Chapitre 2

# Rappels et compléments sur l'étude d'une fonction

## 2.1 Rappels sur la continuité

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $a$ un point de $I$.

**Définition**

- *La fonction $f$ est dite* ***continue au point a*** *si et seulement si elle admet une limite en ce point et cette limite est $f(a)$ :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

- *On dit qu'une fonction $f$ est* ***continue sur I*** *si et seulement si elle est continue en tout point $a$ de $I$.*

**À noter**

La notion de continuité d'une fonction $f$ a pour objet de traduire mathématiquement le fait que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ peut se tracer sans "lever le crayon".

**Exemples**

Les fonctions usuelles suivantes sont continues sur tout intervalle où elles sont définies : les fonctions **polynômes**, les fonctions **rationnelles**, la fonction **valeur absolue**, la fonction **sinus**, la fonction **cosinus**.

**Proposition**

*Si $u$ et $v$ sont deux fonctions continues sur $I$ alors $u+v$, $u \times v$ et $u^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sont continues sur $I$ et $\frac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.*

## 2.2 Rappels sur la dérivabilité

**Définition**

- *On dit qu'une fonction $f$ est **dérivable en $a$** si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisées :*
  - *le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite quand $h$ tend vers 0.*
  - *le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite quand $x$ tend vers $a$.*
- *Cette limite est appelée **nombre dérivé de $f$ en $a$** et notée $\boldsymbol{f'(a)}$.*

**Définition**

- *On dit qu'une fonction $f$ est **dérivable sur un intervalle $I$** si et seulement si elle dérivable en tout point de $I$ .*
  *La fonction qui à tout point $a$ de $I$ associe le nombre dérivé de $f$ en $a$ sera appelée **fonction dérivée de $f$**, notée $\boldsymbol{f'}$.*
- *Si la fonction $f'$ est elle même dérivable sur $I$, la dérivée de $f'$ est appelée la **dérivée seconde de $f$** et notée $\boldsymbol{f''}$.*
- *Si la fonction $f''$ est elle même dérivable sur $I$, la dérivée de $f''$ est appelée la **dérivée troisième de $f$** et notée $\boldsymbol{f'''}$ ou $\boldsymbol{f^{(3)}}$*
  *et ainsi de suite*
- *Supposons que $f$ possède une dérivée (k-1)-ième $f^{(k-1)}$ où $k$ est un entier, $k \geq 2$. Si $f^{(k-1)}$ est dérivable, alors sa dérivée est appelée **dérivée k-ième de $f$** et notée $\boldsymbol{f^{(k)}}$ et on a*

$$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'.$$

Une fonction dérivable en $a$ est nécessairement continue en $a$.
Attention la réciproque est fausse ! On retiendra l'exemple classique de la fonction valeur absolue qui est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 0, mais qui n'est pas dérivable en 0.

**Tangente**

**Définition**

*Soit $f$ un fonction dérivable sur un intervalle $I$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $a$ un point de $I$.*
*La **tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de $f$ au point $(a, f(a))$** est la droite d'équation :*

$$y = (x-a)f'(a) + f(a).$$

(faire un dessin)

**Proposition** **(une première liste)**

*Les fonctions usuelles suivantes sont dérivables sur l'intervalle donné :*

| *fonction $f$ définie par* | *fonction $f'$ définie par* | *Intervalle de dérivabilité* |
|---|---|---|
| $f(x) = k, \quad (k \in \mathbb{R})$ | $f'(x) = 0$ | $]-\infty; +\infty[$ |
| $f(x) = x^n, \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $]-\infty; +\infty[$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ | $]-\infty; 0[$ *et* $]0 + \infty[$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ | $f'(x) = -nx^{-n-1}$ | $]-\infty; 0[$ *et* $]0 + \infty[$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0 + \infty[$ |

**Proposition**

- *Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ et $k$ un réel, alors les fonctions $u + v$, $ku$ et $uv$ sont dérivables sur $I$ et nous avons*

$$(u+v)' = u' + v', \quad (ku)' = ku', \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

- *Si de plus, $v$ ne s'annule pas sur $I$, alors les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur $I$ et nous avons*

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

**Théorème**

*Soit $f$ une fonction dérivable sur un* **intervalle** *$I$.*

- *Si la dérivée $f'$ est nulle sur $I$ alors $f$ est* **constante sur** *$I$.*
- *Si la dérivée $f'$ est strictement positive sur $I$, sauf en des valeurs isolées où elle s'annule, alors $f$ est* **strictement croissante sur** *$I$.*
- *Si la dérivée $f'$ est strictement négative sur $I$, sauf en des valeurs isolées où elle s'annule, alors $f$ est* **strictement décroissante sur** *$I$.*

**Remarque**

Ce résultat est vrai uniquement sur un intervalle ! Trouver des contre-exemples simples.

## 2.3 Composition de fonctions

**Définition**

*Soit $f$ une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ dont l'image est incluse dans $J \subset \mathbb{R}$, i.e. $\{f(x), x \in I\} \subset J$ et soit $g$ une fonction définie sur $J$.*

*On appelle* ***fonction composée de $f$ par $g$*** *la fonction notée* $\boldsymbol{g \circ f}$ *définie par*

$$\forall\, x \in I, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Exemple**

Si $f : x \mapsto 2x + 3$ et $g : x \mapsto x^2$ alors $g \circ f : x \mapsto (2x + 3)^2$.

**Proposition (Ensemble de définition d'une fonction composée)**

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur les ensembles de définition $D_f$ et $D_g$. L'ensemble de définition $D_h$ de la fonction composée $h = g \circ f$ est alors*

$$D_h = \{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \in D_g\}.$$

**Exemples**

- Soient $f : x \mapsto x^2 - 9$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, Les domaines de définitions de ces deux fonctions sont respectivement $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = [0, +\infty[$.
  La fonction composée $h = g \circ f$ est définie par $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 9}$ et son domaine de définition est $D_h = ]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[$.
  La fonction composée $k = f \circ g$ est définie par $k : x \mapsto (\sqrt{x})^2 - 9 = x - 9$ et son domaine de définition est $D_k = [0, +\infty[$.
- Soient $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto -x$, Les domaines de définitions de ces deux fonctions sont respectivement $D_f = ]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.
  La fonction composée $h = g \circ f$ est définie par $h : x \mapsto -\ln(x)$ et son domaine de définition est $D_h = ]0, +\infty[$.
  La fonction composée $k = f \circ g$ est définie par $k : x \mapsto \ln(-x)$ et son domaine de définition est $D_k = ]-\infty, 0[$.

**Remarque**

La composition de fonctions n'est pas **commutative** : $g \circ f \neq f \circ g$.

**Proposition**

*La composition de fonctions est* **associative** *: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

**Proposition**
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions et soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels ou $-\infty$ ou $+\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors la fonction composée $g \circ f$ admet une limite en $a$ et*

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c.$$

**Proposition**

- *Si la fonction $f$ est continue en $a$ et si la fonction $g$ est continue en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en $a$.*
- *Si la fonction $f$ est continue sur $I$ à valeurs dans $J$ et si la fonction $g$ est continue sur $J$ alors la fonction composée $g \circ f$ est continue sur $I$.*

**Théorème (Dérivation d'une fonction composée)**
*Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$ à valeurs dans un intervalle $J$ et si $v$ est une fonction dérivable sur $J$ alors la fonction composée $v \circ u$ est dérivable sur $I$ et nous avons*

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u).$$

**Corollaire**

- *Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$ alors $u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur $I$ et nous avons*
$$(u^n)' = nu'u^{n-1}.$$
- *Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et si $u$ ne s'annule pas sur $I$ alors les fonctions $\frac{1}{u^n} = u^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sqrt{u}$ sont dérivables sur $I$ et nous avons*
$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}, \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

## 2.4 Fonctions bijectives et fonctions réciproques

Nous commencerons cette section par quelques définitions données dans un cadre un peu plus général, puis nous reviendrons au cas particulier des fonctions numériques.

### 2.4.1 Un peu de vocabulaire - définition - dans le cas général

Soient $E$ et $F$ deux ensembles (quelconques) et $f$ une application de $E$ dans $F$.

**Définition**

- *L'application $f : E \to F$ est dite* ***injective*** *si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée $F$ admet* ***au plus*** *un antécédent par $f$ dans l'ensemble de départ $E$ ou encore si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet* ***au plus*** *une solution dans $E$.*
- *L'application $f : E \to F$ est dite* ***surjective*** *si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée $F$ admet* ***au moins*** *un antécédent par $f$ dans l'ensemble de départ $E$ ou encore si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet* ***au moins*** *une solution dans $E$.*
- *L'application $f : E \to F$ est dite* ***bijective*** *si et seulement si elle est injective et surjective c'est-à-dire tout élément de l'ensemble d'arrivée $F$ admet un* ***unique*** *antécédent par $f$ dans l'ensemble de départ $E$ ou encore si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une* ***unique*** *solution dans $E$.*

(faire des diagrammes sagittaux)

**Définition**

*Soit $f : E \to F$ une application bijective. Comme $f$ est bijective, tout élément de $F$ possède dans $E$ un unique antécédent par $f$.*
*Nous pouvons donc définir une application définie sur $F$ à valeurs dans $E$, qui à tout élément de $F$ associe son antécédent par $f$. Cette application est appelée* ***application réciproque*** *ou* ***bijection réciproque*** *et notée* $\boldsymbol{f^{-1}}$.
*Nous avons alors*

$$\forall\ y \in F,\ f \circ f^{-1}(y) = y \quad \text{et} \quad \forall\ x \in E,\ f^{-1} \circ f(x) = x.$$

### 2.4.2 Cas d'une application numérique

Revenons maintenant au cas d'une application $f : I \to J$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$.

**Théorème (Théorème de la bijection)**

*Si $f$ est une application* **continue** *et* **strictement monotone** *sur l'intervalle $I$ à valeurs dans $f(I)$, alors*

- *$f(I)$ est un intervalle de même nature que $I$ ((fermé, ouvert ou semi ouvert) et ses extrémités sont les limites de $f$ aux extrémités de $I$.*
- *La fonction $f$ définit une bijection de $I$ sur $f(I)$. Elle admet alors une bijection réciproque $f^{-1}$ définie sur $f(I)$ à valeurs dans $I$.*
- *La fonction réciproque $f^{-1}$ est continue et strictement monotone sur $f(I)$ de même sens de variation que $f$.*

**Exemple**

La fonction $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans dans $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et elle admet une bijection réciproque. Cette bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Elle est appelée "racine carrée" et notée $\sqrt{\ }$.

Nous avons donc

$$\forall\ y \in \mathbb{R}_+,\ (\sqrt{y})^2 = y, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x^2} = x.$$

**Remarque**

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|.$$

**Théorème**

*Soit $f$ une fonction strictement monotone et **dérivable** sur un intervalle $I$ et soit $J = f(I)$. Alors la fonction réciproque $f^{-1}$ est dérivable en tout point de l'ensemble*

$$\left\{x \in J, f'(f^{-1}(x)) \neq 0\right\}$$

*et en un point de cet ensemble*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

**Exemple**

Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Nous avons vu que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall\ x \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et a pour dérivée $x \mapsto 2x$. Donc

$$f'(f^{-1}(x)) = 0 \Leftrightarrow 2f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Par conséquent, $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**Proposition** **(Courbe représentative)**
*La courbe représentative $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de $f^{-1}$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ par une symétrie par rapport à la première bissectrice ($y = x$).*

(faire dessin avec exemple précédent)

## 2.5 Primitives d'une fonction

**Définition**
*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.*
*On appelle* ***primitive*** *de $f$ sur $I$, toute fonction $F$ définie et dérivable sur $I$ telle que*

$$\forall\ x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

**Théorème**
*Toute fonction* ***continue*** *sur un intervalle $I$ admet des primitives.*

**Proposition**
*Soient $F_1$ et $F_2$ deux primitives sur $I$ de $f$. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall\ x \in I,\ F_2(x) = F_1(x) + C.$$

**Proposition**
*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, soit $a \in I$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*
*La fonction $f$ admet alors une* ***unique*** *primitive $F$ sur $I$ telle que $F(a) = \alpha$.*

## 2.6 Algorithme de l'étude d'une fonction

Un problème classique est l'étude d'une fonction. Il s'agit, à partir de la donnée de l'expression de la fonction ($f(x) = \ldots$), de mener une étude pour obtenir un maximum d'informations sur la fonctions, permettant d'obtenir au final un tracé de de la courbe représentative de la fonction

le plus précis possible.
Cette étude passe par l'étude de chacun des points suivants qui seront traités dans l'ordre indiqué. L'étude de chacun des points est détaillée à la suite.

**Algorithme de l'étude d'une fonction**

1. *Détermination du domaine de définition $\mathcal{D}_f$ (si celui-ci n'est pas indiqué)*
2. *Détermination du domaine d'étude $\mathcal{D}_E$ (parité, périodicité, ...), avec les explications permettant de construire la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$ à partir de sa restriction au domaine d'étude $\mathcal{D}_E$ (symétrie, invariance par translations, ...)*
3. *Étude des variations de la fonction sur le domaine d'étude. Celle-ci passe par :*
   (a) *la justification de la dérivabilité de la fonction là où on l'étudie*
   (b) *le calcul de la dérivée*
   (c) *l'étude du signe de la dérivée*
   (d) *la réalisation d'un tableau de variations complet i.e. qui contient*
      - *les valeurs ou les limites de la fonctions aux bornes du domaine d'étude*
      - *les valeurs de la fonction là où la dérivée s'annule*
4. *Justification des limites figurant dans le tableau de variations*
5. *Étude des points remarquables (par exemple points de la courbe représentative sur les axes, sur les asymptotes, ...)*
6. *Détermination des éventuelles asymptotes horizontales et/ou verticales et/ou obliques*
7. *Tracé de la courbe : tracé sur le domaine d'étude puis tracé complet. Celui-ci fera apparaitre les points remarquables avec leur tangente ainsi que les asymptotes.*

### 2.6.1 Détermination du domaine d'étude $\mathcal{D}_E$

#### a Parité

**Définition**
*Une fonction $f$ est dite **paire** si et seulement si :*
- *le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à l'origine $O$ :*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}_f$$
- $$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x)$$

**Définition**

*Une fonction $f$ est dite **impaire** si et seulement si :*

- *le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à l'origine $O$ :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}_f$$

- $$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -f(x)$$

**Proposition (Symétrie de la courbe représentative)**

- *Si la fonction $f$ est paire alors, dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet l'axe $(O, y)$ comme axe de symétrie.*
- *Si la fonction $f$ est impaire alors, dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet l'origine $O$ comme centre de symétrie.*

**Restriction du domaine d'étude**

*Lorsque la fonction $f$ est paire ou impaire, l'étude de la fonction sera menée sur $\mathcal{D}_f \cap [0; +\infty[$*

### b Périodicité

**Définition**

*Une fonction $f$ est dite **périodique de période $T$** ($T > 0$) si et seulement si :*

- *le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est invariant par translation de vecteur $T\vec{i}$ :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow x + T \in \mathcal{D}_f$$

- $$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x+T) = f(x)$$

**Proposition (Invariance de la courbe représentative)**

*Si la fonction $f$ est périodique de période $T$ alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est invariante par les translations de vecteur $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.*

**Restriction du domaine d'étude**

*Lorsque la fonction $f$ est est périodique de période $T$, l'étude de la fonction sera menée sur $\mathcal{D}_f \cap [a; a+T]$ avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque.*

### 2.6.2 Détermination des asymptotes

#### a Asymptote horizontale

**Définition**

*La droite $\Delta$ d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ **au voisinage de $+\infty$** si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.*

*Deux cas peuvent se présenter :*

- *Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L^+$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe au dessus de la droite $\Delta$ au voisinage de $+\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L^-$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe en dessous de la droite $\Delta$ au voisinage de $+\infty$.*

**Définition**

*La droite $\Delta$ d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ **au voisinage de $-\infty$** si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.*

*Deux cas peuvent se présenter :*

- *Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L^+$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe au dessus de la droite $\Delta$ au voisinage de $-\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L^-$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe en dessous de la droite $\Delta$ au voisinage de $-\infty$.*

#### b Asymptote verticale

**Définition**

*La droite $\Delta$ d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.*

*Quatre cas se présentent :*

- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

### c Asymptote oblique

**Définition**

*La droite $\Delta$ d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est* ***asymptote oblique*** *à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$* ***au voisinage de $+\infty$*** *si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.*

*Deux cas peuvent se présenter :*

- *Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0^+$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe au dessus de la droite $\Delta$ au voisinage de $+\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0^-$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe en dessous de la droite $\Delta$ au voisinage de $+\infty$.*

**Définition**

*La droite $\Delta$ d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est* ***asymptote oblique*** *à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$* ***au voisinage de $-\infty$*** *si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.*

*Deux cas peuvent se présenter :*

- *Si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0^+$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe au dessus de la droite $\Delta$ au voisinage de $-\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0^-$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe en dessous de la droite $\Delta$ au voisinage de $-\infty$.*

**Remarques**

On vérifie aisément que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ implique deux choses :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$.

(idem en $-\infty$)

**Méthode de détermination d'une asymptote oblique**

*Ces deux remarques nous indiquent une méthode pour déterminer les caractéristiques d'un asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ :*

- *Le coefficient directeur $a$ est donné par $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$*

- *Si $a$ existe et est déterminé, l'ordonnée à l'origine $b$ est donnée par $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$.*

*Si une de ces étapes ne débouche pas (limite inexistante ou infinie), il n'y a pas d'asymptote oblique en $+\infty$. (idem en $-\infty$)*

**Remarques**

1. Il se peut qu'une fonction possède une asymptote en un infini mais pas en l'autre.
2. Il se peut que $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ existe et soit fini, mais que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$ n'existe pas ou soit infinie, il n'y a alors pas d'asymptote.