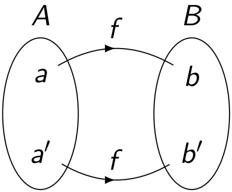
Fonctions

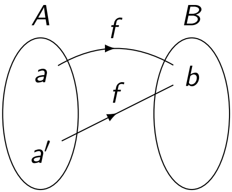
Fonction (relation fonctionnelle)

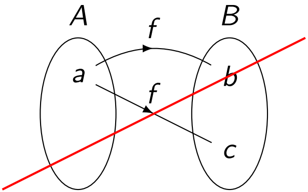
$R_f \subseteq A \times B$ telle que

$$\forall a \in A \quad \forall b, c \in B \qquad a \, R_f \, b \text{ et } a \, R_f \, c \Longrightarrow b = c$$

Illustration







Fonction (relation fonctionnelle)

$R_f \subseteq A \times B$ telle que

$$\forall a \in A \quad \forall b, c \in B \qquad a \; R_f \; b \text{ et } a \; R_f \; c \Longrightarrow b = c$$

Exemples

$A := \{a, b, c\}$ et $B := \{1, 2, 3\}$

1. $R_1 := \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ relation fonctionnelle sur $A \times B$
2. $R_2 := \{(a, 1), (b, 1), (c, 3)\}$ relation fonctionnelle sur $A \times B$
3. $R_3 := \{(a, 1), (b, 2)\}$ relation fonctionnelle sur $A \times B$
4. $R_4 := \{(a, 1), \boldsymbol{(b, 2)}, \boldsymbol{(b, 3)}\}$ pas fonctionnelle

Fonctions

Définitions

Fonction (relation fonctionnelle)

$R_f \subseteq A \times B$ telle que

$$\forall a \in A \quad \forall b, c \in B \qquad a \; R_f \; b \text{ et } a \; R_f \; c \implies b = c$$

Notation / vocabulaire

- R_f **graphe** de la fonction f
- $f : A \to B \quad :\Leftrightarrow \quad R_f \subseteq A \times B$
- $f(a) = b \quad :\Leftrightarrow \quad a \; R_f \; b$
- $f(a)$ désigne l'unique $b \in B$ tel que $f(a) = b$
- b **image** de a par f
- a **antécédent** de b par f

Fonctions

Définitions

Soit $f : A \to B$

Domaine de f

$$\mathrm{Dom}(f) := \{a \in A \mid \exists b \in B \quad f(a) = b\}$$

Image de f

$$\mathrm{Im}(f) := \{b \in B \mid \exists a \in A \quad f(a) = b\}$$

Exemples

$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{x} \qquad f_2 : x \mapsto x^2 \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{x}$$

Fonctions

Définitions

Soit $f : A \to B$

Domaine de f

$$\mathrm{Dom}(f) := \{a \in A \mid \exists b \in B \quad f(a) = b\}$$

Image de f

$$\mathrm{Im}(f) := \{b \in B \mid \exists a \in A \quad f(a) = b\}$$

Exemples

$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$	$f_2 : x \mapsto x^2$	$f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$\mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R}^+$	$\mathrm{Dom}(f_2) = \mathbb{R}$	$\mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathrm{Im}(f_1) = \mathbb{R}^+$	$\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{R}^+$	$\mathrm{Im}(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Fonctions

Définitions

Soit $f : A \to B$

f totale / application

$$\mathrm{Dom}(f) = A \qquad \text{i.e.} \qquad \forall a \in A\ \exists b \in B \quad f(a) = b$$

B^A ensemble des applications de A dans B

Exemples

$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{x} \qquad f_2 : x \mapsto x^2 \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R}^+ \qquad \mathrm{Dom}(f_2) = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Fonctions

Définitions

Soit $f : A \to B$

f totale / application

$$\mathrm{Dom}(f) = A \qquad \text{i.e.} \qquad \forall a \in A\ \exists b \in B \quad f(a) = b$$

B^A ensemble des applications de A dans B

Exemples

$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$	$f_2 : x \mapsto x^2$	$f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$\mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R}^+$	$\mathrm{Dom}(f_2) = \mathbb{R}$	$\mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- f_2 totale ; f_2 application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R}^+$)
- f_1, f_3 pas totales

Fonctions

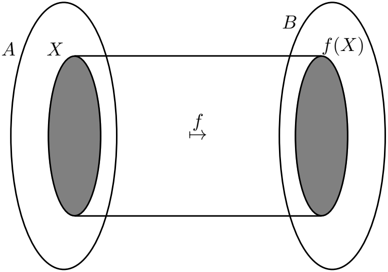
Définitions

Soit $f : A \to B, \quad X \subseteq A$

Image d'un ensemble

$$f(X) := \{b \in B \mid \exists a \in X \quad f(a) = b\}$$

Intuition



Exemple

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3([0;1]) &= [1;+\infty[\\ f_3([1;+\infty[) &=]0;1] \end{aligned}$$

Fonctions

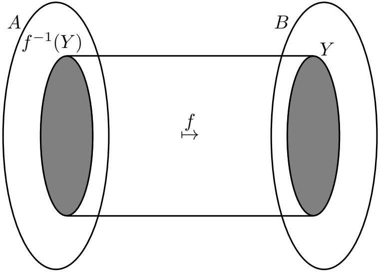
Définitions

Soit $f : A \to B, \quad Y \subseteq B$

Antécédent d'un ensemble

$$f^{-1}(Y) := \{a \in A \mid \exists b \in Y \quad f(a) = b\}$$

Intuition



Exemple

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2^{-1}([0;1]) &= [-1;1] \\ f_2^{-1}([1;+\infty[) &=]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\end{aligned}$$

Fonctions

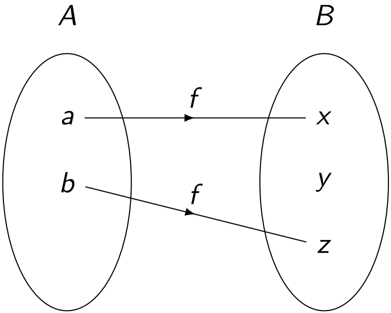
Définitions

Soit $f : A \to B$ application

Injection / surjection / bijection

- f injective : (*one-to-one*)

$$\forall a, b \in A \quad f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad a = b$$



Fonctions

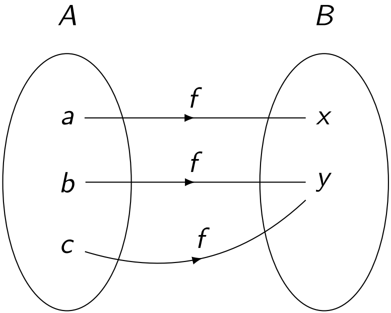
Définitions

Soit $f : A \to B$ application

Injection / surjection / bijection

- f surjective : (*onto*)

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad f(a) = b$$

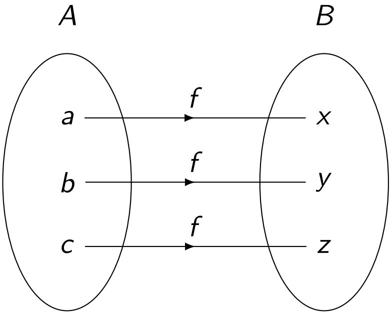


Soit $f : A \to B$ application

Injection / surjection / bijection

- f bijective : f injective et surjective

$$\forall b \in B \quad \exists! a \in A \quad f(a) = b$$



Ensemble fini

E fini :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \exists f : [\![1, n]\!] \to E \quad f \text{ bijective}$$

Cardinal fini

un tel n est alors le cardinal de E, notations :

$$n = |E| = Card(E) = \#E$$

Intuition

f compte les éléments de E

$$E = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$$

Fonctions

Cardinaux

Soient A et B des ensembles finis

Propriétés

- $|\emptyset| = 0$
- si $A \cap B = \emptyset$ alors $|A \cup B| = |A| + |B|$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \times B| = |A| \times |B|$
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

- $|A| = |B| \quad \Leftrightarrow \quad \exists f : A \to B$ bijective
- $|A| \leq |B| \quad \Leftrightarrow \quad \exists f : A \to B$ injective
- $|A| \geq |B| \quad \Leftrightarrow \quad \exists f : A \to B$ surjective

Ensemble infini

E infini :

$$\exists F \subset E \quad \exists f : E \to F \quad f \text{ injective}$$

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to P \quad \text{avec } P \text{ les entiers naturels pairs} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

$f : \mathbb{N} \to P$ injective avec $P \subset \mathbb{N}$ donc $\mathbb{N}$ infini

Fonctions

Cardinaux

Soient A, B ensembles infinis

Comparaison cardinaux infinis

- $|A| = |B| \quad :\Leftrightarrow \quad \exists f : A \to B$ bijective
- $|A| \leq |B| \quad :\Leftrightarrow \quad \exists f : A \to B$ injective
- $|A| \geq |B| \quad :\Leftrightarrow \quad \exists f : A \to B$ surjective

- A dénombrable $\quad :\Leftrightarrow \quad |A| = |\mathbb{N}|$

Théorème de Cantor-Bernstein

$$|A| \leq |B| \text{ et } |A| \geq |B| \quad \Rightarrow \quad |A| = |B|$$

Propriété : $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$: Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto n \end{aligned}$$

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $f(a) = f(b)$. Par définition de f on a alors $a = b$. Donc f est injective.

Propriété : $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$: Supposons $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$, i.e. on a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijection.
On note x_i la i^{e} décimale de $x \in \mathbb{R}$ (la 0^{e} est la partie entière).

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \mapsto & \boxed{f(0)_0} & , & f(0)_1 & f(0)_2 & \dots \\
1 & \mapsto & f(1)_0 & , & \boxed{f(1)_1} & f(1)_2 & \dots \\
2 & \mapsto & f(2)_0 & , & f(2)_1 & \boxed{f(2)_2} & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

On construit $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$r_i := f(i)_i + 1 \mod 10$$

Propriété : $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$: Supposons $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$, i.e. on a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijection.
On note x_i la i^{e} décimale de $x \in \mathbb{R}$ (la 0^{e} est la partie entière).
On construit $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$r_i := f(i)_i + 1 \mod 10$$

Comme $r \in \mathbb{R}$ on a $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(k) = r$. Or

$$\begin{aligned} r_k &= f(k)_k + 1 \mod 10 \\ &= r_k + 1 \mod 10 \end{aligned}$$

ce qui est impossible ! $\square$