Devoir Maison

Valeran MAYTIE

1. Traduction en formule logique :
   (a) $\forall x, E(x,x) \Rightarrow (\exists y, E(x,y) \wedge \neg(x = y))$
   (b) $\forall x, \exists y, (E(x,y) \vee E(y,x))$
   (c) $\exists, x, y, z, \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \wedge ((E(x,y) \vee E(y,x)) \wedge (E(y,z) \vee E(z,y)) \wedge (E(z,y) \vee E(y,z)))$
2. Traduction en langue naturelle :
   (a) 2 sommets sont reliés que dans une direction.
   (b) Tout sommet a deux arètes sortantes qui peuvent arriver sur le même sommet.
   (c) Il existe 2 sommets (possiblement égaux) qui ne sont reliés dans aucun sens.
3. — $\forall x, x = x$
   — $\forall xy, x = y \Rightarrow y = x$
   — $\forall xyz, x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$
   — $\forall xy, x = y \wedge E(x,y) \Rightarrow E(y,x)$
   — $\forall x_1 x_2 y_1 y_2, x_1 = x_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge E(x_1, y_1) \Rightarrow E(x_2, y_2)$
4. (a) Prenons un modèle de ces trois axiomes avec un domaine $\mathcal{D}$.
   Supposons $\mathcal{D}$ fini, on a donc $\mathcal{D} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
   Pour vérifier l'axiome T, on donne $E_I = \{(a_i, a_{i+1}), (a_n, a_0) | i \in [\![0, n-1]\!]\}$, une interprétation de E.
   Or, on peut tout de suite voir que E_I ne satisfait pas l'axiome O, ce qui nous oblige à avoir au moins un sommet qui n'a pas d'arète entrante. Donc, pour satisfaire T et O il faut que 2 sommets pointent vers le même sommet. Or, l'axiome I nous dit que si deux arètes pointent vers le même sommet alors ces deux sommets sont égaux. Ainsi, si nous voulons respecter ces 3 axiomes on aura $\mathcal{D}$ vide ce qui par définition est impossible.
   On est donc obligé d'avoir un domaine infini pour avoir un modèle de ces 3 axiomes.

   (b) Pour chaque cas, on va trouver une interprétation finie vérifiant les deux axiomes choisis.

   On enlève T : On construit l'interprétation Int :
   $\mathfrak{D} = \{a, b\}$
   $=_{Int} = \{\}$
   $E_{Int} = \{\}$
   On a bien $Int \models O \wedge I$

   On enlève O : On construit l'interprétation Int :
   $\mathfrak{D} = \{a, b\}$
   $=_{Int} = \{\}$
   $E_{Int} = \{(a,b), (b,a)\}$
   $a \rightleftarrows b$
   On a bien $Int \models T \wedge I$

   On enlève I : On construit l'interprétation Int :
   $\mathfrak{D} = \{a, b, c\}$
   $=_{Int} = \{\}$
   $E_{Int} = \{(a,b), (b,a), (c,b)\}$
   $a \longrightarrow b \rightleftarrows c$
   On a bien $Int \models T \wedge O$

   Je n'ai pas mis d'environnement car nous n'avons pas de variables.

5. (a) $C_0[x,y] = E(x,y)$
   (b) $C_n[x,y] = \exists z, C_{n-1}[x,z] \wedge E(z,y)$
6. On pose $A = \mathcal{G} \cup \{\neg C_n[a,b] | n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg C[a,b]\}$
   (a) On prend S un sous ensemble fini de A.

   On veut montrer que S est satisfiable pour une interprétation I.

   On commence par poser $N = \{n_1, \ldots, n_k\}$ de taille finie tel que $C = \{\neg C_n[a,b] | n \in N\} \subseteq S$ et C contient toutes les formules de la forme $\neg C_n[a,b]$ de S. N peut être vide si on ne trouve pas la formule $\neg C_n[a,b]$ dans S.

   On va maintenant construire I en fonction de S :

   On pose $k \in \mathbb{N}, k \notin N$
   $\mathfrak{D} = \{c_0, \ldots, c_{k+1}\}$
   $=_I = \{\}$
   $E_I = \{(c_n, c_{n+1}) | n \in [\![0,k]\!]\}$
   $a_I = c_0$ et $b_I = c_{k+1}$

   Si on analyse cette interprétation on peut voir que ça représente un graph avec un chemin entre a et b de longueur k.

   On peut voir que cette interprétation rend vrai toutes les formules de S :

   Déjà, notre interprétation rend vrai n'importe quelle formule de $\mathcal{G}$. De plus, elle rend vrai aussi n'importe quelle formule de C car il n'y a pas de chemin de longueur $n \in N$ entre a et b. Et pour finir si $C[a,b]$ est dans S notre interprétation est vraie car, on a bien un chemin de longueur quelconque qui va de a et ver b.

   (b) A est insatisfiable car s'il existe un chemin de longueur quelconque entre a et b, il est forcément de taille $n \in \mathbb{N}$. Or, on a aussi une formule dans A qui nous dit qu'il n'y a pas de chemin de taille n entre a et b. Donc, peu importe notre interprétation, A ne peut pas être satisfiable.
7. On sait que tout sous ensemble fini de $\mathcal{G} \cup \{\neg C_n[a,b] | n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg C[a,b]\}$ sont satisfiables. Or, d'après le théorème de la compacité on a $\mathcal{G} \cup \{\neg C_n[a,b] | n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg C[a,b]\}$ satisfiable, ce qui est absurde car on a montré que l'ensamble était insatisfiable à la question précédente. Donc, notre supposition qu'il existe une formule du premier ordre $C[a,b]$ est fausse.