# Treillis

## Treillis $(E, \preceq, \wedge, \vee)$

- $(E, \preceq)$ ensemble ordonné
- $\vee : E \times E \to E \qquad \wedge : E \times E \to E$
- pour tout $x, y \in E$ :
  - $x \wedge y$ minorant de $x$ et $y$

$$x \wedge y \preceq x \qquad \text{et} \qquad x \wedge y \preceq y$$

  - $x \wedge y$ le plus grand des minorants

$$\forall m \in E \quad m \preceq x \text{ et } m \preceq y \quad \Rightarrow \quad m \preceq x \wedge y$$

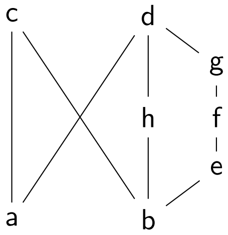
  - $x \vee y$ majorant de $x$ et $y$

$$x \preceq x \vee y \qquad \text{et} \qquad y \preceq x \vee y$$

  - $x \vee y$ le plus petit des majorants

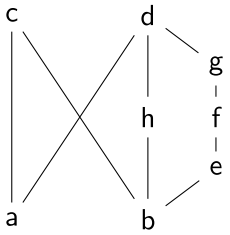
$$\forall M \in E \quad x \preceq M \text{ et } y \preceq M \quad \Rightarrow \quad x \vee y \preceq M$$

## Exemple 1



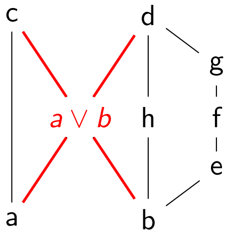

Ensemble ordonné mais pas treillis car :

## Exemple 1




Ensemble ordonné mais pas treillis car :
$a \vee b$ n'existe pas ($c$ et $d$ majorants mais pas de plus petit)

## Exemple 1

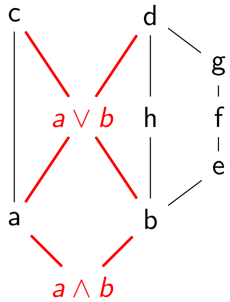



Ensemble ordonné mais pas treillis car :
$a \wedge b$ n'existe pas

# Treillis

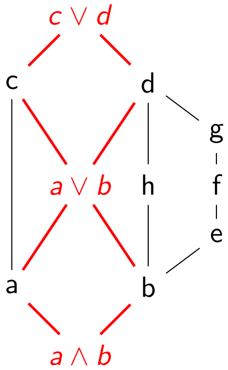
*Définitions*

## Exemple 1




Ensemble ordonné mais pas treillis car :
$c \vee d$ n'existe pas

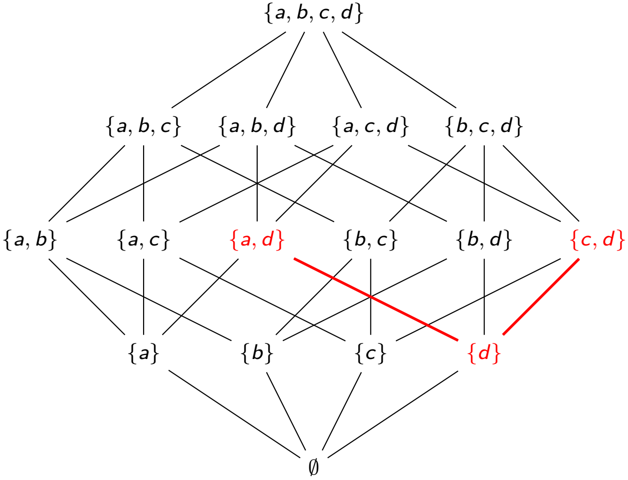
## Exemple 1




C'est bien un treillis ! (après ajout de 3 éléments)

## Exemple 2

$(\mathcal{P}(E), \subseteq, \quad, \quad)$ treillis (avec $E$ ensemble)

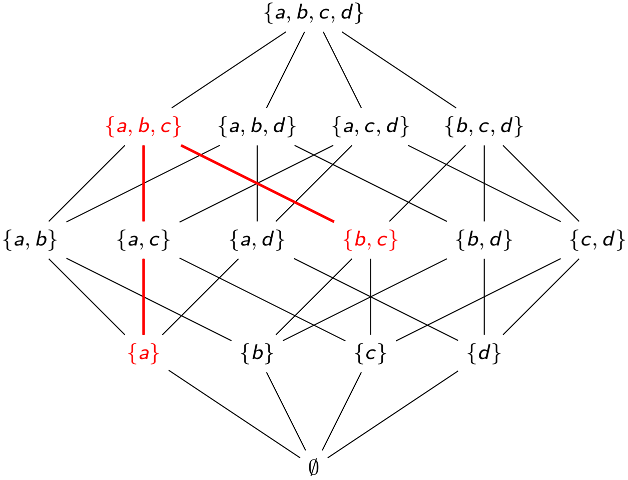


# Treillis

*Définitions*

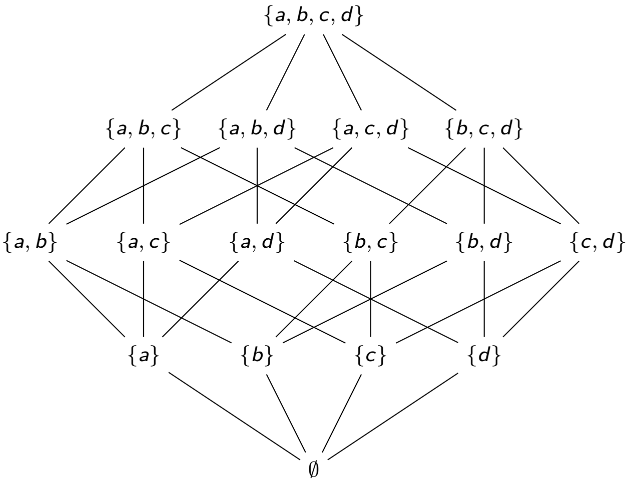
## Exemple 2

$(\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap\,, \quad)$ treillis (avec $E$ ensemble)



## Exemple 2

$(\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup)$ treillis (avec $E$ ensemble)



## Exemple 3

$(\mathbb{N}, \mid, \text{pgcd}, \text{ppcm})$ treillis

- $a|b \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad ak = b$ ordre partiel

- $\text{pgcd}(a, b)$ : plus grand diviseur commun de $a$ et $b$

  ex. $\text{pgcd}(7938; 1260) = \text{pgcd}(2^1.3^4.7^2 \;;\; 2^2.3^2.5^1.7^1)$
  $= 2^1.3^2.7^1 = 126$

  $7938 = 126 \times 3^2.7 = 126 \times 63$

  $1260 = 126 \times 2^1.5^1 = 126 \times 10$

- $\text{ppcm}(a, b)$ : plus petit multiple commun de $a$ et $b$

  ex. $\text{ppcm}(7938; 1260) = \text{ppcm}(2^1.3^4.7^2 \;;\; 2^2.3^2.5^1.7^1)$
  $= 2^2.3^4.5^1.7^2 = 79380$

  $7938 \times 2^1.5^1 = 7938 \times 10 = 79380$

  $1260 \times 3^2.7^1 = 1260 \times 63 = 79380$

# Treillis

*Définitions*

Soit $(E, \preceq)$ ensemble ordonné et $A \subseteq E$

## Borne inférieure d'une partie

- $\bigwedge A$ minorant

$$\forall x \in A \quad \bigwedge A \preceq x$$

- $\bigwedge A$ le plus grand des minorants

$$\forall m \in E \quad (\forall x \in A \quad m \preceq x) \quad \Rightarrow \quad m \preceq \bigwedge A$$

## Exemples

- exemple 1 : $\bigwedge\{f, g, h\} = b$
- exemple 2 : $\bigwedge \{\{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}\} = \{d\}$
- exemple 3 : $\bigwedge\{30, 45, 60\} = 15$

## Attention $\bigwedge A$ n'existe pas toujours

Dans $(\mathbb{Z}, \leq)$ pour $A$ ensemble des nombres pairs $\bigwedge A$ n'existe pas

# Treillis

*Définitions*

Soit $(E, \preceq)$ <u>ensemble ordonné</u> et $A \subseteq E$

## Borne supérieure d'une partie

- $\bigvee A$ majorant

$$\forall x \in A \quad x \preceq \bigvee A$$

- $\bigvee A$ le plus petit des majorants

$$\forall M \in E \quad (\forall x \in A \quad x \preceq M) \quad \Rightarrow \quad \bigvee A \preceq M$$

## Exemples

- exemple 1 : $\bigvee\{f, g, h\} = d$
- exemple 2 : $\bigvee \{\{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}\} = \{a, b, c, d\}$
- exemple 3 : $\bigvee\{30, 45, 60\} = 180$

## Attention $\bigvee A$ n'existe pas toujours

Dans $(\mathbb{Z}, \leq)$ pour $A$ ensemble des nombres pairs $\bigvee A$ n'existe pas

### Attention

Ne pas confondre $\bigvee A$ et $\bigwedge A$ avec maximum et minimum de $A$

Pour $(\mathbb{N}, \mid)$ et $A := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

- $A$ n'a pas de maximum
- $\bigvee A = 0$ mais $\mathbf{0} \notin \boldsymbol{A}$

### Propriété

Si $(E, \preceq, \wedge, \vee)$ treillis et $E$ fini alors $\bigvee A$ et $\bigwedge A$ existent toujours

### Idée de preuve

Soit $A \subseteq E$.
Comme $E$ fini alors $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$
Donc $\bigvee A = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_k}$ et $\bigwedge A = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$

# Treillis

*Définitions*

$(E, \preceq)$ <u>ensemble ordonné</u>

$\top$ (*top*) $\qquad \top := \bigvee E$

(si $\bigvee E$ existe)

$\bot$ (*bottom*) $\qquad \bot := \bigwedge E$

(si $\bigwedge E$ existe)

## Exemples

- exemple 1 :

# Treillis

*Définitions*

$(E, \preceq)$ ensemble ordonné

$\top$ (*top*) $\qquad \top := \bigvee E$

(si $\bigvee E$ existe)

$\bot$ (*bottom*) $\qquad \bot := \bigwedge E$

(si $\bigwedge E$ existe)

Exemples

- exemple 1 : $\top = c \vee d \qquad \bot = a \wedge b$ (éléments ajoutés)
- exemple 2 :

# Treillis

*Définitions*

$(E, \preceq)$ ensemble ordonné

$\top$ (*top*) $$\top := \bigvee E$$

(si $\bigvee E$ existe)

$\perp$ (*bottom*) $$\perp := \bigwedge E$$

(si $\bigwedge E$ existe)

Exemples

- exemple 1 : $\top = c \vee d \qquad \perp = a \wedge b$ (éléments ajoutés)
- exemple 2 : $\top = \{a, b, c, d\} \qquad \perp = \emptyset$
- exemple 3 :

# Treillis

*Définitions*

$(E, \preceq)$ <u>ensemble ordonné</u>

$\top$ (*top*) $\qquad \top := \bigvee E$

(si $\bigvee E$ existe)

$\perp$ (*bottom*) $\qquad \perp := \bigwedge E$

(si $\bigwedge E$ existe)

**Exemples**

- exemple 1 : $\top = c \vee d \qquad \perp = a \wedge b$ (éléments ajoutés)
- exemple 2 : $\top = \{a, b, c, d\} \qquad \perp = \emptyset$
- exemple 3 : $\top = 0 \qquad \perp = 1$

# Treillis

*Propriétés*

| | |
|---|---|
| Commutativité | $a \vee b = b \vee a$ |
| | $a \wedge b = b \wedge a$ |
| Associativité | $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ |
| | $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ |
| Idempotence | $a \vee a = a$ |
| | $a \wedge a = a$ |
| Neutre | $a \vee \bot = a$ |
| | $a \wedge \top = a$ |
| Absorption | $a \vee \top = \top$ |
| | $a \wedge \bot = \bot$ |

# Algèbre de Boole

*Définition*

## Algèbre de Boole $(E, \preceq, \wedge, \vee, \bot, \top, \overline{\phantom{a}})$

- $(E, \preceq, \wedge, \vee)$ treillis avec $|E| \geq 2$
- $\bot = \bigwedge E \qquad \top = \bigvee E \qquad \overline{\phantom{a}} : E \to E$
- pour tout $a, b, c \in E$ :

  Distributivité $\quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
  $\quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

  Complémentaire $\quad a \vee \overline{a} = \top$
  $\quad a \wedge \overline{a} = \bot$

## Exemples

- $(\{0,1\}, \leq, \cdot, \dot{+}, 0, 1, \overline{\phantom{a}})$ avec $\cdot$, $\dot{+}$, $\overline{\phantom{a}}$ les « et », « ou » et « non » logiques
- $(\mathcal{P}(A), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, A, \complement_A)$ avec $|A| \geq 1$

# Dualité

## Propositions

1. $(E, \preceq)$ ensemble ordonné
   $\Rightarrow \quad (E, \succeq)$ ensemble ordonné

2. $(E, \preceq, \wedge, \vee)$ treillis
   $\Rightarrow \quad (E, \succeq, \vee, \wedge)$ treillis

3. $(E, \preceq, \wedge, \vee, \bot, \top, ^{-})$ algèbre de Boole
   $\Rightarrow \quad (E, \succeq, \vee, \wedge, \top, \bot, ^{-})$ algèbre de Boole

Ces structures sont appelées les **duales**

# Dualité

## Propriété duale

À toute propriété faisant intervenir $\preceq$, $\wedge$, $\vee$, $\perp$ et $\top$ est associée une propriété duale où les symboles sont remplacés (resp.) par $\succeq$, $\vee$, $\wedge$, $\top$ et $\perp$.

## Exemple

$$\forall a, b \in E \quad \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$$

et

$$\forall a, b \in E \quad \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$$

sont duales

## Principe de dualité

Une propriété valide entraîne la validité de sa propriété duale