# CHAPITRE 4
# ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

**Table des matières**



## Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons défini la notion d'une base d'un espace vectoriel et montré qu'un espace peut avoir plusieurs bases différentes. On ne peut donc pas parler de "la"base d'un espace vectoriel. Il est vrai que certains espaces vectoriels ont des bases qui nous paraissent plus naturelles que d'autres, par exemple, $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$, mais dans l'espace vectoriel $\{a_2X^2 + a_1X + a_0 \mid 2a_2 - a_0 = a_1\}$ aucune base particulière n'est naturelle. Nous ne pouvons pas, en général, associer à un espace une base canonique qui peut mieux le décrire.

Nous pouvons cependant trouver quelque chose au sujet des bases qui est uniquement associée à l'espace. Dans ce chapitre nous allons montrer que deux bases quelconques d'un espace vectoriel (ayant au moins une base de cardinal fini) ont le même nombre d'éléments. Ainsi, à chaque espace vectoriel, on peut associer un nombre, le nombre de vecteurs dans n'importe laquelle de ses bases.

March 16, 2022, Khalid Koufany

## 1. Espaces vectoriels de dimension finie

***Définition 1.1.*** — *On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est de* **dimension finie** *si $E$ admet une famille génératrice finie. Autrement dit $E$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ s'il existe une famille finie de vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ telle que*

$$E = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n).$$

*On dit qu'un espace vectoriel est de dimension infinie lorsqu'il n'est pas engendré par une famille finie de vecteurs.*

***Exemples 1.2.*** — (1) $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie car nous avons déjà vu que la famille de vecteurs

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1)$$

est génératrice.

(2) Pour tous $v_1, \cdots, v_n$ appartenant à un espace vectoriel $E$, le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_n)$$

est engendré par une famille finie de vecteurs. C'est un espace vectoriel de dimension finie.

(3) L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie car nous avons déjà vu que la famille de vecteurs

$$1, X, \cdots, X^n$$

est génératrice.

(4) L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ de tous les polynômes n'est pas de dimension finie.

(5) L'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ n'est pas de dimension finie.

***Théorème 1.3.*** — *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base.*

*Démonstration.* — Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{G} = (v_1, \cdots, v_m)$ une famille génératrice de $E$.

Si la famille $\mathcal{G}$ est libre alors c'est une base de $E$.

Sinon, la famille est liée, et un des vecteurs de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des autres. Quitte à réindexer ces vecteurs, on peut supposer que le vecteur $v_m$ est combinaison linéaire de $v_1, \cdots, v_{m-1}$. Par le principe de réduction des familles génératrices (Proposition 7.3, Chapitre 1), on peut affirmer que la famille $\mathcal{G}' = (v_1, \cdots, v_{m-1})$ est encore génératrice. On reprend le raisonnement précédent : si $\mathcal{G}'$ est libre, c'est une base de $E$, sinon on réduit la famille $\mathcal{G}'$. Nécessairement ce processus s'arrête car la famille initiale est finie et si, au pire, on retire tous les vecteurs de $\mathcal{G}$, on obtient la famille vide qui est libre. $\square$

Rappelons le résultat suivant, que nous avons déjà montré dans le chapitre 1.

***Proposition 1.4.*** — *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, le cardinal de toute famille libre est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice.*

***Théorème 1.5.*** — *Les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie ont toutes le même cardinal.*

*Démonstration.* — Soient $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_m)$ deux bases de $E$.
Puisque $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ génératrice, on a $n \leq m$. De même puisque $\mathcal{B}'$ est libre et $\mathcal{B}$ est gébératrice, on a $m \leq n$. On en déduit que $n = m$. □

***Définition 1.6.*** — *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle* **dimension** *de $E$ le cardinal de toute base de $E$ et se note $\dim E$ ou encore $\dim_{\mathbb{K}} E$ s'il y a ambiguïté sur le corps des scalaire $\mathbb{K}$.*

***Exemple 1.7.*** — (1) D'après l'exemple 1.2, on a :

- $\dim \mathbb{K}^n = n$, en particulier $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$;
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$;
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$;
- $\dim \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = +\infty$.

(2) $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$ car la famille vide est une base de l'espace nul.

(3) Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé une *droite vectorielle*, et un espace vectoriel de dimension 2 est appelé un *plan vectoriel*.

***Proposition 1.8.*** — *Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors l'espace $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et*

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F.$$

*Démonstration.* — Posons $p = \dim E$ et $q = \dim F$. Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de $E$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_q)$ une base de $F$. Posons

$$\begin{cases} g_i = (e_i, \mathbf{0}_F) & \text{pour } 1 \leq i \leq p \\ g_{p+i} = (\mathbf{0}_E, f_i) & \text{pour } 1 \leq i \leq q \end{cases}$$

et notons

$$\mathcal{B} = (g_1, \cdots, g_p, g_{p+1}, \cdots, g_{p+q}).$$

Nous allons montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $E \times F$.
Soit $(v, w) \in E \times F$. Puisque $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des familles génératrices de $E$ et $F$, il existe $x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{K}$ et $y_1, \cdots, y_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \text{ et } w = \sum_{i=1}^{q} y_i f_i.$$

Donc

$$\begin{aligned}
(v,w) &= (v,\mathbf{0}_F)+(\mathbf{0}_E,w)\\
&= (\sum_{i=1}^{p} x_i e_i,\mathbf{0}_F)+(\mathbf{0}_E,\sum_{i=1}^{q} y_i f_i)\\
&= \sum_{i=1}^{p} x_i(e_i,\mathbf{0}_F)+\sum_{i=1}^{q} y_i(\mathbf{0}_E,f_i)\\
&= \sum_{i=1}^{p} x_i g_i+\sum_{i=1}^{q} y_i g_{p+i}.
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc génératrice dans $E\times F$.
Soient $\lambda_1,\cdots,\lambda_{p+q}$ des scalaires de $\mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 g_1+\cdots+\lambda_p g_p+\lambda_{p+1}g_{p+1}+\cdots+\lambda_{p+q}g_{p+q}=(\mathbf{0}_E,\mathbf{0}_F).$$

On a alors

$$(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_p e_p,\lambda_{p+1}f_1+\cdots+\lambda_{p+q}f_q)=(\mathbf{0}_E,\mathbf{0}_F)$$

ce qui implique

$$\begin{cases}\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_p e_p & =\mathbf{0}_E,\\ \lambda_{p+1}f_1+\cdots+\lambda_{p+q}f_q & =\mathbf{0}_F.\end{cases}$$

Comme les familles $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont libre, on a $\lambda_1=\cdots=\lambda_{p+q}=0$.
On déduit que la famille $\mathcal{B}$ est libre, c'est donc une base de $E\times F$. Par conséquent $\dim E\times F=\dim E+\dim F$.

□

## 2. Caractérisation des bases en dimension finie

***Proposition 2.1.*** — *Soit $E$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.*

*(a) Le cardinal de toute famille libre est inférieur ou égal à la dimension $n$.*

*(b) Le cardinale de toute génératrice est supérieure ou égal à la dimension $n$.*

*(c) Soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une famille qui contient exactement $n=\dim E$ vecteurs de $E$. On a équivalence entre :*

*$(i)$ $\mathcal{B}$ est une base;*

*$(ii)$ $\mathcal{B}$ est une famille libre, et on dira que $\mathcal{B}$ est une famille libre et maximale;*

*$(ii)$ $\mathcal{B}$ est une famille génératrice, et on dira que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice et minimale.*

*Démonstration.* — (a) et (b) Cela découle de la proposition 1.4 : le cardinal de toute famille libre est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice.

(c) Les implications $(i) \Rightarrow (ii)$ et $(i) \Rightarrow (iii)$ sont évidentes.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons la famille $\mathcal{B}$ libre et montrons qu'elle est génératrice. Si $\mathcal{B}$ n'était pas génératrice, alors il existerait $v \in E$ tel que $v \notin \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$. D'après le principe d'extension des familles libre, on peut affirmer que la famille $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_n, v)$ est libre. Or cette famille contient $n+1 > \dim E$ vecteurs, ce qui est absurde. O déduit que $\mathcal{B}$ génératrice et donc une base de $E$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supposons la famille $\mathcal{B}$ génératrice et montrons qu'elle est libre. Si $\mathcal{B}$ était liée, alors l'un de ses vecteurs serait combinaison linéaire des autres, notons $i$ son indice. Par le principe de réduction des famille génératrices, la famille $(e_1, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_n)$ est génératrice. Or cette famille contient $n - 1 < \dim E$ vecteurs, ce qui est absurde. On déduit que la famille $\mathcal{B}$ est libre et donc une base de $E$. □

***Exemple 2.2* (Utilisation de la méthode du pivot de Gauss)**

Montrons que la famille de vecteurs

$$v_1 = (3, 1, 2), \quad v_2 = (2, -1, 5), \quad v_3 = (1, 1, 0)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient des réels $\alpha, \beta, \gamma$ tels que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \mathbf{0}.$$

Représentons les coordonnées des vecteurs en colonnes :

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons alors le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ 2\alpha & + & 5\beta & & & = & 0 \end{array} \right. \xrightarrow[\textit{par}]{\textit{représenté}} \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

Par la méthode du pivot de Gauss, nous transformons le tableau précédent comme suit

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & -11/2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 5 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Nous en déduisons alors de ce dernier système que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc la famille $(v_1, v_2, v_3)$ est libre. Son cardinal étant égal à $3 = \dim \mathbb{R}^3$, cette famille est libre et maximal dans $\mathbb{R}^3$ donc une base de $\mathbb{R}^3$.

***Exemple 2.3.*** — Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la famille formée des vecteurs

$$\epsilon_1 = e_2 + e_3,\ \epsilon_2 = e_1 + e_3,\ \epsilon_3 = e_1 + e_2.$$

Montrons que $\mathcal{B}'$ est une base de $E$. Comme le cardinal de $\mathcal{B}'$ est égal à la dimension de $E$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}'$ est libre ou génératrice. Montrons qu'elle est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 + \lambda_3\epsilon_3 = \mathbf{0}$, alors

$$(\lambda_2 + \lambda_3)e_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_3 = \mathbf{0}.$$

Or la famille $\mathcal{B}$ est libre, donc $\lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Après résolution du système linéaire correspondant, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille $\mathcal{B}'$ est libre maximale, c'est donc une base de $E$.

Soit $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un vecteur de $E$ décomposé dans la base $\mathcal{B}$. Déterminons ses composantes dans la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, déterminons les scalaires $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}$ tels que $v = y_1\epsilon_1 + y_2\epsilon_2 + y_3\epsilon_3$. On a donc

$$v = (y_2 + y_3)e_1 + (y_1 + y_3)e_2 + (y_1 + y_2)e_3.$$

Par unicité des composantes d'un vecteur dans une base, on a

$$\begin{array}{rcl} y_2 + y_3 & = & x_1 \\ y_1 + y_3 & = & x_2 \\ y_1 + y_2 & = & x_3 \end{array}$$

Après résolution de ce système linéaire, on trouve

$$y_1 = \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{2},\ y_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2},\ y_3 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}.$$

## 3. Théorème de complétion de la base

Nous avons déjà vu que, dans un espace vectoriel de dimension finie $n$

- toute famille libre contient au plus $n$ vecteurs;
- toute famille génératrice contient au moins $n$ vecteurs.

Nous allons maintenant énoncer l'un des théorème principaux de ce chapitre, appelé **théorème de complétion de la base** ou **théorème de la base incomplète**.

***Théorème 3.1.*** — *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de $E$.*

*On peut former une base de $E$ en complétant la famille libre $\mathcal{L}$ par des vecteurs bien choisis dans la famille génératrice $\mathcal{G}$.*

*Démonstration.* — Notons $\mathcal{L} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{G} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$.

Si la famille $\mathcal{L}$ est génératrice, c'est une base de $E$ et la complétion est inutile.

Sinon, la famille n'est pas génératrice de $E$ et par suite, il existe $i \in \{1, \cdots, m\}$ tel que

$$\epsilon_i \notin \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$$

car si tous les vecteurs $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m$ sont dans $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, alors

$$E = \mathrm{Vect}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$$

et $\mathcal{L}$ serait génératrice.

Posons alors $e_{p+1} = \epsilon_i$. Par le principe d'extension des famille libre, la famille $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1})$ est aussi libre. Nous avons ainsi complété $\mathcal{L}$ par un vecteur de $\mathcal{G}$ de sorte d'obtenir une famille libre de $p + 1$ vecteurs.

On réitère ce processus jusqu'à obtention d'une famille libre maximale (contenant autant de vecteurs que la dimension de $E$). Cette famille libre maximale est par conséquent une base de $E$.

□

***Corollaire 3.2.*** — *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Toute famille libre peut-être complétée en une base.*
*Plus précisément, soient $\mathcal{L} = (e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre où $p < n$ et $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ une base de $E$. Alors on peut toujours extraire $(n-p)$ vecteurs de $\mathcal{B}$, notés $\epsilon_{i_{p+1}}, \cdots \epsilon_{i_n}$, de sorte que $(e_1, \cdots, e_p, \epsilon_{i_{p+1}}, \cdots \epsilon_{i_n})$ soit une base de $E$.*

*Démonstration.* — C'est une conséquence directe du théorème de la base incomplète. □

***Corollaire 3.3.*** — *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. De toute famille génératrice, on peut extraire une base.*

*Démonstration.* — Il suffit de compléter la famille libre vide par des vecteurs de cette famille génératrice. □

***Exemple 3.4.*** — Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons le vecteur $v = e_1 + e_2$. Puisque $v \neq \mathbf{0}$, la famille $(v)$ est libre. Complétons-là en une base de $E$ ce qui nécessite d'ajouter deux vecteurs de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Commençons par considérer le vecteur $e_1$. Clairement les vecteurs $v$ et $e_1$ ne sont pas colinéaires et forme donc une famille libre.

Pour poursuivre la complétion, le vecteur $e_2$ n'est pas un bon choix car $v = e_1 + e_2$. Prenons alors le vecteur $e_3$. On peut affirmer que la famille $(v, e_2, e_3)$ est une base de $E$ notamment puisque l'on sait qu'on peut compléter la famille $(v, e_2)$ en une base de $E$ à l'aide d'un vecteur bien choisi de $\mathcal{B}$ et que le seul vecteur possible est $e_3$.

***Exemple 3.5* (Utilisation de la méthode du pivit de Gauss)**
Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants

$$v_1 = (1, , 2, 1, 4), v_2 = (-1, 1, -3, -3), v_3 = (2, 1, -1, 2), v_4 = (-1, -1, 1, -1).$$

Nous allons à l'aide de la méthode du pivot extraire de la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ une famille libre de $\mathbb{R}^4$ et la compléter en une base.

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & \boxed{1} \\ 5 & -6 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc} 2 & -4 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & \boxed{1} \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 0 & -8/3 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & -2/3 & 0 & 0 \end{array}$$

Les vecteurs (sur lesquels nous avons choisi les pivots) $v_1, v_3$ et $v_4$ constituent donc une famille libre de $\mathbb{R}^4$, (au passage on peut remarquer que $v_2 = -2/3v_1 - 8/3v_3 - 5v_4$). Pour compléter $(v_1, v_3, v_4)$ en une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit d'ajouter un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ pour obtenir un tableau possédant 4 pivots. Comme il manque un pivot sur la deuxième ligne on ajoute le vecteur $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ :

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_3 & v_4 & e_2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} v_1 & v_3 & v_4 & e_2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ainsi la famille constituée par les vecteurs $v_1 = (1, , 2, 1, 4), v_3 = (2, 1, -1, 2), v_4 = (-1, -1, 1, -1), e_2 = (0, 1, 0, 0)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

## 4. Sous-espaces vectoriels de dimension finie

***Théorème 4.1.*** — *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est aussi de dimension finie. De plus,*

$$\dim F \leq \dim E$$

*avec égalité, si et seulement si* $F = E$.

*Démonstration.* — Supposons que $\dim E = n$.

(a) Si $F = \{\mathbf{0}\}$, alors $F$ est de dimension finie (égale à 0).

Supposons $F \neq \{\mathbf{0}\}$ et soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de $F$. Cette famille est encore libre dans $E$ donc $p \leq n$.

– Si $(e_1, \cdots, e_p)$ est génératrice de $F$, c'est une base de $F$ avec $p \leq n$.

– Si $(e_1, \cdots, e_p)$ n'est pas génératrice de $F$, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ est contenu strictement dans $F$ et il existe un vecteur $e_{p+1} \neq \mathbf{0}$ tel que

$$e_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) \text{ et } e_{p+1} \in F.$$

D'après le principe d'extension des famille libre, la famille $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1})$ est encore livre dans $F$.

– Si cette famille est génératrice de $F$, c'est une base de $F$ et la preuve est terminée

– Sinon, on reprendre la raisonnement précédent.

Le processus s'arrête nécessairement car une famille libre de $F$ est encore une famille libre de $E$ et possède donc au plus $\dim E = n$ vecteurs.

(b) Supposons $\dim E = \dim F$. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $F$. C'est donc une famille libre et maximale de $E$ : c'est aussi une base de $E$. On en déduit que

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = E.$$

□

***Remarque 4.2.*** — (a) $\dim F = 0 \iff F = \{\mathbf{0}\}$.

(b) Si l'espace $E$ est de dimension infinie, si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et si $F$ est de dimension infinie aussi, on a pas le droit de conclure que $E = F$. Par exemple, soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $F = \mathbb{R}[x]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. Les dimensions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}[x]$ sont infinies et pourtant $\mathbb{R}[x] \neq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, la fonction Cosinus est un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais n'appartient pas à $\mathbb{R}[x]$.

***Proposition 4.3.*** — *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie.*
*Si $F \subset G$ et si $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.*

*Démonstration.* — Posons $p = \dim F$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de $F$. Comme $F \subset G$, $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille libre de $G$ formée de $p = \dim G$ vecteurs. C'est donc une base de $G$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = F$. □

## 5. Construction de bases d'un espace vectoriel

**5.1. Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.** — On désire déterminer une base d'un espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ engendré par une famille $(e_1, \cdots, e_p)$.

La famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est génératrice de $F$, on peut donc en extraire une base de la manière suivante :

– si $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre, c'est une base de $F$;

– sinon, l'un des vecteurs de $(e_1, \cdots, e_p)$ est combinaison linéaire des autres et on peut retirer celui-ci sans perdre le caractère générateur de la famille;

– si besoin, on reprend ce processus jusqu'à obtention d'une famille libre maximale, donc une base.

***Exemple 5.1.*** — Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ où

$$v_1 = (1,0,2,1), v_2 = (3,1,6,3), v_3 = (1,1,2,1)$$

$$v_4 = (4,1,8,4), v_5 = (5,1,1,5).$$

Cherchons si cette famille est libre, sinon nous allons y extraire une famille libre maximale qui sera une base de $F$. On applique l'algorithme de Guass et on obtient

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

On déduit que la famille $(v_1, v_3, v_5)$ est libre (et $v_2 = 2v_1 + v_3$, $v_4 = 3v_1 + v_1$). Donc $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_3, e_5)$, la famille $(v_1, v_3, v_5)$ en est une base et $\dim F = 3$.

**5.2. Espace vectoriel défini par des équations linéaires.** — Si un espace vectoriel est défini par des équations linéaires, on peut, en résolvant le système linéaire correspondant, déterminer une famille génératrice puis une base de cet espace.

***Exemples 5.2.*** — (1) Soit

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad\; 2y + \;\, z = 0 \\ 2x + 6y + 7z = 0 \end{cases} \right\}.$$

Résolvons le système linéaire avec l'algorithme de Guass. On trouve

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} \boxed{1} & -4 & 0 \\ 0 & 2 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Le système initial est donc équivalent à

$$\begin{cases} x - 4y \phantom{+z} = 0 \\ \phantom{x-{}} 2y + z = 0 \end{cases}$$

On écrit alors les deux variables principales $x = 4y$ et $z = -2y$ en fonction de la variable libre $y$. Ainsi

$$v = (x, y, z) \in F \iff v = (4y, y, -2y) = y(4, 1, -2).$$

On déduit que

$$F = \mathrm{Vect}(u)$$

avec $u = (4, 1, -2)$. Puisque $u \neq \mathbf{0}$, la famille $(u)$ est libre C'est donc une base de $F$ et $\dim(F) = 1$.

(2) Soit

$$F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4t = 0\Big\}.$$

Le système linéaire définissant $F$ contient une seule équation. On ne peut avoir plus qu'une variable principale. On peut supposer que c'est $x$ et on exprime alors $x$ en fonction des autres variables $y, z$ et $t$ (qui sont par conséquent libres), $x = -2y - 3z - 4t$. Ainsi $v = (x, y, z, t) \in F$ si et seulement si

$$v = (-2y - 3z - 4t, y, z, t) = y(-2, 1, 0, 0) + z(-3, 0, 1, 0) + t(-4, 0, 0, 1)$$

On déduit que

$$F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$$

avec $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-3, 0, 1, 0)$ et $v_3 = (-4, 0, 0, 1)$. Ensuite il est facile de vérifier que la famille $(v_1, v_2, v_3)$ est libre. C'est donc une base de $F$ et $\dim F = 3$.

**5.3. Compléter une famille libre en une base.** — Etant donné une famille libre $(v_1, \cdots, v_p)$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, on désire la compléter en une base. Pour cela nous considérons le système générateur $(v_1, \cdots, v_p, e_1, \cdots, e_n)$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de $E$ pour nous ramener aux cas 5.1. On remarque alors que, lorsque l'on choisi les $p$ premiers pivots dans les $p$ premières colonnes, le tableau est bien réduit (c-à-d. que $n - p$ des $n$ dernière colonnes n'ont pas été modifiées).

***Exemple 5.3.*** — Dans $\mathbb{R}^4$ soit les vecteurs $v_1 = (1, 3, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 1, 2, 1)$. Il est claire que la famille $(v_1, v_2)$ est libre. Donc d'après le théorème de la base incomplète, nous pouvons compléter $(v_1, v_2)$ en une base de $\mathbb{R}^4$ en y ajoutant des vecteurs bien choisis de la base canonique.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & \boxed{1} \end{matrix}$$

Les colonnes correspondantes à $e_3$ et $e_4$ sont inchangées et la famille $(v_1, v_2, e_3, e_4)$ est donc une base de $\mathbb{R}^4$. On peut remarquer que puisque nous avons choisi les deux premiers pivots sur la premiere et la deuxième ligne, il suffit d'ajouter deux vecteurs de la base canonique afin d'avoir un troisième pivot sur la troisième ligne et un quatrième pivot sur la quatrième colonne, les vecteurs $e_3$ et $e_4$ répondent à ce critère.

**5.4. Construction d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$.** — Nous connaissons déjà une base de $\mathbb{K}_n[X]$, à savoir la base canonique

$$(1, X, \cdots, X^n).$$

Nous pouvons construire d'autres bases.

Soit $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que, pour tout $k$, $\deg P_k = k$. Montrons que cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Supposons que

$$\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$$

alors

$$\lambda_n P_n = -(\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1})$$

donc $\deg(\lambda_n P_n) < n$, puis $\lambda_n = 0$.
En reprenant le procédé, on obtient successivement $\lambda_{n-1} = 0, \cdots, \lambda_0 = 0$. Par conséquent la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est libre. Or cette famille est formée de $n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$, donc d'après la proposition 2.1, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

D'après le raisonnement utilisé ci-dessus, on peut énoncer la proposition suivante.

***Proposition 5.4***. — *Soit $(P_n)_{n\in I}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que les degrés forment une suite strictement croissante (ou strictement décroissante). Alors la famille $(P_n)_{n\in I}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.*

Toutes les bases de $\mathbb{K}_n[X]$ ne sont pas uniquement des familles de polynômes dont les degrés forment une suite strictement croissante (ou strictement décroissante). Voici un exemple.

***Exemple 5.5***. — Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère les polynômes (tous de degré 2)

$$P_1(X) = X(X-1),\ P_2(X) = X(X-2),\ P_3(X) = (X-1)(X-2).$$

La famille $(P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. En effet, si

$$\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X) + \lambda_3 P_3(X) = 0 \tag{1}$$

alors,

– pour $X = 0$, on a $\lambda_3 P_3(0) = 0$, donc $\lambda_3 = 0$ et la relation (1) devient

$$\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X) = 0 \tag{2}$$

– pour $X = 1$, on a $\lambda_2 P_2(1) = 0$, donc $\lambda_2 = 0$ et la relation (2) devient

$$\lambda_1 P_1(X) = 0 \tag{3}$$

ce qui conduit évidemment à $\lambda_1 = 0$ (il suffit de prendre $X = 2$ par exemple). La famille $(P_1, P_2, P_3)$ est donc une famille libre dans $\mathbb{R}_2[X]$ et comme elle contient $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

## 6. Supplémentaire en dimension finie

***Théorème 6.1.*** — *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ admet au moins un supplémentaire.*

*Démonstration.* — Supposons que $\dim E = n$ et fixons une base $\mathcal{B}_0 = (e_i)_{1 \le i \le n}$ de $E$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ non nul et tel que $F \neq E$.
Soit $(v_i)_{1 \le i \le p}$ une base de $F$. D'après le théorème 4.1 on a $p \le n$.
la famille $(v_i)_{1 \le i \le p}$ étant libre dans $E$, d'après le théorème de la base incomplète 3.1, on peut extraire $(n-p)$ vecteurs $(e_i)_{p+1 \le i \le n}$ de $\mathcal{B}_0$ de sorte que $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ soit une base de $E$.
Soit

$$G = \mathrm{Vect}\left((e_i)_{p+1 \le i \le n}\right)$$

et montrons que $F \oplus G = E$.

D'abord, si $v \in F \cap G$, alors il existe des scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ et $\beta_{p+1}, \cdots, \beta_n$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = \sum_{j=p+1}^{n} \beta_j e_j$$

Il s'ensuit

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i + \sum_{j=p+1}^{n} (-\beta_j) e_j = \mathbf{0}.$$

Comme la famille $\mathcal{B}$ est une base de $E$, on a $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$ et $\beta_{p+1} = \cdots = \beta_n = 0$ et par suite $v = \mathbf{0}$, donc $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

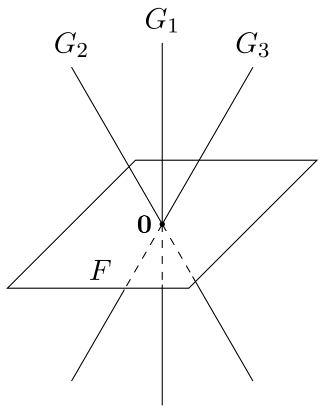
Ensuite, si $v \in E$, il existe des scalaires $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i e_i \\ &= v_F + v_G \in F + G \end{aligned}$$

ce qui prouve que $E = F + G$. Par conséquent $E = F \oplus G$. □

***Remarques 6.2***. — (a) Pour former un supplémentaire de $F$, il suffit de compléter une base de $F$ en une base de $E$ et de considérer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs complétants.

(b) Il n'y a pas unicité dans le choix d'un supplémentaire. C'est pourquoi, si $E = F \oplus G = F \oplus H$, la déduction $G = H$ est fausse, comme le montre l'illustration suivante dans l'espace.




Les deux corollaires suivants sont une conséquence directe du théorème 6.1.

***Corollaire 6.3***. — *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$. Alors*

$$\dim E = \dim F + \dim G.$$

***Corollaire 6.4***. — *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels non nuls de $E$. On a equivalence entre les propriétés suivantes :*

*(a) $E = F \oplus G$;*

*(b) la réunion d'une base de $F$ et d'une base de $G$ est une base de $E$.*

Plus généralement, nous avons le résultat suivant.

***Corollaire 6.5***. — *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient $p$ sous-espaces vectoriels non nuls $F_1, \cdots, F_p$ de $E$. Pour tout $k = 1, \cdots, p$, soit $\mathcal{B}_k$ une base de $F_k$. On a équivalence entre les propriétés suivantes :*

*(a)* $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$*;*
*(b) la "réunion"* $(\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ *est une base de* $E$*.*
*Dans ces condition* $\dim E = \dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$.

***Exemple 6.6*** **(Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs)**
Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1,0,2,1),\ v_2 = (3,1,6,3),\ v_3 = (1,1,2,1),$$

$$v_4 = (4,1,8,4),\ v_5 = (5,1,10,5).$$

On commence d'abord par trouver une base de $F$, c-à-d. une sous-famille libre maximale de $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Par conséquent $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $(v_1, v_2)$ est une base de $F$. Pour compléter $(v_1, v_2)$ en une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit d'ajouter à ces deux vecteurs $e_3, e_4$. En posant $G = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$, on a $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

***Exemple 6.7*** **(Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel défini par des équations linéaires)**
Soit $F$ le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x - \ \ y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases} \right\}.$$

On commence d'abord pour trouver une base de $F$ pour cela il faut résoudre le système linéaire

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} 0 & -5/2 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que $F = \mathrm{Vect}(v_1, e_4)$ où $v_1 = (-3, 2, 5, 0)$. La famille $(v_1, e_4)$ est une base de $F$ qu'on peut compléter par exemple avec $e_1, e_2$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Le sous-espace $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est un supplémentaire de $F$, $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

## 7. Théorème des quatre dimensions

Le théorème suivant est appelé **théorème des quatre dimensions**, connu aussi sous le nom de la **formule de Grassmann**.

***Théorème 7.1***. — *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie. Alors*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G). \tag{4}$$

*Démonstration*. — Comme $F$ et $G$ sont deux espaces de dimension finie, $F+G$ est de dimension finie. de même $F \cap G$ est de dimension finie
Puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $F$, l'espace $F \cap G$ possède un supplémentaire $H$ dans $F$, $F = H \oplus (F \cap G)$.
Montrons que $H$ et $G$ sont supplémentaire dans $F+G$.
Puisque $H \subset F$, on a $H = H \cap F$ et donc

$$H \cap G = (H \cap F) \cap G = H \cap (F \cap G) = \{\mathbf{0}\}.$$

Puisque $F+G = (H + (F \cap G)) + G$ et que $F \cap G \subset G$, donc $F+G = H+G$.
Ainsi $H$ et $G$ sont supplémentaires dans $F+G$, $F+G = H \oplus G$.
Comme $F = H \oplus (F \cap G)$ on a

$$\dim F = \dim H + \dim(F \cap G)$$

et comme $F+G = H \oplus G$ on a

$$\dim(F+G) = \dim H + \dim G.$$

On en déduit que

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

□

***Exemple 7.2***. — Soient $P_1$ et $P_2$ deux plans vectoriels distincts d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Montrons que $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle.

Puisque $P_1 + P_2$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on a $\dim(P_1 + P_2) \leq 3$.
De plus $P_1 + P_2$ contient $P_1$, donc $\dim(P_1 + P_2) \geq 2$.
Si $\dim(P_1 + P_2) = 2 = \dim P_1$ alors d'après la proposition 4.3 $P_1 + P_2 = P_1$.
Comme $P_1$ et $P_2$ jouent le même rôle, on peut aussi montrer que $P_1 + P_2 = P_2$, donc $P_1 = P_2$ ce qui est exclu par hypothèse. On en déduit que $\dim(P_1+P_2) = 3$ et par la formule de Grassmann,

$$\dim(P_1 \cap P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 + P_2) = 1.$$

***Théorème 7.3***. — *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On a équivalence entre*

*(a)* $E = F \oplus G$

*(b)* $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ *et* $\dim E = \dim F + \dim G$.

*Démonstration.* — (a)$\Rightarrow$(b) : est claire.

(b)$\Rightarrow$(a) : il suffit de montrer que $F + G = E$. D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - 0 = \dim F + \dim G = \dim E$$

Par inclusion et égalité des dimensions on a $F + G = E$. □

***Exemple 7.4.*** — Soit $H$ un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$, *i.e.* $\dim H = n - 1$. Soit $a \in E \setminus H$ et considérons le sous-espace $D = \mathrm{Vect}(a) = \mathbb{K}a$, soit $\dim D = 1$.

Soit $v \in H \cap D$. Comme $v \in D$, on a $v = \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, alors $a = \frac{1}{\lambda} v \in H$ ce qui est exclu. Donc $\lambda = 0$ d'où $v = \mathbf{0}$ et par suite $H \cap D = \{\mathbf{0}\}$. De plus $\dim E = n = \dim H + \dim D$. On en déduit que $E = H \oplus D$.

## 8. Rang d'une famille de vecteurs

***Définition 8.1.*** — *Soit $(v_1, \cdots, v_p)$ une famille de vecteurs de $E$.*

*On appelle* **rang** *de $(v_1, \cdots, v_p)$ et l'on écrit* $\mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p)$, *la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $(v_1, \cdots, v_p)$,*

$$\mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p) = \dim \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p).$$

***Exemple 8.2.*** — Soient $v, w$ deux vecteurs de $E$. On a

$$\mathrm{rg}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si } v = \mathbf{0} \end{cases}$$

et

$$\mathrm{rg}(v, w) = \begin{cases} 2 & \text{si } v, w \text{ sont non colinéaires} \\ 1 & \text{si } v, w \text{ sont colinéaires, non tous deux nuls} \\ 0 & \text{si } v = w = \mathbf{0} \end{cases}$$

***Proposition 8.3.*** — *Le rang de $(v_1, \cdots, v_p)$ est égal au cardinal d'une famille libre maximale extraite de $(v_1, \cdots, v_p)$.*

*Démonstration.* — Comme $(v_1, \cdots, v_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$, on a

$$\mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p) := \dim \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p) \leq p.$$

Si la famille $(v_1, \cdots, v_p)$ est libre, alors c'est une base de $\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$. Dans ce cas $\mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p) = p$.

Si la famille $(v_1, \cdots, v_p)$ est liée, d'après le corollaire 3.3 on peut en extraire une famille libre maximale, disons $(v_1, \cdots, v_m)$ par exemple, où $m < p$. De plus $\forall i > m$, $v_i$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \cdots, v_m$. D'après le principe de réduction des familles génératrices (proposition 6.3 du chapitre 1) on a

$$\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p) = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_m).$$

La famille $(v_1, \cdots, v_m)$ étant libre et génératrice de $\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$ c'est une base de $\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$. Donc

$$\mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p) = \dim \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_m) = m.$$

□

De la proposition précédente, on a.

***Corollaire 8.4***. — *Soit $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de $E$.*

1. *On a*

$$\mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p) \leq p$$

*et*

$$\mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p) = p \iff (v_1, \cdots, v_p) \text{ est une famille libre}$$

2. *On a*

$$\mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p) \leq \dim E$$

*et*

$$\mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p) = \dim E \iff (v_1, \cdots, v_p) \text{ est une famille génératrice}$$

3. *On a*

$$\begin{cases} \mathrm{rg}(v_1, \cdots, v_p) = p \\ p = \dim E \end{cases} \iff (v_1, \cdots, v_p) \text{ est une base}$$

***Exemple 8.5***. — Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(e_1, e_2, e_3)$. Déterminons le rang de la famille formée par les vecteurs

$$v_1 = 2e_1 + e_2,\ v_2 = e_1,\ v_3 = e_1 - e_2 + 3e_3.$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(v_1,v_2,v_3) &= \mathrm{Vect}(2e_1+e_2,e_1,e_1-e_2+3e_3)\\
&= \mathrm{Vect}(e_1,2e_1+e_2,e_1-e_2+3e_3)\\
&= \mathrm{Vect}(e_1,2e_1+e_2-2e_1,e_1-e_2+3e_3)\\
&= \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_1-e_2+3e_3)\\
&= \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_1-e_2+3e_3-e_1)\\
&= \mathrm{Vect}(e_1,e_2,-e_2+3e_3)\\
&= \mathrm{Vect}(e_1,e_2,-e_2+3e_3+e_2)\\
&= \mathrm{Vect}(e_1,e_2,3e_3)\\
&= \mathrm{Vect}(e_1,e_2,\frac{1}{3}\times 3e_3)\\
&= \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)\\
&= 3
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{rg}(v_1,v_2,v_3)=3=\dim E$ et par conséquent $(v_1,v_2,v_3)$ est une base de $E$.

Avec le calcul matriciel, ce raisonnement sera ramené à l'utilisation de la méthode du pivot de Gauss. Dans $\mathbb{K}^n$, on peut tout de même faire la remarque suivante.

***Remarque 8.6.*** — Soit $(v_1,\cdots,v_p)$ une famille de vecteurs dans $\mathbb{K}^n$. Alors le rang de $(v_1,\cdots,v_p)$ est égal au nombre de pivots trouvé dans le tableau des coordonnées de $(v_1,\cdots,v_p)$.

***Exemple 8.7.*** — Déterminons le rang de la famille de vecteurs

$$v_1=(2,1,1,4), v_2=(-1,1,-2,-2), v_3=(1,1,-1,1)$$

$$v_4=(-1,-1,1,-1), v_5=(1,0,1,2).$$

On applique la méthode du pivot de Gauss au tableau des coordonnées de ces vecteurs

$$\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 1 & 1\\ 4 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -3 & -1 & 1 & 1\\ \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 2 & 1\\ 0 & -6 & -3 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -3 & -1 & \boxed{1} & 1\\ \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0\\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

La famille $(v_1, v_4, v_5)$ est une famille libre maximale et $\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = 3 =$ nombre de pivots.

**Compétences visées.**

- Retenir les bases canoniques des espaces vectoriels de références $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$.
- Savoir extraire d'une famille génératrice une sous-famille libre maximale et la compléter en une base.
- Savoir construire une base d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs ou défini par des équations.
- Savoir trouver un sous-espace supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.
- Savoir calculer le rang d'une famille de vecteurs.
- Savoir bien appliquer de la formule de Grassmann.

*version 1, March 16, 2022*

- *Url :* `http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Alg-Lin-S2/`