Langages

Partiel - 1h15

Documents manuscrits et polycopiés du cours autorisés. Le sujet comporte 2 pages.

Chaque question vaut un certain nombre de `pts` *pouvant varier de* 0 *à* 4*. La note finale est directement proportionnelle au nombre total de* `pts` *obtenus. Le facteur de proportionnalité est le même pour tous les étudiants et étudiantes.*

Plusieurs des questions de l'énoncé nécessitent une réponse rédigée. L'utilisation d'une syntaxe, grammaire, et sémantique en accord avec la tradition écrite française est nécessaire.

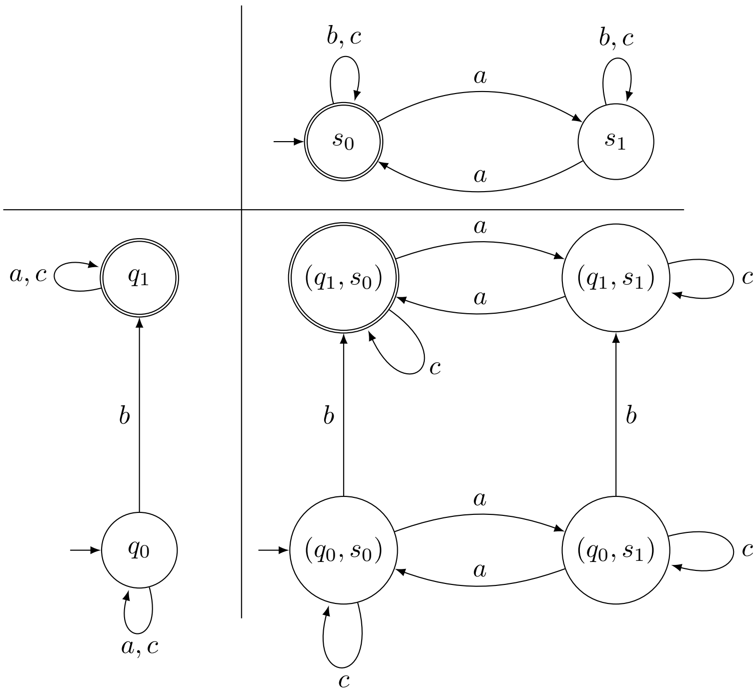
1 Construction

Q 1) (2.5 pts) Donner un automate déterministe qui reconnaît les mots sur l'alphabet {`a`, `b`, `c`} dans lequel le symbole `b` apparaît une seule fois **et** le symbole `a` apparaît un nombre pair de fois (0 est un nombre pair).
Indication : `aba` *est dans le langage, ainsi que* `aab` *et* `baa`*.*

Solution: Le plus simple est d'effectuer l'automate produit des automates pour les langages L_1 et L_2 suivants :

— L_1 : mots sur {`a`, `b`, `c`} où `b` apparaît une seule fois ;
— L_2 : mots sur {`a`, `b`, `c`} où `a` apparaît un nombre pair de fois.

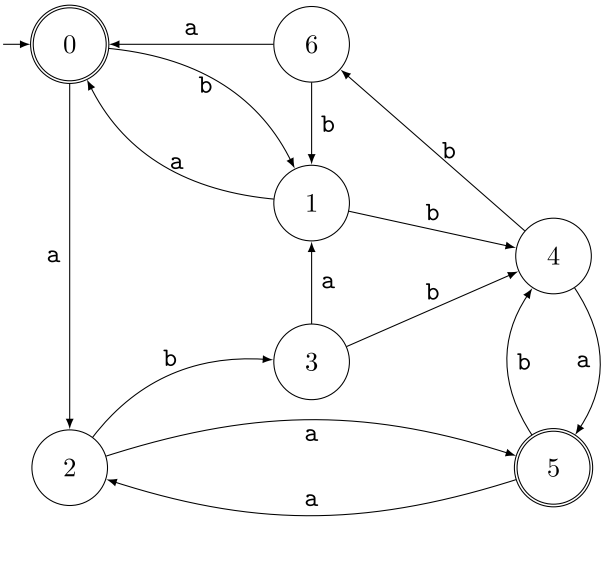
On obtient alors :



2 Problème

Q 2) (2 pts) On considère l'automate déterministe $\mathcal{A}$ suivant. Préciser, parmi les mots suivants, ceux qui sont acceptés par l'automate $\mathcal{A}$ et ceux qui ne le sont pas. Il n'est pas demandé de justifier.

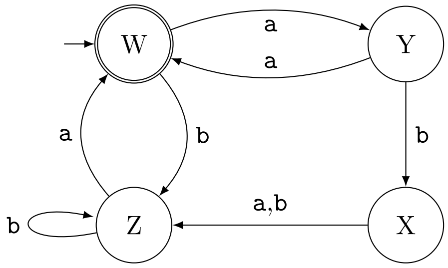
— `baaa`
— `abbb`
— `bababa`
— `babbbaa`



			a	b
$\rightarrow$	0	$\star$	2	1
	1		0	4
	2		5	3
	3		1	4
	4		5	6
	5	$\star$	2	4
	6		0	1

Solution:
- $0 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a} 5$ donc *baaa* accepté ;
- $0 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{b} 6$ donc *abbb* non accepté ;
- $0 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 0$ donc *bababa* accepté ;
- $0 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{b} 6 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 2$ donc *babbbaa* non accepté.

Q 3) (2 pts) En utilisant l'algorithme de minimisation vu en cours, montrer que l'automate $\mathcal{A}$ reconnaît le même langage que l'automate $\mathcal{B}$ suivant. Justifier. Expliquer en particulier à quels états de l'automate initial correspondent chacun des états W, X, Y et Z.



		a	b
$\rightarrow$	W $\star$	Y	Z
	X	Z	Z
	Y	W	X
	Z	W	Z

Solution:
- Partition initiale

A		B				
0	5	1	2	3	4	6

- Étape 1 :
  - lettre a :

	A		B				
	0	5	1	2	3	4	6
a	B	B	A	A	B	A	A

  - nouvelle partition :

A		C	D			
0	5	3	1	2	4	6

  - lettre b :

	A		C	D			
	0	5	3	1	2	4	6
b	D	D		D	C	D	D

  - nouvelle partition :

A		C	E	F		
0	5	3	2	1	4	6

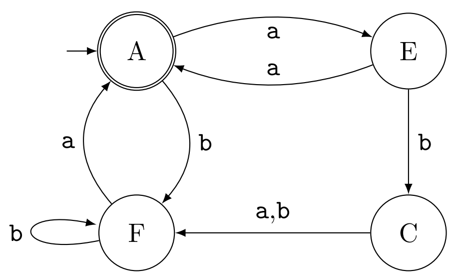
- Étape 2 :
  - lettre a, puis b :

	A		C	E	F		
	0	5	3	2	1	4	6
a	E	E	F	A	A	A	A
b	F	F	F	C	F	F	F

D'où automate minimal donné par la table :

	$\downarrow$ $A\star$	C	E	F
a	E	F	A	A
b	F	F	C	F

soit



Donc on retrouve l'automate $\mathcal{B}$ avec $W := A$, $X := C$, $Y := E$ et $Z := F$.

Q 4) (3 pts) Soit L_1 le langage reconnu par cet automate $\mathcal{B}$. Donner une expression régulière correspondant à ce langage, en utilisant l'algorithme du cours.

Solution:

$$\begin{cases} L_W = & aL_Y + bL_Z + \varepsilon \\ L_X = & (a+b)L_Z \\ L_Y = & aL_W + bL_X \\ L_Z = & aL_W + bL_Z \end{cases}$$

d'où

$$L_Z = b^\star a L_W$$

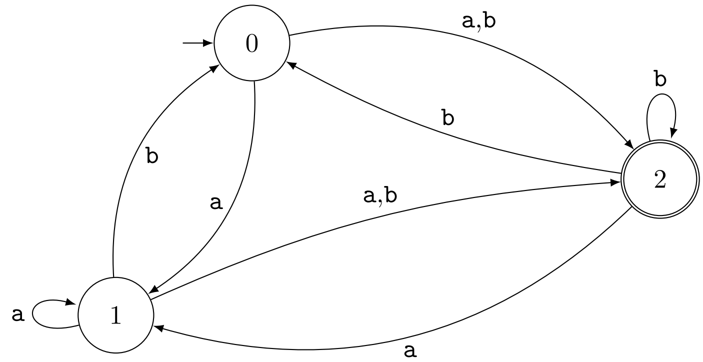
et alors

$$L_X = (a+b)b^\star a L_W$$

et enfin

$$\begin{aligned} L_W &= aL_Y + bL_Z + \varepsilon \\ &= a(aL_W + bL_X) + bb^\star aL_W + \varepsilon \\ &= aaL_W + abL_X + bb^\star aL_W + \varepsilon \\ &= aaL_W + ab(a+b)b^\star aL_W + bb^\star aL_W + \varepsilon \\ &= (aa + ab(a+b)b^\star a + bb^\star a)^\star \end{aligned}$$

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'automate non déterministe $\mathcal{C}$ suivant.



			a	b
$\rightarrow$	0		$1,2$	2
	1		$1,2$	$0,2$
	2	$\star$	1	$0,2$

Q 5) (1 pts) Soit L_2 le langage reconnu par l'automate $\mathcal{C}$. Donner un exemple de mot de L_1 qui n'est pas dans L_2. Donner un exemple de mot de L_2 qui n'est pas dans L_1.

Solution:
- $\varepsilon \in L_1$ et $\varepsilon \notin L_2$
- $a \notin L_1$ et $a \in L_2$

Q 6) (0.5 pts) Construire un automate non déterministe qui reconnaît $L_1 + L_2$.

Solution: Il suffit de placer côte à côte les dessins des automates pour L_1 et L_2, ou avec une table :

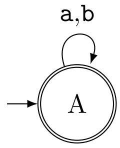
			a	b
$\rightarrow$	W	$\star$	Y	Z
	X		Z	Z
	Y		W	X
	Z		W	Z
$\rightarrow$	0		$1,2$	2
	1		$1,2$	$0,2$
	2	$\star$	1	$0,2$

Q 7) (3 pts) Déterminiser puis minimiser l'automate obtenu (avant la minimisation, l'automate doit avoir 8 états). Que constate-t-on ?

Solution:

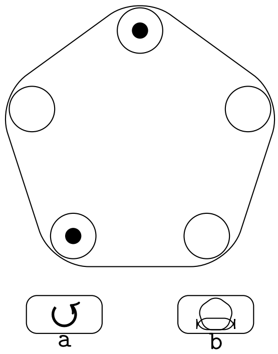
			a	b
$\rightarrow$	$q_0 := \{W,0\}$	$\star$	$\{Y,1,2\} = q_1$	$\{Z,2\} = q_2$
	$q_1 := \{Y,1,2\}$	$\star$	$\{W,1,2\} = q_3$	$\{X,0,2\} = q_4$
	$q_2 := \{Z,2\}$	$\star$	$\{W,1\} = q_5$	$\{Z,0,2\} = q_6$
	$q_3 := \{W,1,2\}$	$\star$	q_1	q_6
	$q_4 := \{X,0,2\}$	$\star$	$\{Z,1,2\} = q_7$	q_6
	$q_5 := \{W,1\}$	$\star$	q_1	q_6
	$q_6 := \{Z,0,2\}$	$\star$	q_3	q_6
	$q_7 := \{Z,1,2\}$	$\star$	q_3	q_6

Tous les états étant finaux, le processus de minimisation produit une partition à un seul ensemble : tous les états peuvent être fusionnés. L'automate minimisé est donc :



On constate alors que $L_1 + L_2 = (a+b)^\star$. En revanche on ne peut pas dire que les langages sont complémentaires car $aa \in L_1$ et $aa \in L_2$.

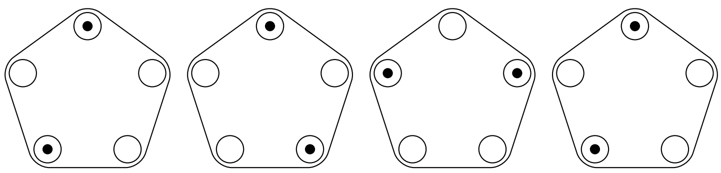
3 Aventure



On considère le puzzle présenté ci-dessus, dont on peut trouver des variantes dans quelques jeux vidéo. Le jeu est constitué d'un plateau de 5 cases, et de deux jetons (représentés en noir sur le dessin). Les jetons se trouvent initialement comme indiqué ci-dessus. Le but du jeu est de déplacer les jetons pour que les jetons se trouvent dans les deux cases en bas du plateau.

On dispose de deux boutons : le premier bouton, noté `a`, permet de tourner le plateau de jeu de 72 degrés (un cinquième de tour) dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ; le second bouton, noté `b` échange les jetons placés dans les deux cases du bas (rien ne se passe si aucune de ces deux cases n'a de jetons, ou si au contraire les deux cases ont toutes les deux un jeton).

Par exemple, si on appuie successivement sur `b`, puis `a`, puis `a`, le plateau de jeu passe successivement dans les configurations suivantes (la première représentant l'état initial du système) :

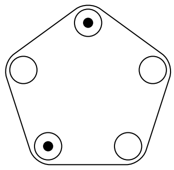


Q 8) (3 pts) Soit L le langage des mots sur l'alphabet $\{\texttt{a}, \texttt{b}\}$ qui permettent de résoudre le puzzle,c'est à dire d'arriver à placer les deux jetons en bas du plateau. Montrer que L est rationnel. Pour cela, donner un automate déterministe qui reconnaît le langage L. il n'est pas demandé de représenter tout l'automate, mais :

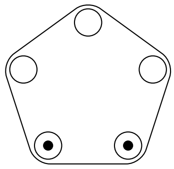
— d'écrire au moins 4 états de l'automate, dont les états obtenus en lisant `abab` ;
— de préciser l'état initial et le ou les états finaux ;
— de donner le nombre total d'états de l'automate.

Solution:

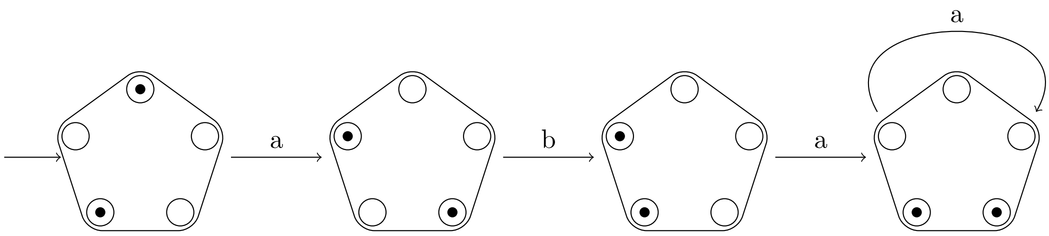
— État initial :



— État final :



— Nombre total d'états : il suffit de choisir deux positions parmi 5 pour placer les jetons, il y a donc $C_5^2 = 10$ états.
— Extrait de l'automate :



4 Mots Croisés

Q 9) (3 pts) Remplissez la grille 6×6 suivante en mettant une lettre par case de sorte que les mots inscrits sur les lignes et colonnes correspondent aux langages réguliers de la définition (**Ne pas répondre sur la feuille**).

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Horizontalement

1. $(\mathtt{ba})^\star + (\mathtt{bc})^\star$
2. $\mathtt{a}(\mathtt{b} + \mathtt{c})^\star$
3. $\mathtt{cc}^\star$
4. $\mathtt{a}^\star\mathtt{c}^\star$
5. $\mathtt{b}^\star\mathtt{c}^\star$
6. $\mathtt{a}^\star\mathtt{ca}^\star\mathtt{b}$

Verticalement :

A. $((\mathtt{a} + \mathtt{b} + \mathtt{c})\mathtt{a})^\star$

B. $(\mathtt{abc})^\star$

C. $\mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{c})^\star$

D. $(\mathtt{ac} + \mathtt{ca})^\star$

E. $\mathtt{bc}^\star\mathtt{a}$

F. $\mathtt{a}^\star\mathtt{c}^\star\mathtt{b}$

Solution:

	A	B	C	D	E	F
1	b	a	b	a	b	a
2	a	b	c	c	c	c
3	c	c	c	c	c	c
4	a	a	a	a	c	c
5	b	b	c	c	c	c
6	a	c	a	a	a	b