CHAPITRE 1

Quelques rappels sur les fonctions

1.1. Fonctions

Dans ce cours, on s'intéressera à des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$.

Une telle fonction peut être définie à l'aide d'une formule, par exemple

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin x}{(x-1)^2}.$$

Ou bien en indiquant, à l'aide d'une accolade, une formule différente selon la valeur de x, par exemple

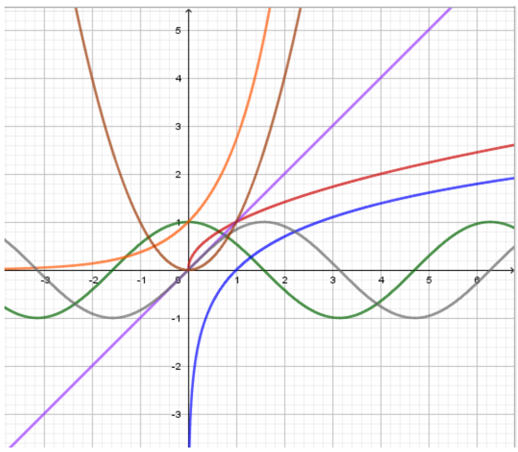
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0, \\ 2 & \text{si } x = 0, \\ 2 + \cos x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ou bien en décrivant, par une phrase, la procédure qui donne l'image d'un élément ; comme par exemple pour la fonction *partie entière* :

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \text{le plus grand entier} \leq x.$$

Ayant fixé un repère, la **courbe représentative** ou **graphe** d'une fonction est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, lorsque x varie dans l'ensemble de définition de la fonction.

Exemple : dans la figure suivante, on a représenté le graphe de sept fonctions bien connues.



1.2. Fonctions paires, impaires, périodiques

On rappelle les notions suivantes :

- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *paire* si on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela se traduit par le fait que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *impaire* si on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela se traduit par le fait que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique si on a $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, et T-périodique, alors la donnée de son graphe sur l'intervalle $[0, \frac{T}{2}]$ permet de reconstituer tout le graphe.

EXEMPLES 1.2.1. (a) La fonction carrée $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est paire. La fonction cos est paire.
(b) La fonction sin est impaire. La fonction identité $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est impaire.
(c) Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.
(d) La fonction exp n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

1.3. Notion de limite

On rappelle la notion de limite.

DÉFINITION 1.3.1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$ (on dira : "près de a"), c'est-à-dire que D contient un intervalle de la forme $]a-r, a[$ ou $]a, a+r[$ pour un certain $r > 0$.

(1) On dit que f **admet** $+\infty$ (respectivement $-\infty$) **pour limite** en a si et seulement si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad (0 < |x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant A)$$
(respectivement
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad (0 < |x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant A)).$$
(2) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f **admet** ℓ **pour limite** en a si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad 0 < |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Lorsque l'ensemble de définition D contient un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (respectivement $]-\infty; B[$) alors on peut aussi définir (de façon similaire) la notion de limite de f en $+\infty$ (respectivement, $-\infty$).

EXEMPLES 1.3.2. Les limites suivantes peuvent être établies à l'aide de la définition :
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} x \sin x = 0.$$

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

PROPRIÉTÉS 1.3.3 (Opérations sur les limites). *Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.*
(a) *Soient $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies près de a, admettant en a des limites ℓ_1 et ℓ_2 respectivement ($\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$). Alors, lorsque les opérations sur les limites ont un sens, on a*
- $\lim\limits_{x \to a} (f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) + \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = \ell_1 + \ell_2$ *;*
- $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lambda \ell$ *;*

- $\lim\limits_{x\to a}(f_1f_2)(x) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \times \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \ell_1\ell_2$;
- $\lim\limits_{x\to a}(f_1/f_2)(x) = \dfrac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

(b) *Soient $\ell, L \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : \Delta \to \mathbb{R}$. On suppose que f est définie près de a, g est définie près de ℓ, et que Δ contient $f(D)$. On suppose que f admet une limite ℓ en a et g admet une limite L en ℓ. On a alors*

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \lim_{y\to \ell} g(y) = L.$$

1.4. Continuité et dérivabilité

On considère ici une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle (non vide, non réduit à un point) de $\mathbb{R}$. On rappelle les notions de continuité et dérivabilité.

DÉFINITION 1.4.1. Soit a un point de I. La fonction f est dite **continue** en a si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\alpha > 0, \quad \forall x \in I, \qquad (|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Cela revient à dire :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point $a \in I$. Graphiquement cela se traduit par le fait que le graphe de f est un trait continu.

DÉFINITION 1.4.2. Soit a un point de I. La fonction f est dite **dérivable** en a si la fonction φ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\varphi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie en a. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en a et est notée $f'(a)$.

La quantité

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est appelée **taux de variation de f entre a et x**. C'est le coefficient directeur de la droite qui passe par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$. Graphiquement, le fait que f soit dérivable en a se traduit par le fait que le graphe de f admet une droite tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$, de coefficient directeur $f'(a)$, et dont l'équation sera donc

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

1.5. Comparaison des fonctions

DÉFINITION 1.5.1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies près de a.

(a) On dira que f **est négligeable devant g au voisinage de a** et on écrira $f = o_a(g)$ (on lit "f est un petit o de g") si on peut écrire $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ où ε est une fonction définie au voisinage de a et telle que $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

(b) On dira que f **est équivalente à g au voisinage de a** et on écrira $f \sim_a g$ si on peut écrire $f(x) = \eta(x)g(x)$ où η est une fonction définie au voisinage de a et telle que $\lim_{x\to a}\eta(x) = 1$.

En pratique, si g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), alors
- $f = o_a(g)$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,
- $f \sim_a g$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Remarque 1.5.2. La relation "être négligeable devant au voisinage de a" est une relation transitive (si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$), la relation être "équivalent à au voisinage de a" est une relation d'équivalence (réflexive, transitive et symétrique).

Ces définitions s'étendent au cas $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ ou au cas où on regarde une limite à droite ou à gauche seulement.

Exemples 1.5.3. (1) $x^4 = o_0(x^2)$, plus généralement si $n > p$ alors $x^n = o_0(x^p)$. (2) $\sin(x) \sim_0 x$.

Définition 1.5.4 (Cas des suites). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
(1) On dira que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable devant** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on peut écrire $u_n = \varepsilon_n v_n$ où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.
(2) On dira que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on peut écrire $u_n = \eta_n v_n$ où $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = 1$.

Comme avant pour les fonctions, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang) alors
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

1.6. Développement limité à l'ordre 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose f dérivable en a. On a donc la formule

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

que l'on peut écrire encore sous la forme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x - a} = 0.$$

Si on pose $h(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ alors on a l'égalité

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + h(x) \quad \text{pour tout } x \in I$$

et d'autre part la limite précédente donne

$$h(x) = o_a(x-a).$$

En combinant ces égalités on déduit la formule

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)}$$

qui traduit le fait que, au voisinage de a, la fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ fournit une approximation de la fonction f.

La formule encadrée est appelée **développement limité à l'ordre 1**.

EXEMPLES 1.6.1. Au voisinage de 0, on a
$\exp(x) = 1+x+o(x), \quad \sin(x) = x+o(x), \quad \cos(x) = 1+o(x), \quad \ln(1+x) = x+o(x)$
et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$.

CHAPITRE 2

Développements limités

2.1. Définition et premiers exemples et propriétés

2.1.1. Développement limité en un point. On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie près de a.

DÉFINITION 2.1.1. Soit $n \geq 0$ un entier naturel. On dit que f admet **un développement limité d'ordre n en a** (on écrit $DL_n(a)$), si il existe
- des coefficients réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$
- et une fonction $\phi : D \to \mathbb{R}$ de limite nulle en a

tels que, pour tout $x \in D$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + (x-a)^n \phi(x) \quad \text{pour tout } x \in D.$$

De plus, on emploie la terminologie suivante :
- La fonction polynomiale $\left(x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k\right)$ sera appelée la **partie régulière** de f et notée $\mathrm{Reg}_n(f;a)$ ou bien $\mathrm{Reg}_n(f)$ si aucune confusion n'est possible.
- La fonction $(x \mapsto (x-a)^n \phi(x))$ est **négligeable** devant $(x \mapsto (x-a)^n)$ et on pourra la noter $o_a((x-a)^n)$ ou $o((x-a)^n)$ si aucune confusion n'est possible.

Remarque : si f admet un $DL_n(a)$, alors f admet a_0 pour limite en a.

EXEMPLES 2.1.2. (a) Si f est une fonction polynomiale de degré n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

alors f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\mathrm{Reg}_n(f;0) = f$.

(b) Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - 3x + 7x^2 + 8x^3$, qui est une fonction polynomiale de degré 3. Alors on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 3x + 7x^2 + 8x^3 + x^3 \times \underbrace{0}_{=\phi(x)}, \text{ c'est un } DL_3(0) \\ &= 1 - 3x + 7x^2 + x^2 \times \underbrace{8x}_{=\psi(x)}, \text{ c'est un } DL_2(0) \\ &= 1 - 3x + 7x^2 + 8x^3 + 0x^4 + \ldots + 0x^n + x^n \times 0, \\ &\quad \text{c'est un } DL_n(0) \text{ pour tout } n \geq 4. \end{aligned}$$

(c) Si f est polynomiale de degré n et $a \in \mathbb{R}$, alors on peut toujours écrire f sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$$

avec certains coefficients $a_0, \ldots, a_n$, et cette écriture indique que f admet un $DL_n(a)$ quel que soit a.

(d) Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on connaît la formule

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

qui permet alors d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \frac{x}{1-x}$$

et f admet donc un $DL_n(0)$ de partie régulière $\operatorname{Reg}_n(f) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ car $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$.

Propriété 2.1.3. *Si f admet un $DL_n(a)$, alors il est unique. Plus précisément, si on a deux développements limités :*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \phi(x) \ \forall x \in D$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \psi(x) \ \forall x \in D$$

alors $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots a_n = b_n$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $a_k = b_k$, et notons par k_0 le plus petit k vérifiant cela. On a alors pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} & a_0 + \ldots + a_{k_0-1}(x-a)^{k_0-1} + a_{k_0}(x-a)^{k_0} + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\phi(x) \\ = \ & a_0 + \ldots + a_{k_0-1}(x-a)^{k_0-1} + b_{k_0}(x-a)^{k_0} + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\psi(x) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & a_{k_0}(x-a)^{k_0} + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\phi(x) \\ = \ & b_{k_0}(x-a)^{k_0} + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\psi(x) \end{aligned}$$

et en divisant par $(x-a)^{k_0}$ on obtient pour tout $x \neq a$:

$$\begin{aligned} & a_{k_0} + \ldots + a_n(x-a)^{n-k_0} + (x-a)^{n-k_0}\phi(x) \\ = \ & b_{k_0} + \ldots + b_n(x-a)^{n-k_0} + (x-a)^{n-k_0}\psi(x). \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $x \to a$, il suit : $a_{k_0} = b_{k_0}$, une contradiction. $\square$

Propriété 2.1.4. *Si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière $\operatorname{Reg}_n(f; a) : x \mapsto a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$ pour un entier $n \geq 1$, alors a fortiori pour tout k inférieur à n, f admet un $DL_k(a)$ dont la partie régulière est obtenue en "tronquant" la précédente : $\operatorname{Reg}_k(f; a) : x \mapsto a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_k(x-a)^k$.*

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_k(x-a)^k \\ &\quad + (x-a)^k \underbrace{[a_{k+1}(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^{n-k} + (x-a)^{n-k}\phi(x)]}_{=\psi(x)} \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to a} \psi(x) = 0$. $\square$

2.1.2. Lien avec continuité et dérivabilité. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle et soit $a \in I$.

Lien entre continuité et $DL_0(a)$. Lorsque f est continue en a, autrement dit $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, alors on peut écrire

$$f(x) = f(a) + (f(x) - f(a)) = f(a) + (x-a)^0\phi(x) \quad \text{pour tout } x \in I,$$

où on note $\phi(x) = f(x) - f(a)$, ce qui définit une fonction telle que $\lim_{x\to a}\phi(x) = 0$. Autrement dit, lorsque f est continue en a, alors f admet un $DL_0(a)$, et $\mathrm{Reg}_0(f;a)$ est la fonction constante $f(a)$.

Lien entre dérivabilité et $DL_1(a)$. Comme déjà vu dans la section 1.6 : lorsque f est dérivable en a, alors on peut écrire

$$(*) \qquad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\psi(x)$$

où $\psi : I \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Par définition de la dérivabilité on a $\lim_{x\to a}\psi(x) = 0$. Ainsi $(*)$ est un $DL_1(a)$ pour f.

Remarque 2.1.5. Inversement, si f admet un $DL_n(a)$ avec $n \geq 1$, donc de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\phi(x) \text{ pour tout } x \in I$$

avec $\lim_{x\to a}\phi(x) = 0$, alors :
- f est continue et dérivable en a,
- $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

En effet :
- En posant $x = a$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient $f(a) = a_0$.
- En faisant tendre x vers a dans le membre droit de l'égalité ci-dessus, on obtient que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et vaut $a_0 = f(a)$, donc f est continue en a.
- Lorsque $x \neq a$, l'égalité ci-dessus (où on remplace a_0 par $f(a)$) entraîne

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = a_1 + a_2(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}\phi(x)$$

  où le membre droit a une limite lorsque $x \to a$, égale à a_1. Donc la limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est égale à a_1. Cela entraîne que f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a) = a_1$.

On en déduit des exemples de DL_1. Au lieu de $(x-a)\phi(x)$ on écrit $o((x-a))$.

Exemples 2.1.6. – Développements limités en 0 :
- $\sin(x) = \sin(0) + x\sin'(0) + o(x) = x + o(x)$,
- $\cos(x) = 1 + o(x)$,
- $\exp(x) = 1 + x + o(x)$.

– Développement limité en 1 :
- $\ln(x) = \ln(1) + (x-1)\ln'(1) + o((x-1)) = (x-1) + o((x-1))$.

– Développement limité en $\frac{\pi}{4}$:
- $\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{4}) + (x-\frac{\pi}{4})\tan'(\frac{\pi}{4}) + o((x-\frac{\pi}{4})) = 1 + 2(x-\frac{\pi}{4}) + o((x-\frac{\pi}{4}))$.

Voici un exemple de DL_2 :

Exemple 2.1.7. On écrit d'abord $\sin(y) = y + y\phi(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, où $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\lim_{y\to 0} \phi(y)$. On observe ensuite que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(2\frac{x}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2}) = 1 - 2\Big(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\phi(\frac{x}{2})\Big)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\Big(\underbrace{\phi(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\big(\phi(\frac{x}{2})\big)^2}_{=:\psi(x)}\Big) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\psi(x) \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 0} \psi(x) = 0$. On a donc obtenu un $DL_2(0)$ de cos.

On aura besoin d'une méthode plus systématique pour trouver un $DL_n(a)$ d'une fonction donnée, pour $n \geq 2$.

2.1.3. Lien avec fonctions paires et impaires. Voici une propriété vérifiée en particulier par les développements limités obtenus précédemment pour les fonctions sin et cos.

Propriété 2.1.8. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un $DL_n(0)$:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\phi(x).$$

Si f est paire alors on a $a_k = 0$ pour tout k impair. Si f est impaire alors on a $a_k = 0$ pour tout k pair.

Démonstration. Lorsque f est paire, on écrit

$$\begin{aligned} f(x) = f(-x) &= a_0 - a_1x + a_2x^2 - \ldots + (-1)^na_nx^n + x^n(-1)^n\phi(-x) \\ &= a_0 + (-a_1)x + a_2x^2 + (-a_3)x^3 + \ldots + (-1)^na_nx^n + x^n\psi(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^ka_kx^k + x^n\psi(x) \end{aligned}$$

et l'unicité du DL entraîne $a_k = (-1)^ka_k$ pour tout entier k compris entre 0 et n, donc $a_k = 0$ pour tout tel entier impair. Lorsque f est impaire, le raisonnement est similaire en écrivant $f(x) = -f(-x)$. □

2.1.4. Se ramener à un développement limité en 0. Pour chercher un $DL_n(a)$ d'une fonction f, il suffit de chercher un $DL_n(0)$ de la fonction $(h \mapsto f(a+h))$.

Exemple 2.1.9. On cherche un $DL_3(2)$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour cela on cherche un $DL_3(0)$ de la fonction $h \mapsto \frac{1}{2+h}$. On écrit :

$$\frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-y}$$

avec $y = -\frac{h}{2}$. On utilise le $DL_3(0)$ déjà vu :

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + y^3\phi(y)$$

et on remplace

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+h} &= \frac{1}{2}(1 + (-h/2) + (-h/2)^2 + (-h/2)^3 + (-h/2)^3\phi(-h/2)) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + h^3\psi(h) \end{aligned}$$

où $\psi(h) = -\frac{1}{16}\phi(-h/2)$.

On peut de même trouver un $DL_n(a)$ de f pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tout $n \geq 0$. En raisonnant de même on a

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a+h} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{h^k}{a^{k+1}} + h^n\psi(h) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(x-a)^k}{a^{k+1}} + (x-a)^n\tilde{\psi}(x)$$

où $\lim_{h\to 0}\psi(h) = \lim_{x\to a}\tilde{\psi}(x) = 0$.

2.2. Opérations sur les développements limités

2.2.1. Combinaison linéaire, produit.

PROPRIÉTÉ 2.2.1. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies près de a. Supposons que chacune de ces deux fonctions admet un $DL_n(a)$. Alors*

- *si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f + g$ admet un $DL_n(a)$, et $\mathrm{Reg}_n(\lambda f + g; a) = \lambda \mathrm{Reg}_n(f; a) + \mathrm{Reg}_n(g; a)$;*
- *$f \times g$ admet un $DL_n(a)$, et $\mathrm{Reg}_n(f \times g; a)$ s'obtient en faisant le produit des parties régulières $\mathrm{Reg}_n(f; a) \times \mathrm{Reg}_n(g; a)$, et en "tronquant au degré n", c'est-à-dire en enlevant tous les termes en $(x-a)^k$ avec $k > n$; on notera*

$$\mathrm{Reg}_n(f \times g; a) = \mathrm{Tronc}_n(\mathrm{Reg}_n(f; a) \times \mathrm{Reg}_n(g; a)).$$

Autrement dit, si on dispose d'un $DL_n(a)$ pour deux fonctions f et g, et si on effectue une opération sur ces fonctions, alors la nouvelle fonction obtenue admettra aussi un $DL_n(a)$, dont la partie régulière s'obtient en effectuant la même opération sur les parties régulières de f et g et en enlevant les termes de degré au delà de n.

On illustre la propriété sur un exemple :

EXEMPLE 2.2.2. Si $f(x) = 1+x+x^2+2x^3+o(x^3)$ et $g(x) = 3-2x-x^2+x^3+o(x^3)$ au voisinage de 0, on obtient (en appliquant la propriété) :

$$\begin{aligned} (2f+g)(x) &= 5 + x^2 + 5x^3 + o(x^3) \\ (fg)(x) &= 3 + x + 4x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Démontrons la propriété dans le cas particulier de cet exemple : On a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + 2x^3 + x^3\phi_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} 3 - 2x - x^2 + x^3 + x^3\phi_2(x)$$

pour tout $x \in D$, où $\lim\limits_{x\to 0}\phi_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\phi_2(x) = 0$. On a :

$$(2f+g)(x) = 2f(x) + g(x) = 5 + x^2 + 5x^3 + x^3(\underbrace{2\phi_1(x) + \phi_2(x)}_{=\phi(x)})$$

où ϕ vérifie $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x) = 0$. D'où, $2f+g$ admet le $DL_3(0)$ indiqué.

$$\begin{aligned} (fg)(x) = 3 &+ (-2+3)x + (-1-2+3)x^2 + (1-1-2+6)x^3 + (1-1-4)x^4 \\ &+ (1-2)x^5 + 2x^6 \\ &+ x^3\big(\underbrace{\phi_1(x)\left[3 - 2x - x^2 + x^3\right] + \phi_2(x)\left[1 + x + x^2 + 2x^3\right] + x^3\phi_1(x)\phi_2(x)}_{=\phi(x)}\big) \\ = 3 &+ x + 4x^3 + x^3\phi(x) \end{aligned}$$

où ϕ vérifie $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x) = 0$. Ainsi fg admet le $DL_3(0)$ indiqué.

2.2.2. Composition.

PROPRIÉTÉ 2.2.3. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que la composition $g \circ f$ est bien définie ; autrement dit $f(x) \in E$ pour tout $x \in D$ (c'est certainement le cas si $E = \mathbb{R}$).*

On suppose f définie près de a et g définie près de $b = f(a)$. Supposons que f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière $\mathrm{Reg}_n(f; a)$ et que g admet un $DL_n(f(a))$ de partie régulière $\mathrm{Reg}_n(g; f(a))$. Alors $g \circ f$ admet un $DL_n(a)$ tel que

$$\mathrm{Reg}_n(g \circ f) = \mathrm{Tronc}_n(\mathrm{Reg}_n(g; f(a)) \circ \mathrm{Reg}_n(f; a)).$$

EXEMPLE 2.2.4. Si $f(x) = 1+x+x^2+x^2\phi_1(x)$ et $g(x) = 3-2(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^2\phi_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \phi_1(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 1} \phi_2(x)$, on a donc $a = 0$ et $b = f(a) = 1$, et on obtient

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= 3 - 2(x + x^2 + x^2\phi_1(x)) - (x + x^2 + x^2\phi_1(x))^2 \\ &\quad + (x + x^2 + x^2\phi_1(x))^2\phi_2(x + x^2 + x^2\phi_1(x)) \\ &= 3 - 2x - 3x^2 + x^2\phi(x)\end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to 0} \phi(x) = 0$. Dans ce calcul on a refait le raisonnement, on n'a pas utilisé la propriété.

En utilisant la propriété on peut écrire plus simplement :

$$\begin{aligned}\mathrm{Reg}_2(g; 1) \circ \mathrm{Reg}_2(f; 0)(x) &= 3 - 2(x + x^2) - (x + x^2)^2 \\ &= 3 - 2x - 3x^2 - 2x^3 - x^4\end{aligned}$$

d'où en enlevant les termes de degré > 2 :

$$\mathrm{Reg}_2(g \circ f; 0) = \mathrm{Tronc}_2(\mathrm{Reg}_2(g; 1) \circ \mathrm{Reg}_2(f; 0)) : x \mapsto 3 - 2x - 3x^2$$

d'où le $DL_2(0)$ donné par la propriété :

$$g \circ f(x) = 3 - 2x - 3x^2 + o(x^2).$$

2.2.3. Quotient. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie près de a. On suppose que f admet un $DL_n(a)$, qui s'écrit :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \ldots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n\phi(x)$$

où $\lim_{x\to a} \phi(x) = 0$. On a en particulier $a_0 = f(a)$. On s'intéresse à des quotients de la forme $\frac{1}{f(x)}$ ou plus généralement $\frac{1}{f(x)}$.

1er cas : $f(a) \neq 0$. Autrement dit $a_0 \neq 0$. Notons que la fonction $\frac{1}{f}$ est la composition $I \circ f$ où $I : x \mapsto \frac{1}{x}$. Dans l'Exemple 2.1.9, nous avons vu que I admet un $DL_n(a_0)$, de partie régulière

$$\mathrm{Reg}_n(I; a_0) : y \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(y - a_0)^k}{a_0^{k+1}}.$$

Il résulte que $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(a)$ de partie régulière

$$\mathrm{Tronc}_n(\mathrm{Reg}_n(I; a_0) \circ \mathrm{Reg}_n(f; a)).$$

EXEMPLE 2.2.5. Si $f(x) = 2 - x + x^2 + o(x^2)$ en 0, alors

$$1/f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

En écrivant $g/f = g \times (1/f)$, on en déduit alors le résultat pour le quotient de deux fonctions :

PROPRIÉTÉ 2.2.6. *Soient f et g deux fonctions définies près de a et admettant chacune un DL_n en a, pour $n \geq 0$. On suppose de plus que $f(a) \neq 0$. Alors g/f possède un DL_n en a.*

Et à l'aide des règles de calcul précédentes, on peut calculer ce DL.

REMARQUE 2.2.7. Une autre méthode lorsque $a = 0$. Si P et Q sont deux polynômes tels que $Q(0) \neq 0$, alors pour tout $n \geq 0$ il existe un unique couple de polynômes A_n et B_n tel que $\deg A_n \leq n$ et

$$P = A_n Q + B_n X^{n+1}.$$

On dit que A_n est le quotient de la division suivant les puissances croissantes d'ordre n de P par Q.

Dans le cas où $a = 0$, f, g admettent un $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $\mathrm{Reg}_n(f;a)$ et $\mathrm{Reg}_n(g;a)$, et $f(0) \neq 0$, alors le quotient g/f admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le quotient de la division suivant les puissances croissantes d'ordre n de $\mathrm{Reg}_n(g;a)$ par $\mathrm{Reg}_n(f;a)$.

2ème cas : $f(a) = 0$. Autrement dit $a_0 = 0$. On note par p le premier indice tel que $a_p \neq 0$ (en supposant qu'il existe). Alors l'écriture

$$f(x) = (x-a)^p(a_p + a_{p+1}(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^{n-p} + (x-a)^{n-p}\phi_1(x))$$

est la forme normalisée du DL de f en a.

Le quotient $1/f$ n'aura pas de DL en a, puisqu'il n'a pas de limite finie lorsque $x \to a$.

En revanche il est possible qu'un quotient de la forme g/f ait un DL en a. Supposons que g admet un $DL_n(a)$ de forme normalisé :

$$(x-a)^q(b_q + b_{q+1}(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^{n-q} + (x-a)^{n-q}\phi_2(x)).$$

Si $q \geq p$, alors g/f admet un $DL_{n-p}(a)$, que l'on peut déterminer en écrivant

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{(x-a)^{q-p}(b_q + b_{q+1}(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^{n-q} + (x-a)^{n-q}\phi_2(x))}{a_p + a_{p+1}(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^{n-p} + (x-a)^{n-p}\phi_1(x)},$$

car on se ramène ainsi au cas où le dénominateur a une valeur non nulle en a.

2.3. Formule de Taylor-Young

2.3.1. Primitivation. Une autre opération possible sur un DL est la "primitivation" :

PROPRIÉTÉ 2.3.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a, continue sur I, et donc admettant des primitives sur I. Supposons que f admet en a un DL_n s'écrivant*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Alors toute primitive F de f admet un DL_{n+1} en a, donné par

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Démonstration. On écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + (x-a)^n \phi(x)$$

où $\lim_{x\to a} \phi(x) = 0$. Comme f est continue, on a

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k(t-a)^k + (t-a)^n \phi(t)\, dt \Big).$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \int_a^x (t-a)^n \phi(t)\, dt.$$

On écrit l'intégrale sous la forme $(x-a)^{n+1}\psi(x)$, pour cela on pose

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x (t-a)^n \phi(t)\, dt & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Pour avoir le DL souhaité, il reste à justifier que

$$(*) \qquad \lim_{x\to a} \psi(x) = 0.$$

Pour voir cela, on utilise la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$. Comme on sait que $\lim_{t\to 0} \phi(t) = 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$0 < |t-a| \leq \alpha \ \Rightarrow \ |\phi(t)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in I$ tel que $0 < |x-a| \leq \alpha$. Pour tout t compris entre a et x, on a alors $|t-a| \leq |x-a| \leq \alpha$ et donc $|\phi(t)| \leq \varepsilon$, ce qui permet de borner $\psi(x)$:

$$|\psi(x)| = \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \Big| \int_a^x \underbrace{|t-a|^n}_{\leq |x-a|} \underbrace{|\phi(t)|}_{\leq \varepsilon}\, dt \Big| \leq \frac{1}{|x-a|^{n+1}} |x-a|^{n+1} \varepsilon = \varepsilon.$$

On a donc montré la phrase mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |\psi(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui montre $(*)$. □

Exemple 2.3.2. (a) Au voisinage de 0, on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

donc

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

d'où

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^{n+1}).$$

(b) Au voisinage de 0 on a un DL_1 de sinus :

$$\sin(x) = x + o(x)$$

ce qui entraîne un DL_2 de cosinus :

$$-\cos(x) = -\cos(0) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

donc

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

C'est le $DL_2(0)$ de cos qu'on avait déjà trouvé par une autre méthode. En continuant de primitiver, on obtient un $DL_3(0)$ de sin :

$$\sin(x) = \sin(0) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

puis un $DL_4(0)$ de cos, puis un $DL_5(0)$ de sin, etc.

La partie (b) de l'exemple suggère que de proche en proche, on peut obtenir un DL_n d'une fonction suffisamment dérivable. Ce principe trouve sa formalisation dans l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2.3.3 (Formule de Taylor-Young). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a. Si f est n fois dérivable sur I, alors la fonction f admet un DL_n en a donné par*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur $n \geq 1$. L'initialisation a été faite dans la section 2.1.2. Pour l'hérédité, on suppose la propriété vraie au rang n, donc le théorème vraie pour les fonctions n fois dérivable. On suppose que f est $n+1$ fois dérivable. Alors f' est n fois dérivable, donc la formule du théorème est vraie pour f' :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Notons que $(f')^{(k)}(a) = f^{(k+1)}(a)$. Ensuite, par la Propriété 2.3.1, on obtient un $DL_{n+1}(a)$ de f, qui a la forme indiquée par l'énoncé. □

2.3.2. DL en 0 des fonctions usuelles. À l'aide des techniques qu'on a développées, on obtient les DL suivants en 0, qu'il faut connaître.

$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	$= 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	$= 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\arctan(x)$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$	$= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^\alpha$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots$ $+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
	(où α désigne un réel)	
e^x	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\mathrm{ch}(x)$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\mathrm{sh}(x)$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cos(x)$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\sin(x)$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan(x)$	$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$	

2.4. Applications

2.4.1. Calcul de limite. Les DL permettent de lever une indétermination pour effectuer un calcul de limite.

EXEMPLE 2.4.1. Déterminer la limite en 0 de

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^3}.$$

Écrit sous cette forme, le quotient est une forme indéterminée. On effectue un $DL_3(0)$ du numérateur en écrivant

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

et

$$\sqrt{1-x} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

donc

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x = \frac{1}{8}x^3+o(x^3).$$

D'où

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^3} = \frac{1}{8}+o(1)$$

et finalement la limite cherchée est $\frac{1}{8}$.

2.4.2. Recherche d'équivalent. Les DL permettent aussi de trouver un équivalent simple pour une fonction. Lorsqu'un $\mathrm{DL}_n(a)$ s'écrit :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

où au moins un des coefficients $a_0, \ldots, a_n$ est non nul, alors

$$f(x) \sim_a a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$$

(la fonction est équivalente à la partie régulière de son DL). En effet, en notant par p l'indice du premier coefficient a_p non nul, on obtient

$$f(x) = (a_p(x-a)^p + \ldots + a_n(x-a)^n)\Big(1+\frac{(x-a)^{n-p}\phi(x)}{a_p+\ldots+a_n(x-a)^{n-p}}\Big)$$

où la parenthèse tend vers 1 lorsque $x \to a$.

Pour un équivalent plus simple : le calcul montre par ailleurs que

$$f(x) \sim_a a_p(x-a)^p.$$

2.4.3. Étude locale d'une fonction. Les DL permettent aussi d'étude localement une fonction (et sa courbe représentative) au voisinage d'un point, en déterminant l'équation de la tangente et la position de la courbe par rapport à sa tangente.

PROPRIÉTÉ 2.4.2. (a) *On suppose que f admet un $DL_n(a)$ avec $n \geq 1$, de la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors la courbe de f admet une tangente en $x = a$ d'équation

$$y = a_0 + a_1(x-a)$$

(on rappelle qu'on a automatiquement $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$).

(b) *Plus précisément, on suppose que f admet un développement limité de la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

avec $p \geq 2$ et $a_p \neq 0$. Alors la position de la courbe par rapport à la tangente (au voisinage du point a) est indiquée par le signe de $a_p(x-a)^p$:

- *si ce signe est positif, la courbe est située au dessus de la tangente,*
- *si ce signe est négatif, la courbe est située en dessous de la tangente.*

En particulier, dans le cadre du point (b) de la propriété, lorsque p est pair, alors la courbe est soit au dessus soit en dessous de la tangente au voisinage de a. En revanche lorsque p est impair, la position relative de la courbe et de la tangente change lorsqu'on franchit le point a ; on dit que la courbe admet un *point d'inflexion* en a.

2.4.4. Développement asymptotique. Dans les paragraphes précédents, on a choisi x^n comme une échelle d'infiniment petits au voisinage de 0. On peut, au voisinage de 0, choisir d'autres échelles et on obtient un *développement asymptotique.*

EXEMPLE 2.4.3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+x^2}$. Cette fonction n'est pas dérivable en 0 donc elle n'admet pas un développement limité en 0 d'ordre ≥ 1. En revanche, elle admet un développement asymptotique en choisissant l'échelle des $x^{\frac{1}{2}}$:

$$\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x}\sqrt{1+x} = x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} + o\left(x^{5/2}\right).$$

Par ailleurs, la notion de développement asymptotique prend sens au voisinage de $+\infty$:

EXEMPLE 2.4.4. Au voisinage de $+\infty$, en choisissant l'échelle des x^{-n} :

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{1}{x}\frac{1+2/x}{1-1/x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

2.4.5. Recherche d'asymptote à une courbe. On rappelle :

PROPRIÉTÉ 2.4.5. *Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$. La courbe de f admet une asymptote d'équation $y = ax+b$ en $+\infty$ si et seulement si*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0.$$

En pratique, pour déterminer une asymptote, on peut chercher un développement asymptotique de f en $+\infty$. Si f a un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = ax + b + a_1\frac{1}{x} + \ldots + a_n\frac{1}{x^n} + o(x^{-n})$$

alors la droite $y = ax+b$ est une asymptote à la courbe en $+\infty$.

Si le développement asymptotique est de la forme

$$f(x) = ax + b + a_p\frac{1}{x^p} + o(x^{-p})$$

avec $p \geq 1$ et $a_p \neq 0$ (on interrompt le développement au premier terme $a_p x^{-p}$ non nul) alors la position de la courbe par l'asymptote (au voisinage de l'infini) est déterminée par le signe de $a_p\frac{1}{x^p}$.

On peut naturellement mener une étude similaire au voisinage de $-\infty$.