CHAPITRE 2
CALCUL MATRICIEL

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et m, n, p, q, r désignent des entiers naturels.

1. Matrices

Définition 1.1. — *On appelle matrice de type (n, p) ou à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Une telle matrice est généralement représentée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Le terme $a_{i,j}$ est appelé coefficient d'indice (i,j) de la matrice A, il est positionné à l'intersection de la i-ième ligne et j-ième colonne.

Dans la notation $a_{i,j}$ le 1er indice est toujours l'indice de ligne et le 2nd indice est toujours l'indice de colonne.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples 1.2. — (a) Pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq 4, 1\leq j\leq 3}$ avec $a_{1,1} = 1, \cdots, a_{3,2} = 8, \cdots, a_{4,3} = 12$.

(b) Pour $A = (ij^2)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \cdots & p^2 \\ 2 & 8 & 18 & \cdots & 2p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 4n & 9n & \cdots & np^2 \end{pmatrix}$$

(c) Pour $A = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{1+p} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{2+p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{n+p} \end{pmatrix}$$

(d) La matrice $O_{n,p} = (0)_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée matrice nulle de type (n,p),

$$O_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.3. — *Pour $n = p = 1$, les matrices de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ sont des matrices uni-coefficient. Elle sont de la forme*

$$(a)$$

Il est usuel d'identifier cette matrice et son coefficient $a \in \mathbb{K}$.

Pour n quelconque et $p = 1$, les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices colonnes. Elle sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Il est usuel d'identifier cette matrice au n *uplet* $(a_1, \cdots, a_n)$.

Pour $n = 1$ *et* p *quelconque, les matrices de* $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ *sont appelées matrices lignes. Elle sont de la forme*

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$

Il est usuel d'identifier cette matrice au p *uplet* $(a_1, \cdots, a_p)$.

Définition 1.4. — *Soit* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Pour $1 \leq j \leq p$, *la matrice*

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

est appelée j*-ème colonne de* A.

Pour $1 \leq i \leq n$, *la matrice*

$$L_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$$

est appelée i*-ème ligne de* A.

2. Matrices carrées

Définition 2.1. — *Les matrices de type* (n, n) *sont appelées matrices carrées d'ordre* n. *Elles ont* n *lignes et* n *colonnes.*
On note $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *ou simplement* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble de ces matrices.*

Exemple 2.2. — Pour $A = (\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

***Définition 2.3* (Matrice diagonale).** — *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les coefficients $a_{i,i}$ d'indice (i,i) de A sont appelés coefficients diagonaux de A.*
La famille $(a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n})$ est appelée **diagonale** *de la matrice A.*

Une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **matrice diagonale** *si tous les coefficients hors de la diagonale sont nuls. Une telle matrice est de la forme*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On la note parfois,

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales à n lignes et n colonnes.

***Remarque 2.4*.** — Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \iff \forall 1 \leq i \neq j \leq n,\ a_{i,j} = 0.$$

***Exemple 2.5*.** — On appelle **matrice identité** d'ordre n la matrice

$$I_n = \operatorname{diag}(1, \cdots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Sous forme contractée, elle s'écrit $I_n = (\delta_{i,j})_{1,\leq i,j \leq n}$ où $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$,

***Définition 2.6* (Matrice triangulaire).** — *Une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* **triangulaire supérieure** *si tous les coefficients en dessous de la diagonale sont nuls. Une telle matrice est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **triangulaire inférieure** *si tous les coefficients au dessus de la diagonale sont nuls. Une telle matrice est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrice triangulaires supérieures (resp. inférieures) de type (n,n).

Remarque 2.7. — Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \iff \forall 1 \leq j < i \leq n \; a_{i,j} = 0,$$

$$A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \iff \forall 1 \leq i < j \leq n \; a_{i,j} = 0.$$

La proposition suivante est immédiate d'après les définitions ci-dessus.

Proposition 2.8. — *On a*

$$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$

3. Opérations sur les matrices

3.1. Addition. — Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 3.1. — *On définit la matrice $A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $A+B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, i.e.,*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarque 3.2. — **Attention !** on ne somme que des matrices de même type.

Exemple 3.3. — On a

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+u & e+v & f+w \end{pmatrix}$$

3.2. Multiplication scalaire. — Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 3.4. — *On définit la multiplication scalaire de A par λ par $\lambda A = (\lambda a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, i.e.,*

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple 3.5. — On a

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -b+c \\ -b-c & a-c \end{pmatrix}$$

3.3. Produit de matrices. — Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

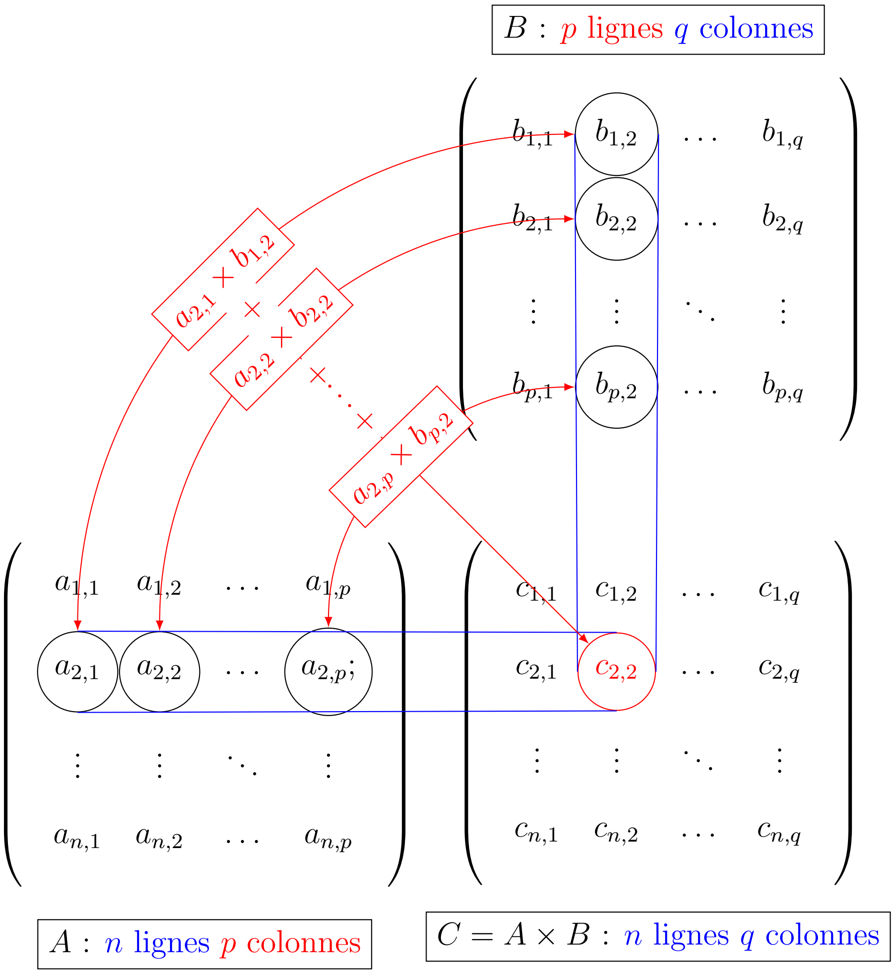
Définition 3.6. — *On définit le matrice produit $C = A \times B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par*

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \forall 1 \leq j \leq q,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarque 3.7. — Pour calculer la matrice C, il est usuel de disposer les matrices comme

$$\begin{matrix} & B \\ A & C \end{matrix}$$

Pour déterminer le coefficient d'indice (i, j) de la matrice C, on repère la $i$ème ligne de A et la $j$ème colonne de B. On peut alors évaluer $c_{i,j}$ en procédant à la somme des produits des coefficients respectifs, voir ci-dessous pour le calcul de $c_{2,2}$,



$$c_{2,2} = a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} + \cdots + a_{2,p}b_{p,2}$$

Attention. Pour que cette multiplication soit possible, il est nécessaire que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. On peut alors retenir la règle

$$\text{type } (n, p) \times \text{type } (p, q) = \text{type } (n, q).$$

Exemple 3.8. — (a) Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$A \times B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Pour

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

on obtient

$$A \times X = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$$

Remarque 3.9. — En général $AB \neq BA$ (lorsqu'il est possible de calculer les deux produits), par exemple Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mais } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cependant la matrice identité I_n commute à toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $I_N \times A = A \times I_n$ (voir ci-après).

Proposition 3.10. — *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}, B \in \mathcal{M}_{p,q}$ *et* $C \in \mathcal{M}_{q,r}$, *alors*

$$(AB)C = A(BC).$$

Démonstration. — Notons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{j,k})$ et $C = (c_{k,\ell})$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq k \leq q$ et $1 \leq \ell \leq r$. Posons $D = AB = (d_{i,k})$

et $E = (AB)C = DC = (e_{i,\ell})$. On a alors

$$\begin{aligned} d_{i,k} &= \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} \\ e_{i,\ell} &= \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} c_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} c_{k,\ell} \end{aligned}$$

Posons aussi $F = BC = (f_{j,\ell})$ et $G = A(BC) = AF = (g_{i,\ell})$. On a alors

$$\begin{aligned} f_{j,\ell} &= \sum_{k=1}^{q} b_{j,k} c_{k,\ell} \\ g_{i,\ell} &= \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} f_{j,\ell} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{i,j} b_{j,k} c_{k,\ell} \end{aligned}$$

En réorganisant l'ordre des sommes, on obtient $g_{i,\ell} = e_{i,\ell}$ pour tout i, ℓ. □

Proposition 3.11. — *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}$,*

$$AI_p = A \quad \text{et } I_n A = A.$$

Démonstration. — Notons $A = (a_{i,j})$. Le produit AI_p est possible, notons $AI_p = (b_{i,j})$. On a

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \delta_{k,j} = a_{i,j}.$$

Donc $AI_p = A$. On montre de même que $I_n A = A$. □

Proposition 3.12. — *On a*
$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\forall C \in \mathcal{M}_{p,q}$, $(A + B)C = AC + BC$.
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}$, $A(B + C) = AB + AC$.

Démonstration. — Posons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $C = (c_{j,k}) \in \mathcal{M}_{p,q}$ On a

$$\begin{aligned}
(A+B)C &= \left(\sum_{j=1}^{p}(a_{i,j}+b_{i,j})c_{j,k}\right)_{i,k} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}c_{j,k}+b_{i,j}c_{j,k}\right)_{i,k} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}c_{j,k}\right)_{i,k} + \left(\sum_{j=1}^{p} b_{i,j}c_{j,k}\right)_{i,k} \\
&= AC+BC
\end{aligned}$$

On montre de même l'autre égalité. □

Proposition 3.13. — *On a*
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda \cdot A)B = \lambda \cdot (AB) = A(\lambda \cdot B)$.

Démonstration. — Calcul direct, à faire. □

Définition 3.14. — *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ et $\forall k \geq 1$, $A^k = A^{k-1}A$ $(= A \times A \times \cdots \times A$, k termes).*

Exemple 3.15. — Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et par récurrence, on montre que tout $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.16. — Attention : si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors en général

$$(AB)^2 \neq A^2B^2\ ,\ (A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2.$$

Mais on a

$$(AB)^2 = (AB)(AB),\ \ (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2.$$

Théorème 3.17. — *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent (i.e. $AB = BA$) alors pour tout $m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}
(AB)^m &= A^m B^m \\
(A+B)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} \quad \textit{formule du binôme de Newton} \\
A^m - B^m &= (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}
\end{aligned}$$

Démonstration. — Montrons par récurrence sur m la formule du binôme de Newton. Soit $\mathcal{H}(m)$ la proposition

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

Au rang $m = 0$, les deux membres de l'égalité sont égaux à la même matrice : I_n.
Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que la proposition $\mathcal{H}(m)$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}
& (A+B)^{m+1} = (A+B)^m (A+B) \\
= & \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} \right) (A+B) \\
= & \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} A + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} B \\
= & \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{k+1} B^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k+1}; \quad \text{car } AB = BA \\
= & \sum_{k'=1}^{m+1} \binom{m}{k'-1} A^{k'} B^{m-k'+1} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k+1} \quad k' := k+1 \\
= & \binom{m}{m} A^{m+1} B^0 + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] A^k B^{m+1-k} + \binom{m}{0} A^0 B^{m+1}
\end{aligned}$$

Or

$$\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}$$

$$\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1, \quad \binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = 1$$

donc

$$\begin{aligned}(A+B)^{m+1} &= \binom{m+1}{m+1}A^{m+1}B^0+\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}A^kB^{m+1-k}+\binom{m+1}{0}A^0B^{m+1}\\ &= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}A^kB^{m+1-k}\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{H}(m+1)$.

On peut aussi montrer les deux autres formules par récurrence. $\square$

Remarque 3.18. — Soit $n \geq 2$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'égalité $AB = O_n$ n'implique pas que $A = O_n$ ou $B = O_n$. En conséqunce, l'équation $A^2 = I_2$ possède dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'autres solutions que les matrices I_2 et $-I_2$ comme par exemple

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \dots$$

Définition 3.19. — *On dit q'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = O_n$.*

Exemple 3.20. — La matrice

$$B = \begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

est nilpotente.
En effet,

$$B^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & ac\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ et } B^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Plus généralement, on peut montrer que n'importe quelle matrice carrée triangulaire supérieure de diagonale nulle est nilpotente.

***Exemple 3.21* (Puissances d'une matrice triangulaire)**

Calculons les puissances de

$$A = \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On peut écrire $A = I_3 + B$ où B est la matrice de l'exemple précédent,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a la valeur de B^2 et on sait que $\forall k \geq 3$, $B^k = O_3$, donc d'après la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} A^m = (B + I_3)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B^k I_3^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{m}{k} B^k \\ &= \binom{m}{0} B^0 + \binom{m}{1} B^1 + \binom{m}{2} B^2 \\ &= I_3 + mB + \frac{m(m+1)}{2} B^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} A^m &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ma & mb \\ 0 & 0 & mc \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{m(m+1)}{2} ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & ma & mb + \frac{m(m+1)}{2} ac \\ 0 & 1 & mc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Inverse d'une matrice carrée

Définition 4.1. — *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* **inversible** *s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$AB = BA = I_n$$

Cette matrice B est alors unique, c'est l' **inverse** *de A et elle sera notée A^{-1}.*

Exemple 4.2. — La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

Proposition 4.3. — *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

(a) Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(b) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration. — (a) On a $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$. On montre de même que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. Donc AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(b) On a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, donc A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$. □

Définition 4.4. — *On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'après la proposition précédente, l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par le produit et par passage à l'inverse. On dira que $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un* **groupe** *appelé* **groupe linéaire***.*

Théorème 4.5. — *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a équivalence entre*
(a) A est inversible;
(b) A est inversible à droite, i.e. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$;
(c) A est inversible à gauche, i.e. $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_n$.
De plus, si tel est le cas, $B = C = A^{-1}$.

Démonstration. — (a)⇒(b) et (a)⇒(c) sont immédiats.

(b)⇒(a) Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ et soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application définie par $\varphi(M) = MA$. L'application φ est surjective (on reviendra sur cette démonstration au chapitre 3).

Par surjectivité, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_n$ et alors $CAB = B$ d'où $C = B$ car $AB = I_n$. Finalement $AB = BA = I_n$ et donc A est inversible d'inverse B.

(c)⇒(a) s'obtient de façon semblable en considérons l'application $\psi : M \mapsto AM$. □

Exemple 4.6. — Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $A^2 - 5A = 2I_2$, d'où

$$A\left(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2\right) = I_2.$$

Donc la matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2$.

Proposition 4.7. — *Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
Si pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $AX = BX$ alors $A = B$.

Démonstration. — Supposons $AX = BX$ pour tout vecteur (matrice colonne) $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Pour $X = E_j$ colonne élémentaire, où

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

le produit AE_j est égale à la $j$ème colonne de A. Or par hypothèse $AE_j = BE_j$, donc les $j$ème colonnes de A et B sont égales et ceci pour tout $1 \leq j \leq p$. Par conséquent $A = B$. $\square$

Application. Pour établir l'inversibilité et calculer l'inverse de $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on introduit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et } Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} y_1 & = & a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n \\ \vdots & & & & & & \\ y_n & = & a_{n,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n \end{array} \right.$$

Si cela est possible, on résout ce système linéaire en les inconnues $x_1, \cdots, x_n$ et on obtient

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} x_1 & = & b_{1,1}y_1 & + & \cdots & + & b_{1,n}y_n \\ \vdots & & & & & & \\ x_n & = & b_{n,1}y_1 & + & \cdots & + & b_{n,n}y_n \end{array} \right.$$

Soit B la matrice dont les coefficients apparaissent dans ce système, i.e., $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le système précédent donne $X = BY$ et ainsi $X = BAX$ et ceci pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. D'après la proposition précédente, on peut affirmer que $BA = I_n$ et par conséquent A est inversible et son inverse est $A^{-1} = B$.

Si on ne parvient pas à résoudre le système, c'est que la matrice A n'est pas inversible.

Exemple 4.8. — Etudions l'inversibilité de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = AX$$

On a

$$\begin{cases} y_1 = x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

En résolvant le système on trouve

$$\begin{cases} x_1 = (-y_1 + y_2 + y_3)/2 \\ x_2 = (y_1 - y_2 + y_3)/2 \\ x_3 = (y_1 + y_2 - y_3)/2 \end{cases}$$

On en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans la pratique on accole la matrice identité à notre matrice : inscrivez sur votre feuille la matrice de départ A sans l'accolade de droite, tirez un trait vertical à droite de celle-ci, inscrivez la matrice identité et fermez l'accolade. Vous obtenez alors une sorte de matrice à trois rangées et six colonnes (matrice augmentée). Appliquez l'algorithme de Gauss. Votre but est d'obtenir la matrice identité dans la partie gauche de la matrice augmentée. Toutes les opérations que vous ferez à gauche, vous devrez les faire à droite, c'est-à-dire dans la matrice identité. Continuez ainsi jusqu'à obtenir la matrice identité à gauche. Quand cela sera fait, la matrice à droite du trait vertical sera la matrice inverse recherchée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Maintenant pour obtenir la matrice identité à gauche, nous allons permuter la première et la deuxième ligne de la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 4.9. — *Pour*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{K})$$

On a équivalence entre

(a) A est inversible;

(b) $\forall 1 \leq i \leq n,\ a_i \neq 0$.

De plus si tel est le cas,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — (b) $\Rightarrow$ (a) par contraposée :
Supposons qu'il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $a_i = 0$. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la $i$ème colonne du produit AB est nulle car la $i$ème ligne

de A est nulle. Ainsi, il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = I_n$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Supposons que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_i \neq 0$ Posons

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

On a $AB = I_n$ donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

□

5. Transposition

Définition 5.1. — *On appelle matrice transposée de $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $A^T = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par*

$$\forall 1 \leq i \leq p, \forall 1 \leq j \leq n,\ b_{i,j} = a_{j,i}$$

Ainsi, la ième ligne de B est égale à la ième colonne de A (ou la $j$ème colonne de B est égale à la $j$ème ligne de A),

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad et \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

La transposée de A est également notée parfois ${}^tA$, A^t ou A'.

Exemple 5.2. — Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

on a

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

on a

$$X^T = \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_n \end{pmatrix}$$

Les propriétés suivantes sont faciles à établir.

Proposition 5.3. — *On a*

(a) Pour tout $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^T)^T = A$;

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T$;

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$;

(d) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est inversible, alors* A^T *est inversible et* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

6. Calcul du rang d'une matrice - première approche

Définition 6.1. — *Soit* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}$. *On appelle* **rang** *de* A, *le nombre de pivots trouvés à l'issu de l'application de l'algorithme de Gauss à* A. *On notera ce nombre* $\operatorname{rang}(A)$,

$$\operatorname{rang}(A) = \textit{nombre de pivots de } A.$$

Etudions cela sur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Proposition 6.2. — *Une matrice carrée* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est inversible si, et seulement si,* $\operatorname{rang}(A) = n$.

Démonstration. — Ce résultat sera démontré au chapitre 6. □

---

version 1, February 3, 2022