une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Dans la pratique, on utilise la caractérisation suivante pour montrer qu'une partie non vide F est un s.e.v. de E .

Proposition 3.2 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Pour qu'une partie F d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E soit un sous-espace vectoriel de E , il faut et il suffit que

- $F \neq \emptyset$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F, \quad u + \lambda v \in F$.

Démonstration. — Montrons que la condition est nécessaire.

Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E . La stabilité de F par l'addition et par la multiplication scalaire implique

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall u, v \in F, \quad u + \lambda v \in F.$$

Montrons que la condition est suffisante.

Supposons

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall u, v \in F, \quad u + \lambda v \in F.$$

Soient $u, v \in F$. En particulier,

- pour $\lambda = 1$, on a $u + v = u + 1v \in F$, donc le sous-ensemble F est stable par l'addition.
- pour $\lambda = -1$ et $u = v$, on a $\mathbf{0}_E = u - u \in F$.
- pour tout $v \in F$, on a $-v = \mathbf{0}_E + (-1)v \in F$.

D'autre part, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall v \in F$, $\lambda v = (\lambda - 1)v + v \in F$. D'où la stabilité de F par la multiplication scalaire.

Enfin, les autres propriétés de la définition 2.5 étant vraies sur E , elle le sont encore sur F . On déduit alors que F est un espace vectoriel sur \mathbb{K} . \square

Remarque 3.3. — Une autre façon de montrer que F est un s.e.v. de E est de vérifier les propriétés :

- $\mathbf{0}_E \in F$ (ce qui est équivalent à $F \neq \emptyset$)
- $\forall u, v \in F$, $u + v \in F$ (stabilité par la somme)
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall v \in F$, $\lambda v \in F$ (stabilité par la multiplication scalaire).

On peut montrer que la proposition précédente est équivalente à la suivante :

Proposition 3.4. — *Pour qu'une partie F d'un \mathbb{K} -espace vectoriel soit un sous-espace vectoriel, il faut et il suffit que*

- $F \neq \emptyset$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\forall v_1, \dots, v_n \in F$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in F,$$

autrement dit, F est stable par combinaisons linéaires.

Démonstration. — La condition de la proposition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Pour cela, montrons d'abord que F est stable par combinaisons linéaires de deux vecteurs. Soient $v_1, v_2 \in F$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

- Si $\lambda_1 = 0$, alors $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_2 \in F$.
- Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 \left(v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 \right)$. D'après la proposition 3.2 $v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 \in F$ et par suite $\lambda_1 \left(v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 \right) \in F$. Le reste de la démonstration se fait par récurrence sur n en utilisant la propriété pour deux vecteurs.

\square

Exemples 3.5. — (1) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Le singleton $\{\mathbf{0}_E\}$ est clairement un sous-espace vectoriel de E . C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E .

Retenez bien que : tout sous-espace vectoriel contient au moins le vecteur nul $\mathbf{0}$.

E est lui même un sous-espace vectoriel de E . C'est le plus grand sous-espace vectoriel de E .

(2) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $v \in E$ un vecteur non nul. La droite vectoriel

$$D_v = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E , puisque $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v_1 = \alpha_1 v, v_2 = \alpha_2 v \in D_v$

$$v_1 + \lambda v_2 = \alpha_1 v + \lambda \alpha_2 v = (\alpha_1 + \lambda \alpha_2) v \in D_v.$$

(3) Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$$

On a

- $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in F$, donc $F \neq \emptyset$;
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de F . On a

$$v_1 + \lambda v_2 = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

et

$$\begin{aligned} (x_1 + \lambda x_2) + 2(y_1 + \lambda y_2) + 3(z_1 + \lambda z_2) \\ = x_1 + 2y_1 + 3z_1 + \lambda(x_2 + 2y_2 + 3z_2) \\ = 0 + \lambda 0 = 0 \end{aligned}$$

donc $v_1 + \lambda v_2 \in F$ et F est un s.e.v. de \mathbb{R}^3 .

(4) Dans \mathbb{R}^n , soit F l'ensemble des vecteurs $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ solutions du système linéaire homogène

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

F est un s.e.v. La vérification est laissée au lecteur.

(5) Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions d'un intervalle I dans \mathbb{R} , les ensembles suivants sont des s.e.v.

- $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues;
- $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables.

La vérification est laissée au lecteur.

(6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} , l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ est un s.e.v. La vérification est laissée au lecteur.

4. Opérations sur les sous-espaces vectoriels

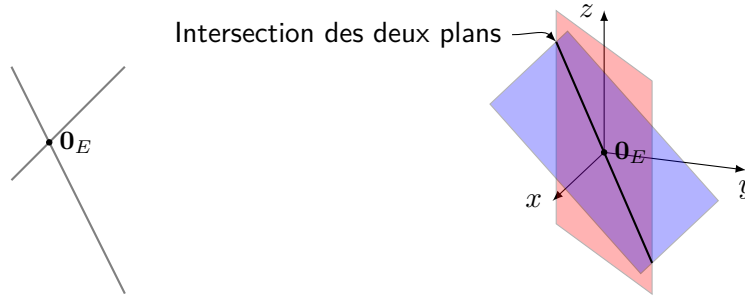
Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 4.1. — *L'intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

Démonstration. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I , une famille d'indices quelconques et considérons une famille $(F_i)_{i \in I}$ de s.e.v. de E .

Pour tout $i \in I$, on a $\mathbf{0} \in F_i$ donc $\mathbf{0} \in \cap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \cap_{i \in I} F_i$. Par définition de l'intersection $u, v \in F_i$ pour tout $i \in I$. Comme F_i est un s.e.v. de E , on a $u + \lambda v \in F_i$, d'où $u + \lambda v \in \cap_{i \in I} F_i$ et $\cap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v. de E . \square



Remarque 4.2. — (a) Soit E un espace vectoriel et soient F_1, F_2 deux s.e.v. de E . Alors $F_1 \cup F_2$ n'est pas en général s.e.v. de E . Pour contre exemple, soient $F_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 . On a $(1, 0) \in F_1 \subset F_1 \cup F_2$ et $(0, 1) \in F_2 \subset F_1 \cup F_2$. Si $F_1 \cup F_2$ était un s.e.v., il serait stable par la somme, mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$.

(b) Soit E un espace vectoriel et soient F_1, F_2 deux s.e.v. de E . Alors $F_1 \cup F_2$ est un s.e.v. de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Bien sûr, si $F_1 \subset F_2$ alors $F_1 \cup F_2 = F_2$ est un sous-espace vectoriel ce qui prouve une implication.

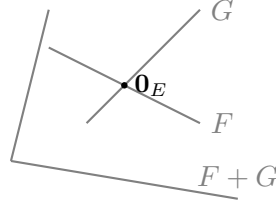
Réciproquement, supposons que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E .

Si $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$ alors il existe x dans $F_1 \setminus F_2$ et y dans $F_2 \setminus F_1$. Puisque $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par addition et donc $x + y \in F_1 \cup F_2$. Mais, si $x + y \in F_1$, alors $y = (x + y) - x \in F_1$ (car F_1 est un s.e.v.) ce qui n'est pas le cas. De même, si $x + y \in F_2$, alors $x = (x + y) - y \in F_2$ ce qui est impossible. On obtient donc une contradiction et l'autre implication.

Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 4.3. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient F et G deux s.e.v. de E . On appelle somme de F et G l'ensemble

$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}.$$



Proposition 4.4. — La somme $F + G$ est un s.e.v. de E . De plus $F + G$ contient F et G et est inclus dans tout s.e.v. contenant F et G .

Démonstration. — On a $F + G \subset E$.

$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ avec $\mathbf{0} \in F$ et $\mathbf{0} \in G$, donc $\mathbf{0} \in F + G$.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $w_1 = u_1 + v_1$ et $w_2 = u_2 + v_2$ deux vecteurs de $F + G$. Alors $w_1 + \lambda w_2 = (u_1 + \lambda u_2) + (v_1 + \lambda v_2) \in F + G$.

De plus, $F \subset F + G$ car pour tout $u \in F$, on peut écrire $u = u + \mathbf{0}$ avec $\mathbf{0} \in G$. De même $G \subset F + G$.

Enfin, si un s.e.v. H de E contient F et G , alors pour tout $u \in F \subset H$ et pour tout $v \in G \subset H$, on a $u + v \in H$, donc $F + G \subset H$. \square

Remarque 4.5. — $F + G$ se comprend aussi comme étant le plus petit s.e.v. de E contenant l'ensemble $F \cup G$.

On peut généraliser la proposition précédente à la somme d'un nombre fini de s.e.v.

Proposition 4.6. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient p s.e.v. F_1, \dots, F_p de E . Alors la somme

$$F_1 + \dots + F_p = \{v_1 + \dots + v_p \mid (v_1, \dots, v_p) \in F_1 \times \dots \times F_p\}$$

est un s.e.v. de E contenant F_1, \dots, F_p

$F_1 + \dots + F_p$ est aussi le plus petit s.e.v. de E contenant l'ensemble $F_1 \cup \dots \cup F_p$.

Remarques 4.7. — Soient E, F, G trois s.e.v. de E .

(1) On a

$$F + G = G + F;$$

$$F + (G + H) = (F + G) + H;$$

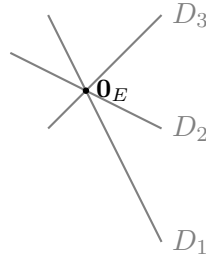
$$F + \{\mathbf{0}\} = F,$$

$$F + E = E,$$

$$F + F = F;$$

(2) Si $H = F + G$, l'écriture $G = H - F$ n'a pas de sens : on ne soustrait pas les s.e.v.;

(3) De la même manière, si $F + G = F + H$, on ne conclut pas hâtivement que $G = H$, comme le montre le contre exemple : $\mathbb{R}^2 = D_1 + D_2 = D_1 + D_3$ ($= \text{plan } \mathbb{R}^2$) et pourtant $D_2 \neq D_3$



Nous venons de voir que tout vecteur $v \in F + G$ peut s'écrire sous la forme d'une somme $v_F + v_G$, où $v_F \in F$ et $v_G \in G$.

Dans le paragraphe suivant nous nous intéressons à une catégorie particulière de somme de s.e.v. dans laquelle la décomposition $v = v_F + v_G$ est unique.

Sous-espaces en somme directe

Définition et Proposition 4.8. — On dit que deux s.e.v. F et G de E sont en somme directe si l'une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (a) pour tout $w \in F + G$, il existe un couple **unique** de vecteurs $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$;
- (b) $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

Dans ces conditions, la somme $F + G$ se note $F \oplus G$.

Démonstration. — (a) \Rightarrow (b) : Soit $v \in F \cap G$. En écrivant

$$v = \underbrace{\mathbf{0}}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in G} = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in G}$$

l'unicité de la décomposition implique que $v = \mathbf{0}$. D'où $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

(b) \Rightarrow (a) : Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux vecteurs de $F \times G$ tels que $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$, alors

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in F \cap G = \{\mathbf{0}\}.$$

On en déduit que $u_1 = u_2$ et $v_1 = v_2$. □

On peut généraliser ceci à un nombre fini de s.e.v.

Proposition 4.9. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient p s.e.v. F_1, \dots, F_p de E . On dit que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est **directe** si l'une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (a) pour tout $v \in F_1 + \cdots + F_p$, il existe une famille **unique** de vecteurs $(v_1, \dots, v_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ telle que $v = v_1 + \cdots + v_p$;
 (b) pour tout $(v_1, \dots, v_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$, si $v_1 + \cdots + v_p = \mathbf{0}$, alors $v_1 = \cdots = v_p = \mathbf{0}$.

Dans ces conditions, la somme $F_1 + \cdots + F_p$ se note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Démonstration. — (a) \Rightarrow (b) : Soit $(v_1, \dots, v_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $v_1 + \cdots + v_p = \mathbf{0}$. Puisque

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = v_1 + \cdots + v_p$$

l'unicité de la décomposition implique que $v_1 = \cdots = v_p = \mathbf{0}$.

(b) \Rightarrow (a) : Soit $v \in F_1 + \cdots + F_p$ et supposons que v admet deux décompositions

$$v = v_1 + \cdots + v_p = v'_1 + \cdots + v'_p$$

Alors

$$(v_1 - v'_1) + \cdots + (v_p - v'_p) = \mathbf{0}$$

Comme chaque F_i étant un s.e.v., $(v_i - v'_i) \in F_i$ et l'hypothèse (b) implique que $\forall i, v_i = v'_i$, d'où l'unicité de la décomposition. □

Remarque 4.10. — Pour $p \geq 3$, la condition $F_1 \cap \cdots \cap F_p = \{\mathbf{0}\}$ n'est pas suffisante pour conclure que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe comme le montre le contre exemple suivant.

Exemple 4.11. — Dans \mathbb{R}^2 soient les droites D_1, D_2 et D_3 définies par

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}; \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}; \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}. \end{aligned}$$

On montre sans difficultés que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{\mathbf{0}\}$. D'autre part, considérons les trois vecteurs **non nuls**

$$v_1 = (1, 1) \in D_1, \quad v_2 = (-2, -4) \in D_2, \quad v_3 = (1, 3) \in D_3$$

On a $v_1 + v_2 + v_3 = (0, 0)$, donc la somme $D_1 + D_2 + D_3$ n'est pas directe.

5. Sous-espace vectoriels supplémentaires

Définition et Proposition 5.1. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On dit qu'un s.e.v. F est **supplémentaire** à un s.e.v. G dans E si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

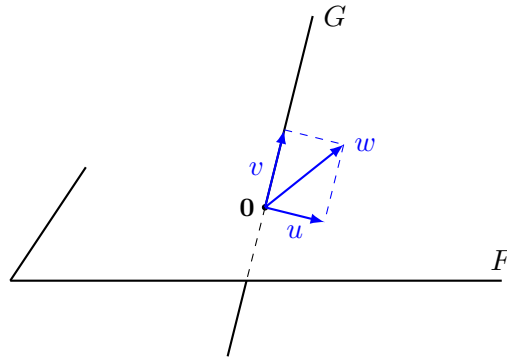
- (a) Pour tout $w \in E$, il existe un couple **unique** de vecteurs $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$.
 (b) $E = F + G$ et $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

Dans ces conditions, on dit aussi que F et G sont des s.e.v. supplémentaires de E ou que E est la somme directe de F et G , et on note

$$E = F \oplus G$$

Démonstration. — (a) \Rightarrow (b) : La décomposition dans (a) montre en particulier que $E = F + G$. L'unicité de cette décomposition montre que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ (la preuve est la même que dans 4.8).

(b) \Rightarrow (a) : Soit $w \in E$. Comme $E = F + G$, il existe $u \in F, v \in G$ tel que $w = u + v$. Ce couple de vecteurs est forcément unique car la somme $F + G$ est directe (voir 4.8). \square



Exemples 5.2. — (1) E et $\{\mathbf{0}\}$ sont des s.e.v. supplémentaires dans E .

(2) Dans \mathbb{R}^n on considère

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\};$$

$$D = \{(\alpha, \dots, \alpha) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \in \mathbb{R}\};$$

Montrons que $H \oplus D = \mathbb{R}^n$.

Soit $v = (x_1, \dots, x_n) \in H \cap D$. On a $x_1 + \dots + x_n = 0$ car $v \in H$ et $x_1 = \dots = x_n$ car $v \in D$. Par suite $0 = x_1 + \dots + x_n = nx_1$ donc $x_1 = 0$ puis $v = \mathbf{0}$. Ainsi $H \cap D \subset \{\mathbf{0}\}$. L'autre inclusion est toujours vraie, donc $H \cap D \subset \{\mathbf{0}\}$.

Montrons que $H + D = \mathbb{R}^n$, i.e.

$$\forall w \in \mathbb{R}^n, \exists (u, v) \in H \times D, w = u + v.$$

Procédant par un raisonnement analyse/synthèse.

Analyse : Soit $w = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Supposons $w = u + v$ avec $u = (a_1, \dots, a_n) \in H$ et $v = (\alpha, \dots, \alpha) \in D$. Déterminons u et v en fonction de

w . L'égalité $w = u + v$ donne

$$(x_1, \dots, x_n) = (a_1 + \alpha, \dots, a_n + \alpha),$$

donc $x_1 + \dots + x_n = n\alpha$ car $u \in H$, par suite

$$\alpha = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

Ceci détermine α donc détermine $v = (\alpha, \dots, \alpha)$ et $u = w - v$.

Synthèse : Soit $w = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons

$$\alpha = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n), v = (\alpha, \dots, \alpha) \text{ et } u = w - v.$$

On a immédiatement $v \in D$, $w = u + v$. De plus $u = (x_1 - \alpha, \dots, x_n - \alpha) \in H$ puisque $(x_1 - \alpha) + \dots + (x_n - \alpha) = 0$. Ainsi $E \subset H + D$. L'inclusion réciproque étant vraie (car la somme de deux s.e.v. est un s.e.v.) on a $E = H + D$. Finalement $\mathbb{R}^n = H \oplus D$.

(2) Dans l'espace $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ des matrices réelle 2×2 on considère les deux s.e.v.

$$\text{Sym}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \mid A^T = A\} \text{ (matrices symétriques)}$$

$$\text{Skew}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \mid A^T = -A\} \text{ (matrices anti-symétriques)}$$

$$\text{Avec } A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \text{ si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{M}(2, \mathbb{R}) = \text{Sym}(2, \mathbb{R}) \oplus \text{Skew}(2, \mathbb{R})$. La preuve est laissée au lecteur.

(3) Dans l'espace des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère les deux s.e.v.

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ paire}\};$$

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ impaire}\}.$$

Alors $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. La preuve est laissée au lecteur.

Théorème 5.3. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Tout s.e.v. de E admet au moins un s.e.v. supplémentaire.

Une démonstration de ce théorème est proposée dans le cas particulier des espaces de *dimension finie* (voir le chapitre 2). La démonstration dans le cas général n'est pas au programme.

6. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Définition et Proposition 6.1. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E .

(a) On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par \mathcal{F} , et on note $\text{Vect}(\mathcal{F})$, le plus petit s.e.v. de E (au sens de l'inclusion) qui contient \mathcal{F} . C'est l'intersection de tous les s.e.v. de E qui contiennent \mathcal{F} ,

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v.} \\ \mathcal{F} \subset F}} F.$$

(b) $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires de v_1, \dots, v_p ,

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}.$$

Démonstration. — (a) D'après la proposition 4.1 l'intersection de tous les s.e.v. qui contiennent \mathcal{F} est un s.e.v. qui contient \mathcal{F} , donc cette intersection est contenue dans $\text{Vect}(\mathcal{F})$. Comme $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit de ces s.e.v., on a $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v.} \\ \mathcal{F} \subset F}} F$.

(b) D'après la proposition 3.4

$$F = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}$$

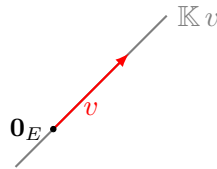
est un s.e.v. de F . Montrons que c'est $\text{Vect}(\mathcal{F})$. Soit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$ un vecteur de F . Soit F_i un s.e.v. de E contenant la famille \mathcal{F} . Puisque F_i est stable par combinaisons linéaires, $v \in F_i$ et donc $F \subset F_i$. L'inclusion étant vraie quel que soit le s.e.v. F_i contenant \mathcal{F} , on déduit que F est inclus dans l'intersection de tous les s.e.v. qui contiennent \mathcal{F} , c-à-d. $\text{Vect}(\mathcal{F})$. Comme $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit s.e.v. contenant \mathcal{F} , on $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset F$. En conclusion $\text{Vect}(\mathcal{F}) = F$. \square

Exemples 6.2. — (1) $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$ car l'espace nul est le plus petit s.e.v. de E .

$\text{Vect}(E) = E$ car $\text{Vect}(E)$ est un s.e.v. contenant E .

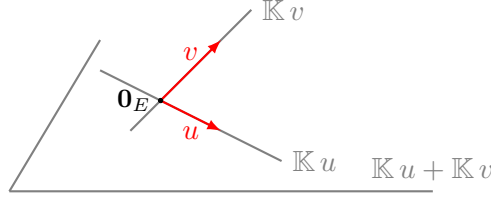
(2) Soit $\mathcal{F} = (v)$. Alors

$$\text{Vect}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}v$$



(3) Soit $\mathcal{F} = (u, v)$. Alors

$$\text{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v.$$



(4) Dans \mathbb{R}^3 , soient les vecteurs $u = (1, 1, 1)$ et $v = (0, -1, 2)$. Alors

$$\text{Vect}(u, v) = \{(\lambda, \lambda - \mu, \lambda + 2\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

En effet, soit $w \in \text{Vect}(u, v)$. Alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v = \lambda(1, 1, 1) + \mu(0, -1, 2) = (\lambda, \lambda - \mu, \lambda + 2\mu)$.

Réciproquement, soit $w = (\lambda, \lambda - \mu, \lambda + 2\mu)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $w = (\lambda, \lambda - \mu, \lambda + 2\mu) = (\lambda, \lambda, \lambda) + (0, -\mu, 2\mu) = \lambda u + \mu v \in \text{Vect}(u, v)$.

La proposition suivante est très importante, elle permettra plus tard l'emploi de la méthode du pivot de Gauss pour étudier l'indépendance ou la *génération* d'une famille de vecteurs.

Proposition 6.3. — (a) Si un vecteur w est combinaison linéaire des vecteurs (v_1, \dots, v_p) alors

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_p, w) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p).$$

(b) Si un vecteur w est combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_p)$ alors

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k + w, v_{k+1}, \dots, v_p) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p).$$

Autrement dit, on ne modifie pas $\text{Vect}(\mathcal{F})$ en :

- substituant à la famille \mathcal{F} la famille (\mathcal{F}, w) , où w est un vecteur combinaison linéaire des éléments de \mathcal{F} .
- ou en ajoutant à **un vecteur** de \mathcal{F} une combinaison linéaire des **autres vecteurs** de \mathcal{F} .

Démonstration. — (a) Supposons $w = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i$. Il est clair que $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p) \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_p, w)$.

Soit $v \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_p, w)$, il existe des scalaires $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i + \alpha w = \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \alpha \lambda_i) v_i$$

donc $v \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ et $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p, w) \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

(b) Se démontre de la même façon que (a). □

Exemple 6.4. — Dans l'espace \mathbb{R}^3 , soient

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (3, 0, 1) \quad \text{et} \quad w = (5, 4, 7)$$

Alors

$$\text{Vect}(v_1, v_2, w) = \text{Vect}(v_1, v_2)$$

car $w = (5, 4, 7)$ est une combinaison linéaire de v_1, v_2 ($w = 2v_1 + v_2$).

Exemple 6.5. — Dans \mathbb{R}^3 , déterminons une équation du s.e.v. engendré par $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (0, 1, 1)$.

Remarquons d'abord que $w = u + v$, donc $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$.

Soit $(x, y, z) \in \text{Vect}(u, v)$, il existe alors deux scalaires α, β tels que

$$(x, y, z) = \alpha u + \beta v = (\alpha - \beta, \beta, \alpha)$$

On a donc le système

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= x \\ \beta &= y \\ \alpha &= z \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à $x = z - y$ ou encore $x + y - z = 0$.

Proposition 6.6. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Si A et B sont deux parties de E , alors

$$A \subset B \implies \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B).$$

Démonstration. — Supposons $A \subset B$. On a alors $A \subset \text{Vect}(B)$, or $\text{Vect}(B)$ est un s.e.v. donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$. \square

Proposition 6.7. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Si A et B sont deux parties de E , alors

$$\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B).$$

Démonstration. — On a $A \subset \text{Vect}(A)$ donc $A \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$. De même $B \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$, d'où $A \cup B \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$. Or $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ est un s.e.v., donc $\text{Vect}(A \cup B) \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Inversement, $A \subset A \cup B$, donc d'après la proposition 6.6 $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(A \cup B)$. De même $\text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$. Or $\text{Vect}(A \cup B)$ est un s.e.v. donc $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$. \square

Proposition 6.8. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Si F est un s.e.v. de E , alors $\text{Vect}(F) = F$

Démonstration. — $F \subset \text{Vect}(F)$ et puisque F est un s.e.v. contenant F , on a aussi $\text{Vect}(F) \subset F$. \square

7. Familles génératrices, familles libres

Définition 7.1. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs de E . On dit que la famille (e_1, \dots, e_n) est **génératrice** dans E , si tout vecteur de E est combinaison linéaire de e_1, \dots, e_n ,

$$\forall v \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Ce qui revient aussi à dire que $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

On dira aussi que la famille (e_1, \dots, e_n) **engendre** E .

Exemple 7.2. — (1) Dans le \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^n , soient

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

La famille (e_1, \dots, e_n) est génératrice dans \mathbb{K}^n .

En effet, tout vecteur $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ peut s'écrire sous la forme

$$v = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Par exemple dans $E = \mathbb{K}$ la famille (1) est génératrice dans E , car pour tout $x \in \mathbb{K}$, $x = x \cdot 1$.

(2) Dans \mathbb{C} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel, la famille $(1, i)$ est génératrice.

(3) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ le s.e.v. engendré par les vecteurs v_1, \dots, v_n . La famille (v_1, \dots, v_n) est naturellement génératrice dans $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

(4) Dans l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$, la famille définie par

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X, \dots, P_n(X) = X^n$$

est génératrice, car tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ s'écrit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, c-à-d. $P = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n$.

Proposition 7.3 (Principe de réduction des familles génératrices)

Si $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ est une famille génératrice de E et si $e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ alors la sous-famille (e_1, \dots, e_n) est génératrice.

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition 6.3. \square

Définition 7.4. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs de E . On dit que la famille (e_1, \dots, e_n) est **libre** ou **linéairement indépendante** dans E si

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \mathbf{0}_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0).$$

On dit que la famille (e_1, \dots, e_n) est **liée** si elle n'est pas libre, ce qui signifie

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \text{ et } \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \mathbf{0}_E.$$

Exemples 7.5. — (1) Toute famille (v) de E formée d'un seul vecteur **non nul** est une famille libre. En effet, si $\lambda \in \mathbb{K}$ est tel que $\lambda v = \mathbf{0}_E$, alors d'après la proposition 2.28, $\lambda = 0$.

(2) Dans \mathbb{K}^n la famille

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1), \end{aligned}$$

est libre. En effet, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \mathbf{0}.$$

L'égalité précédente est équivalente à

$$(\alpha_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0),$$

c'est-à-dire $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$. Donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

(3) Dans l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$, la famille définie par

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X, \dots, P_n(X) = X^n$$

est libre, car un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls.

Proposition 7.6. — Soit $n \geq 2$. On a équivalence entre :

- (a) la famille (e_1, \dots, e_n) est liée;
- (b) l'un des vecteurs e_1, \dots, e_n est combinaison linéaire des autres.

Démonstration. — (a) \Rightarrow (b) : Supposons la famille (e_1, \dots, e_n) liée. Il existe donc des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \mathbf{0}$$

Comme les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne sont pas tous nuls, il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On donc écrire

$$e_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{i_0-1} e_{i_0-1} + \lambda_{i_0+1} e_{i_0+1} + \dots + \lambda_n e_n)$$

Ainsi e_{i_0} est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_{i_0-1}, e_{i_0+1}, \dots, e_n$.

(b) \Rightarrow (a) : Supposons que l'un des vecteurs e_1, \dots, e_n est combinaison linéaire des autres. Il $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$e_{i_0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{i_0-1} e_{i_0-1} + \lambda_{i_0+1} e_{i_0+1} + \dots + \lambda_n e_n$$

ou encore

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{i_0-1} e_{i_0-1} - e_{i_0} + \lambda_{i_0+1} e_{i_0+1} + \cdots + \lambda_n e_n = \mathbf{0}_E$$

Comme $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i_0-1}, -1, \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$, la famille (e_1, \dots, e_n) est liée. \square

Exemple 7.7. — (1) Soient u, v deux vecteurs de E . La famille (u, v) est liée si et seulement si u et v sont colinéaires, c-à-d. $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ tel que $v = \lambda u$.

(2) Cherchons si la famille $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (1, 1, 0)$ est libre dans \mathbb{R}^3 ou non. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \mathbf{0}$. Cette égalité est équivalente au système linéaire

$$\begin{array}{rrrr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}$$

On le réduit avec la méthode du pivot de Gauss. Cela revient à écrire symboliquement les vecteurs v_1, v_2, v_3 en colonne et de réduire la matrice obtenue

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 3 & \boxed{1} \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & \boxed{1} & 0 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & -2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & \boxed{7} & 0 \end{array}$$

Donc le système admet une solution unique, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On en déduit que la famille $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (1, 1, 0)$ est libre.

(2) Etudions si la famille $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 2, 1), v_3 = (2, 6, 7)$ est libre dans \mathbb{R}^3 ou non. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0, 0, 0). \quad (1)$$

Nous avons donc (comme dans l'exemple précédent) à réduire la matrice des vecteurs colonnes v_1, v_2, v_3

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & \boxed{1} & 0 & \textcolor{red}{2} \\ 2 & 2 & 6 & -4 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 3 & \boxed{1} & 7 & 0 & \boxed{1} & \textcolor{blue}{1} \end{array}$$

Le système n'admet donc pas comme unique solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ et la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est liée. Pour trouver une relation linéaire entre ces trois vecteurs, nous terminerons la résolution du système linéaire. Le dernier tableau est équivalent à $\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$ et $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$. En remplaçant λ_1

et λ_2 dans l'égalité (1) obtient $-2\lambda_3 v_1 - \lambda_3 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0, 0, 0)$ et en prenant $\lambda_3 \neq 0$, on obtient

$$v_3 = 2v_1 + v_2.$$

On peut lire cette relation directement sur la réduit de Gauss où les coefficients 2 et 1 sont mis en évidence par les couleurs rouge et blue.

$$v_3 = \textcolor{red}{2} \cdot v_1 + \textcolor{blue}{1} \cdot v_2.$$

(3) Dans \mathbb{R}^4 , vérifions si les vecteurs

$$v_1 = (2, 1, 1, 4), v_2 = (-1, 1, -2, -2), v_3 = (1, 1, -1, 1),$$

$$v_4 = (-1, -1, 1, -1), v_5 = (1, 0, 1, 2)$$

forment une famille libre ou non. Comme dans l'exemple précédent, nous allons utiliser la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & -1 & 2 & 0 & -6 & -3 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -3 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

On en déduit la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ n'est pas libre et que nous avons les relations

$$v_2 = v_1 - 3v_5, v_3 = -v_4$$

(4) Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions

$$f_1 : x \mapsto 1, f_2 : x \mapsto \cos(x), f_3 : x \mapsto \sin(x)$$

et montrons que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \mathbf{0}_E$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 \sin(x) = 0$$

- pour $x = 0$, on obtient $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$;
- pour $x = \pi/2$, on obtient $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$;
- pour $x = \pi$, on obtient $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$.

Ces trois équations montrent que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On en déduit que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Remarques 7.8. — (a) Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre dans E . Alors pour tout i , le vecteur e_i n'est pas nul et aucun des vecteurs e_i n'est combinaison linéaire des autres vecteurs e_j , $j \neq i$.

(b) Toute sous-famille extraite d'une famille libre est encore libre.

(c) Toute sur-famille d'une famille liée est liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul est liée.

(d) Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Proposition 7.9 (Principe d'extension des familles libres)

Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre dans E . Pour tout vecteur v **non nul**, **n'appartenant pas** à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, la sur-famille (e_1, \dots, e_p, v) est libre.

Démonstration. — Laisée en exercice. \square

Proposition 7.10. — (a) Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Si (e_1, \dots, e_p) est une famille libre de F alors elle est libre dans E .

(b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels en somme directe dans E , i.e. $F \cap G = \{0\}$.

Si $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille libre de F et $(\eta_i)_{1 \leq i \leq q}$ une famille libre de G , alors la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \eta_1, \dots, \eta_q)$ est libre dans $F \oplus G$.

Démonstration. — Laisée en exercice. \square

Proposition 7.11. — (a) On suppose que l'espace vectoriel E admet une famille génératrice (e_1, \dots, e_n) .

Soit $v_1 \neq 0$, un vecteur de E . Alors on peut toujours extraire $n-1$ vecteurs de $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$, que l'on note e_2, \dots, e_n par réindexation éventuelle, de sorte que la nouvelle famille (v_1, e_2, \dots, e_n) soit génératrice dans E .

(b) Dans tout espace vectoriel E , le cardinal de toute famille libre est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice.

(c) Soient n vecteurs v_1, \dots, v_n d'un espace vectoriel. Alors toute famille de $(n+1)$ vecteurs w_1, \dots, w_n de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ est automatiquement liée.

Démonstration. — Laisée en exercice. \square

8. Base d'un espace vectoriel

Définition et Proposition 8.1. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On dit que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

(1) \mathcal{B} est libre et génératrice;

(2) tout vecteur $v \in E$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

où $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.

Le n -uplet (x_1, \dots, x_n) s'appelle **coordonnées** ou **composantes** de v dans la base \mathcal{B} .

Démonstration. — Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Puisque \mathcal{B} est génératrice, pour tout $v \in E$, il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Montrons que ces scalaires sont uniques.

Si v admet une autre décomposition $v = x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n$, alors

$$x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

d'où

$$(x_1 - x'_1)e_1 + \dots + (x_n - x'_n)e_n = \mathbf{0}.$$

Comme la famille \mathcal{B} est libre, on déduit

$$x_1 = x'_1, \dots, x_n = x'_n.$$

D'où l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base. L'implication réciproque est immédiate. \square

Exemples 8.2. — (1) La famille

$$((2, 4), (1, 1))$$

est une base de \mathbb{R}^2 . Elle est libre, car

$$\alpha(2, 4) + \beta(1, 1) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha & + \beta = 0 \\ 4\alpha & + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

C'est aussi une famille génératrice, car si $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$(x, y) = \alpha(2, 4) + \beta(1, 1) \iff \begin{cases} 2\alpha & + \beta = x \\ 4\alpha & + \beta = y \end{cases} \Rightarrow \beta = 2x - y, \alpha = (y - x)/2$$

et donc $v = \frac{y-x}{2}(2, 4) + (2x - y)(1, 1)$.

(2) La famille

$$((1, 1), (2, 4))$$

est une base de \mathbb{R}^2 qui diffère de la précédente, car les vecteurs sont présentés dans un ordre différent.

L'espace \mathbb{R}^2 admet plusieurs bases. Une autre base est

$$((1, 0), (0, 1)).$$

(3) Dans l'espace vectoriel \mathbb{K}^n , soit la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ donnée par

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Nous avons déjà montré que cette famille est libre et génératrice, c'est donc une base de \mathbb{K}^n . On l'appelle la **base canonique** ou **base standard** de \mathbb{K}^n .

Soit $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Comme $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, les composantes de v dans la base canonique sont (x_1, \dots, x_n) .

(4) Considérons la famille $\mathcal{B} = (1, i)$ du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . Il est clair que \mathcal{B} est libre et génératrice. C'est donc une base de \mathbb{C} sur \mathbb{R} .

(5) Considérons l'espace vectoriel

$$E = \{x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

La famille (\cos, \sin) est une base de E . La vérification est facile. La famille $(\cos - \sin, 2\cos + 3\sin)$ est aussi une base de E . La vérification est laissée en exercice.

(5) Dans l'espace $\mathbb{K}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3 , la famille $(1, X, X^2, X^3)$ est une base. On peut aussi montrer que les familles $(X^3, 2X^2, 6X, 6)$ et $(1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3)$ sont des bases de cet espace.

(7) On démontre que la famille des polynômes

$$1, X, \dots, X^n$$

est libre et génératrice dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle la **base canonique** ou **base standard** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Plus généralement, pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille

$$\mathcal{B}_a = (1, X - a, \dots, (X - a)^n)$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

(8) L'ensemble des solutions du système homogène

$$\begin{cases} x + y - w = 0 \\ z + w = 0 \end{cases}$$

est l'espace vectoriel donné par

$$E = \{y(-1, 1, 0, 0) + w(1, 0, -1, 1) \mid y, w \in \mathbb{R}\}.$$

Les deux vecteurs $(-1, 1, 0, 0)$ et $(1, 0, -1, 1)$ forment donc une famille génératrice de E . Il est facile de voir que cette famille est libre, car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de E .

(9) Cherchons une base de l'espace vectoriel

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a + b - 2c = 0 \right\}.$$

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in E$. Alors en écrivant la condition, par exemple, sous la forme $a = -b + 2c$, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b + 2c & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ &= b \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, un candidat naturel pour une base est la famille \mathcal{B} formée des deux matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'écriture de E comme ensemble de combinaisons linéaires de A_1 et A_2 montre que cette famille est génératrice. Elle est aussi linéairement indépendante car les deux matrices ne sont pas colinéaires.

Compétences visées.

- Retenir les espaces vectoriels de références \mathbb{K}^n , $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$.
- Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel en utilisant la caractérisation de la Proposition 3.2.
- Savoir montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe.
- Savoir montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans un espace vectoriel.
- Savoir montrer qu'une famille de vecteurs est génératrice, libre, base.