# Chapitre 5

# Équations différentielles linéaires

## 5.1 Introduction - Définitions générales

Souvent un problème concret fourni par l'analyse, la mécanique, la physique, la biologie, l'économie,... se ramène à déterminer une **fonction inconnue y**, définie et $n$ fois dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, sachant qu'elle satisfait à une **équation différentielle**, c'est-à-dire une relation donnée qui lie la fonction $y$, certaines de ses dérivées successives et la variable $x$ :

$$\forall\, x \in I, \quad F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0. \qquad (E)$$

Si l'équation contient la dérivée $n$-ième $y^{(n)}$ et aucune dérivée d'ordre supérieure, on dit que l'équation différentielle est **d'ordre n**.
On appelle **solution** de $(E)$ toute fonction $y$ $n$ fois dérivable sur $I$ et vérifiant $(E)$.
Résoudre cette équation différentielle signifie déterminer toutes les fonctions $y$ vérifiant $(E)$.

On peut parfois adjoindre à l'équation différentielle des **conditions initiales** :

$$y(a) = y_0,\ y'(a) = y_1,\ y''(a) = y_2, \ldots,\ y^{(n-2)}(a) = y_{n-2},\ y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}, \qquad (CI)$$

où $a$ est un point de $I$ et $y_0, \ldots y_{n-1}$ sont $n$ valeurs réelles données.
On appelle **problème de Cauchy**, la donnée simultanée d'une équation différentielle $(E)$ et de conditions initiales $(CI)$.
Résoudre le problème de Cauchy signifie déterminer toutes les fonctions $y$ vérifiant $(E)$ et $(CI)$ simultanément.

**Remarque**
Sauf dans quelques cas particuliers, nous ne savons pas résoudre explicitement une équation différentielle ou un problème de Cauchy.
Dans ce chapitre, nous allons apprendre à résoudre des équations différentielles **linéaires** du premier ordre et du second ordre.

## 5.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

**<u>Définition</u>**
*On appelle* ***<u>équation linéaire du premier ordre</u>*** *une équation de la forme :*

$$\forall\ x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \qquad (E)$$

*où $a$ et $f$ sont deux fonctions données, continues sur $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.*
*La fonction $a$ s'appelle le* ***<u>coefficient</u>*** *et la fonction $f$ le* ***<u>second membre</u>*** *de l'équation $(E)$.*

**<u>Exemple</u>**
L'équation suivante est une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2xy(x) = x.$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}$ et $x \mapsto \frac{1}{2} + e^{-x^2}$ sont deux solutions de cette équation.

La résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, c'est-à-dire la recherche de l'ensemble des solutions de $(E)$, passe par l'étude de cas particuliers :

### 5.2.1 Cas $\mathbf{a} = 0$

Ce sont les équations différentielles les plus simples :

$$\forall\ x \in I, \quad y'(x) = f(x).$$

Nous sommes ramenés à la recherche de primitives de la fonctions $f$ sur l'intervalle $I$ !.
Rappelons que si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ alors l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) + C \end{array} \ ; \ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

### 5.2.2 Cas $\mathbf{f} = 0$

**<u>Définition</u>**
*On appelle* ***équation linéaire <u>homogène</u> du premier ordre*** *une équation de la forme :*

$$\forall\ x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (E_H)$$

*où $a$ est une fonction donnée, continue sur $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.*

**Théorème**

*Soit $A$ une primitive quelconque de $a$ sur $I$. Alors l'ensemble $\mathcal{S}_H$ de l'équation différentielle homogène linéaire du premier ordre $(E_H)$ est*

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ce^{-A(x)} \end{array} ; \; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Démonstration**

- Soit $C \in \mathbb{R}$ et soit $y : x \mapsto Ce^{-A(x)}$. La fonction $y$ est dérivable sur $I$ et nous avons

  $$\forall\, x \in I, \quad y'(x) = -Ca(x)e^{-A(x)}.$$

  Par conséquent,

  $$y'(x) + a(x)y(x) = -Ca(x)e^{-A(x)} + a(x)Ce^{-A(x)} = 0.$$

  La fonction $y$ est donc une solution de $(E_H)$. Nous avons montré que

  $$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ce^{-A(x)} \end{array} ; \; C \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{S}_H.$$

- Réciproquement, montrons que toute solution de $(E_H)$ est de cette forme. Soit $y$ une solution de $(E_H)$, i.e. telle que

  $$\forall\, x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$

  On définit alors la fonction $z : x \mapsto y(x)e^{A(x)}$. La fonction $z$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$ nous avons

  $$z'(x) = y'(x)e^{A(x)} + y(x)a(x)e^{A(x)} = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)} = 0.$$

  Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $z(x) = C$, i.e. pour tout $x \in I$, $y(x) = Ce^{-A(x)}$. Nous avons montré que

  $$\mathcal{S}_H \subset \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ce^{-A(x)} \end{array} ; \; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Exemple**

L'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2xy(x) = 0$$

est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ce^{-x^2} \end{array} ; \; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

### 5.2.3 Le cas général

On considère l'équation linéaire du premier ordre suivante :

$$\forall\ x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \qquad (E)$$

**<u>Définition</u>**

*On appelle **équation linéaire homogène <u>associée</u> à** $(E)$ l'équation $(E_H)$ obtenue en remplaçant $f$ par $0$ dans $(E)$ :*

$$\forall\ x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (E_H)$$

**<u>Proposition</u>**

*Si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions de l'équation $(E)$, alors $y_1 - y_2$ est une solution de $(E_H)$.*

**<u>Exemple</u>**

Nous avons vu que les fonctions $y_1 : x \mapsto \frac{1}{2} + e^{-x^2}$ et $y_2 : x \mapsto \frac{1}{2}$ sont deux solutions de l'équation :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2xy(x) = x.$$

Nous avons vu aussi que $y_1 - y_2 : x \mapsto e^{-x^2}$ est solution de l'équation homogène associée :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2xy(x) = 0.$$

**<u>Théorème</u>**

*Soit $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de $(E_H)$, l'équation homogène associée à $(E)$ et soit $y_p$ une solution particulière de $(E)$.*
*Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(E)$ est défini par :*

$$\mathcal{S} = \left\{ y_p + y_H,\ y_H \in \mathcal{S}_H \right\}.$$

**<u>Démonstration</u>**

- Soit $y_H \in \mathcal{S}_H$ et soit $y = y_p + y_H$. Nous savons que :

  $$\forall\ x \in I, \quad y_H'(x) + a(x)y_H(x) = 0 \quad \text{et} \quad y_p'(x) + a(x)y_p(x) = f(x).$$

  Par conséquent, pour tout $x \in I$ :

  $$\begin{aligned} y'(x) + a(x)y(x) &= (y_p + y_H)'(x) + a(x)(y_p + y_H)(x) \\ &= \big(y_p'(x) + a(x)y_p(x)\big) + \big(y_H'(x) + a(x)y_H(x)\big) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $y \in \mathcal{S}$.
Nous avons montré que $\{y_p + y_H,\ y_H \in \mathcal{S}_H\} \subset \mathcal{S}$.

- Réciproquement, soit $y \in \mathcal{S}$. D'après la proposition, $z = y - y_p$ est une solution de $(E_H)$.
Par conséquent $y = y_p + z$ avec $z \in \mathcal{S}_H$.
Nous avons montré que $\mathcal{S} \subset \{y_p + y_H,\ y_H \in \mathcal{S}_H\}$.

**Corollaire**

*Soit $A$ une primitive quelconque de $a$ sur $I$ et soit $y_p$ une solution particulière de $(E)$. Alors, nous avons*

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y_p(x) + Ce^{-A(x)} \end{array} ;\ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Exemple**

Nous savons que $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}$ est une solution particulière de l'équation

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2xy(x) = x$$

et que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène associée est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ce^{-x^2} \end{array} ;\ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solution de cette équation différentielle est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2} + Ce^{-x^2} \end{array} ;\ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Conclusion**

La résolution de l'équation $(E)$ se ramène donc à la résolution de son équation homogène associée $(E_H)$ et à la recherche d'une solution particulière.
Nous savons maintenant résoudre l'équation homogène (si nous sommes capables d'obtenir une primitive de $a$). Il nous reste donc à savoir comment déterminer une solution particulière.
Nous pourrons parfois trouver, deviner une solution particulière, si ce n'est pas le cas nous utiliserons une méthode plus générale dite *méthode de la variation de la constante.*

**Recherche d'une solution particulière par la méthode de la variation de la constante**

Nous allons déterminer une solution particulière $y_p$ de la forme :

$$\forall\, x \in I, \quad y_p(x) = v(x)y_H(x)$$

où $y_H$ est une solution de $(E_H)$, l'équation homogène associée à $(E)$ et $v$ est une fonction dérivable sur $I$ à déterminer.

En effet, si $y_p$ est solution de $(E)$, alors pour tout $x \in I$ :

$$y_p'(x) + a(x)y_p(x) = f(x),$$
$$v'(x)y_H(x) + v(x)y_H'(x) + a(x)v(x)y_H(x) = f(x),$$
$$v'(x)y_H(x) + v(x)\underbrace{\left(y_H'(x) + a(x)y_H(x)\right)}_{=0} = f(x)$$

d'où, puisque $y_H$ ne s'annule pas sur $I$ :

$$\forall\ x \in I, \quad v'(x) = \frac{f(x)}{y_H(x)}.$$

Nous sommes ainsi ramenés à nouveau à la recherche d'une primitive.

Dans la pratique, puisque les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$, où $A$ est une primitive de $a$ sur l'intervalle $I$ et $C$ une constante réelle quelconque, nous allons chercher une solution particulière de la forme :

$$\forall\ x \in I, \quad y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}.$$

On remplace donc la constante $C$, dans la forme générale des solutions de l'équation homogène associée, par une fonction dérivable $x \mapsto C(x)$. Ceci justifie la terminologie *méthode de la variation de la constante.*

**Exemple**

Appliquons la méthode de la variation de la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2xy(x) = x.$$

Nous avons déjà déterminé les solutions de l'équation homogène associée. Nous allons donc chercher une solution particulière $y_p$ de la forme :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = C(x)e^{-x^2}$$

où $C$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
En reportant, dans l'équation, nous obtenons alors que

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad C'(x) = xe^{x^2},$$

d'où

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad C(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} \quad \text{et} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}e^{-x^2} = \frac{1}{2}.$$

### 5.2.4 Le problème de Cauchy

**Théorème**

*Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x), \quad \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (PC)$$

*où $a$ et $f$ sont deux fonctions continues sur l'intervalle non vide $I$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.*

## 5.3 Équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

**Définition**

*On appelle **équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :*

$$\forall\, x \in I, \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad (E_H)$$

*où $a, b$ et $c$ sont trois constantes réelles données avec $a \neq 0$.*
*Les réels $a, b$ et $c$ s'appellent les **coefficients**.*

**Exemples**

Les équations suivantes sont des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants :

- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = 0.$
  Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont deux solutions de cette équation.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0.$
  Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-2x}$ sont deux solutions de cette équation.

### 5.3.1 Résolution de l'équation

Une tentative pour trouver des solutions à $(E_H)$ :

Dans les deux exemples précédents, nous nous apercevons que les deux équations ont des solutions de la forme $y : x \mapsto e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{R}$.

Cherchons donc des solutions de $(E_H)$ de cette forme. Nous avons

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{rx}, \quad y'(x) = re^{rx}, \quad y''(x) = r^2 e^{rx}.$$

et en reportant dans $(E_H)$, nous obtenons alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^{rx}\left(ar^2+br+c\right)=0$$

Par conséquent, $y : x \mapsto e^{rx}$ est solution de $(E_H)$ si et seulement si $ar^2+br+c=0$.

**Définition**

*L'équation algébrique du second degré*

$$ar^2+br+c=0 \qquad (E_C)$$

*d'inconnue $r$ s'appelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle $(E_H)$.*

**Théorème**

*Soient $a, b$ et $c$ trois constantes réelles avec $a \neq 0$ et soit l'équation différentielle*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0 \qquad (E_H)$$

*d'équation caractéristique*

$$ar^2+br+c=0 \qquad (E_C)$$

*On Note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de $(E_H)$.*

- *Si $\Delta = b^2-4ac>0$ :*
  *L'équation caractéristique $(E_C)$ admet alors deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ et dans ce cas*
  $$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} \end{array} \ ;\ (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Si $\Delta = b^2-4ac=0$ :*
  *L'équation caractéristique $(E_C)$ admet alors une racine double réelle $r=-\frac{b}{2a}$ et dans ce cas*
  $$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (C_1x+C_2)\,e^{rx} \end{array} \ ;\ (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Si $\Delta = b^2-4ac<0$ :*
  *L'équation caractéristique $(E_C)$ admet alors deux racines complexes non réelles et conjuguées $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et dans ce cas*
  $$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\alpha x}\left(C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x)\right) \end{array} \ ;\ (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

**Exemples**

Reprenons les exemples déjà utilisés :

- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = 0.$
  L'équation caractéristique associée à cette équation est : $r^2 - 1 = 0$. Elle admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. L'ensemble des solutions est alors :
$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C_1 e^x + C_2 e^{-x} \end{array} \; ; \; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
  Les deux solutions exhibées précédemment correspondent respectivement aux cas $(C_1, C_2) = (1, 0)$ et $(C_1, C_2) = (0, 1)$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0.$
  L'équation caractéristique associée à cette équation est : $r^2 + r - 2 = 0$. Elle admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$. L'ensemble des solutions est alors :
$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \end{array} \; ; \; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
  Encore une fois, les deux solutions exhibées précédemment correspondent respectivement aux cas $(C_1, C_2) = (1, 0)$ et $(C_1, C_2) = (0, 1)$.

Quelques exemples supplémentaires :
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0.$
  L'équation caractéristique associée à cette équation est : $r^2 + 2r + 1 = 0$. Elle admet une racine double réelle $r = -1$. L'ensemble des solutions est alors :
$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (C_1 x + C_2)\, e^{-x} \end{array} \; ; \; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 0.$
  L'équation caractéristique associée à cette équation est : $r^2 - 2r + 5 = 0$. Elle admet deux racines complexes non réelles et conjuguées $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$. L'ensemble des solutions est alors :
$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right) \end{array} \; ; \; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

### 5.3.2 Le problème de Cauchy

**Théorème**
*Soient $a$, $b$ et $c$ trois constantes réelles avec $a \neq 0$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy*
$$\left\{ \begin{array}{l} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{array} \right. \qquad (PC)$$
*admet une unique solution.*