Feuille d'exercice 2

Exercice 1 – Vrai ou Faux

$\boxed{\text{F}}$
$\boxed{\text{V}}$

$\boxed{\text{V}}$
$\boxed{\text{F}}$
$\boxed{\text{F}}$

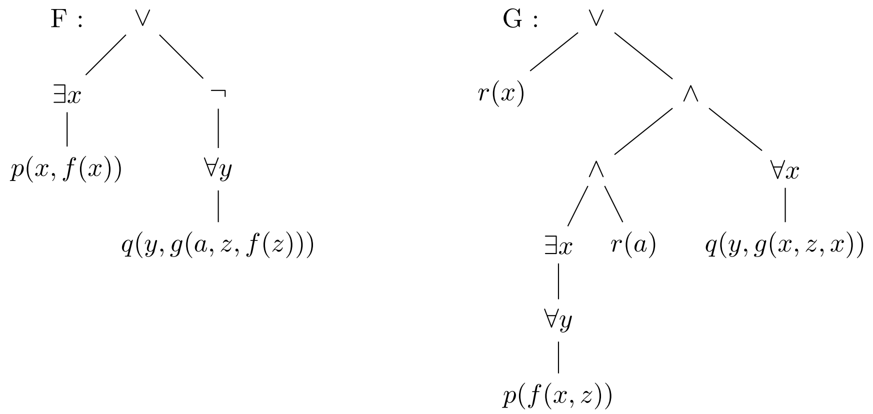
$\boxed{\text{V}}$
$\boxed{\text{F}}$
$\boxed{\text{F}}$

$\boxed{\text{V}}$
$\boxed{\text{F}}$

$\boxed{\text{F}}$
$\boxed{\text{F}}$
$\boxed{\text{F}}$

Exercice 2 –

1. arbre :



2. Varaible libre
   F : $(\exists x, p(x, f(y))) \vee \neg \forall y, q(y, g(a, z, f(z)))$
   G : $r(x) \vee ((\exists x, \forall y, p(f(x), z)) \wedge r(a)) \wedge \forall x, q(y, g(x, z, x))$
3. Ce sont toutes les feuiilles des arbres de la question 1
4. F : $x, f(x), y, g(a, z, f(z))$
   G : $x, f(x, z), y, g(x, z, x)$
5. F : $(\exists x, p(x, f(f(a)))) \vee \neg \forall y, q(y, g(a, f(x), f(f(x))))$
   G : $r(x), \vee((\exists w, \forall y, p(f(w), f(x))) \wedge r(a)) \wedge \forall w, q(f(a), g(w, f(x), w))$

Exercice 3 – Arbre Binaire de Recherche

1. 1 : Oui $Node(Node(Node(Nil, 10, Nil), 15, Node(Nil, 20, Nil)), 33, Node(Nil, 40, Nil))$
   2 : Non (le noeud 12 devrai être à droite du noeud 10)
2. $\max(n, t) := n \in t \wedge \forall x, x \in t \Rightarrow x = n \vee x < n$
3. (a) $\forall x, \neg(x \in nil)$: Il n'y a pas de valeur dans une feuille
   (b) $\forall\ x\ l\ v\ r, (x \in node(l, v, r) \Leftrightarrow x \in l \vee x = v \vee x\ in)$: Si x est dans un arbre alors il est soit dans la racine soit dans l'arbre de gauche soit dans l'arbre de droite
   (c) $\forall t_1 t_2, \exists t, \forall x, (x \in t \Leftrightarrow x \in t_1 \wedge x \in t_2)$: Il existe une intersection entre deux arbres.
4. $abr(t)$ vrai si t est un Arbre Binaire de Rcherche
   (a) $abr(nil)$
   (b) $\forall l, v, r, (abr(node(l, v, r)) \Leftrightarrow abr(l) \wedge abr(r)$
   $\wedge \forall x, (x \in l \Rightarrow x < v \wedge x \in r \Rightarrow v < x))$

5. $\forall t, u, abr(t) \wedge abr(u) \Rightarrow (abr(union(t,u)) \wedge \forall z, (z \in union(t,u) \Leftrightarrow z \in t \vee z \in u))$

Exercice 4 – Algorithmes satisfaibilité-validé

$satisfiable(P) := non(valide(\neg P))$
$valide(P) := non(satisfiable(\neg P))$

Exercice 5 – Interprétation en calcul des prédicats

1. formules :

	1	2	3	4	5
$\forall xy, P(x,y)$	F	V	F	F	F
$\exists xy, P(x,y)$	F	V	V	V	V
$\exists x, \forall y, P(x,y)$	F	V	V	F	F
$\exists y, \forall x, P(x,y)$	F	V	F	V	F
$\forall x, \exists y, P(x,y)$	F	V	F	V	V
$\forall y, \exists x, P(x,y)$	F	V	V	F	F

2. — Toutes les cases sont noir
   — le tableau à au moin une case noir
   — Il y a une ligne noir
   — Il y a une colonne noir
   — il y a au moin une case noir par ligne
   — Il y a au moin une case noir pas colonne

Exercice 6 – Prouvez un résulatat théorique du théorème de la copacité

1. **Satisfiable :** Il exite une interpretation I, A_i vrai dans I

   Instasifiable : Pour toutes interprétations I, au moins un A_i est faux dans $\mathcal{E}$
2. Grâce à la compacité on peut dir que si $H \subset \mathcal{E}$ est instasifiable alors $\mathcal{E}$ est aussi instasifiable
3. $\mathcal{E}$ est instasifiable donc pour toutes interpretation $I \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ il existe $A_i \subset \mathcal{E}$ tel que A_i faux dans I
   $H = \left\{A_i | i \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}}\right\}$
4. **Lemme de Köning :** Tout arbre infini à branchement fini a une branche infinie.

Exercice 7 – Colirage de graphe

— Couleurs : $c \in C$
— (x_i^c) vrai si (x_i) est de couleur c

$$Graphe \begin{cases} V = \{x_1, \ldots x_n\} \\ E \subseteq V^2 \\ C = couleurs \end{cases}$$

n sommets et k couleurs

— n^k
— — $\left\{x_i^c \Rightarrow \neg x_i^d | i \in V, c \neq d \in C\right\}$
   — $\left\{x_i^c \Rightarrow \neg x_j^c | c \in C, (x_i, x_j) \in E\right\}$
   — $\left\{x_i^{c_1} \vee \ldots \vee x_i^{c_n} | C = \{c_1, \ldots, c_n\}, x_i \in V\right\}$