Théorie des ensembles

Motivations

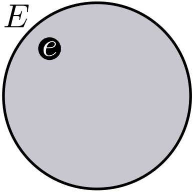
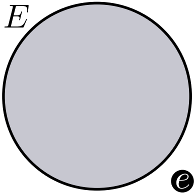
- étude rigoureuse de l'infini (Cantor, $\simeq$ 1870)
  nombreux paradoxes : hôtel de Hilbert ; $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$; etc.
- fonder les mathématiques sur des concepts simples

Concepts initiaux

- les ensembles sont des *collections* d'objets
  notés en majuscules : $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$
- les composants d'un ensemble sont appelés membres/éléments
  notés en minuscules : $a, b, \ldots, x, y, \ldots$
- les ensembles sont eux-mêmes des objets
  on peut construire des ensembles d'ensembles (d'ensembles, etc.)

Théorie des ensembles

Notions fondamentales

Notations	Sens	Intuition
$e \in E$	e appartient à E e est membre de E e est un élément de E	
$e \notin E$	e n'appartient pas à E e n'est pas membre de E e n'est pas un élément de E	

Théorie des ensembles

Version naïve

Postulats initiaux

- (existence d'au moins un ensemble, p. ex. ensemble vide $\emptyset$)
- *schéma de compréhension* : existence de tout ensemble d'éléments x qui vérifient une propriété P quelconque

$$\{x \mid P(x)\} \text{ existe}$$

Exemples

- ensemble vide : $\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$
- codage des entiers :
  $0 : \emptyset$ $\quad$ $2 : \{x \mid x = 0 \text{ ou } x = 1\}$
  $1 : \{x \mid x = 0\}$ $\quad$ $3 : \{x \mid x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2\}$
- codage des couples, des rationnels, des réels, etc.
- ensemble plein : $\{x \mid x = x\}$

Théorie des ensembles

Version naïve

Postulats initiaux

- (existence d'au moins un ensemble, p. ex. ensemble vide $\emptyset$)
- *schéma de compréhension* : existence de tout ensemble d'éléments x qui vérifient une propriété P quelconque

$$\{x \mid P(x)\} \text{ existe}$$

Défaut : antinomie de Russel

Soit $A := \{x \mid x \notin x\}$ l'ensemble des ensembles ne s'appartenant pas eux-mêmes. On a deux cas :

$A \in A$: par déf. $A \in \{x \mid x \notin x\}$ d'où $A \notin A$

$A \notin A$: alors $A \in \{x \mid x \notin x\}$ i.e. par déf. $A \in A$

Dans tous les cas on obtient une contradiction : problème !

Théorie des ensembles

Version naïve

Résoudre l'antinomie
c'est empêcher la définition $A := \{x \mid x \notin x\}$.

Différentes approches possibles :

1. interdire l'auto-référence
2. introduire la notion de types
3. restreindre le schéma de compréhension

$$\{x \in \boldsymbol{S} \mid P(x)\} \text{ existe } \underline{\text{si } S \text{ existe}}$$

$+$ ajout d'ensembles infinis
$+$ liste de constructions autorisées

Théorie des ensembles

En pratique

- existence des ensembles usuels admise : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
- relativisation (implicite) à un ensemble *univers* U :
  - « soit A un ensemble » signifie
    « soit A un ensemble d'éléments de U »
  - « pour tout ensemble A » signifie
    « pour tout ensemble A d'éléments de U »
  - « l'ensemble des éléments tels que... » s'écrit

$$\{x \in U \mid \ldots\}$$

- utilisation des constructions autorisées de nouveaux ensembles (voir suite)

Résolution de l'antinomie

Soit U ensemble univers.

Soit $A := \{x \in U \mid x \notin x\}$. On a deux cas :

$A \in A$: d'où par déf. $A \in \{x \in U \mid x \notin x\}$ i.e. $A \in U$ et $A \notin A$, **contradiction** !

Résolution de l'antinomie

Soit U ensemble univers.

Soit $A := \{x \in U \mid x \notin x\}$. On a deux cas :

$A \in A$: d'où par déf. $A \in \{x \in U \mid x \notin x\}$ i.e.
$A \in U$ et $A \notin A$, **contradiction** !

$A \notin A$: i.e. non $A \in A$
i.e. non $(A \in U$ et $A \notin A)$
i.e. $A \notin U$ ou $A \in A$, on a donc deux sous-cas :

Résolution de l'antinomie

Soit U ensemble univers.

Soit $A := \{x \in U \mid x \notin x\}$. On a deux cas :

- $A \in A$: d'où par déf. $A \in \{x \in U \mid x \notin x\}$ i.e. $A \in U$ et $A \notin A$, **contradiction** !
- $A \notin A$: i.e. non $A \in A$
  i.e. non $(A \in U$ et $A \notin A)$
  i.e. $A \notin U$ ou $A \in A$, on a donc deux sous-cas :
  - $A \in A$: **contradiction** car $A \notin A$
  - $A \notin U$: **aucune contradiction** !

Un cas est donc possible : $A \notin A$ et $A \notin U$

Note :

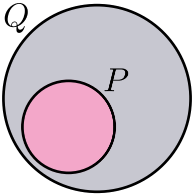
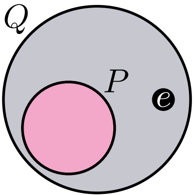
U ne peut donc pas être l'ensemble de tous les ensembles (ne contient pas A)

Définition d'un ensemble

- en extension : $E := \{x, y, \ldots\}$
  - $V := \{a, e, i, o, u\}$ l'ensemble des voyelles
  - $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$
  - $\mathbb{N}^* := \{1, 2, \ldots\}$
  - $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
  - $P := \{0, 2, 4, \ldots\}$ ensemble des entiers pairs
  - $\emptyset := \{\}$ l'ensemble vide
- en intension/compréhension : $E := \{x \in U \mid P(x)\}$
  - $J := \{n \in \mathbb{N} \mid 24 < n < 124\}$ un intervalle d'entiers
  - $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \in \mathbb{R} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$ (écriture tolérée)
  - $I := \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ ne divise pas } n\}$ ensemble des entiers impairs

Inclusion d'ensembles

$$
\begin{aligned}
P \subseteq Q \quad & :\Leftrightarrow \quad \forall x \in P, x \in Q \\
& \Leftrightarrow \quad \forall x, x \in P \Rightarrow x \in Q
\end{aligned}
$$

Notations	**Sens**	**Intuition**
$P \subseteq Q$	P sous-ensemble de Q P inclus dans Q P partie de Q	
$P \subset Q$	P sous-ensemble strict de Q P inclus strictement dans Q P partie strict de Q $P \subseteq Q$ et $P \neq Q$	

Inclusion d'ensembles

$$\begin{aligned} P \subseteq Q \quad & :\Leftrightarrow \quad \forall x \in P, x \in Q \\ & \Leftrightarrow \quad \forall x, x \in P \Rightarrow x \in Q \end{aligned}$$

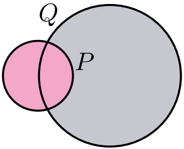
Exemples

- $\{3\} \subseteq \{1, 3, 5\}$
- $\{a, e, i, o, u\} \subseteq \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$
- $\{a, e, i, o, u\} \subset \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$
- $\{a, e, i, o, u\} \subseteq \{a, e, i, o, u\}$
- $\{a, e, i, o, u\} \not\subset \{a, e, i, o, u\}$

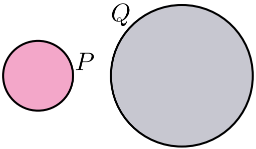
Non-inclusion d'ensembles

$$\begin{aligned} P \not\subseteq Q &\Leftrightarrow \neg(P \subseteq Q) \\ &\Leftrightarrow \neg(\forall x, x \in P \Rightarrow x \in Q) \\ &\Leftrightarrow \exists x, x \in P \text{ et } x \notin Q \end{aligned}$$

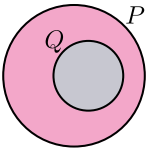
Possibilités



ou



ou



Non-inclusion d'ensembles

$$\begin{aligned} P \not\subseteq Q &\Leftrightarrow \neg(P \subseteq Q) \\ &\Leftrightarrow \neg(\forall x, x \in P \Rightarrow x \in Q) \\ &\Leftrightarrow \exists x, x \in P \text{ et } x \notin Q \end{aligned}$$

Exemples

- $\{1,3,5\} \not\subseteq \{1,2,5\}$ et $\{1,2,5\} \not\subseteq \{1,3,5\}$
- $\{1,3,5\} \not\subseteq \{7,9,10\}$ et $\{7,9,10\} \not\subseteq \{1,3,5\}$
- $\{1,3,5\} \not\subseteq \{1,5\}$ mais $\{1,5\} \subseteq \{1,3,5\}$

Attention

$3 \in \{1,3,5\}$ mais $3 \not\subseteq \{1,3,5\}$

Théorie des ensembles

Définitions et notations

Égalité d'ensembles

$$P = Q \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x, x \in P \Leftrightarrow x \in Q$$

P et Q ont les mêmes éléments

Propriété

$$P = Q \quad \Leftrightarrow \quad P \subseteq Q \text{ et } Q \subseteq P$$

Exemples

- $\{a, e, i, o, u\} = \{i, a, o, u, e\}$
- $\{a, e, i, o, u\} = \{o, e, i, u, o, e, a, a\}$
- $\{a, e, i, o, u\} \neq \{o, e, o, u, o, e, a, a, u\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid 8 \leq n \text{ et } \exists p, q \in \mathbb{N}, n = 3p + 5q\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 8 \leq n\}$

Théorie des ensembles

Définitions et notations

Union/intersection d'ensembles

$$X \cup Y := \{x \in U \mid x \in X \textbf{ ou } x \in Y\}$$

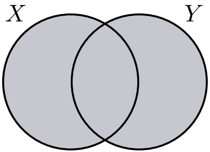
$$X \cap Y := \{x \in U \mid x \in X \textbf{ et } x \in Y\}$$

Soit $\mathcal{F}$ famille d'ensembles (i.e. ensemble d'ensembles) :

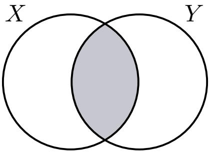
$$\bigcup \mathcal{F} := \{x \in U \mid \exists Y \in \mathcal{F}, x \in Y\}$$

$$\bigcap \mathcal{F} := \{x \in U \mid \forall Y \in \mathcal{F}, x \in Y\}$$

Illustration



$X \cup Y$



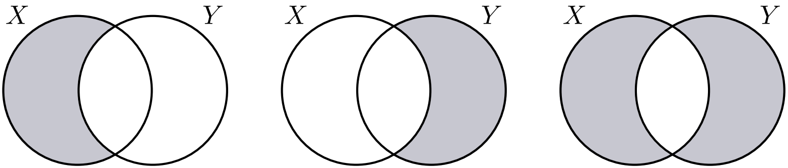
$X \cap Y$

Différence/différence symétrique d'ensembles

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$$

$$X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

Illustration

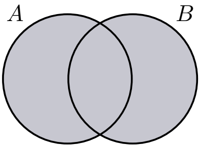


$X \setminus Y$ $\quad$ $Y \setminus X$ $\quad$ $X \triangle Y$

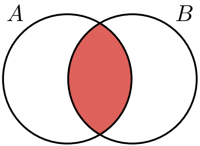
Exemple de démonstration

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \stackrel{?}{=} A \triangle B$$

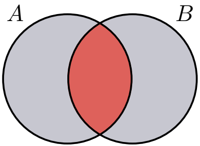
Illustration



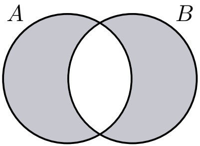
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \cup B \setminus A \cap B$



$A \triangle B$

Exemple de démonstration

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \stackrel{?}{=} A \triangle B$$

Démonstration

Soient A et B des ensembles.

$\boxed{\subseteq}$ Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Par définition $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Comme $x \in A \cup B$, on a deux cas :

- $\boxed{x \in A}$ Nécessairement $x \notin B$ (sinon $x \in A \cap B$), d'où $x \in A \setminus B$ et par suite $x \in A \triangle B$.
- $\boxed{x \in B}$ De même $x \notin A$ puis $x \in B \setminus A$ d'où $x \in A \triangle B$.

Dans tous les cas on a bien $x \in A \triangle B$.

Exemple de démonstration

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \stackrel{?}{=} A \triangle B$$

Démonstration

Soient A et B des ensembles.

$\boxed{\supseteq}$ Soit $x \in A \triangle B$. D'après la définition on a deux cas :

$\boxed{x \in A \setminus B}$ i.e. $x \in A$ et $x \notin B$. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$, et comme $x \notin B$ alors $x \notin A \cap B$. D'où $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$\boxed{x \in B \setminus A}$ On procède de façon similaire.

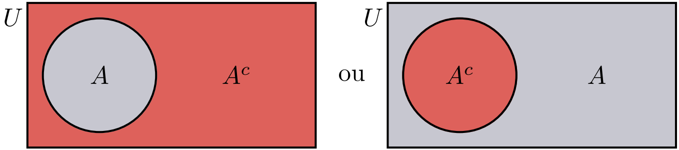
Dans tous les cas on a bien $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Complémentaire d'un ensemble

$$\text{Si } A \subseteq U \qquad \complement_U A := \{x \in U \mid x \notin A\} = U \setminus A$$

On note aussi A^c ou $\overline{A}$ quand U se déduit du contexte

Illustration



Exemples

- $\complement_U \emptyset = U \qquad \complement_U U = \emptyset$
- $P := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}\} \quad I := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impair}\}$
  $\complement_{\mathbb{N}} I = P \qquad \complement_{\mathbb{N}} P = I \qquad \complement_I P = I$

Ensemble des parties

$$\mathcal{P}(E) := \{S \mid S \subseteq E\}$$

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\ \emptyset,$
$\{1\}, \{2\}, \{3\},$
$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\},$
$\{1, 2, 3\}\quad\}$

Attention

- $X \in \mathcal{P}(E) \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq E$
- $X \subseteq \mathcal{P}(E) \quad \Leftrightarrow \quad X$ famille d'ensembles de E

Partition

Soit $P \subseteq \mathcal{P}(E)$. P partition de E ssi :

1. $\forall A \in P, A \neq \emptyset$ — P formé d'ensembles non vides,
2. $\forall A, B \in P, \quad A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ — deux à deux disjoints,
3. $E = \bigcup P$ — dont la réunion est E.

Exemples

Soit $E := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

- $P_1 := \{ \ \{1, 3, 5, 7, 9\}, \{0, 2, 4, 6, 8\} \ \}$ est une partition de E
- mais pas $P_2 := \{\emptyset, \{1, 3, 5, 7, 9\}, \{0, 2, 4, 6, 8\}\}$
- ni $P_3 := \{\{1, 3, 5, 7, 8, 9\}, \{0, 2, 4, 6, 8\}\}$
- ni $P_4 := \{\{3, 5, 7, 9\}, \{0, 2, 4, 6, 8\}\}$

Produit cartésien

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \in A_i\}$$

$(a_1, \ldots, a_n)$ est appelé n-uplet

Exemple

$$\{1,2,3,4\} \times \{a,b\} = \{ \begin{array}{l} (1,a),(2,a),(3,a),(4,a), \\ (1,b),(2,b),(3,b),(4,b) \end{array} \}$$

Égalité

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_m) \quad :\Leftrightarrow \quad m = n \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = b_i$$

Notation

$$A^n = \overbrace{A \times \ldots \times A}^{n \text{ fois}}$$

Théorie des ensembles

Propriétés algébriques

Tout est relativisé à un univers U, i.e. $A, B, C \subseteq U$.

Commutativité	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativité	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributivité	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotence	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Neutre	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$ (avec U l'univers)
Absorption	$A \cup U = U$ (avec U l'univers) $A \cap \emptyset = \emptyset$

Théorie des ensembles

Propriétés algébriques

Tout est relativisé à un univers U, i.e. $A, B, C \subseteq U$.

De Morgan
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Complémentaire
$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$\overline{U} = \emptyset \qquad \overline{\emptyset} = U$$
$$A \cup \overline{A} = U \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Inclusion
$$A \subseteq A \qquad \text{(réflexivité)}$$
$$A \subseteq B \text{ et } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \qquad \text{(transitivité)}$$
$$A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A \Rightarrow A = B \qquad \text{(antisymétrie)}$$
$$\emptyset \subseteq A \text{ et } A \subseteq U$$