IV DERIVABILITE

1. Fonctions dérivables

1.1 Définitions

Soit x_0 un réel et f une fonction définie sur un voisinage $]x_0 - r, x_0 + r[$ de x_0 $(r > 0)$.

On dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $T(f, x_0)(x) := \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ de f en x_0 admet une limite finie quand $x \longrightarrow x_0$ dans $]x_0 - r, x_0 + r[\setminus\{x_0\}$. On note alors $f'(x_0)$ cette limite et on l'appelle la dérivée de f en x_0.

1.2 Interprétation géométrique

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans ce repère ; soit M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et soit M le point de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \neq x_0$ voisin de x_0, alors le taux d'accroissement $T(f, x_0)(x)$ de f en x_0 n'est autre que la pente de la droite (MM_0) et si f est dérivable en x_0, alors la droite (MM_0) tend vers une droite appelée tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M_0 et qui a pour pente $f'(x_0)$.

1.3 Remarque

La courbe représentative d'une fonction f peut posséder une tangente en un point $M_0(x_0, f(x_0))$ sans que f soit dérivable en x_0 : c'est le cas quand le taux d'accroissement $T(f, x_0)(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand $x \longrightarrow x_0$ dans $]x_0 - r, x_0 + r[-\{x_0\}$ (exemple : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en 0).

1.4 Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f est dérivable en un point x_0 de I alors f est continue en x_0.

Preuve : si f est dérivable en x_0, alors le taux d'accroissement $T(f, x_0)(x) := \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ de f en x_0 admet une limite finie l quand $x \longrightarrow x_0$ dans $I - \{x_0\}$, alors si on pose

$$\varepsilon(x) = T(f, x_0)(x) \text{ si } x \neq x_0 \text{ et } \varepsilon(x_0) = 0$$

on peut écrire $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ donc $f(x) \longrightarrow f(x_0)$ quand $x \longrightarrow x_0$.

$\square$

Remarque La réciproque de ce résultat est fausse : la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 sans être dérivable en 0.

1.5 Définitions et notations

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I ; l'application

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée la dérivée de f. On utilise aussi la notation $\dfrac{df}{dx}$ au lieu de f'.

1.6 Opérations sur les dérivées

a) Si f et g sont dérivables en x_0 et si $k \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ et kf sont dérivables en x_0 et on a

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(kf)'(x_0) = kf'(x_0).$$

b) Si f et g sont dérivables en x_0, alors fg est dérivable en x_0 et on a

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

c) Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times (g' \circ f)(x_0).$$

d) Si f et g sont dérivables en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Preuve : laissée au lecteur.

1.7 Dérivées des fonctions usuelles

* $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$
* $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}^*$ si n est un entier < 0
* $\dfrac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ sur $]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{R}$ non entier.
* $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ sur $\mathbb{R}$
* $\dfrac{d}{dx}\ln|x-a| = \dfrac{1}{x-a}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$
* $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ sur $\mathbb{R}$

* $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ sur $\mathbb{R}$
* $\dfrac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ sur $]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$
* $\dfrac{d}{dx}\text{sh } x = \text{ch } x$ sur $\mathbb{R}$
* $\dfrac{d}{dx}\text{ch } x = \text{sh } x$ sur $\mathbb{R}$
* $\dfrac{d}{dx}\text{th } x = 1 - \text{th }^2 x = \dfrac{1}{\text{ch }^2 x}$ sur $\mathbb{R}$
* $\dfrac{d}{dx}\text{Arcsin } x = -\dfrac{d}{dx}\text{Arccos } x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$
* $\dfrac{d}{dx}\text{Arctg} x = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
* $\dfrac{d}{dx}\text{Argsh } x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$
* $\dfrac{d}{dx}\text{Argch } x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1, +\infty[$
* $\dfrac{d}{dx}\text{Argth} x = \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$.

On va maintenant enrichir le théorème de la bijection (cf. III 3.5) dans le cas où la fonction considérée est dérivable :

1.8 Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, strictement monotone sur I ; alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, f est une bijection de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Si de plus f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, ce qui peut aussi s'écrire $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Preuve : notons $f(x_0) = y_0$ et $f(x) = y$ pour tout x au voisinage de x_0, alors le taux d'accroissement de f^{-1} en y_0 s'écrit

$$T(f^{-1}, y_0)(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{T(f, x_0)(x)}$$

or f^{-1} est continue sur $f(I)$ donc, quand $y \longrightarrow y_0$, $x \longrightarrow x_0$, donc $T(f, x_0)(x) \longrightarrow f'(x_0)$, on en déduit

$$T(f^{-1}, y_0)(y) \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \text{ quand } y \longrightarrow y_0$$

puisque $f'x_0) \neq 0$.

$\square$

1.9 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

a) On dit que f est dérivable à gauche en un point x_0 de I si et seulement si le taux d'accroissement $T(f, x_0)(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ de f en x_0 admet une limite finie quand $x \longrightarrow x_0^-$. On note alors $f'_g(x_0)$ cette limite et on l'appelle la dérivée à gauche de f en x_0.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet alors une demi-tangente au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ dans le demi-plan $x < x_0$.

b) On dit que f est dérivable à droite en un point x_0 de I si et seulement si le taux d'accroissement $T(f, x_0)(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ de f en x_0 admet une limite finie quand $x \longrightarrow x_0^+$. On note alors $f'_d(x_0)$ cette limite et on l'appelle la dérivée à droite de f en x_0.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet alors une demi-tangente au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ dans le demi-plan $x > x_0$.

c) L'application f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent et sont égales, et dans ce cas, on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Par exemple, $f(x) = x^2 + 2|x - 1|$: $f'_g(1) = 0$ et $f'_d(1) = 4$ donc f n'est pas dérivable en 1.

1.10 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

a) Si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I : la dérivée de f' est notée f'' ou $f^{(2)}$ et s'appelle la dérivée seconde de f. Si f'' est dérivable sur I, sa dérivée est notée f''' ou $f^{(3)}$, etc...

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on dit que f est n-fois dérivable sur I si f est dérivable sur I, f' est dérivable sur I, f'' est dérivable sur I,..., $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I et on note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. La fonction $f^{(n)}$ est appelée la dérivée n-ième de f ou dérivée d'ordre n de f. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on dit que f est classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable sur I et si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I. Par convention, on dit que f est classe $\mathcal{C}^0$ sur I si f est continue sur I.

d) on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou, ce qui est équivalent, si f est n-fois dérivable sur I pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1.11 Exemples

a) La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $(\exp)^{(n)} = \exp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Les fonction sin et cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction $f(x) = |x|^3$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas trois fois dérivable en 0.

1.12 Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient f et g deux fonctions n-fois dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors fg est n-fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Preuve : on fait une démonstration par récurrence : soit (H_p) la proposition : fg est p-fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I,\ (fg)^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x)$$

la proposition (H_1) est vraie d'après 1.6 ; supposons maintenant (H_{n-1}) vraie pour un certain entier $n \geq 2$, alors $(fg)^{(n-1)}$ est dérivable sur I d'après 1.6, et on a pour tout $x \in I$

$$(fg)^{(n)}(x) = \left((fg)^{(n-1)}\right)'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(f^{(k)}(x) g^{(n-1-k)}\right)'(x)$$

$$\text{i.e } (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-1-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$= f^{(n)}(x)g(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} f^{(j)}(x) g^{(n-j)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) + f(x)g^{(n)}(x)$$

$$= f^{(n)}(x)g(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) + f(x)g^{(n)}(x)$$

$$= f^{(n)}(x)g(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) + f(x)g^{(n)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

ainsi $(H_{n-1}) \Longrightarrow (H_n)$, donc (H_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\square$

1.13 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

a) Si f et g sont des applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I $(n \in \mathbb{N})$ et si $k \in \mathbb{R}$, alors $f+g$, fg et kf sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

b) Si f et g sont des applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I $(n \in \mathbb{N})$ et si g ne s'annule en aucun point de I alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

c) Soient I et J des intervalles et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur I telle que $\varphi(I) \subset J$; si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Preuve : par récurrence en utilisant 1.6 et 1.12.

□

2 Théorème des accroissements finis

2.1 Définitions

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage d'un point x_0 ;

a) on dit que f présente un maximum local en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, \ f(x) \leq f(x_0) \ ;$$

b) on dit que f présente un minimum local en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, \ f(x) \geq f(x_0) \ ;$$

c) on dit que f présente un extremum local en x_0 si f présente un maximum ou un minimum local en x_0 ;

d) on dit que x_0 est un point critique de f si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$.

2.2 Proposition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage d'un point x_0 et dérivable en x_0 ; si f présente un extremum local en x_0, alors x_0 est un point critique de f : $f'(x_0) = 0$.

Preuve : on fait la démonstration dans le cas où f présente un maximum local en x_0 (s'il s'agit d'un minimum, alors $-f$ présente un maximum local) : il existe donc $r > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, \ f(x) \leq f(x_0).$$

De plus f est dérivable en x_0, donc $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ on a alors

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0[, \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ d'où } f'(x_0) = f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

et de même

$$\forall x \in]x_0, x_0 + r[, \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ d'où } f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

d'où $f'(x_0) = 0$.

□

2.3 Remarques

a) x_0 peut être un point critique de f sans que f présente un extremum local en x_0 : par exemple la fonction $f(x) = x^3$ admet 0 comme point critique mais ne présente pas un extremum local en 0.

b) une fonction peut présenter un extremum local en un point x_0 sans que f soit dérivable en x_0 et par conséquent sans que x_0 soit un point critique de f : par exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ présente un minimum local en 0 mais f n'est pas dérivable en 0 puisque $f'_g(0) = 1$ et $f'_d(0) = -1$.

2.4 Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une application $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$; alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve : la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ donc est bornée et atteint ses bornes : il existe donc c_1 et $c_2 \in [a, b]$ tels que $f(c_1) = m = \inf\limits_{[a,b]} f$ et $f(c_2) = M = \sup\limits_{[a,b]} f$.

Si $m = M$ alors f est constante sur $[a, b]$ et par conséquent sa dérivée f' est nulle sur $[a, b]$.

Si $m < M$, alors $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$: si $m \neq f(a)$, on a alors $f(c_1) = m < f(a) = f(b)$ et par conséquent $c_1 \in]a, b[$ donc il existe $r > 0$ tel que $]c_1 - r, c_1 + r[\subset [a, b]$ et f présente un minimum local en c_1, d'où $f'(c_1) = 0$ d'après 2.2, et si $M \neq f(a)$, on a alors $f(a) = f(b) < M = f(c_2)$ donc $c_2 \in]a, b[$ et par conséquent f présente un maximum local en c_2, d'où $f'(c_2) = 0$.

$\square$

2.5 Théorème des accroissements finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une application $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$; alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

On peut aussi exprimer le théorème des accroissements finis sous la forme suivante : soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ et soit f une application continue sur $[x_0, x_0 + h]$ et dérivable sur $]x_0, x_0 + h[$, alors il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h).$$

(de même avec $h < 0$ et f continue sur $[x_0 + h, x_0]$, dérivable sur $]x_0 + h, x_0[$.)

Preuve : On considère la fonction φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

La fonction φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ puisque f l'est et on a $\varphi(a)=0$ mais aussi $\varphi(b)=0$; on peut donc appliquer le théorème de Rolle à φ : il existe $c\in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$. Or pour tout $x\in]a,b[$, on a

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(a)-f(b)}{b-a}$$

donc $\varphi'(c)=0$ signifie $f(a)-f(b)=(b-a)f'(c)$.

□

2.6 Corollaire Soit f une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) pour tous a et $b\in I$ distincts, il existe c strictement compris entre a et b tel que

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

b) Soit $x_0\in I$ et $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $x_0+h\in I$ alors il existe un réel $\theta\in]0,1[$ tel que

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h).$$

c) S'il existe une constante $M>0$ telle que $\forall x\in I,\ |f'(x)|\leq M$, alors on a

$$\forall x,y\in I,\ |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|.$$

2.7 Corollaire

Soit $x_0\in\mathbb{R}$ et soit f une application continue au voisinage de x_0 et dérivable au voisinage de x_0 sauf en x_0 ; si f' admet une limite $l\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ quand $x\to x_0, x\neq x_0$, alors la courbe représentative de f admet une tangente de pente l au point $(x_0,f(x_0))$ et si $l\in\mathbb{R}$, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=l$.

Preuve : pour $h>0$ suffisamment proche de 0, f est continue sur $[x_0,x_0+h]$ et dérivable sur $]x_0,x_0+h[$ donc il existe $\theta\in]0,1[$ tel que

$$T(f,x_0)(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h)$$

donc

$$\lim_{h\to 0^+}T(f,x_0)(h)=l.$$

De même avec $h<0$ suffisamment proche de 0, on obtient $\lim\limits_{h\to 0^-}T(f,x_0)(h)=l$ d'où

$$\lim_{h\to 0^-}T(f,x_0)(h)=l$$

et ainsi, d'après 1.9, la courbe représentative de f admet une tangente de pente l au point $(x_0,f(x_0))$. De plus si $l\in\mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=l$.

□

2.8 Estimation d'erreur

Le théorème des accroissements finis permet de calculer une valeur approchée d'une fonction f de classe $\mathbf{C}^1$ en un point avec estimation de l'erreur commise, en majorant $|f'(x)|$ sur un segment bien choisi à l'aide de 2.6 c) : par exemple, calculons une valeur approchée de $\ln(1,001)$ en appliquant le théorème pour la fonction $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[0,999; 1,001]$: il est clair que

$$\forall x \in [0,999; 1,001],\ |f'x)| \leq \frac{1}{0,999}$$

donc, d'après 2.6 c), on a

$$|f(1,001) - f(1)| \leq \frac{1}{0,999} \times 0,001 \leq 0,0011$$

et ainsi $\ln(1,001) \simeq 0$ avec une erreur majorée par $0,0011$.

2.9 Proposition

Soit f une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dont la dérivée est l'application nulle ; alors f est une application constante.

Preuve : soit $x_0 \in I$ fixé et considérons un point quelconque x de I distinct de x_0 ; alors d'après 2.6, il existe c strictement compris entre x et x_0 tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$$

or f' est l'application nulle donc $f(x) = f(x_0)$, et ce pour tout $x \in I$: f est donc constante.

□

2.10 Définition

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) on dit que f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (resp. } f(x_1) \geq f(x_2)).$$

b) on dit que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)(\text{ resp. } f(x_1) > f(x_2)).$$

2.11 Théorème

Soit f une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) si $\forall x \in I,\ f'x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

b) si $\forall x \in I,\ f'x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

c) si $\forall x \in I,\ f'x) \geq 0$ et si f' ne s'annule au plus qu'en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante sur I.

d) si $\forall x \in I,\ f'x) \leq 0$ et si f' ne s'annule au plus qu'en un nombre fini de points de I, alors f est strictement décroissante sur I.

Preuve :

a) on suppose $\forall x \in I,\ f'x) \geq 0$; soient a et $b \in I$ tels que $a < b$ alors d'après le corollaire 2.6, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ d'où $f(b) \geq f(a)$ puisque $f'(c) \geq 0$ et ainsi f est croissante.

b) : démonstration analogue.

c) : on suppose $\forall x \in I,\ f'x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points. D'après a) f est croissante sur I : raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe a et $b \in I$ tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$, alors, pour tout $x \in [a, b]$, on a $a \leq x \leq b$ donc $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ puisque f est croissante sur I, or $f(a) = f(b)$ donc pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = f(a) = f(b)$ donc f est constante sur $[a, b]$ donc f' est l'application nulle sur $[a, b]$, ce qui est impossible puisque f ne s'annule qu'en un nombre fini de points : on en déduit que pour tous a et $b \in I$,

$$a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$$

et ainsi f est strictement croissante sur I.

d) : démonstration analogue.

□

2.12 Théorème de prolongement

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit f une fonction de classe C^k sur $]a, b]$ et telle que pour tout entier $i \in [0, k]$, $f^{(i)}$ admet une limite finie quand x tend vers a, $x \neq a$, alors f est de classe C^k sur $[a, b]$ et pour tout entier $i \in [0, k]$, on a

$$f^{(i)}(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f^{(i)}(x).$$

Preuve : par récurrence :

pour tout $j \in \mathbb{N}$, considérons la proposition $(\mathcal{P}_j)$ suivante :

$(\mathcal{P}_j)$: pour toute fonction f de classe C^j sur $]a, b]$ telle que pour tout entier $i \in [0, j]$, $f^{(i)}$ admet une limite finie ℓ_i quand x tend vers a, $x \neq a$, alors f est de classe C^j sur $[a, b]$ et $f^{(i)}(a) = \ell_i$ pour tout $i \in [0, j]$.

La proposition $(\mathcal{P}_0)$ est vraie d'après III 2.7 (prolongement par continuité).
Supposons que $(\mathcal{P}_{k-1})$ est vraie pour un entier $k \geq 1$ et considérons f une fonction de classe C^k sur $]a, b]$ et telle que pour tout entier $i \in [0, k]$, $f^{(i)}$ admet une limite finie ℓ_i quand x tend vers a, $x \neq a$; alors, comme $(\mathcal{P}_{k-1})$ est supposée vraie, pour tout $x \in]a, b]$, la fonction $f^{(k-1)}$ est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$ donc vérifie le théorème des accroissements finis : il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(a) = (x-a)f^{(k)}(c_x)$$

on en déduit que

$$\frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(a)}{x-a} = f^{(k)}(c_x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} \ell_k$$

ainsi $f^{(k-1)}$ est dérivable en a et $f^{(k)}(a) = \ell_k$, donc $f^{(k)}$ est continue en a. Donc $(\mathcal{P}_k)$ est vraie et le théorème est démontré par récurrence.

$\square$

2.13 Formule de Taylor-Lagrange

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, n un entier naturel et soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathbf{C}^n$ telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$.

Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (b-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Le terme $f(a)+(b-a)f'(a)+(b-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\cdots+(b-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ est appelé développement de Taylor de f en a à l'ordre n, et le terme $(b-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ est appelé reste de Lagrange.

Preuve :

Soit A le nombre réel défini par

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (b-a)^{n+1} \frac{A}{(n+1)!}$$

et soit φ l'application définie sur $[a,b]$ par

$$\varphi(x) = f(b) - \left[f(x) + (b-x)f'(x) + (b-x)^2 \frac{f''(x)}{2!} + \cdots + (b-x)^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + (b-x)^{n+1} \frac{A}{(n+1)!} \right].$$

Il est clair que φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, donc par le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or le calcul de φ' donne

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(-f^{(n+1)}(x) + A \right)$$

donc, comme $\varphi'(c) = 0$, on en déduit $A = f^{(n+1)}(c)$.

$\square$