# Mathématiques disctères 2 - graphes

## Cours 2 - représentation des graphes

N. de Rugy-Altherre

1. Introduction
   - Théorie spectale des matrices

## Polynôme

- Un polynôme à une variable est une fonction mathématique utilisant :
    - Une variable formelle ($X$)
    - Des constantes réelles
    - Les opérations $+, -, \times$
- Le degré d'un polynôme est le plus grande puissance du $X$
- Un polynôme $P$ à une variable $X$ s'évalue en $v \in \mathbb{R}$ en remplaçant sa variable par la valeur d'évaluation et en effectuant les calculs. Le résultat est un réel noté $P(v)$
- Une racine $r$ est un réel tel que $P(r) = 0$

Exemple : $P(X) = (X + 1)(X - 2)$ est de degré 2 et a deux racines 2 et $-1$.

**Théorème fondamental de l'algèbre**

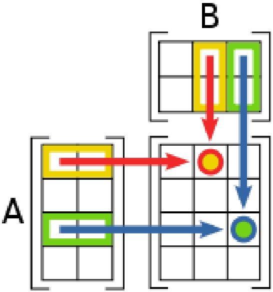
Un polynôme de degré $n$ admet au plus $n$ racines.

# Produit

## Produit

Soit $A$ une matrice $m \times n$ et $B$ une matrice $n \times p$, alors la matrice produit $C = A \times B$ est de taille $(m, p)$ telle que

$$\forall i \in [1, m] \forall j \in [1, p], \; (C)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$




$$c_{12} = \sum_{r=1}^{2} a_{1r} b_{r2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}$$

$$c_{33} = \sum_{r=1}^{2} a_{3r} b_{r3} = a_{31} b_{13} + a_{32} b_{23}$$

# Produit

## Propriété du produit

Le produit matriciel est

- Associatif : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- Distributif par rapport à l'addition : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- Il n'est pas commutatif : $\exists A \exists B,\ A \times B \neq B \times A$

# Déterminant

## Définitions

- Une permutation $\sigma$ à $n$ élément est une bijection de $[1, n]$ dans $[1, n]$ (une réorganisation des éléments).
- Notons $\Theta_n$ l'ensemble des permutations à $n$ éléments.
- La signature $\epsilon(\sigma)$ d'une permutation est la parité du nombre de paires $(i, j)$ inversées, c'est à dire telle que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

## Déterminant

Soit $A$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \theta_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1} A_{\sigma(j),j}$$

# Déterminant

## Déterminant 2 et 3

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = x_1y_2z_3+x_2y_3z+y_1z_2x_3-x_3y_2z_1-x_2y_1z_3-y_3z_2x_1$$

(règle de Sarrus)

# Calculs

## Distribution par rapport à une ligne

Soit $A$ une matrice $n \times n$ et $(i, j) \in [1, n]^n$. La matrice $A_{i,j}$ de taille $n-1 \times n-1$ est la matrice $A$ où on a enlevé la ligne $i$ et la colonne $j$.
Alors le développement d'une matrice par rapport à une ligne $i$ est :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

Exempledun développement par rapport à la première ligne :

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} =$$

$$x_1 \det \begin{pmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} - x_2 \det \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{pmatrix} + x_3 \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$

# Inverse

## Définitions

- La matrice identité est une matrice carrée avec des 0 partout sauf sur diagonale.

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit $A$ une matrice $n \times n$. Son inverse est une matrice $B$ de taille $n \times n$ telle que

$$A \times B = B \times A = Id_n$$

## Théorème

Une matrice carrée $A$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

# Spectre

## Définitions

Soit $A$ une matrice carrée $n \times n$

- Le polynôme minimal $p_A(X)$ est le déterminant de la matrice $XI_n - A$. Par exemple si $n = 3$, c'est le polynôme de

$$\begin{pmatrix} X - x_1 & -x_2 & -x_3 \\ -y_1 & X - y_2 & -y_3 \\ -z_1 & -z_2 & X - z_3 \end{pmatrix}$$

- Les valeurs propres de $A$ sont les racines de ce polynômes.
- Le spectre d'une matrice est l'ensemble de ses valeurs propre.

1. Introduction
   - Théorie spectale des matrices

# Spectre d'une matrice

## Définition

- Une permutation à $n$ éléments est une fonction bijective de $[1, n]$ dans $[1, n]$. Notons $S_n$ l'ensemble des permutations à $n$ élements.
- La signature $\epsilon(\sigma)$ d'une permutation $\sigma$ à $n$ éléments vaut 1 si le nombre de changement est pair, $-1$ sinon.
- Soit $A$ une matrice. Le déterminant de $A$ est :

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma(i),i}$$

# Spectre d'une matrice

## Définition

- Une permutation à $n$ éléments est une fonction bijective de $[1, n]$ dans $[1, n]$. Notons $S_n$ l'ensemble des permutations à $n$ élements.
- La signature $\epsilon(\sigma)$ d'une permutation $\sigma$ à $n$ éléments vaut 1 si le nombre de changement est pair, $-1$ sinon.
- Soit $A$ une matrice. Le déterminant de $A$ est :

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma(i),i}$$

$$\det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = xy' - yx'$$

# Spectre d'une matrice

## Définition

- Une permutation à $n$ éléments est une fonction bijective de $[1,n]$ dans $[1,n]$. Notons $S_n$ l'ensemble des permutations à $n$ élements.
- La signature $\epsilon(\sigma)$ d'une permutation $\sigma$ à $n$ éléments vaut 1 si le nombre de changement est pair, $-1$ sinon.
- Soit $A$ une matrice. Le déterminant de $A$ est :

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma(i),i}$$

$$\det \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{pmatrix} - x' \det \begin{pmatrix} y & y'' \\ z & z'' \end{pmatrix} + x'' \det \begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \end{pmatrix}$$

# Spectre d'une matrice

## Définition

- Une permutation à $n$ éléments est une fonction bijective de $[1, n]$ dans $[1, n]$. Notons $S_n$ l'ensemble des permutations à $n$ élements.
- La signature $\epsilon(\sigma)$ d'une permutation $\sigma$ à $n$ éléments vaut 1 si le nombre de changement est pair, $-1$ sinon.
- Soit $A$ une matrice. Le déterminant de $A$ est :

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma(i),i}$$

La complexité du calcul du déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ est de $\mathcal{O}(n^3)$ ou moins (la meilleure est actuellement de $\mathcal{O}(n^{2.373})$)

# Polynômes et racines

# Valeurs propres