

DM1

Exercice 1 Dans une promotion de n étudiants, chaque étudiant a une probabilité p de réussir les épreuves écrites et d'être ainsi admis à passer l'oral. Chacun de ceux qui passe l'oral a une probabilité a de le réussir. On note X le nombre d'étudiants admis à passer l'oral, et Y le nombre d'étudiants obtenant finalement le diplôme.

a. Quelle est la loi de X ? Sachant que $X = k$, quelle est la loi de Y ? (c-à-d, que vaut $\mathbb{P}(Y = \ell \mid X = k)$, en fonction de ℓ ?)

b. Donner la loi jointe $p_{k,\ell}$ ($= \mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$) de (X, Y) . En déduire la loi de Y .

Exercice 2 Un assistant distrait range n lettres au hasard dans les enveloppes qu'il avait préalablement remplies. On note N la variable aléatoire représentant le nombre de courriers qui arrivent effectivement à leur destinataire. Calculer $\mathbb{E}(N)$, puis $\text{Var}(N)$.

Indication : on attribue des numéros de 1 à n aux destinataires, ainsi qu'aux lettres qui leur sont destinées (la lettre numéro 1 au destinataire numéro 1, etc.) Montrer que $N = X_1 + \dots + X_n$, où $X_i = 1$ si la lettre numéro i est envoyée au destinataire numéro i , 0 sinon. Les v.a. X_i sont des v.a. de Bernoulli, dont on pourra calculer le paramètre. Pour le calcul de $\text{Var}(N)$, attention : les X_i ne sont pas indépendantes! on calculera $\mathbb{E}(N^2)$ en développant le carré, et on calculera $\mathbb{E}(X_i X_j)$ en remarquant que $X_i X_j$ est une v.a. de Bernoulli, et donc $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1)$ (pourquoi?).