I NOMBRES REELS

Tout un chacun connaît intuitivement les ensembles de nombres, l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (compter sur ses doigts), l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ (je dois 5 euros à mon ami, donc j'ai -5 euros) et l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (je dois couper un gâteau en 8 parts).

Mais très vite les mathématiciens, grecs notamment, se sont rendus compte que ces ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$ étaient très insuffisants pour refléter la réalité du monde : la géométrie introduit la "quantité" $\sqrt{2}$ comme la diagonale d'un carré de longueur 1 (théorème de Pythagore) et Aristote fournit très tôt la démonstration du fait que $\sqrt{2}$ n'est pas le quotient de deux entiers.

De même la "quantité" π définie comme le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre n'est pas non plus le quotient de deux entiers. D'où la nécessité "d'inventer" un autre ensemble de nombres, appelés réels, qui a le mérite de combler ces lacunes et aussi d'englober les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$ avec des règles de calculs identiques.

1. Corps totalement ordonné - Borne supérieure

1.1 Définition

On appelle corps commutatif un ensemble non vide $\mathbb{K}$ muni de deux opérations nommées addition (notée $+$) et multiplication (notée .) vérifiant les conditions suivantes :

1. $\mathbb{K}$ muni de l'addition est un groupe commutatif, i.e
   - (a) $\mathbb{K}$ est stable pour l'addition : $\forall x, y \in \mathbb{K}, x + y \in \mathbb{K}$
   - (b) l'addition est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{K},\ x + y = y + x$
   - (c) l'addition est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x + (y + z) = (x + y) + z$
   - (d) il existe un élément $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{K},\ x + 0_{\mathbb{K}} = x$: $0_{\mathbb{K}}$ est appelé élément neutre pour l'addition
   - (e) pour tout $x \in \mathbb{K}$, il existe $y \in \mathbb{K}$ tel que $x + y = 0_{\mathbb{K}}$: cet élément y est noté $-x$ et est appelé opposé de x.
2. La multiplication vérifie les propriétés suivantes
   - (a) $\mathbb{K}$ est stable pour la multiplication : $\forall x, y \in \mathbb{K}, x.y \in \mathbb{K}$
   - (b) la multiplication est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{K},\ x.y = y.x$
   - (c) la multiplication est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x.(y.z) = (x.y).z$
   - (d) il existe un élément $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{K},\ x.1_{\mathbb{K}} = x$: $1_{\mathbb{K}}$ est appelé élément neutre pour la multiplication
   - (e) pour tout $x \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$, il existe $y \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ tel que $x.y = 1_{\mathbb{K}}$: cet élément y est noté x^{-1} et est appelé inverse de x.
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition , i.e

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x.(y + z) = x.y + x.z$$

1.2 Exemples

(a) $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif.

(b) $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps commutatif : l'élément 2 ne possède pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$.

1.3 Définition

On appelle relation d'ordre sur un ensemble E une relation entre deux éléments de E notée $\leq$ vérifiant

1. la relation est réflexive : $\forall x \in E, x \leq x$
2. la relation est antisymétrique : $\forall x, y \in E, x \leq y$ et $y \leq x$ entraine $x = y$
3. la relation est transitive : $\forall x, y, z \in E, x \leq y$ et $y \leq z$ entraine $x \leq z$.

On note habituellement $x < y$ pour $x \leq y$ et $x \neq y$.

On dit que $(E, \leq)$ est totalement ordonné (ou que la relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur E) si pour tous $x, y \in E$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

On dit qu'un corps $\mathbb{K}$ est ordonné s'il est muni d'une relation d'ordre $\leq$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{K}, 0_{\mathbb{K}} \leq x \text{ et } 0_{\mathbb{K}} \leq y \Longrightarrow 0_{\mathbb{K}} \leq x.y$$

1.4 Exemples

(a) la relation $\leq$ définie sur $\mathbb{Z}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$$

est une relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}$.

(b) la relation d'inclusion sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$ mais elle n'est pas totale.

1.5 Définition

Soit A une partie non vide d'un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$.

(a) On dit qu'un élément a de E est un majorant de A (ou majore A) si $\forall x \in A,\ x \leq a$.

(b) On dit qu'un élément a de E est un minorant de A (ou minore A) si $\forall x \in A,\ a \leq x$.

(c) On dit que A est majorée si A admet un majorant ; de même on dit que A est minorée si A admet un minorant.

(d) On dit A est bornée si A est à la fois minorée et majorée.

1.6 Exemples

(a) l'ensemble $A = \{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie bornée de $\mathbb{Q}$: elle admet 0 pour minorant et 1 pour majorant et on constate que ce majorant appartient à A.

(b) l'ensemble $B = \{n + 1 \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ admet 1 comme minorant et on constate que ce minorant appartient à B ; mais B n'est pas majoré.

1.7 Définition et proposition

Soit A une partie non vide d'un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$.

(a) Si A est majorée, on dit que A admet un plus grand élément s'il existe un majorant a de A qui appartient à A : a est alors unique et on l'appelle le plus grand élément de A ou maximum de A, et on le note $a = \max(A)$.

(b) Si A est minorée, on dit que A admet un plus petit élément s'il existe un minorant a de A qui appartient à A : a est alors unique et on l'appelle le plus petit élément de A ou minimum de A et on le note $a = \min(A)$.

Preuve :

(a) si a et b sont deux plus grands éléments de A, alors comme $a \in A$ et b est un majorant de A , on a $a \leq b$ et de même on a $b \leq a$ puisque $b \in A$ et a est un majorant de A, d'où $a = b$.

$\square$

1.8 Exemples

(a) l'ensemble $A = \{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$ a pour plus grand élément 1 mais ne possède pas de plus petit élément bien qu'il soit minoré. En effet, si A possède un plus petit élément a, alors a est de la forme $\frac{1}{m}$ pour un certain entier $m \in \mathbb{N}^*$ puisque $a \in A$, et $a = \frac{1}{m}$ minore A i.e

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ m \geq n$$

et ainsi m est un majorant de $\mathbb{N}^*$, ce qui est impossible.

(b) l'ensemble $B = \{n + 1 \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ admet 1 comme plus petit élément.

1.9 Définition et proposition

Soit A une partie non vide d'un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$.

(a) Si A est majorée et si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément a, alors a est appelé borne supérieure de A et est noté $\sup A$; ainsi $a = \sup A$ signifie

(i) a est un majorant de A : $\forall x \in A, \ x \leq a$

et

(ii) a est le plus petit majorant de A :

$$\forall t \in E, \ t < a \Longrightarrow t \text{ n'est pas un majorant de } A, \ i.e \ \exists \ x \in A, \ t < x.$$

Si A admet une borne supérieure, celle-ci est unique. De plus, A admet un plus grand élément si A admet une borne supérieure et si $\sup A \in A$.

(b) Si A est minorée et si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément a, alors a est appelé borne inférieure de A et est noté $\inf A$; ainsi $a = \inf A$ signifie

(i) a est un minorant de A : $\forall x \in A,\ a \leq x$

et

(ii) a est le plus grand minorant de A :

$$\forall t \in E,\ a < t \Longrightarrow t \text{ n'est pas un minorant de } A,\ i.e\ \exists\ x \in A,\ x < t.$$

Si A admet une borne inférieure, celle-ci est unique. De plus, A admet un plus petit élément si A admet une borne inférieure et si $\inf A \in A$.

1.10 Exemples

(a) Considérons l'ensemble $A = \{1 - \frac{1}{n}\ /\ n \in \mathbb{N}^*\}$; 1 est clairement un majorant de A, on va montrer que $\sup A = 1$: Soit t un rationnel tel que $t < 1$, alors $1 - t > 0$ donc si on choisit un entier n tel que $n > \frac{1}{1-t}$, alors on a $t < 1 - \frac{1}{n}$ donc t n'est pas un majorant de A. On a donc $\sup A = 1$. Donc A n'admet pas de plus grand élément puisque $1 \notin A$.

(b) Dans $\mathbb{Q}$, l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}\ /\ x^2 < 2\}$ pourtant majoré, n'admet pas de borne supérieure. (cf. exercice)

2. Corps des nombres réels

2.1 Définition et proposition

On obtient $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres réels, à l'aide des trois axiomes suivants :

1. $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné.
2. $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{R}$ vérifie la propriété dite de la borne supérieure : toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

On peut montrer "l'unicité" d'un tel ensemble, à savoir que si on construit par des méthodes différentes deux ensembles vérifiant ces trois axiomes, il existe un procédé d'identification "naturel" des éléments de ces deux ensembles.

D'autre part, comme $\mathbb{R}$ vérifie la propriété dite de la borne supérieure, il vérifie aussi la propriété dite de la borne inférieure : toute partie A non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure (il suffit de considérer l'ensemble $A' = \{-x\ /\ x \in A\}$ qui est non vide majoré et alors $-\sup A' = \inf A$).

2.2 Proposition

(a) $\mathbb{N}$ est bien ordonné, i.e toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément ;

(b) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

(c) Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Preuve :

(a) cf. cours de Fondement des maths.

(b) Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$: alors l'ensemble B des majorants de A dans $\mathbb{Z}$ est non vide.

1er cas : on suppose $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$, alors l'ensemble B des majorants de A est contenu dans $\mathbb{N}$, donc B possède un plus petit élément m d'après a) : on va montrer que $m \in A$.

Supposons que $m \notin A$, alors, comme m est un majorant de A, on a $\forall n \in A, n < m$, donc $m \geq 1$, sinon on aurait $\forall n \in A,\ n < 0$, ce qui est impossible puisqu'on a supposé $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. Alors, $\forall n \in A, n \leq m-1$ puisque n et $m \in \mathbb{Z}$, et ainsi $m-1$ est un majorant de A donc $m-1 \in B$, ce qui est impossible puisque m est le plus petit élément de B. On en déduit que $m \in A$, et ainsi m est le plus grand élément de A.

2ème cas : on suppose $A \subset \mathbb{Z}^-$, alors l'ensemble $A' = \{-n \ / \ n \in A\}$ est inclus dans $\mathbb{N}$ et est minoré puisque A est majorée, donc d'après a), A' possède un plus petit élément m, et ainsi $-m$ est le plus grand élément de A.

(c) On applique (b) à l'ensemble $A' = \{-n \ / \ n \in A\}$.

$\square$

2.3 Définition

Une partie non vide I de $\mathbb{R}$ est appelée intervalle si et seulement si, pour tous a et $b \in I$ tels que $a \leq b$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \Longrightarrow x \in I.$$

2.4 Proposition

On recense 9 types d'intervalles dans $\mathbb{R}$; on a quatre types d'intervalles bornés : si a et b sont des réels tels que $a < b$

(a) intervalle fermé borné (appelé aussi segment)

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$$

(b) intervalle borné semi-ouvert à droite

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$$

(c) intervalle borné semi-ouvert à gauche

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$$

(d) intervalle borné ouvert

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$$

et on a cinq types d'intervalles non bornés : si $a \in \mathbb{R}$

(e) intervalle fermé non majoré

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x\}$$

(f) intervalle ouvert non majoré

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\}$$

(g) intervalle fermé non minoré

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq a\}$$

(h) intervalle ouvert non minoré

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$$

(i) droite réelle

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Preuve :

Traitons d'abord le cas des intervalles bornés : si I est un intervalle borné non réduit à un élément, il admet une borne inférieure a et une borne supérieure b tels que $a < b$. Alors tout élément x de I vérifie $a \leq x \leq b$.

Montrons maintenant que tout réel x vérifiant $a < x < b$ appartient à I : comme $a < x < b$, x n'est ni un minorant, ni un majorant de I, donc il existe deux éléments y et z de I tels que $y < x < z$, ce qui entraîne que $x \in I$ puisque I est un intervalle. On obtient alors les quatre types d'intervalles bornés, selon que a et b appartiennent ou pas à I.

Considérons maintenant un intervalle I minoré et non majoré de borne inférieure a, alors tout élément $x \in I$ vérifie $x \geq a$. Réciproquement, si x est un réel vérifiant $x > a$, alors x n'est pas un minorant de I donc il existe $y \in I$ tel que $y < x$, et comme I n'est pas majoré, il existe $z \in I$ tel que $z > x$, d'où $x \in I$ puisque I est un intervalle. On obtient alors les deux types d'intervalles non majorés, selon que a appartient ou pas à I. La démonstration est semblable pour les deux types d'intervalles non minorés.

Considérons enfin un intervalle I ni minoré, ni majoré, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe deux éléments y et z de I tels que $y < x < z$ donc $x \in I$, et ainsi $I = \mathbb{R}$.

$\square$

2.5 Définition et proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel positif défini par

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

autrement dit

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } |x| = -x \text{ si } x \leq 0.$$

L'application valeur absolue vérifie les propriétés suivantes pour tous réels x et y

(a) $|-x| = |x|$;

(b) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(c) $|xy| = |x|.|y|$;

(d) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (inégalité triangulaire) ;

(d') $|\ |x|-|y|\ | \leq |x-y|$.

De plus, une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si seulement si il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in A,\ |x| \leq M.$$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$: si $x \geq 0$, on a clairement $x \geq -x$, donc $|x| = x$, de même si $x \leq 0$, on a $x \leq -x$, donc $|x| = -x$, donc dans tous les cas $|x| \geq 0$.

(a) clair.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$; si $x = 0$, alors $-x = 0$ donc $|x| = \sup\{x, -x\} = 0$; réciproquement, si $|x| = \max\{x, -x\} = 0$, alors $x = 0$ ou $-x = 0$, donc $x = 0$.

(c) s'obtient par la "règle des signes" sur le produit.

(d) Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $x+y \geq 0$ donc $|x+y| = x+y = |x|+|y|$. Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, on applique ce qui précède à $-x$ et $-y$ en utilisant (a).

Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $-x \leq x$ et $y \leq -y$ donc $-(x+y) = -x-y \leq x-y$ et $x+y \leq x-y$ donc $x-y$ est un majorant de $-(x+y)$ et de $x+y$ donc de $|x+y|$; or $x-y = |x|+|y|$ d'où $|x+y| \leq |x|+|y|$. Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, on applique ce qui précède à $-x$ et $-y$ en utilisant (a).

(d') On applique (d) à x et $y-x$:

$$|y| = |x+(y-x)| \leq |x|+|y-x|$$

d'où

$$|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$$

mais aussi, en échangeant les rôles de x et y,

$$|x|-|y| \leq |x-y|$$

donc $|x-y|$ est un majorant de $|x|-|y|$ et de $-(|x|-|y|)$, d'où

$$|\ |x|-|y|\ | \leq |x-y|.$$

Enfin soit A une partie de $\mathbb{R}$: si A est bornée, il existe m_1 et $m_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A,\ m_1 \leq x \leq m_2$$

alors, si on pose $M = \max(|m_1|, |m_2|)$ on a

$$\forall x \in A,\ |x| \leq M.$$

Réciproquement, s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in A,\ |x| \leq M$$

alors on a

$$\forall x \in A,\ -M \leq x \leq M$$

et ainsi A est bornée.

$\square$

2.6 Théorème $\mathbb{R}$ est archimédien, i.e

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n\varepsilon > x.$$

Preuve : Considérons $x \in \mathbb{R}$ et un réel $\varepsilon > 0$, et raisonnons par l'absurde :

supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $n\varepsilon \leq x$, alors l'ensemble $E = \{n\varepsilon \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré par x, donc admet une borne supérieure M ; comme $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon < n_0\, \varepsilon$ i.e $M < (n_0 + 1)\varepsilon$, ce qui est impossible puisque $(n_0 + 1)\varepsilon \in E$ et $M = \sup E$. Donc on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n\varepsilon > x.$$

$\square$

2.7 Proposition et définition

Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif k tel que $k \leq x < k + 1$: cet entier est appelé partie entière de x et noté $E(x)$.

Preuve : Considérons l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \leq x\}$.

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > -x$ i.e $-n < x$ et ainsi $-n \in A$: A est donc non vide. De même il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > x$, et ainsi m majore A.

A est donc une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ donc admet un plus grand élément k d'après 2.2 : cet élément k est ainsi l'unique entier relatif tel que $k \leq x < k + 1$.

$\square$

2.8 Théorème

(a) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, i.e entre deux réels distincts, il existe un rationnel :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x < y, \exists\, r \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x < r < y.$$

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ i.e entre deux réels distincts, il existe un irrationnel :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x < y, \exists\, t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ tel que } x < t < y.$$

Preuve :

(a) Soient x et y deux réels tels que $x < y$ et considérons $\varepsilon = y - x$: $\varepsilon > 0$ donc, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > 1$, i.e $ny - nx > 1$. Considérons maintenant $k = E(nx + 1)$, on a alors

$$k \leq nx + 1 < k + 1$$

d'où

$$nx < k \leq nx + 1 < ny$$

et ainsi

$$x < \frac{k}{n} < y$$

on a donc trouvé un rationnel $r = \dfrac{k}{n}$ strictement compris entre x et y.

(b) Soient x et y deux réels tels que $x < y$; alors d'après (a), il existe deux rationnels r et r' tels que

$$x < r < r' < y$$

posons $t = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$: $t \notin \mathbb{Q}$ puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, et $r < t < r'$ puisque $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]0, 1[$ d'où $x < t < y$.

□

2.9 Corollaire

Soit x un réel vérifiant $\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon$, alors $x = 0$.

Preuve : Soit x un réel vérifiant : $\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon$ et supposons que $x \neq 0$, alors $|x| > 0$ donc il existe un réel α tel que $0 < \alpha < |x|$ ce qui est impossible d'après l'hypothèse sur x, donc $x = 0$.

□