TD 1: théorie des ensembles

Dans la suite U désigne un ensemble univers, i.e. :

— $A, B, C, D, E \subseteq U$;

— et $x, y, a, b, c, a_1, \ldots, a_n, 0, 1 \in U$.

Exercice 1. Compréhension du cours.

1. Dans chacun des cas suivants, dire si $A = B$:
   (a) $A := \{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}$ et $B := \{5, 3, 1\}$
   (b) $A := \{\{1\}\}$ et $B = \{1, \{1\}\}$
2. Lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ?
   (a) $x \in \{x\}$
   (b) $\{x\} \subseteq \{x\}$
   (c) $\{x\} \in \{x\}$
   (d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$
3. Donner l'ensemble des parties des ensembles suivants :
   (a) $\{a, b\}$
   (b) $\emptyset$
   (c) $\{\emptyset\}$
   (d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
4. Soit $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq U$. Donner une définition en intension/compréhension de A.
5. $\mathcal{P}(E)$ peut-il être une partition de E ?
6. $\emptyset$ peut-il être partitionné ?
7. Soit $A := \{a, b, c\}$, $B := \{x, y\}$ et $C := \{0, 1\}$. Donner en extension :
   (a) $A \times B$
   (b) $B \times A$
   (c) $(A \times B) \times C$
   (d) $A \times (B \times C)$
   (e) $A \times B \times C$

Exercice 2. Soient $A, B, C \subseteq U$. Montrer que :

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ et $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad C \setminus B \subseteq C \setminus A$
3. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
4. $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
5. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
6. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. À quelle(s) condition(s) a-t-on l'égalité ?

Exercice 3.

1. Si $A \cup B = A \cap B$, a-t-on $A = B$?
2. Si $A \cup B = C \cup D$ et $A \cap B = C \cap D$ a-t-on $\{A, B\} = \{C, D\}$?
3. Est-il vrai que si $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ alors $A = B$?

Exercice 4. Soit A un ensemble. Trouver un ensemble B tel que $A \in B$ et $A \subseteq B$.

Exercice 5. Les nombres ordinaux.

Soit $B \subseteq U$. On définit la famille des ensembles X_i suivants :

$$\begin{cases} X_0 := B \\ X_{n+1} := X_n \cup \{X_n\} \end{cases}$$

Dans cette première partie, on pose $B := \emptyset$.

1. Donner alors X_i en extension pour i de 0 à 4.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n \in X_{n+1}$ et $X_n \subset X_{n+1}$.
3. En déduire que, quels que soient m et n, les trois assertions suivantes sont équivalents :

   1. $n < m$;
   2. $X_n \in X_m$;
   3. $X_n \subset X_m$.

On vient d'encoder les entiers naturels munis d'une structure d'ordre par des ensembles en utilisant comme base l'ensemble vide $\emptyset$. Notons $\omega := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ la réunion de cette famille d'ensembles.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n \in \omega$.

D'après la question 3 ci-dessus, et en identifiant l'entier naturel n à l'ensemble X_n, on peut interpréter l'expression $X_n \in \omega$ par $n < \omega$. On a donc construit un *nombre* plus grand que tous les entiers !

En réitérant le processus avec $B := \omega$ on construit la suite des *nombres* $\omega, \omega + 1, \ldots, \omega + \omega$ que l'on peut énumérer dans l'ordre :

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \omega = \omega \times 2$$

Ce processus peut encore être réitéré. Ces *nombres* sont appelés les nombres ordinaux et ont été introduits par Cantor lors des développements de la théorie des ensembles.