Chapitre 7

Calcul des primitives et des intégrales - Partie II

Dans cette seconde partie du chapitre "Calculs et des primitives et des intégrales", nous allons introduire une nouvelle technique qui nous permettra de calculer de nombreuses primitives et intégrales. Il s'agit d'une technique très puissante appelée **changement de variable**.

Cette technique du changement repose simplement sur la formule de dérivation d'une fonction composée.
Rappel : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $y : I \to J$ continument dérivable sur I, $f : J \to \mathbb{R}$ continue sur J et F une primitive de f sur J. Alors la fonction $F \circ y$ est dérivable sur I et

$$\forall\, x \in\, I, \quad (F \circ y)'(x) = (F' \circ y)(x)y'(x) = (f \circ y)(x)y'(x) = f(y(x))y'(x).$$

Nous pouvons alors en déduire directement le résultat suivant :

Théorème
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $y : I \to J$ continument dérivable sur I, $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Alors

$$\int f(y(x))y'(x)dx = F(y(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

où F est une primitive de f sur J

Définition
Soit f une fonction dérivable en un point x. On appelle différentielle de f au point x l'application linéaire $dx \mapsto f'(x)dx$. On note alors $df = f'(x)dx$.

Cette notion nous permet de retrouver très facilement le résultat précédent. En effet, comme $dy = y'(x)dx$, nous avons alors

$$\int f(y(x))y'(x)dx = \int f(y)dy;$$

Nous retrouvons ainsi facilement le lien entre une primitive de $x \mapsto f(y(x))y'(x)$ et une primitive de $y \mapsto f(y)$.
On notera, que la fonction f n'est plus vue ici comme une fonction de la variable x, mais comme une fonction de la variable y. Nous avons fait un **changement de variable**!

Dans le cas d'une intégrale définie, nous avons :

Théorème
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $y : I \to J$ continument dérivable sur I, $f : J \to \mathbb{R}$ continue sur I.
Alors $\forall\ (a,b) \in I^2$

$$\int_a^b f(y(x))y'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(y)dy$$

avec $\alpha = y(a)$ et $\beta = y(b)$.

Démonstration
La fonction f est continue sur J donc admet une primitive F sur J et nous avons vu que $F \circ y$ est une primitive de $(f \circ y)y'$ sur I. Nous avons alors

$$\int_a^b f(y(x))y'(x)dx = (F \circ y)(b) - (F \circ y)(a) = F(y(b)) - F(y(a)) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Or nous avons aussi

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha).$$

Il y a deux utilisations possibles pour ces résultats et la technique du changement de variable.

7.1 Une première utilisation de ces résultats

Si la primitive recherchée se présente sous la forme $(f \circ y)y'$, un changement de variable va nous permettre "d'isoler" le calcul d'une primitive de f.

Technique du changement de variable (version 1)

Dans la pratique,

- *Nous posons le changement de variable :* $y = y(x)$.
- *Nous calculons ensuite la différentielle de* y *:* $dy = y'(x)dx$.
- *Nous remplaçons l'expression de* $y(x)$ *par* y *et de* $y'(x)dx$ *par* dy.
- *Dans le cas de la recherche d'une primitive, nous déterminons une primitive de la fonction de la variable* y *obtenue, puis nous n'oublions pas de revenir à la variable initiale* x.
- *Dans le cas d'une intégrale définie, nous n'oublions pas de modifier les bornes de l'intégrale et nous calculons la nouvelle intégrale obtenue.*

Exemple 1

Déterminer une primitive de $x \mapsto (x^2+1)^5 x$ sur $\mathbb{R}$.

Nous avons

$$\int (x^2+1)^5 x dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^5 (2x) dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^5 (x^2+1)' dx.$$

Dans cet exemple, nous avons $f : x \mapsto x^5$ et $y : x \mapsto x^2+1$. Une primitive de f est $F : x \mapsto \frac{x^6}{6}$, nous pouvons alors en déduire que

$$\int (x^2+1)^5 x dx = \frac{(x^2+1)^6}{12} + C.$$

Avec un changement de variable, nous allons pouvoir faire apparaitre plus facilement la fonction f pour laquelle nous devons déterminer une primitive.

- Dans cet exemple, le changement de variable adapté est donc $y = y(x) = x^2+1$.
- Nous avons alors $y'(x) = 2x$, et donc $dy = 2xdx$.
- En remplaçant (x^2+1) par y **et** $2xdx$ par dy, nous obtenons :

$$\int (x^2+1)^5 x dx = \frac{1}{2}\int y^5 dy$$

- Il nous reste donc à déterminer une primitive de la fonction qui apparait

$$\int (x^2+1)^5 x dx = \frac{1}{2}\int y^5 dy = \frac{y^6}{12} + C,$$

puis à revenir à la variable initiale

$$\int (x^2+1)^5 x dx = \frac{(x^2+1)^6}{12} + C.$$

Exemple 2

Déterminer une primitive de $x \mapsto \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)}$.

- On effectue le changement de variable $y = \sin(x)$.
- Par conséquent, nous avons $\cos(x)dx = dy$
- Nous avons donc

$$\int \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)}dx = \int \sin(x)e^{\sin(x)}\cos(x)dx = \int ye^y dy.$$

- Nous sommes ainsi ramenés à la recherche d'une primitive de la fonction $y \mapsto ye^y$. Pour cela nous pouvons utiliser des techniques déjà vues, par exemple ici nous allons utiliser une intégration par parties. Nous obtenons ainsi :

$$\int \sin(x)e^{\sin(x)}\cos(x)dx = \int ye^y dy = (y-1)e^y + C = (\sin(x)-1)e^{\sin(x)} + C.$$

Remarque

Dans le premier exemple, un changement de variable n'est pas nécessaire pour déterminer une primitive de la fonction donnée, la fonction f ayant une primitive évidente.
En revanche dans le second exemple, nous voyons que le changement de variable nous a permis de transformer notre problème en une recherche d'une primitive pour la fonction f, recherche pour laquelle nous avons pu utiliser d'autres techniques de calcul des primitives.

Exemple 3

Calculer

$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)}dx.$$

- Nous effectuons le changement de variable $y = \sin(x)$.
- Par conséquent, nous avons $\cos(x)dx = dy$
- Lorsque la variable x varie de 0 à $\frac{3\pi}{2}$, la variable y varie de $\sin(0) = 0$ à $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$.
- Nous avons donc

$$I = \int_0^{-1} ye^y dy = -\int_{-1}^{0} ye^y dy$$

- Nous pouvons alors calculer cette dernière intégrale à l'aide d'une intégration par parties. Nous obtenons finalement :

$$I = -\int_{-1}^{0} ye^y dy = -\left[ye^y\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^y dy = -e^{-1} + \left[e^y\right]_{-1}^{0} = 1 - 2e^{-1}.$$

Remarque

Pour le calcul d'une intégrale définie, il n'est pas nécessaire de revenir à la variable initiale x.
Le changement des bornes d'intégration permet le calcul direct de la nouvelle intégrale.

7.2 Une seconde utilisation de ces résultats

Dans certains cas, pour déterminer une primitive de $t \mapsto f(t)$, il est possible d'effectuer un changement de variable $t = y(x)$.
Si le changement de variable a été choisi de façon judicieuse, nous sommes alors ramenés à la recherche d'une primitive de la fonction $x \to f(\varphi(x))\varphi'(x)$ pour laquelle, les apparences sont parfois trompeuses, la recherche sera plus aisée !
Attention, pour cette utilisation il est nécessaire que la fonction y soit bijective. En effet, nous aurons besoin de sa fonction réciproque y^{-1} pour revenir en fin de calcul à la variable initiale t.
Ceci nous permettra aussi, dans le cas d'une intégrale définie de modifier les bornes puisque :

$$\forall\ (\alpha, \beta) \in J^2, \quad \int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_{y^{-1}(\alpha)}^{y^{-1}(\beta)} f(y(x))y'(x)dx.$$

Technique du changement de variable (version 2)
Dans la pratique,

- *Nous posons le changement de variable : $t = y(x)$, soit encore $x = y^{-1}(t)$.*
- *Nous calculons ensuite la différentielle de t : $dt = y'(x)dx$.*
- *Nous remplaçons t par $y(x)$ et dt par $y'(x)dx$.*
- *Dans le cas de la recherche d'une primitive, nous déterminons une primitive de la fonction de la variable x obtenue, puis nous n'oublions pas de revenir à la variable initiale t.*
- *Dans le cas d'une intégrale définie, nous n'oublions pas de modifier les bornes de l'intégrale et nous calculons la nouvelle intégrale obtenue.*

Exemple 4
Déterminer une primitive de $t \to \sqrt{1-t^2}$ sur $I = [-1, 1]$.

- Nous effectuons le changement de variable $t = \sin(x)$. Nous avons bien une bijection de $I = [-1, 1]$ sur $J = [-\pi/2, \pi/2]$ et nous avons aussi $x = \arcsin(t)$.
- Nous avons $dt = \cos(x)dx$.
- Par conséquent

$$\int \sqrt{1-t^2}dt = \int \sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)dx = \int |\cos(x)|\cos(x)dx = \int \cos^2(x)dx.$$

- Pour déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^2(x)$, nous pouvons maintenant utiliser une technique de linéarisation déjà vue précédemment

$$\int \sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\int (\cos(2x)+1)dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2} + C.$$

- Il nous reste maintenant à revenir à la variable initiale :

$$\int \sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{x}{2} + C = \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{\arcsin(t)}{2} + C$$

Remarque

Nous pouvons remarquer avec cet exemple que la dernière étape qui permet de revenir à la variable initiale peut parfois être délicate (laborieuse).

Remarque

Le terme "dt" dans les intégrales prend ici toute son importance ! Si vous l'oubliez, il est très probable que vous oubliiez le terme "$y'(x)dx$" et votre changement de variable sera faux !

Exemple 5

Calculer

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt$$

Pour calculer cette intégrale, nous pouvons reprendre une primitive déterminée dans l'exemple précédent. Nous obtenons alors :

$$I = \left[\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{\arcsin t}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Néanmoins, comme nous l'avons déjà remarqué dans l'exemple 4, le retour à la variable initiale n'est pas toujours aisé.

Toutefois, si la modification des bornes est bien faite avec le changement de variable, cette étape n'est pas nécessaire lorsque nous souhaitons calculer une intégrale.

- Nous posons $t = \sin(x)$, soit $x = \arcsin(t)$.
- Nous avons $dt = \cos(x)dx$.
- Lorsque la variable t varie de -1 à 1, la variable x varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$.
- Nous avons ainsi

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2x)+1)dx = \left[\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque

Le changement des bornes dans l'intégrale nous a permis d'éviter l'étape parfois délicate du retour à la variable initiale.