Feuille d'exercice 4

Exercice 1 – 1. $\mathfrak{D} = \{a, b\}$

Base de Herbrand : $P(a), P(b), Q(a), Q(b)$ 2^4 interprétation

$\{P(a) \wedge Q(a) \wedge (\neg P(a) \vee Q(b)), P(b) \wedge Q(b) \wedge (\neg P(a) \vee Q(b))\}$

Or ces deux formules ne peuvent pas être vrai en même temps donc la formule est insatisfiable

2. $\mathfrak{D} = \{a, b\}$
   Base de Herbrand : $P(a), P(b), Q(a), Q(b)$
   $\{(P(a) \vee Q(a)) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(b), (P(b) \vee Q(b)) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(b)\}$
   Satisfiable si $P(a) = F, P(b) = V, Q(a) = V, Q(b) = F$
3. Signature : f arité 1, on ajoute une constant a
   $\mathfrak{D} = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots, f(\ldots f(a))\}$
   Base de Herbrand : $P(a), P(f(a)), \ldots, P(f^n(a))$
   $\big\{P(a), \wedge\neg P(f(a)), P(f(a)) \wedge \neg P(f^2(a)), \ldots\big\}$
   insatisfiable car si $P(a) \wedge \neg P(f(a))$ est vrai alors $P(f(a)) \wedge \neg P(f^2(a))$ est faux car $P(f(a)), \neg P(f(a))$ doivent être vrai.
4. Signature : s arrité 1 avec les constante a, b etc
   $\mathfrak{D} = \{a, s(a), \ldots, s^n(a)\}$
   Base de Herbrand : $B = \big\{R(s^k(a), s^l(a)|k, l \in \mathbb{N})\big\}$
   satisfiable : $R_H = \big\{R(S^k(a), s^l(a))|l > k\big\}$

Exercice 2 – Base de Herbrand sur ensembles de formules

1. $\{\forall x, (P(x) \vee Q(x) \vee R(x)); \neg P(a); \neg Q(b); \neg R(c)\}$
   Signature $= \{a, b, c\}$
   $\mathfrak{D} = \{a, b, c\}$
   Base de Herbrand : $P(a), P(b), P(c), Q(a), Q(b), Q(c), R(a), R(b), R(c)$
   $\{(P(a) \vee Q(a) \vee R(a)), (P(b) \vee Q(b) \vee R(b)), (P(c) \vee Q(c) \vee R(c)), \neg P(a), \neg Q(b), \neg R(c)\}$
   Satsifiable si $P(b) = V, Q(c) = V, R(a) = V$
2. $\{\forall x, P(x); \forall x, \neg Q(x); \forall x, (\neg P(f(x)) \vee Q(f(x)))\}$
   Signature $= f$ d'arrité 1 et une constant a
   $\mathfrak{D} = \{a, f(a), \ldots, f(\ldots f(a))\}$
   $\big\{P(f^n(a)); \neg Q(f^n(a)); \neg P(f^{n+1}(a)) \vee Q(f^{n+1}(a))|n \in \mathbb{N}\big\}$

Exercice 3 – Ocaml

```
let rec clauseb = function
    | Var n -> true
    | Bot -> true
    | Top -> true
    | Neg f -> (match f with
                |Var n -> True
                | _ -> false)
    | Bin(f, Or, g) -> clauseb f && clause g
    | Bin(f, Et, g) -> false
    | Bin(f, Impl, g) -> false
```

```
let rec fncb = function
    | Var n -> true
    | Bot -> true
    | Top -> true
    | Neg f -> clauseb (Neg f)
    | Bin(f, Or, g) ->
      clauseb f && clauseb g
    | Bin(f, Et, g) ->
      fncb f && fncb g
    | Bin(f, Impl, g) -> false
```

Exercice 4 – Formes normales

1. $p \wedge q$ forme normale conjonctive et disjonctives
2. $p \vee \neg q$ clauses, forme normale conjonctive et disjonctives
3. $\neg(p \vee q)$ rien
4. $p \wedge q \vee r$ forme normale disjonctives

Exercice 5 – Formes normales à partir d'une table de vérité

P :

FNC : $(\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$

FND : $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$

$\equiv c \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$

$\equiv c \vee (\neg a \wedge \neg b)$

Exercice 6 – Formes normales

1. (a)

$$\begin{aligned}
(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \Rightarrow (r \vee s) &\equiv \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (r \vee s) \\
&\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee r \vee s && \text{FND} \\
&\equiv (p \vee r \vee s) \wedge (q \vee r \vee s) \wedge (\neg r \vee r \vee s) \\
&\equiv (p \vee r \vee s) \wedge (q \vee r \vee s) && \text{FNC}
\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}
p \Rightarrow ((\neg q \vee r) \Rightarrow s) &\equiv \neg p \vee (\neg(\neg q \vee r) \vee s) \\
&\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee s && \text{FNC} \\
&\equiv (\neg p \vee q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) && \text{FND}
\end{aligned}$$

   (c)

   (d) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \wedge \neg(q \Rightarrow p)$

2. (a) Vrai : r

   (b) Vrai : s

3. — Oui, si il n'y a que des et ou que de ou
   — Non, on peut factoriser certaines clauses
   —