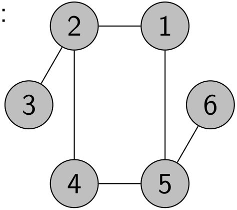
# Graphes planaires

## Graphe planaire

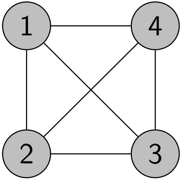
Un graphe est *planaire* s'il peut être représenté dans le plan sans croisement d'arêtes/arcs.

## Exemples

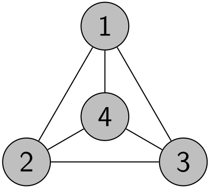
$G_1$ :




$G_2$ :




$G_2$ :

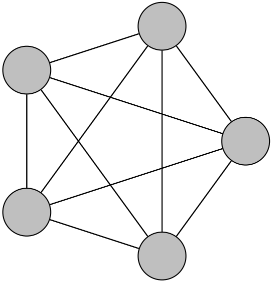


# Graphes planaires

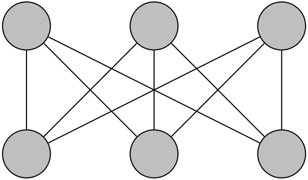
## Plan de la partie

1. $K_5$ n'est pas planaire
2. $K_{3,3}$ n'est pas planaire
3. les graphes non planaires sont ceux pouvant *être transformés* en $K_5$ ou $K_{3,3}$

$K_5$:



$K_{3,3}$:



## Région

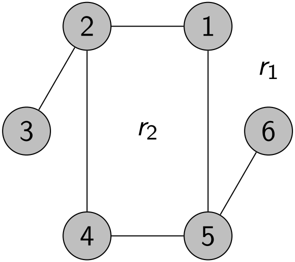
Une *région* $r$ est une partie non vide du plan telle que toute paire de points de $r$ est joignable par une courbe continue composée de points de $r$.

## Remarque

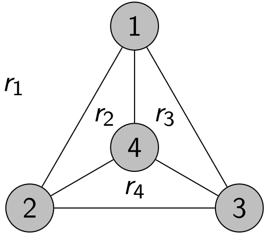
Tout graphe planaire induit une partition du plan en régions.

## Exemples

$G_1$ :




$G_2$ :



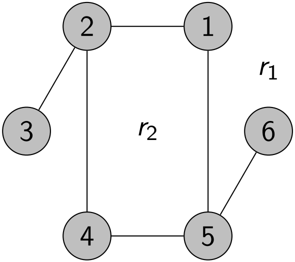
## Degré d'une région

Le *degré d'une région* $r$, noté $\deg_G(r)$, d'un graphe planaire $G$ est la longueur de sa frontière.

## Exemples

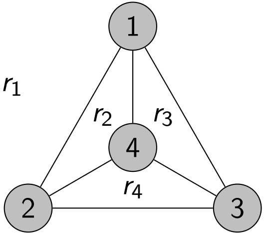
frontière de $r_1$ :
$(1, 5, 6, 5, 4, 2, 3, 2, 1)$

$G_1$ :




$\deg_{G_1}(r_1) = 8 \quad \deg_{G_1}(r_2) = 4$

$G_2$ :




$\deg_{G_2}(r_1) = 3 \quad \deg_{G_2}(r_2) = 3$
$\deg_{G_2}(r_3) = 3 \quad \deg_{G_2}(r_4) = 3$

Soit $G = (V, E)$ graphe simple non orienté planaire.

### Propriété

Soit $R$ l'ensemble des régions induites, alors

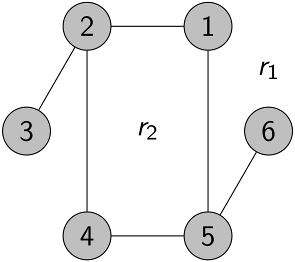
$$\sum_{r \in R} \deg_G(r) = 2|E|$$

### Idée de preuve

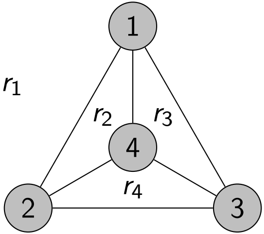
Chaque arête est comptée exactement deux fois dans la somme.

## Exemples

$G_1$ :




$G_2$ :




$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} \deg_{G_1}(r_i) &= 8 + 4 \\ &= 12 \\ &= 2|E_1|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} \deg_{G_2}(r_i) &= 3 + 3 + 3 + 3 \\ &= 12 \\ &= 2|E_2|\end{aligned}$$

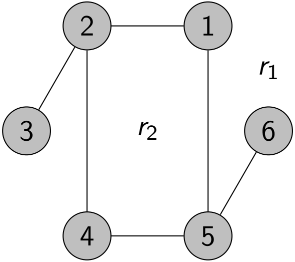
Formule d'Euler

Soit $G = (V, E)$ graphe simple non orienté non vide planaire et connexe, et $R$ l'ensemble de ses régions, alors :

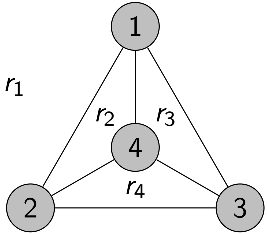
$$|V| - |E| + |R| = 2$$

## Exemples

$G_1$ :




$G_2$ :




$$|V_1| - |E_1| + |R_1| = 6 - 6 + 2 = 2$$

$$|V_2| - |E_2| + |R_2| = 4 - 6 + 4 = 2$$

### Graphe maximal planaire

Un graphe simple non orienté est *maximal planaire* si l'ajout d'une arête rend le graphe non planaire.

### Propriété

Dans un graphe maximal planaire toute région est délimitée par 3 arêtes.

### Corollaire 1

Soit $G = (V, E)$ maximal planaire et $R$ l'ensemble de ses régions, alors

$$3|R| = 2|E|$$

# Graphes planaires

*Formule d'Euler*

## Corollaire 2

Soit $G = (V, E)$ graphe simple planaire et $R$ l'ensemble de ses régions, alors

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

## Preuve

Soit $G' = (V, E')$ maximal planaire avec $E \subseteq E'$ et $R'$ l'ensemble de ses régions. Alors

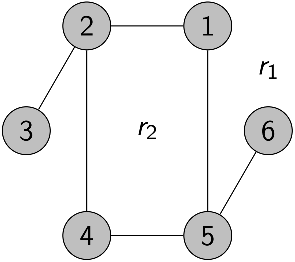
$$\begin{aligned} 2|E'| &= 3|R'| && \text{(cor. 1)} \\ &= 3(2 - |V| + |E'|) && \text{(formule d'Euler)} \\ &= 6 - 3|V| + 3|E'| \end{aligned}$$

d'où

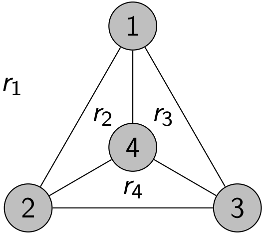
$$|E| \leq |E'| = 3|V| - 6$$

## Exemples

$G_1$ :




$G_2$ :




$|E_1| = 6 \leq 12 = 3|V_1| - 6$

$|E_2| = 6 \leq 6 = 3|V_2| - 6$

## Proposition

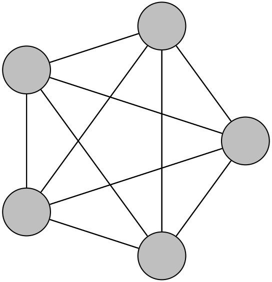
$K_5$ n'est pas planaire.

## Preuve

On n'a pas

$$|E| = 10 \not\leq 9 = 3|V| - 6$$

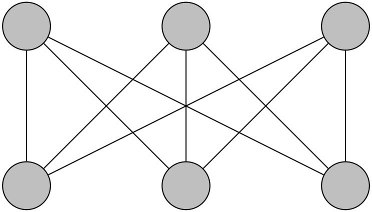
donc $K_5$ n'est pas planaire.



# Graphes planaires

*$K_{3,3}$ n'est pas planaire*

La condition précédente ne permet pas de montrer que $K_{3,3}$ n'est pas planaire :



$$|E| = 9 \leq 12 = 3|V| - 6$$

## Remarque

$|E| \leq 3|V| - 6$ est une condition nécessaire pour qu'un graphe soit planaire, mais pas suffisante.

### Proposition

$K_{3,3}$ n'est pas planaire.

### Preuve

Supposons $K_{3,3}$ planaire ($\star$), et soit $R$ l'ensemble de ses régions. $K_{3,3}$ étant biparti, il ne contient pas de triangle, donc chaque région est au moins de degré 4, d'où

$$4|R| \leq \sum_{r \in R} \deg_G(r) = 2|E|$$

or la formule d'Euler donne $4|V| - 4|E| + 4|R| = 8$ d'où

$$8 - 4|V| + 4|E| \leq 2|E| \qquad \text{i.e.} \qquad |E| \leq 2|V| - 4$$

Mais pour $K_{3,3}$ on a $|E| = 9$ et $2|V| - 4 = 8$, contredit ($\star$).

Soit $G$ graphe simple non orienté.

## Mineur d'un graphe

$M$ est un *mineur de $G$* s'il est résultat d'une succession des opérations suivantes à partir de $G$ :

Suppression d'un sommet isolé $v$ :

$$(V, E) \mapsto (V \setminus \{v\}, E)$$

Suppression d'une arête $\{u, v\}$ :

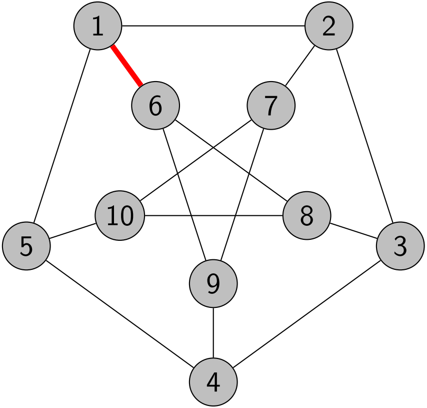
$$(V, E) \mapsto (V, E \setminus \{\ \{u, v\}\ \})$$

Contraction d'une arête $\{u, v\}$ :

$$(V, E) \mapsto (\sigma(V), \sigma(E \setminus \{\ \{u, v\}\ \}))$$

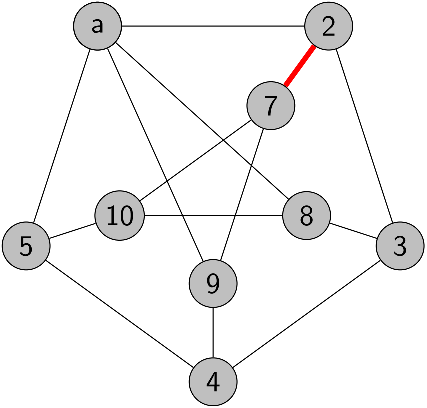
où $\sigma = \{u \mapsto w, v \mapsto w\}$ avec $w$ un nouveau sommet

## Exemple



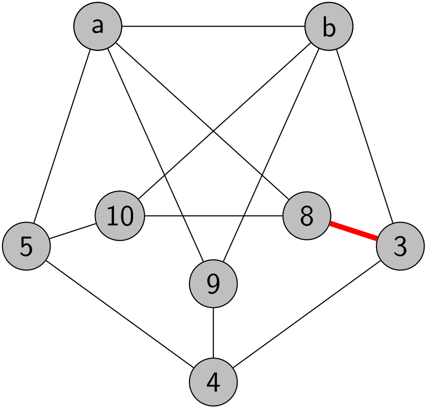

1. contraction de $\{1, 6\}$

## Exemple



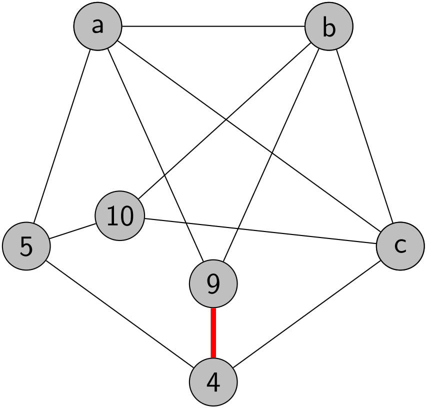

1. contraction de $\{1, 6\}$
2. contraction de $\{2, 7\}$

## Exemple



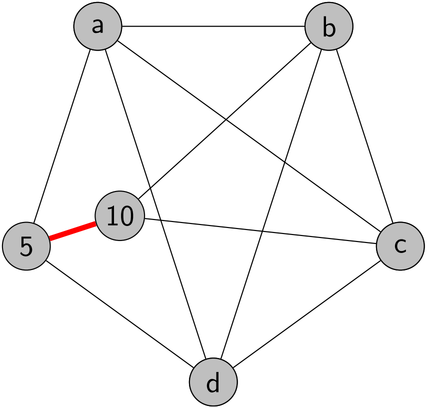

1. contraction de $\{1, 6\}$
2. contraction de $\{2, 7\}$
3. contraction de $\{3, 8\}$

## Exemple




1. contraction de $\{1, 6\}$
2. contraction de $\{2, 7\}$
3. contraction de $\{3, 8\}$
4. contraction de $\{4, 9\}$

## Exemple

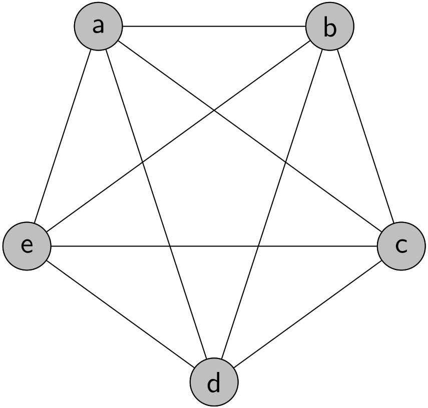



1. contraction de $\{1, 6\}$
2. contraction de $\{2, 7\}$
3. contraction de $\{3, 8\}$
4. contraction de $\{4, 9\}$
5. contraction de $\{5, 10\}$

# Graphes planaires

*Mineur d'un graphe*

## Exemple




1. contraction de $\{1, 6\}$
2. contraction de $\{2, 7\}$
3. contraction de $\{3, 8\}$
4. contraction de $\{4, 9\}$
5. contraction de $\{5, 10\}$

**Théorème (Kuratowski / Wagner)**

Un graphe simple non orienté est planaire si et seulement s'il n'a ni $K_5$ ni $K_{3,3}$ pour mineur.

### Preuve

- $\boxed{\Rightarrow}$ Les opérations d'obtention d'un mineur préservent la planarité : si $G$ est planaire, la suppression d'un sommet isolé, la suppression d'une arête, ou la contraction d'une arête produit un graphe lui aussi planaire.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Admis.