Problèmes et applications

Problèmes et applications

Isomorphisme

Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ graphes simples non-orientés.

Graphes isomorphes

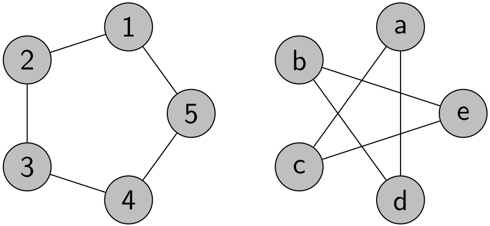
G et G' sont *isomorphes* *ssi* il existe une bijection $f : V \to V'$

$$\forall u, v \in V \quad \{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$$

Notation : $G \cong G'$

cas orienté similaire

Exemple



v	1	2	3	4	5
$f(v)$	a	c	e	b	d

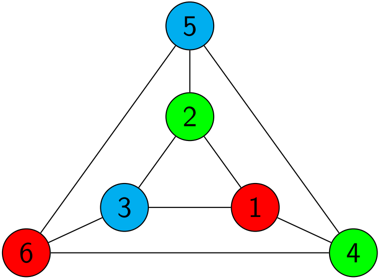
Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non-orienté.

Coloration

G est *k-coloriable* s'il existe une fonction $c : V \to [\![1, k]\!]$ telle que

$$\forall \{u, v\} \in E \quad c(u) \neq c(v)$$

Exemple 1



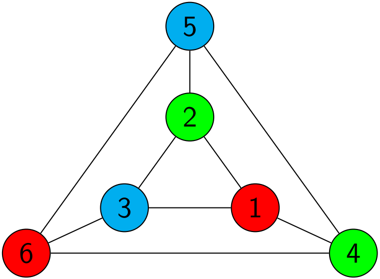
3-coloriable avec c telle que :

v	1	2	3	4	5	6
$c(v)$	1	2	3	2	3	1

Nombre chromatique

Le *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$, est le plus petit k tel que G est k-coloriable

Exemple 1

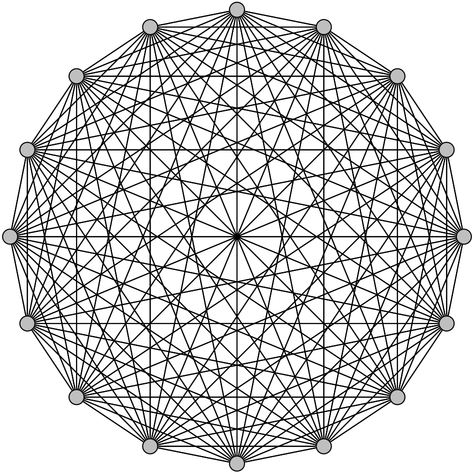


3-coloriable donc $\chi(G) \leq 3$

pas 2-coloriable donc $\chi(G) > 2$

d'où $\chi(G) = 3$

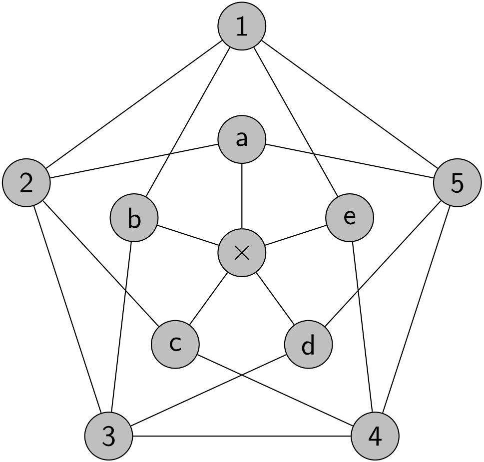
Exemple 2



$$\chi(K_{16}) = 16$$

Exemple 3 : graphe de Grötzsch

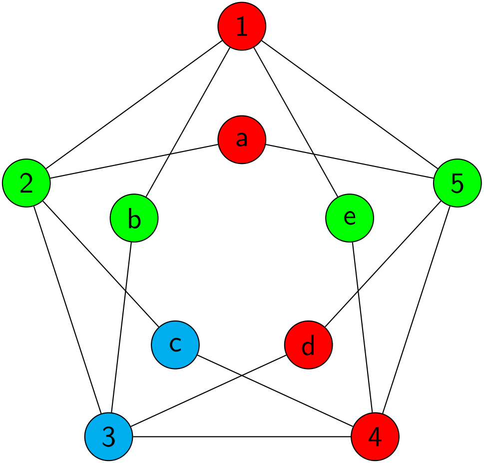
plus petit graphe sans triangle où $\chi(G) = 4$



G

- $\chi(G[V \setminus \{v\}]) = 3$ pour tout $v \in V$
- $\chi(G) = 4$

Exemple 3 : graphe de Grötzsch

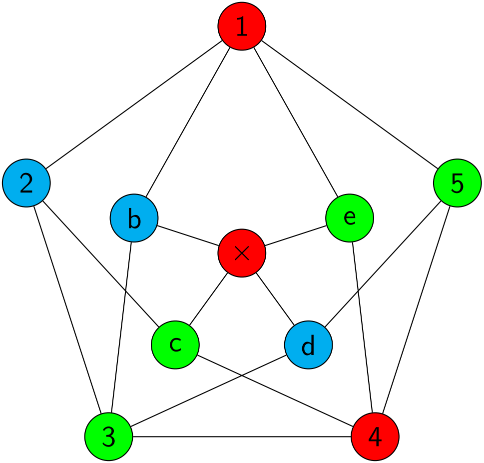


$G[V \setminus \{\times\}]$

- 3-coloriable donc $\chi(G[V \setminus \{\times\}]) \leq 3$
- pas 2-coloriable car $G[\{1,2,3,4,5\}] \cong C_5$

donc $\chi(G[V \setminus \{\times\}]) = 3$

Exemple 3 : graphe de Grötzsch

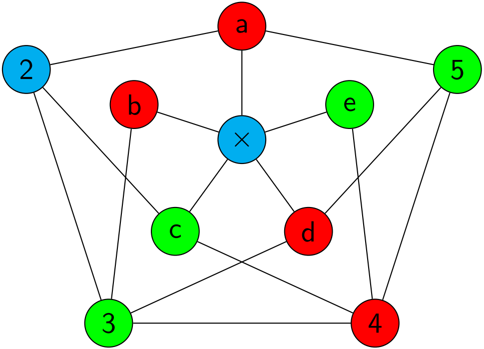


$G[V \setminus \{a\}]$

- 3-coloriable donc $\chi(G[V \setminus \{a\}]) \leq 3$
- pas 2-coloriable car $G[\{1,2,3,4,5\}] \cong C_5$

donc $\chi(G[V \setminus \{a\}]) = 3$

Exemple 3 : graphe de Grötzsch

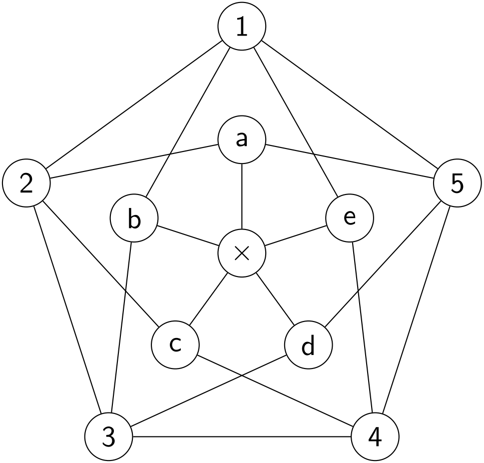


$G[V \setminus \{1\}]$

- 3-coloriable donc $\chi(G[V \setminus \{1\}]) \leq 3$
- pas 2-coloriable car $G[\{a, 2, 3, 4, 5\}] \cong C_5$

donc $\chi(G[V \setminus \{1\}]) = 3$

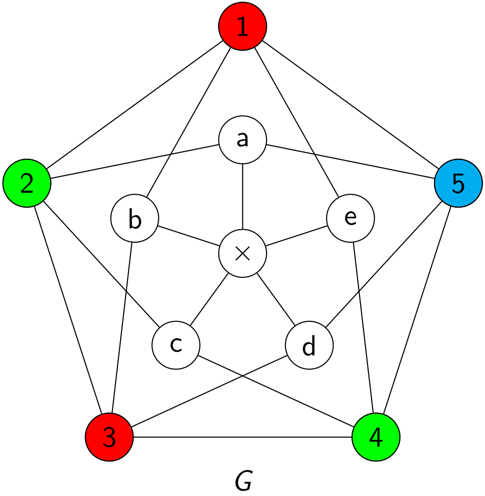
Exemple 3 : graphe de Grötzsch



G

Supposons G 3-coloriable :

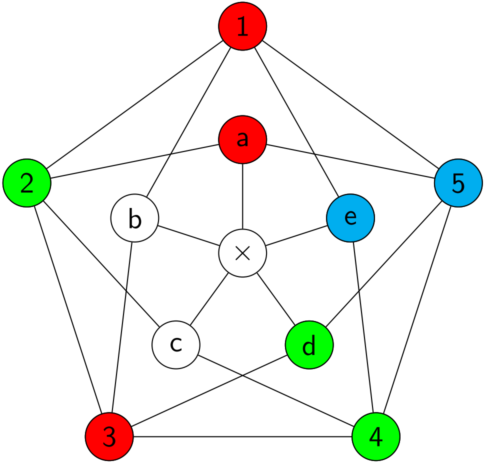
Exemple 3 : graphe de Grötzsch



Supposons G 3-coloriable :

- 3-coloration unique du cycle $(1, 2, 3, 4, 5, 1)$

Exemple 3 : graphe de Grötzsch

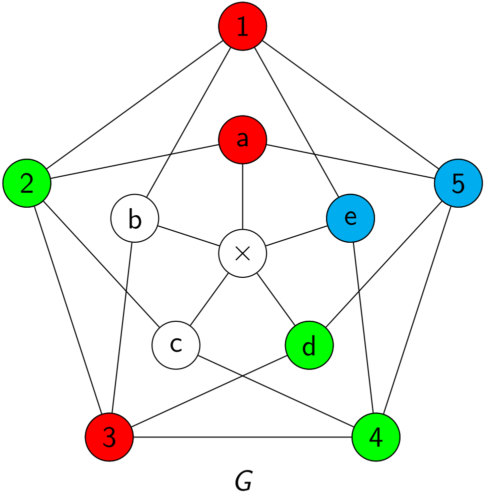


G

Supposons G 3-coloriable :

- 3-coloration unique du cycle $(1, 2, 3, 4, 5, 1)$
- coloration obligatoire de a, d, et e

Exemple 3 : graphe de Grötzsch

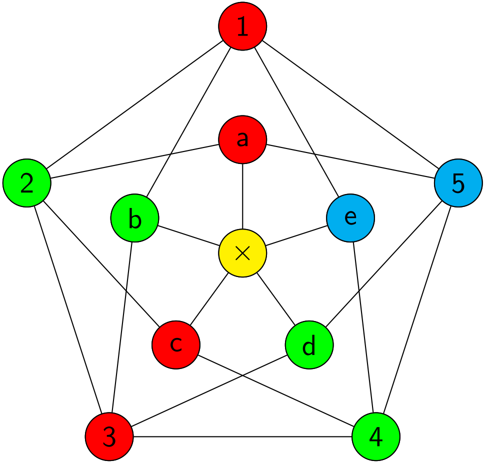


Supposons G 3-coloriable :

- 3-coloration unique du cycle $(1, 2, 3, 4, 5, 1)$
- coloration obligatoire de a, d, et e
- $\times$ impossible à colorier

donc $\chi(G) > 3$.

Exemple 3 : graphe de Grötzsch



G

Supposons G 3-coloriable :

- 3-coloration unique du cycle $(1, 2, 3, 4, 5, 1)$
- coloration obligatoire de a, d, et e
- $\times$ impossible à colorier

donc $\chi(G) > 3$.

Or G 4-coloriable, donc $\chi(G) = 4$

Application en optimisation

Étant donnée une collection d'antennes téléphoniques, minimiser le nombre de fréquences d'émission à affecter à chaque antenne, sachant que deux antennes ayant une région d'accès commune doivent avoir une fréquence différente.

Modélisation et résolution

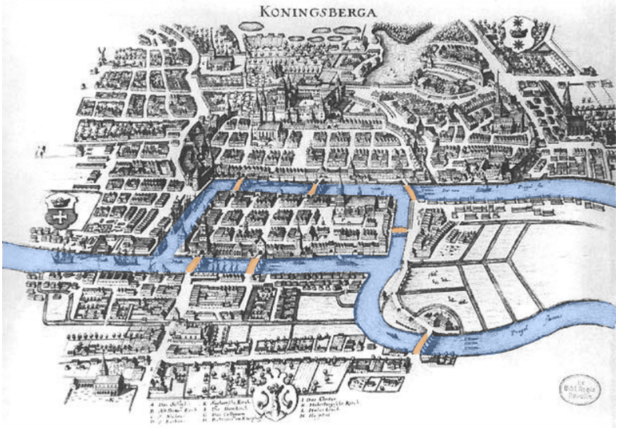
Utilisation d'un graphe simple non-orienté $G = (V, E)$ où :

V :	ensemble des antennes ;
$\{a_i, a_j\} \in E$	*ssi* a_i et a_j ont une région d'accès commune.

Le nombre minimal de fréquences nécessaires est $\chi(G)$.

Problème des sept ponts de Königsberg

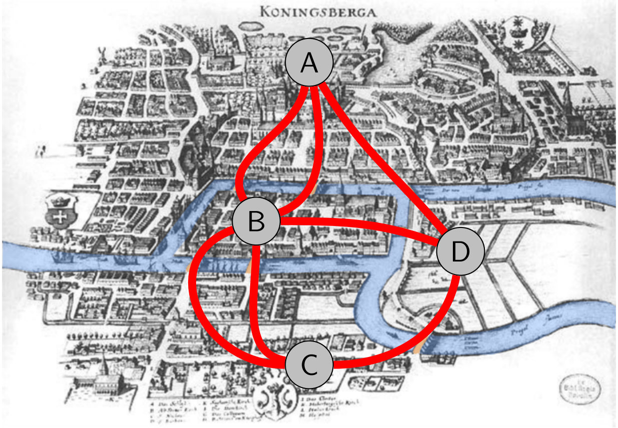
Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles dont partent sept ponts. Existe-t-il une promenade circulaire passant par chaque pont exactement une fois ?



Modélisation

Utilisation d'un graphe non-orienté $G = (V, E)$ où :

- V : les 4 rives accessibles ;
- E : les ponts entre rives.



Problèmes et applications

Graphes eulériens

Soit $G = (V, E)$ graphe simple non-orienté fini avec $V \neq \emptyset$.

Définitions

- un *cycle eulérien* de G est un cycle passant exactement une fois par chaque arête de G
- une *chaîne eulérienne* de G est une chaîne de G passant exactement une fois par chaque arête et qui n'est pas un cycle
- G est un *graphe eulérien* s'il admet un cycle eulérien

Propriétés

Si G connexe :

1. G admet un cycle eulérien *ssi* tout sommet est de degré pair strictement positif.
2. G admet une chaîne eulérienne *ssi* il y a exactement deux sommets de degré impair (les autres degrés étant pairs strictement positifs).

Propriétés

Si G connexe :

1. G admet un cycle eulérien *ssi* tout sommet est de degré pair strictement positif.
2. G admet une chaîne eulérienne *ssi* il y a exactement deux sommets de degré impair (les autres degrés étant pairs strictement positifs).

Preuve

Déjà $1 \Rightarrow 2$: supposons 1 vérifiée pour tout g.s.n-o connexe, et soit $G = (V, E)$ un g.s.n-o connexe.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $c = (v_0, \ldots, v_k)$ une chaîne eulérienne de G. Posons $G' := (V \cup \{s\}, E \cup \{\{s, v_0\}, \{v_k, s\}\})$. Alors on a $c' := (s, v_0, \ldots, v_k, s)$ un cycle eulérien de G' et donc (par 1) tout sommet $v \in V$ est de degré pair dans G', i.e. il y a exactement deux sommets (v_0 et v_k) de degré impair dans G.

Propriétés

Si G connexe :

1. G admet un cycle eulérien *ssi* tout sommet est de degré pair strictement positif.
2. G admet une chaîne eulérienne *ssi* il y a exactement deux sommets de degré impair (les autres degrés étant pairs strictement positifs).

Preuve

Déjà $1 \Rightarrow 2$: supposons 1 vérifiée pour tout g.s.n-o connexe, et soit $G = (V, E)$ un g.s.n-o connexe.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soient u et v les deux sommets de degré impair de G. Posons $G' := (V \cup \{s\}, E \cup \{\{s, u\}, \{v, s\}\})$. Comme tous les sommets de G' sont de degré pair, G' admet un cycle eulérien $c = (s, u, \ldots, v, s)$ et donc $c' := (u, \ldots, v)$ est une chaîne eulérienne de G.

Soit G graphe simple non-orienté fini connexe non vide.

Propriété

G admet un cycle eulérien *ssi* tout sommet est de degré pair strictement positif.

Preuve

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $c = (v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0)$ un cycle eulérien de G et soit $v \in V$. Comme G connexe avec au moins 3 sommets (car c cycle), alors $\mathrm{d}_G(v) > 0$, et v apparaît dans c aux positions croissantes $I := \{i_1, \ldots, i_p\}$, d'où

$$\mathrm{N}_G(v) = \{v_{i_1-1}, v_{i_1+1}, \quad v_{i_2-1}, v_{i_2+1}, \quad \ldots, \quad v_{i_p-1}, v_{i_p+1}\}$$

et donc $\mathrm{d}_G(v)$ est pair strictement positif.

Soit G graphe simple non-orienté fini connexe non vide.

Propriété

G admet un cycle eulérien *ssi* tout sommet est de degré pair strictement positif.

Preuve

$\boxed{\Leftarrow}$ Par récurrence forte sur le nombre d'arêtes $m = |E|$:

$m = 0, 1, 2.$ Cas impossibles car il y a un sommet u dans G avec $\mathrm{d}_G(u) \geq 2$, donc au moins 2 autres sommets et 3 arêtes.

$m \geq 3.$ Comme tout sommet à un degré supérieur à 2 et qu'il y a au moins un sommet, on peut construire un cycle c de G.
Soit C l'ensemble des arêtes de ce cycle. Posons $H := (V, E \setminus C)$. Chaque composante connexe H_i de H est ou bien réduite à un sommet isolé, ou bien n'a que des sommets de degré pair strictement positifs et admet donc un cycle eulérien c_i (par récurrence). Il suffit alors de « fusionner » les c_i dans c pour obtenir un cycle eulérien de G.

Méthode de construction d'un cycle eulérien

La preuve donne la méthode suivante :

1. Construire un cycle quelconque c.
2. Supprimer les arêtes de c du graphe et les sommets isolés.
3. Résoudre récursivement le problème sur les composantes connexes.
4. Fusionner dans c les cycles eulériens des composantes connexes.

Exemple de fusion

$$c = (1, 2, 7, 4, 3, 1) \quad c_1 = (2, 3, 6, 2) \quad c_2 = (4, 5, 1, 7, 4)$$

donne

$$c' = (1, 2, 3, 6, 2, 7, 4, 5, 1, 7, 4, 3, 1)$$

Problèmes et applications

Graphes eulériens

Méthode de construction d'un cycle eulérien

La preuve donne la méthode suivante :

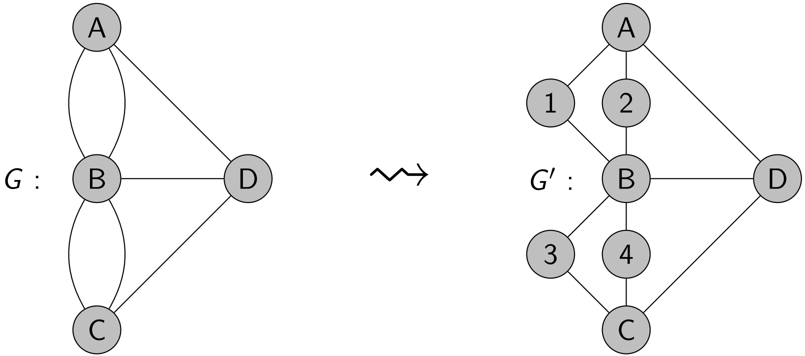
1. Construire un cycle quelconque c.
2. Supprimer les arêtes de c du graphe et les sommets isolés.
3. Résoudre récursivement le problème sur les composantes connexes.
4. Fusionner dans c les cycles eulériens des composantes connexes.

Méthode de construction d'une chaîne eulérienne

1. Ajouter une arête vers un nouveau sommet pour chaque sommet de degré impair.
2. Construire un cycle eulérien.
3. Supprimer du cycle eulérien le sommet ajouté.

Résolution du problème des sept ponts

Transformation en graphe simple :



Ni cycle ni chaîne eulérien dans G' car 4 sommets de degré impair, donc non plus dans G.