Feuille 2 - Langage logique, Modélisation

Exercice 1 Dans la suite X, Y et Z sont des variables propositionnelles (symboles de prédicat d'arité 0) **distinctes**. Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse.

Affirmation	vrai	faux
$A = B$ représente le fait que les deux formules sont syntaxiquement égales (même représentation).		
$X \vee Y = Y \vee X$		
$X \Rightarrow Y \wedge Z = X \Rightarrow (Y \wedge Z)$		
$A \equiv B$ représente le fait que les deux formules sont sémantiquement égales (même table de vérité).		
$(X \vee Y) \wedge X \equiv X$		
$(X \wedge Y) \vee Z \equiv X \vee Z$		
$\neg(X \Rightarrow Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$		
Si $X \Rightarrow Y$ est faux alors X est vrai.		
Si $X \vee Y$ est vrai alors Y est vrai.		
Si X est vrai alors $(\neg X) \Rightarrow Y$ est faux.		
Une formule est satisfiable s'il existe des valeurs pour les variables propositionnelles qui la rendent vraie. Une formule est valide si elle est vraie quelles que soient les valeurs des variables propositionnelles.		
La formule $X \Rightarrow \neg Y$ est satisfiable		
La formule $X \Rightarrow \neg Y$ est valide		
Soit `joue` un prédicat binaire tel que $\texttt{joue}(x,y)$ représente le fait que x joue avec y.		
$\forall x, \exists y, \neg \texttt{joue}(x,y)$ signifie qu'il existe quelqu'un avec qui personne ne joue.		
La formule $(\exists x\, y, \texttt{joue}(x,y)) \Rightarrow \exists z, \texttt{joue}(z,z)$ est toujours vraie.		
$\forall x, \exists y, \exists z, (\texttt{joue}(x,y) \wedge \texttt{joue}(x,z))$ signifie que toute personne joue avec au moins deux personnes différentes.		

Exercice 2 Soient p et q deux symboles de prédicat binaire, r un symbole de prédicat unaire, f un symbole de fonction unaire, a un symbole de fonction 0-aire (ou constante) et g un symbole de fonction ternaire. Soit les formules du calcul des prédicats suivantes :

$$\begin{aligned} F &= (\exists x, p(x, f(y))) \vee \neg \forall y, q(y, g(a, z, f(z))) \\ G &= r(x) \vee ((\exists x, \forall y, p(f(x), z)) \wedge r(a)) \wedge \forall x, q(y, g(x, z, x)) \end{aligned}$$

1. Représenter chaque formule sous forme d'arbre dont les feuilles sont les formules atomiques.
2. Pour chaque occurrence de variable, dire si elle est libre ou liée et dans le cas où elle est liée, indiquer le quantificateur correspondant.
3. Donner les formules atomiques qui apparaissent dans chaque formule.
4. Donner tous les termes (en ignorant les sous-termes) qui apparaissent dans chaque formule.
5. Donner le résultat de la substitution dans chaque formule de la variable y par le terme $f(a)$ et de la variable z par le terme $f(x)$.

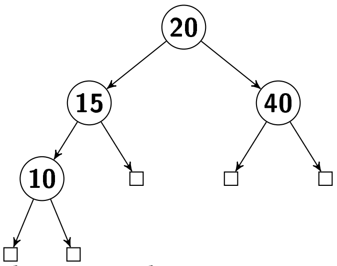
Exercice 3 *Modélisation*

La signature pour représenter des arbres binaires de recherche (ABR) contient une constante `nil` (feuille de l'arbre), et un symbole de fonction d'arité 3 : `node`.

On a une constante pour chaque entier naturel $0, 1, \ldots, 10, \ldots, 15 \ldots$

Dans l'expression $\texttt{node}(l, v, r)$, l représente le sous-arbre gauche, r le sous-arbre droit et v la valeur stockée dans le nœud.

Pour chaque nœud interne $\texttt{node}(l, v, r)$ d'un ABR, les valeurs dans le sous-arbre gauche l sont strictement plus petites que v qui est lui-même strictement plus petit que toutes les valeurs dans le sous-arbre droit r.



est un arbre binaire de recherche.

Il correspond au terme $\texttt{node}(\texttt{node}(\texttt{node}(\texttt{nil}, 10, \texttt{nil}), 15, \texttt{nil}), 20, \texttt{node}(\texttt{nil}, 40, \texttt{nil}))$.

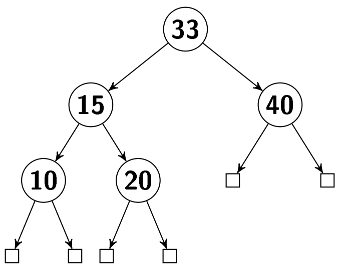
Les symboles de prédicats sont $=$, $<$ et $\in$ d'arité 2, notés de manière infixe.

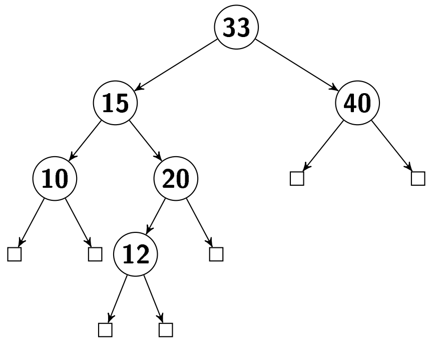
— $x = y$ représente l'égalité des objets x et y,

— $x < y$ représente le fait que x est strictement plus petit que y

— $v \in t$ est vrai si la valeur v apparaît dans un des nœuds de l'arbre t.

1. Dire si les arbres suivants sont bien des ABR sur les entiers avec l'ordre standard.





   Si c'est un arbre binaire de recherche, écrire le terme de la logique correspondant. Sinon justifier pourquoi.

2. Ecrire en utilisant les prédicats de la signature une formule logique avec deux variables libres t et n qui exprime le fait que n est la valeur maximum dans l'arbre t.

3. On suppose vérifiées les propriétés suivantes
   (a) $\forall x, \neg(x \in \texttt{nil})$
   (b) $\forall x\, l\, v\, r, (x \in \texttt{node}(l, v, r) \Leftrightarrow x \in l \lor x = v \lor x \in r)$
   (c) $\forall t_1\, t_2, \exists t, \forall x, (x \in t \Leftrightarrow x \in t_1 \land x \in t_2)$

   Expliquer chacune de ces propriétés en langage naturel.

4. On ajoute à la signature un prédicat unaire `abr`. On veut que $\texttt{abr}(t)$ représente la propriété que t est un arbre binaire de recherche.

   En vous inspirant de la question précédente, proposer deux propriétés du prédicat `abr` (l'une dans le cas $t = \texttt{nil}$ et l'autre dans le cas $t = \texttt{node}(l, v, r)$) qui caractérisent le fait que l'arbre t vérifie les propriétés des arbres binaires de recherche.

5. On ajoute à la signature une fonction binaire `union`. Ecrire une propriété qui spécifie que si t et u sont des arbres binaires de recherche alors $\texttt{union}(t, u)$ est un arbre binaire de recherche qui contient <u>exactement</u> les éléments de t et les éléments de u.

Exercice 4 *Algorithmes satisfiabilité-validité*

— On suppose que l'on dispose d'un algorithme `valide` qui répond vrai si une formule est valide et faux sinon. Utiliser cette fonction pour implanter un algorithme `satisfiable` qui répond vrai si une formule est satisfiable et faux sinon.

— On suppose que l'on dispose d'un algorithme `satisfiable` qui répond vrai si une formule est satisfiable et faux sinon. Utiliser cette fonction pour implanter un algorithme `valide` qui répond vrai si une formule est valide et faux sinon.

Exercice 5 *Interprétation en calcul des prédicats*

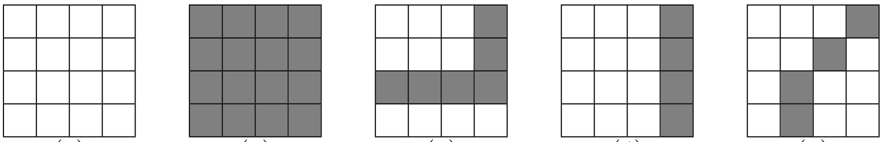
Pour connaître la valeur de vérité d'une formule du calcul des prédicats, il faut choisir un domaine et fixer une interprétation dans ce domaine des symboles de fonction et de prédicats du langage.

On considère un langage avec juste un symbole de prédicat binaire P.

On choisit une interprétation sur un domaine avec 4 éléments $\{1, 2, 3, 4\}$. On représente l'interprétation de P par un tableau 4×4. La formule atomique $P(t, u)$ aura la valeur vraie si t a la valeur i et u a la valeur j et que la case sur la ligne i et la colonne j est noir.

1. Soient les formules :
   (a) $\forall x\, y, P(x, y)$
   (b) $\exists x\, y, P(x, y)$
   (c) $\exists x, \forall y, P(x, y)$
   (d) $\exists y, \forall x, P(x, y)$
   (e) $\forall x, \exists y, P(x, y)$
   (f) $\forall y, \exists x, P(x, y)$

   Dire si ces formules sont ou non vraies dans chacune des interprétations de P suivantes :



(1) (2) (3) (4) (5)

2. Expliquer pour chaque formule comment on reconnait sur le tableau si la formule est vraie ou non dans l'interprétation correspondante.

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 Cet exercice a pour objectif de prouver un résultat théorique qui s'appelle le théorème de compacité.

L'énoncé de ce théorème est le suivant : soit un ensemble infini $\mathcal{E}$ de formules propositionnelles. On suppose que cet ensemble est insatisfiable. Alors il existe un sous-ensemble fini de $\mathcal{E}$ qui est insatisfiable.

1. Redonner la définition de la propriété $\mathcal{E}$ est insatisfiable.
2. Montrer que si un sous-ensemble fini de $\mathcal{E}$ est insatisfiable alors $\mathcal{E}$ est insatisfiable.
3. Dire pourquoi le résultat est vrai dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de variables propositionnelles. On étudiera l'exemple de l'ensemble $\mathcal{E} = \{B \Rightarrow A, A \Rightarrow \neg B, \neg A \Rightarrow B\} \cup (M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $M_0 = A \Rightarrow B$ et $M_{n+1} = M_n \Rightarrow B$
4. On suppose maintenant qu'il y a un ensemble dénombrable de variables propositionnelles $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On construit un arbre binaire de décision possiblement infini pour l'ensemble de formule $\mathcal{E}$ de la manière suivante :
   - Les sommets sont étiquetés par les variables propositionnelles, la racine de l'arbre est étiquetée par la variable X_0, les fils d'un nœud étiqueté par la variable X_i sont étiquetés par la variable X_{i+1}.
   - Le fils gauche d'un nœud étiqueté X_i correspond au cas $X_i = V$ et le fils droit au cas $X_i = F$.
   - Chaque branche correspond à une interprétation partielle $X_0 = V/F, \ldots, X_i = V/F$
   - Une feuille de l'arbre est étiquetée par une formule qui est fausse dans l'interprétation qui correspond à la branche.

   Montrer le résultat dans ce cas.

Exercice 7 *Coloriage de graphe*

Le problème de coloriage de graphe consiste à se donner un ensemble fini de couleurs et à associer à chaque sommet d'un graphe une couleur de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Pour chaque couleur $c \in C$ on se donne un ensemble de variables propositionnelles (x_i^c) avec (x_i^c) qui sera vrai si le sommet i a la couleur c.

- Combien y-a-t-il de variables pour un graphe de n sommets et k couleurs ?
- Proposer un ensemble de formules tel que toute interprétation qui rend vraies ces formules correspond à un coloriage du graphe.
- Soit un graphe infini avec un nombre dénombrable de sommets, montrer que si tous les sous-graphes finis sont coloriables alors le graphe complet est coloriable.