Feuille d'exercice 5

Exercice 1 – Forme clausale

1.
$$\begin{aligned} F_1 &= \forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, \forall x, q(x,y)) \\ &\equiv \forall x, (\neg p(x) \vee (\exists y, \forall x, q(x,y))) \\ &\rightsquigarrow \forall x', (\neg p(x') \vee (\forall x, q(x,a))) \\ &\equiv \forall x', x(\neg p(x') \vee (q(x,a))) \end{aligned}$$

   Forme clausale : $\{\neg p(x') \vee q(x,a)\}$

2.
$$\begin{aligned} F_2 &= ((\exists x, (p(x) \Rightarrow r(x))) \vee \forall y, p(y)) \wedge \forall x, \exists y, (r(y) \Rightarrow p(x)) \\ &\equiv (\exists x, (\neg p(x) \vee r(x)) \vee \forall y, p(y)) \wedge \forall x, \exists y, (\neg r(y) \vee p(x)) \\ &\rightsquigarrow (\neg p(a) \vee r(a) \vee \forall y, p(y)) \wedge \forall x, (\neg r(f(x)) \vee p(x)) \\ &\equiv \forall y, x, (\neg p(a) \vee r(a) \vee p(y)) \wedge (\neg r(f(x)) \vee p(x)) \end{aligned}$$

   Forme clausale : $\{\neg p(a) \vee r(a) \vee p(y), \neg r(f(x)) \vee p(x)\}$

3.
$$\begin{aligned} F_3 &= ((\forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, q(y))) \Rightarrow \exists z, r(z)) \Rightarrow \exists u, s(u) \\ &\equiv \neg((\forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, q(y))) \Rightarrow \exists z, r(z)) \vee \exists u, s(u) \\ &\equiv ((\forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, q(y))) \wedge \forall z, \neg r(z)) \vee \exists u, s(u) \\ &\equiv ((\forall x, (\neg p(x) \vee \exists y, q(y))) \wedge \forall z, \neg r(z)) \vee \exists u, s(u) \\ &\rightsquigarrow ((\forall x, (\neg p(x) \vee q(a))) \wedge \forall z, \neg r(z)) \vee s(b) \\ &\equiv \forall x, z, ((\neg p(x) \vee q(a)) \wedge \neg r(z)) \vee s(b) \\ &\equiv \forall x, z, (\neg p(x) \vee q(a) \vee s(b)) \wedge (\neg r(z) \vee s(b)) \end{aligned}$$

   Forme clausale : $\{\neg p(x) \vee q(a) \vee s(b), \neg r(z) \vee s(b)\}$

Exercice 2 – Satisfiabilité

1. $B = (\forall x, P(x)) \vee (\exists x, \neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall x, Q(x))$
2. — Oui
   — Oui
   — Oui
3.
$$\begin{aligned} C &= (\forall x, P(x)) \vee (\neg P(a) \wedge \neg Q(a)) \vee (\forall x, Q(x)) \\ &\equiv \forall x, y, P(x) \vee (\neg P(a) \wedge \neg Q(a)) \vee Q(y) \end{aligned}$$
4. — Non
   — Oui
   — Oui
5. — C est toujours Vraie dans un modèle dont le domaine a exactement un élément
   — Pareil pour A car on a $C \models B \models A$
6. Oui
7. $\neg A \equiv (\exists x, \neg P(x)) \wedge (\forall x, P(x) \vee Q(x)) \wedge (\exists x, \neg Q(x))$.
   Après skolémisation on à les trois closes :
   $C_1 = \neg P(a)$, $C_2 = P(x) \vee Q(x)$, $C_3 = \neg Q(b)$

8. $\mathcal{D}_H = \{a, b\}$
   $\mathcal{B}_H = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$
9. $\neg A$ est satsifiable avec $\{P(b) \leftarrow V, Q(a), \leftarrow V\}$
   Comme $\neg A$ est satsifiable A n'est pas valide.

Exercice 3 – Forme de Herbrand

Exercice 4 – Connecteur propositionnel IF

1. $\neg P$: $\mathbf{IF}(P, \bot, \top)$s
   $P \wedge Q$: $\mathbf{IF}(P, Q, \bot)$
   $P \vee Q$: $\mathbf{IF}(P, \top, Q)$
   $P \Rightarrow Q$: $\mathbf{IF}(P, Q, \top)$
2.

$$valIF(I,F) = \begin{cases} valIF(I,\top) & = V \\ valIF(I,\bot) & = F \\ valIF(I,p) & = I(p) \\ valIF(I,\mathbf{IF}(P,Q,R)) & = \text{si } valIF(I,P) \\ & \quad \text{alors } valIF(I,Q) \\ & \quad \text{sinon } valIF(I,R) \end{cases}$$

3. — Si $I \models P$: $\mathbf{IF}(P,Q,R) \equiv Q$
   $A \equiv \mathbf{IF}(Q,S,T)$ et $B \equiv \mathbf{IF}(Q,S,T)$
   — SI $I \not\models P$: $\mathbf{IF}(P,Q,R) \equiv R$
   $A \equiv \mathbf{IF}(R,S,T)$ et $B \equiv \mathbf{IF}(R,S,T)$
4.

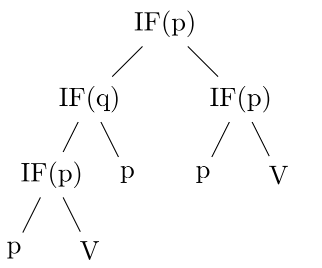
$$IFn(P,Q,R) = \begin{cases} IFn(\top,Q,R) & = Q \\ IFn(\bot,Q,R) & = R \\ IFn(p,Q,R) & = \mathbf{IF}(p,Q,R) \\ IFn(\mathbf{IF}(A,B,C),Q,R) & = IFn(A,\mathbf{IF}(B,Q,R),\mathbf{IF}(C,Q,R)) \end{cases}$$

$$norm(P) = \begin{cases} norm(\top) & = \top \\ norm(\bot) & = \bot \\ norm(p) & = p \\ norm(\mathbf{IF}(P,Q,R)) & = Ifn(P, norm(Q), norm(R)) \end{cases}$$

5. (a) $\mathbf{IF}(\mathbf{IF}(\mathbf{IF}(p,q,\top),p,\top),p,\top)$
   (b)

$$\begin{aligned} \mathbf{IF}(\mathbf{IF}(\mathbf{IF}(p,q,\top),p,\top),p,\top) &\equiv \mathbf{IF}(\mathbf{IF}(p,\mathbf{IF}(q,p,\top),p,\top),p,\top) \\ &\equiv \mathbf{IF}(p,\mathbf{IF}(\mathbf{IF}(q,p,\top),p,\top),\mathbf{IF}(p,p,\top)) \\ &\equiv \mathbf{IF}(p,\mathbf{IF}(q,\mathbf{IF}(p,p,\top),p),\mathbf{IF}(p,p,\top)) \end{aligned}$$

   (c) Arbre :



(d) Pour montrer que A est valide on regarde les branches qui ne débouche pas sur une feuille contenant $\top$ (sinon cas trivial) :
Feuilles de gauche à droite :
— Première feuille : pour y aller il faut avoir p vrai donc peut importe q la formule serra vrai
— Deuxième feuille : Pareil que pour la deuxième pour y accèder il faut avoir p vrai
— Troisième feuille : Jamais accéssible car pour alleer dans le premier noeuds il faut avoir $\neg p$ et après il faut avoir p
Donc peut importe notre interpretation la formule serra toujours valide.

6. On normalise puis on simplifie l'arbre (varaible apparaissent qu'une seul foit par branche) et après il faut vérfier que les feuilles soient toutes vrai

Exercice 5 – Arbre de décision bianire

1.

$$vald(I,t) = \begin{cases} vald(I, Bool(b)) & = b \\ vald(I, \mathbf{IF}(x,P,Q)) & = \text{si } I(x) \\ & \quad \text{alors } vald(I,P) \\ & \quad \text{sinon } vald(I,Q) \end{cases}$$

2.

$$forme(t) = \begin{cases} forme(Bool(true)) & = \top \\ forme(Bool(false)) & = \bot \\ forme(\mathbf{IF}(p,A,B)) & = (p \wedge forme(A)) \vee (\neg p \wedge forme(B)) \end{cases}$$

3.

$$notd(t) = \begin{cases} notd(Bool(true)) & = Bool(false) \\ notd(Bool(false)) & = Bool(true) \\ notd(\mathbf{IF}(p,A,B)) & = \mathbf{IF}(p, notd(A), notd(B)) \end{cases}$$

4.

$$opd(t,u) = \begin{cases} opd(Bool(b_1), Bool(b_2)) & = Bool(b_1 \text{ op } b_2) \\ opd(IF(x,A,B), Bool(b)) & = \mathbf{IF}(x, opd(A, Bool(b)), opd(B, Bool(b))) \\ opd(Bool(b), IF(x,A,B)) & = \mathbf{IF}(x, opd(A, Bool(b)), opd(B, Bool(b))) \\ opd(\mathbf{IF}(x,A,B), \mathbf{IF}(y,C,D)) & = \\ & \text{if } x = y \text{ alors} \\ & \quad \mathbf{IF}(x, opd(A,C), opd(B,D)) \\ & \text{sinon si } x < y \text{ alors} \\ & \quad \mathbf{IF}(x, opd(A, IF(y,C,D)), opd(B, IF(y,C,D))) \\ & \text{sinon} \\ & \quad \mathbf{IF}(y, opd(C, IF(y,A,B)), opd(D, IF(y,A,B))) \end{cases}$$

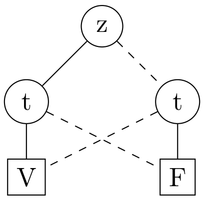
5. — valide : Toutes les feuilles V
— satsifiable : Au moin une feuille V
— insatsifaible : Toutes les feuilles F

6. Il faut trouver un chemin qui donne vers une feuille vraie

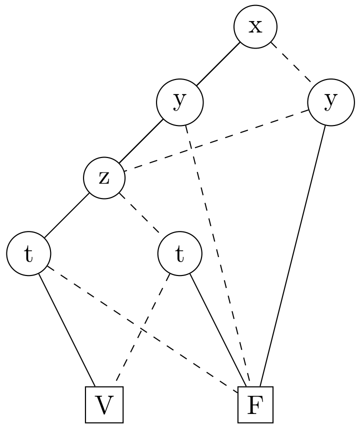
Exercice 6 – Diagramme de décision bianire

1. OBDD :

$(z \Leftrightarrow t)$

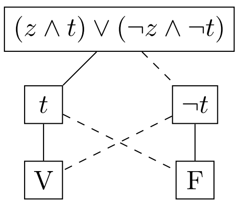


$(x \Leftrightarrow y) \wedge (z \Leftrightarrow t)$

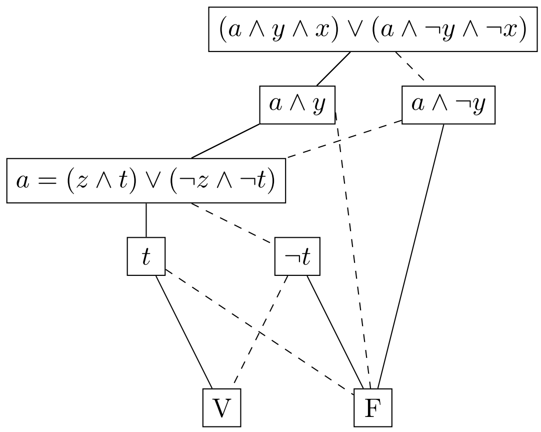


2. OBDD annoté :

$(z \Leftrightarrow t)$



$(x \Leftrightarrow y) \wedge (z \Leftrightarrow t)$



3. On va résonner par double implication :

   $\Leftarrow$: Si deux formules sont représenté par le même OBDD alors elles ont la même table de vérité donc elles sont équivalentes.

   $\Rightarrow$: Supposons qu'on ait deux formules A et B équivalentes.