CHAPITRE 1

Quelques rappels sur les fonctions

1. Fonctions

Dans ce cours, on s'intéressera à des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$.

Une telle fonction peut être définie à l'aide d'une formule, par exemple

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{\sin x}{(x-1)^2}.$$

Ou bien en indiquant, à l'aide d'une accolade, une formule différente selon la valeur de x, par exemple

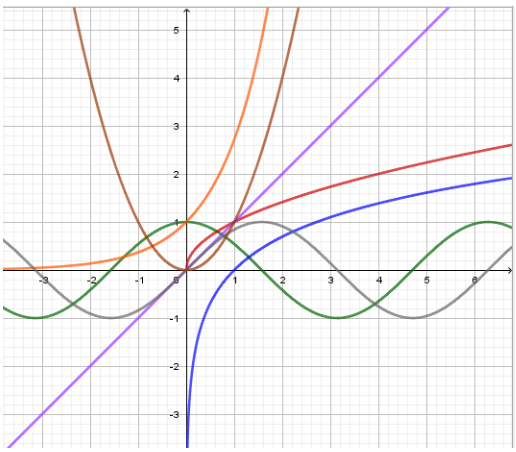
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0, \\ 2 & \text{si } x = 0, \\ 2 + \cos x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ou bien en décrivant, par une phrase, la procédure qui donne l'image d'un élément ; comme par exemple pour la fonction *partie entière* :

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \text{le plus grand entier} \leq x.$$

Ayant fixé un repère, la **courbe représentative** ou **graphe** d'une fonction est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, lorsque x varie dans l'ensemble de définition de la fonction.

Exemple : dans la figure suivante, on a représenté le graphe de sept fonctions bien connues.



2. Fonctions paires, impaires, périodiques

On rappelle les notions suivantes :

- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *paire* si on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela se traduit par le fait que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *impaire* si on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela se traduit par le fait que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique si on a $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, et T-périodique, alors la donnée de son graphe sur l'intervalle $[0, \frac{T}{2}]$ permet de reconstituer tout le graphe.

Exemples 2.1. (a) La fonction carrée $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est paire. La fonction cos est paire.
(b) La fonction sin est impaire. La fonction identité $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est impaire.
(c) Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.
(d) La fonction exp n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

3. Notion de limite

On rappelle la notion de limite.

Définition 3.1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$ (on dira : “près de a”), c'est-à-dire que D contient un intervalle de la forme $]a-r, a[$ ou $]a, a+r[$ pour un certain $r > 0$.

(1) On dit que f **admet** $+\infty$ (respectivement $-\infty$) **pour limite** en a si et seulement si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad (0 < |x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant A)$$
(respectivement
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad (0 < |x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant A)).$$
(2) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f **admet** ℓ **pour limite** en a si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad 0 < |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Lorsque l'ensemble de définition D contient un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (respectivement $]-\infty; B[$) alors on peut aussi définir (de façon similaire) la notion de limite de f en $+\infty$ (respectivement, $-\infty$).

Exemples 3.2. Les limites suivantes peuvent être établies à l'aide de la définition :
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} x \sin x = 0.$$

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Propriétés 3.3 (Opérations sur les limites). *Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.*
(a) *Soient $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies près de a, admettant en a des limites ℓ_1 et ℓ_2 respectivement ($\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$). Alors, lorsque les opérations sur les limites ont un sens, on a*
- $\lim\limits_{x \to a} (f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) + \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = \ell_1 + \ell_2$;
- $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lambda \ell$;

- $\lim_{x\to a}(f_1 f_2)(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \times \lim_{x\to a} f_2(x) = \ell_1\ell_2$;
- $\lim_{x\to a}(f_1/f_2)(x) = \dfrac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

(b) *Soient $\ell, L \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : \Delta \to \mathbb{R}$. On suppose que f est définie près de a, g est définie près de ℓ, et que Δ contient $f(D)$. On suppose que f admet une limite ℓ en a et g admet une limite L en ℓ. On a alors*

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \lim_{y\to \ell} g(y) = L.$$

4. Continuité et dérivabilité

On considère ici une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle (non vide, non réduit à un point) de $\mathbb{R}$. On rappelle les notions de continuité et dérivabilité.

Définition 4.1. Soit a un point de I. La fonction f est dite **continue** en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \qquad (|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Cela revient à dire :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point $a \in I$. Graphiquement cela se traduit par le fait que le graphe de f est un trait continu.

Définition 4.2. Soit a un point de I. La fonction f est dite **dérivable** en a si la fonction φ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\varphi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie en a. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en a et est notée $f'(a)$.

La quantité

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est appelée **taux de variation de f entre a et x**. C'est le coefficient directeur de la droite qui passe par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$. Graphiquement, le fait que f soit dérivable en a se traduit par le fait que le graphe de f admet une droite tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$, de coefficient directeur $f'(a)$, et dont l'équation sera donc

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

5. Comparaison des fonctions

Définition 5.1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies près de a.

(a) On dira que f **est négligeable devant g au voisinage de a** et on écrira $f = o_a(g)$ (on lit "f est un petit o de g") si on peut écrire $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ où ε est une fonction définie au voisinage de a et telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

(b) On dira que f **est équivalente à g au voisinage de a** et on écrira $f \sim_a g$ si on peut écrire $f(x) = \eta(x)g(x)$ où η est une fonction définie au voisinage de a et telle que $\lim_{x\to a} \eta(x) = 1$.

En pratique, si g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), alors

- $f = o_a(g)$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,
- $f \sim_a g$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Remarque 5.2. La relation "être négligeable devant au voisinage de a" est une relation transitive (si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$), la relation être "équivalent à au voisinage de a" est une relation d'équivalence (réflexive, transitive et symétrique).

Ces définitions s'étendent au cas $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ ou au cas où on regarde une limite à droite ou à gauche seulement.

Exemples 5.3. (1) $x^4 = o_0(x^2)$, plus généralement si $n > p$ alors $x^n = o_0(x^p)$. (2) $\sin(x) \sim_0 x$.

Définition 5.4 (Cas des suites). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

(1) On dira que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable devant** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on peut écrire $u_n = \varepsilon_n v_n$ où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

(2) On dira que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on peut écrire $u_n = \eta_n v_n$ où $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = 1$.

Comme avant pour les fonctions, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang) alors

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

6. Développement limité à l'ordre 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose f dérivable en a. On a donc la formule

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

que l'on peut écrire encore sous la forme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x - a} = 0.$$

Si on pose $h(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ alors on a l'égalité

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + h(x) \quad \text{pour tout } x \in I$$

et d'autre part la limite précédente donne

$$h(x) = o_a(x - a).$$

En combinant ces égalités on déduit la formule

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_a(x - a)}$$

qui traduit le fait que, au voisinage de a, la fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ fournit une approximation de la fonction f.

La formule encadrée est appelée **développement limité à l'ordre 1**.

EXEMPLES 6.1. Au voisinage de 0, on a
$\exp(x) = 1+x+o(x), \quad \sin(x) = x+o(x), \quad \cos(x) = 1+o(x), \quad \ln(1+x) = x+o(x)$
et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$.