Licence Portail MI, Nancy,
semestre d'automne 2021/22

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 1 : Ensembles finis

1. Autour du triangle de Pascal.

(1) Pour $n = 1, 2, 3, 4$: donner la liste de toutes les parties de l'ensemble $[[1, \ldots, n]]$, en les ordonnant selon leur cardinal $k = 0, 1, \ldots, n$. Donner, pour tout k et n, le nombre de telles parties, et vérifier que ce sont bien les nombres qui apparaissent dans le triangle de Pascal.

(2) Dans chacune des listes de la partie (1), rajouter un trait entre deux parties A et B si [$A \subset B$ et $\text{card}(B) = \text{card}(A) + 1$]. Graphiquement, le schéma pour $n = 2$ devra s'apparenter à un *carré*, et pour $n = 3$ à un *cube* (vu en perspective). Pour $n = 4$, prenez une grande feuille – le schéma ressemblera à deux cubes, liés entre eux (la figure géométrique s'appelle un *tesseract*; pour n quelconque on parle d'un *hypercube*).

Pour rendre l'image plus pertinente, colorier en rouge les parties A telles que $n \notin A$, et en bleu celles telles que $n \in A$.

(3) Justifier de deux manières différentes l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

a) en utilisant la formule du binome de Newton,

b) par un argument de dénombrement ensembliste.

Ecrire les cas particuliers de cette formule pour $n = 1, 2, 3, 4$, et expliquer le lien avec le triangle de Pascal.

(4) On se propose de démontrer la proposition (P) suivante :

(P) *Il y a autant de parties de* $[[1, \ldots, n]]$ *ayant un nombre* **pair** *d'éléments qu'il y en a ayant un nombre* **impair** *d'éléments.*

a) En utilisant les listes du point (1), montrer que (P) est vraie pour $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Soit n impair. Trouver un argument simple prouvant (P).

c) Soit n pair. Se ramener alors au cas $n - 1$ pour prouver (P).

d) En admettant (P), justifier de deux manières différentes l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Expliquer le lien avec le triangle de Pascal.

2. Un autre triangle de Pascal.

(1) Ecrire le triangle de Pascal jusqu'à la 9-ième ligne.

Ecrire la formule de Newton exprimant $(a + b)^8$.

(2) Recopier ce triangle en remplaçant le coefficient $\binom{n}{k}$ par 0 s'il est pair, et par 1 s'il est impair. Expliquer, en utilisant les règles de calcul du type "pair + pair = pair", comment construire ce triangle de proche en proche, sans utiliser la partie (1). Rajouter les 10-ième à 17-ième lignes de ce triangle.

(3) Pour quels n, la $(n + 1)$-ième ligne du triangle de la partie précédente ne contient-elle que des coefficients 1 ? Le coefficient $\binom{64}{25}$, est-il pair ou impair ? Montrer que, si a et b sont des entiers, alors $(a + b)^{64} - a^{64} - b^{64}$ est toujours pair.

3. Les pyramides de Pascal. Pour $k = 1, 2, 3, 4$, calculer $(a+b+c)^k$. Essayer de trouver un lien entre ces calculs et le triangle de Pascal.

4. Propriétés des opérations sur les ensembles. Dans cet exercice, illustrer toutes les formules ensemblistes par des diagrammes de Venn. (Cela ne constitue pas une preuve, mais peut aider à fixer les idées.) Soit A, B, C des parties de M.

1. Prouver la *loi de distributivité* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. On définit la *différence symétrique de A et de B* par
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, puis les propriétés :
commutativité : $A \Delta B = B \Delta A$
associativité : $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
neutre : $A \Delta \emptyset = A$
inverse : $A \Delta A = \emptyset$.
(Remarque : on résumera plus tard ces 4 propriétés en disant que $\mathcal{P}(M)$ *muni de la loi Δ est un groupe commutatif*.)

5. Inclusion, exclusion. Soit M un ensemble fini et $A_1, A_2, A_3 \subset M$. Illustrer par un diagramme de Venn, et montrer que

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2) + \operatorname{card}(A_3) \\ & - \big(\operatorname{card}(A_1 \cap A_2) + \operatorname{card}(A_1 \cap A_3) + \operatorname{card}(A_2 \cap A_3)\big) \\ & + \operatorname{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$

Enoncer une formule similaire exprimant $\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$, puis conjecturer une formule générale exprimant $\operatorname{card}(\cup_{i=1}^k A_i)$ pour k quelconque. Essayer de de justifier cette formule (on ne demande pas une preuve formelle).

6. Partitions. Rappelons du cours qu'une *partition d'en ensemble M en k parties* est la donnée de k parties non-vides $A_1, \dots, A_k$ telles que M soit la réunion disjointe $A_1 \cup \dots \cup A_k$. Supposons que M est de cardinal n.

1. Pour $n = 1, 2, 3, 4$: écrire *toutes* les partitions possibles de M.
2. Pour n quelconque, combien de partitions de M en deux parties existe-t-il ?
3. Pour n quelconque, combien de partitions de M en $(n-1)$ parties existe-til ?
4. Soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble M de cardinal n. En utilisant la partie 1., montrer que $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$ et $B_4 = 15$.
5. (difficile) Montrer que, pour n quelconque (et on posant $B_0 = 1$, par convention),
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
(Indication : pour chaque partie Y de M, on pourra considérer toutes les partitions qui font intervenir $A = Y^c$. L'ensemble de toutes les partitions de M admet donc lui-même une partition, et pour compter sa cardinalité il suffit de sommer.) Utiliser ceci pour montrer que $B_5 = 52$ et $B_6 = 203$.

Licence Portail MI, Nancy,
semestre d'automne 2021/22

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 2 : Ensembles et applications

1. Produit cartésien. Dans le plan $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, représenter les parties suivantes (en prenant $n = 2, 3, 4$), calculer leur cardinal, et en déduire que

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} i.$$

(1) $A_1 = [[1, \ldots, n]] \times [[1, \ldots, n]]$
(2) $A_2 = \{(i, j) \in A_1 \mid i = j\}$
(3) $A_3 = \{(i, j) \in A_1 \mid i + j = n + 1\}$
(4) $A_4 = \{(i, j) \in A_1 \mid i < j\}$, $A'_4 = \{(i, j) \in A_1 \mid i > j\}$,
(5) $A_5 = \{(i, j) \in A_1 \mid i + j < n + 1\}$, $A'_5 = \{(i, j) \in A_1 \mid i + j > n + 1\}$,
(6) pour $i = 1, \ldots, n$ fixé : $B_i = \{(i, j) \in A_1 \mid i > j\}$.

(Indication : observer que certaines de ces parties sont des réunion disjointes de certaines autres parmi ces parties.)

2. Mots. Notre *alphabet* est un ensemble A de 26 éléments (lettres), dont 6 voyelles. Un *mot de longueur k* est un k-uplet d'éléments de A.

1. Combien de mots de longueur 3 peut-on former ?
   Combien parmi eux n'ont pas de lettre double ?
   Combien parmi eux ne comportent pas de voyelle ? – et une seule voyelle ?
2. Combien de mots de longueur 26 peut-on former ? Combien parmi eux n'ont pas de lettre double ? Puis même question pour la longueur 27.
3. Combien de *palindromes* de longueur n y a-t-il ? (exemples pour $n = 5$: RADAR, KAYAK.)

3. Applications injectives, surjectives, bijectives. Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble de cardinal n et $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ de cardinal m. Dans les cas suivants, faire une liste complète de toutes les applications $f : A \to B$; pour chacune d'entre elles, noter le cardinal de l'image $\mathrm{im}(f)$, et noter si elle est injective, surjective, bijective :

(1) $n = 3$ et $m = 2$,
(2) $n = 2$ et $m = 3$,
(3) $n = 3$ et $m = 3$.

Dans le cas général de n et de m,

1. combien d'applications *injectives* y a-t-il ?
2. combien d'applications *bijectives* y a-t-il ?
3. si $m = 2$, combien d'applications *surjectives* y a-t-il ?
4. si $n = m + 1$, combien d'applications *surjectives* y a-t-il ?

4. Composée d'applications. Soit $M = \{1, 2\}$. Donner la liste explicite de toutes les applications $f : M \to M$. (On pourra les noter f_1, f_2, f_3, f_4, cf. cours.) Dresser la table des composées $g \circ f$ avec g et f parcourant $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. En utilisant cette table, répondre aux questions suivantes :

– quelles sont les $f \in S$ telles que : $\forall g \in S : f \circ g = g \circ f$?
– quelles sont les $f \in S$ telles que : $\forall g \in S : f \circ g = f$?
– quelles sont les $f \in S$ telles que : $\forall g \in S : g \circ f = f$?
– quelles sont les $f \in S$ telles que : $\exists g \in S : g \circ f = \mathrm{id}_M$?
– quelles sont les $f \in S$ telles que $f \circ f = f$?
– quelles sont les $f \in S$ telles que $f \circ f = \mathrm{id}_M$?
– quelles sont les $f \in S$ qui sont injectives ? surjectives ? bijectives ?
– extraire la table des composées des applications *bijectives* de M dans M (table de $\mathfrak{S}_2$).

5. Injectif, surjectif, et inverses à droite ou à gauche. Soit A, B des ensembles (qu'on pourra supposer finis), et $f : A \to B$ une application. Montrer :

1. s'il il existe une application $g : B \to A$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_B$, alors f est surjective ;
2. si f est surjective, alors il existe une application $g : B \to A$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_B$;
3. s'il existe une application $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_A$, alors f est injective ;
4. si f est injective, alors il existe une application $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_A$;

Indications. Les preuves de 1. et de 3. sont directes à partir des définitions. Pour prouver 4., soit $y \in B$; définir alors $g(y)$ en distinguant les deux cas : y appartient à l'image de f, ou non. Pour prouver 2., soit $y \in B$; justifier que l'ensemble $f^{-1}(y)$ est non-vide ; on peut alors choisir "arbitrairement" un élément $x \in f^{-1}(y)$ et poser $g(y) := x$; montrer que l'application g ainsi définie convient.

6. Composée et injectivité et surjectivité. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ des applications. Les affirmations suivantes, sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse !

1. si f est constante, alors $g \circ f$ est constante,
2. si g est constante, alors $g \circ f$ est constante,
3. si $g \circ f$ est constante, alors g ou f est constante,
4. si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective,
5. si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective,
6. si $g \circ f$ est sujective, alors g est surjective,
7. si $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective,
8. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,
9. si $g \circ f$ est injective, alors g est injective.

Montrer aussi : si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

7. Image directe et image réciproque d'une partie. Soit $f : A \to B$ une application.
(1) Montrer que, pour toutes parties $U, V \in \mathcal{P}(A)$,

1. $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$,
2. $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$, donner un contre-exemple montrant qu'il n'y a pas égalité.
3. Soit de plus $g : B \to C$ une application, alors $(g \circ f)(U) = g(f(U))$.

(2) Montrer que, pour toutes parties $W, V \in \mathcal{P}(B)$,

1. $f^{-1}(W \cup V) = f^{-1}(W) \cup f^{-1}(V)$,
2. $f^{-1}(W \cap V) = f^{-1}(W) \cap f^{-1}(V)$,
3. Soit de plus $g : B \to C$ une application, alors $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$.

Licence Portail MI, Nancy,
semestre d'automne 2021/22

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 3 : Applications (suite)

1. Fibres. Pour les applications $f : A \to B$ suivantes,
– dire si elle est surjective ou non ; déterminer l'image $\mathrm{im}(f)$;
– dire si elle injective ou non ; pour chaque élément $y \in B$, décrire la « fibre », i.e., son ensemble d'antécédents $\{x \in A \mid f(x) = y\}$ (par exemple, par une description analytique ou géométrique ; faire une figure si possible) :

$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$
$c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$
$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$
$e : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$
$g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$
$j : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $k \mapsto e^{ik\pi}$

2. Puissances d'une application.

Définitions. *Pour une application $f : M \to M$, on note souvent $f^2 := f \circ f$. De même, on définit les* puissances *$f^3 = f \circ f \circ f = f^2 \circ f$, $f^4 = f^3 \circ f$, etc.*
(Attention : c'est la composée de f avec elle-même, et non le "produit de f avec f" – ne pas confondre avec la notation similaire pour des fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où on note parfois f^2 la fonction $x \mapsto f(x) \cdot f(x) = (f(x))^2$!).

(1) Soit M un ensemble et $f : M \to M$ une application telle que $f^2 = \mathrm{id}_M$.
– Montrer que f est bijective, et que $f^{-1} = f$.
– Soit $x \in M$. Montrer qu'exactement deux cas sont possibles :
a) soit, $f(x) = x$,
b) soit, il existe $y \neq x$ tel que que $f(y) = x$ et $f(x) = y$.

(2) Soit M un ensemble et $f : M \to M$ une application telle que $f^3 = \mathrm{id}_M$.
– Montrer que f est bijective, et que $f^{-1} = f^2$.
– Soit $x \in M$. Montrer qu'exactement deux cas sont possibles :
a) soit, $f(x) = x$,
b) soit, il existe $y, z \in M$ tels que :
$$y \neq x, z \neq x, \; y \neq z \text{ et } f(x) = y \text{ et } f(y) = z \text{ et } f(z) = x.$$

(3) Soit M un ensemble et $f : M \to M$ une application telle que $f^4 = \mathrm{id}_M$.
– Montrer que f est bijective, et que $f^{-1} = f^3$.
– Soit $x \in M$. Montrer qu'exactement trois cas sont possibles selon le nombre d'éléments de l'ensemble $\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x)\}$: décrire ces cas !

(4) (Exemple.) Fixons $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ et définissons l'application
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{2i\pi/k} z.$$
Quel est l'effet géométrique de f (dans le plan identifié à $\mathbb{C}$) ? Montrer que $f^k = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Dessiner pour $z = 0$, puis pour des choix de $z \neq 0$, l'ensemble $\{z, f(z), f^2(z), f^3(z), f^4(z), f^5(z)\}$.

3. Calculs de permutations.

Définitions. *Soit* $M = [[1, \dots, n]]$ *et* $a, b \in M$, $a \neq b$. *Une* transposition *est une application* $f : M \to M$ *qui échange* a *et* b *et fixe tous les autres éléments de* M *:*

$$f(a) = b, \quad f(b) = a, \qquad \forall x \in M (x \neq a, x \neq b) : \ f(x) = x.$$

On utilise alors la notation $f = \tau_{ab}$ *ou* $f = (ab)$. *Un* 3-cycle *est une application* $f : M \to M$ *telle que : il existe* 3 *éléments* $a, b, c \in M$, *deux à deux distincts, tels que*

$$f(a) = b, \quad f(b) = c, \quad f(c) = a, \qquad \forall x \in M (x \neq a, x \neq b, x \neq c) : \ f(x) = x.$$

On utilise alors la notation $f = (abc)$. *De manière analogue, on peut définir des* k-cycles *pour tout* $k = 2, 3, \dots, n$.

Avec les notations précédentes, montrer que les k-cycles sont des permutations, i.e., des bijections $f : [[1, \dots n]] \to [[1, \dots n]]$. Montrer que

$$(12) \circ (23) = (123).$$

De manière analogue, calculer les composées

$$(12) \circ (23), \quad (23) \circ (12), \quad (12) \circ (34), \quad (34) \circ (12),$$

$$(123) \circ (234), \quad (234) \circ (123), \quad (123) \circ (12), \quad (12) \circ (123).$$

4. La table de $\mathfrak{S}_3$. Soit $M = \{1, 2, 3\}$ et $\mathfrak{S}_3$ l'ensemble des applications bijectives de M dans M. Donner la liste des éléments de $\mathfrak{S}_3$. Avec les notations des exercices précédents, remplir la table suivante (en ligne les composées $f \circ g$ où g parcourt $\mathfrak{S}_3$) :

$\circ$	id_M	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
id_M						
(123)						
(132)						
(12)						
(23)						
(13)						

— Rappeller du cours la définition d'un *groupe* et expliquer que $\mathfrak{S}_3$ en est un !
— Vérifier que chaque élément apparaît exactement une fois en chaque ligne et colonne. Expliquer ce fait !
— Colorier dans la table les éléments f tels que $f^3 = \mathrm{id}_M$ en vert, et les autres en rouge. Comparer avec la table de $\mathfrak{S}_2$: qu'observez-vous ?
— Pour chaque élément f, noter aussi le plus petit entier k strictement plus grand que 0 tel que $f^k = \mathrm{id}_M$ (on l'appelle l'*ordre de* f). Qu'observez-vous ?
— Observer que la table n'est pas symétrique par rapport à la diagonale. Pourquoi est-ce ainsi ?

Licence Portail MI, Nancy,
semestre d'automne 2021/22

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 4 : Relations

1. Relations d'équivalence : exemples. Rappeller la définition d'une *relation d'équivalence*, puis montrer que les relations suivantes, sur un ensemble M, en sont des exemples. Dans tous les cas, décrire les classes d'équivalence et la partition correspondante.

1. $M = \mathbb{Z}$ et xRy ssi $x - y$ est paire ;
2. $M = \mathbb{Z}$, et xRy ssi $x - y$ est un multiple de 3 ;
3. $M = \mathbb{R}$ et xRy ssi $x^2 = y^2$;
4. $M = \mathbb{R}$ et xRy ssi $e^{ix} = e^{iy}$;
5. $M = A$; soit $f : A \to B$ une application, et xRy ssi $f(x) = f(y)$;
6. $M = \mathbb{R}^2$ et $(x, x')R(y, y')$ ssi $x + x' = y + y'$;
7. $M = \mathbb{N}^2$ et $(x, x')R(y, y')$ ssi $x + y' = y + x'$.

2. Relations d'ordre : exemples et visualisation. Rappeller la définition d'une *relation d'ordre partiel*, resp., *ordre total*, puis montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordre partiel ; puis préciser s'il s'agit d'un ordre total, ou pas. (Dans ce dernier cas, il suffit de donner un contre-exemple : un couple (x, y) tel que ni $x \leq y$ ni $y \leq x$.)
On peut "visualiser" des relations d'ordre sur un ensemble (fini) M par leur *diagramme de Hasse* : on représente les éléments de M par des points, liés par un traît si $x < y$ (pour simplifier, on ne dessine pas le traît entre x et z s'il existe y avec $x < y$ et $y < z$), et alors y est placé plus haut que x. Dessiner ces diagrammes pour les exemples suivants.

1. $M = [[1, \ldots, n]$ muni de $x \leq y$ (au sens usuel de nombres naturels), faire le diagramme pour $n = 2, 3, 4$;
2. $M = \mathcal{P}([[1, \ldots, n]])$, muni de l'ordre partiel $A \leq B$ ssi $A \subset B$ (faire le diagramme pour $n = 2, 3, 4$ – indication : revoir le TD 1 !).
3. soit $n > 1$ un nombre naturel, et M l'ensemble des entiers naturels qui divisent n, et $a \leq b$ ssi a divise b. (Faire le diagramme pour $n = 6, 12$ et 60.)

3. Relation opposée (inverse). Soit R une relation sur un ensemble M. On définit sa *relation opposée* ou *inverse* R^{op} sur M par $\boxed{xR^{\mathrm{op}}y \text{ ssi } yRx}$.

1. Que peut-on dire si R est symétrique ?
2. Que peut-on dire si R est une relation d'ordre ?
3. Que peut-on dire si $R = R_f$ est le graphe d'une application bijective $f : M \to M$?
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bijective. Comment peut-on construire le graphe de f^{-1} géométriquement à partir du graphe de f ? Donner deux ou trois exemples.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction constante, et $R = R_f$ son graphe. Décrire la relation R^{op}. Est-elle fonctionelle ?

4. Relations sur deux éléments. Soit $M = \{1, 2\}$. Quel est le cardinal de $M \times M$, et combien y a-t-il de relations sur M ? Faire une liste explicite de toutes ces relations : pour chacune d'elles, écrire une "matrice" (tableau à 2 lignes et 2 colonnes) ayant un coefficient 1 en ligne i et colonne j si iRj, et 0 sinon. Noter à coté de chaque matrice si la relation est (anti)symétrique ; réflexive ; d'ordre (partiel / total) ; d'équivalence ; fonctionelle (quelle est alors la fonction) ? Comment peut-on "lire" ces propriétés sur la matrice ?

Licence Portail MI, Nancy,
semestre d'automne 2021/22

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 5 : Les entiers naturels

1. Preuves par récurrence. Prouver par récurrence :

1. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
2. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$;
3. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
4. $\sum_{k=1}^{n} n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
5. Énoncez une formule pour $\sum_{k=0}^{n}(a+kd)$ (où $a, d \in \mathbb{R}$) et prouvez-la par récurrence et/ou en utilisant le point 1.
6. si $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, alors $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2. Définitions par récurrence.

1. Calculer la suite a_n défini par : $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 6n$.
2. On définit par récurrence la suite $u_1 = 1 = u_2$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.
   (a) Calculer $u_3, \ldots, u_8$.
   (b) Supposons que u_n est une suite géométrique, i.e. que $u_n = a^n$ pour tout n. En déduire une condition nécessaire pour a. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, est-elle géométrique ?
   (c) Soit r un nombre réel tel que $r+1 = r^2$.
   Montrer par récurrence que $u_{n+2} \geq r^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Soit r_1, r_2 les deux solutions réelles de $x+1 = x^2$.
   Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u_1 = ar_1 + br_2$ et $u_2 = ar_1^2 + br_2^2$.
   Montrer par récurrence qu'alors $u_n = ar_1^n + br_2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour $a, b, n \in \mathbb{N}$, on définit $H_n(a,b) \in \mathbb{N}$ par récurrence, via :

$$H_0(a,b) = b+1,$$
$$H_1(a,0) = a, \qquad H_2(a,0) = 0, \qquad H_n(a,0) = 1 \text{ si } n \geq 3,$$
$$H_{n+1}(a,b) = H_n(a, H_{n+1}(a,b-1)).$$

   (a) Calculer $H_1(a,b)$ par récurrence.
   (b) Calculer $H_2(a,b)$ par récurrence.
   (c) Calculer $H_3(a,b)$ par récurrence.
   (d) Calculer $H_4(a,2), H_4(a,3), H_4(a,4)$.
   (e) Quelle est la valeur de $H_4(2,b)$ pour $b = 0, \ldots, 5$?
   (f) Calculer $H_n(a,1)$ par récurrence.
   (g) Que dire de $H_5(a,2)$?
   (h) Montrer par récurrence que $H_n(2,2) = 4$ pour tout $n \geq 1$.

3. Nombres premiers. Un *nombre premier* est un entier naturel $p > 1$ qui n'est divisible que par 1 et lui-même, i.e., si $p = ab$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, alors $a = 1$ ou $b = 1$.

1. Écrire la liste des 10 plus petits nombres premiers $p_1 < p_2 < \ldots < p_{10}$.

2. Factoriser 120 en nombres premiers.
3. Montrer que tout nombre naturel $n > 1$ est produit de nombres premiers.
4. Montrer que le nombre $n := p_1 \cdots p_{10} + 1$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, \ldots, p_{10}$. Conclure qu'il existe au moins un autre nombre premier, plus grand que p_{10}.
5. Utiliser l'idée de la partie précédente pour montrer qu'*il existe une infinité de nombres premiers*. (Remarque : il s'agit d'une *preuve par l'absurde* – peut-être la plus célèbre dans l'histoire des maths, due à Euclide.)

4. Sommes.
(A) Soit I un ensemble fini de cardinal N, qu'on appelle l'*ensemble d'indices*, et pour tout $i \in I$, on se donne un entier naturel $a_i \in \mathbb{N}$. Fixons un ordre total quelconque sur I et écrivons dans l'ordre $i_1, i_2, \ldots, i_N$ les éléments de I. Montrer que la somme

$$\sum_{k=1}^{N} a_{i_k} = a_{i_1} + \ldots + a_{i_N}$$

ne dépend pas de l'ordre choisi sur I. (Utiliser l'associativité et la commutativité de la somme.) On peut donc noter cette somme $\sum_{i \in I} a_i$, sans ambiguité. (Remarque : le même principe vaut pour des sommes avec $a_i \in \mathbb{R}$ ou $a_i \in \mathbb{C}$.)

(B) Soit maintenant $I = [[1, n]]^2$. On écrit alors souvent a_{ij} au lieu de $a_{(i,j)}$. Pour fixer les idées, prenez $n = 3$ ou $n = 4$, et faites un schéma de I comme au TD 2, exercice 1. En alignant les éléments de I "selon les lignes", respectivement "selon les colonnes", ou "selon les diagonales", justifier que les sommes suivantes coïncident :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{(i,j)\in[[1,n]]^2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2 : i+j=k} a_{ij}$$

(La formule $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2 : i+j=k}$ signifie que la somme porte sur tout les couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + j = k$, et pareil pour les expressions ci-dessous.) Concrètement, faites le calcul des sommes suivantes (pour $n = 3$ et $n = 4$, et si vous pouvez, pour n quelconque) :

1. $S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(i + j)$,
2. $S_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\min(i, j)$,
3. $S_3 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\max(i, j)$,
4. $S_4 = \sum\limits_{(i,j)\in[[1,n]]^2} i \cdot j$,
5. $S_5 = \sum\limits_{(i,j)\in[[1,n]]^2 : 1\leq i\leq j\leq n} i \cdot j$,
6. $S_6 = \sum\limits_{(i,j)\in[[1,n]]^2 : i+j=n} i \cdot j$.

5. Il n'existe pas de racine de 2 dans $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel $c = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tel que $c^2 = 2$.
(Indications. On pourra raisonner par l'absurde : si $c = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ vérifie $c^2 = 2$, alors $a^2 = 2b^2$. En écrivant $a = 2^n c$ et $b = 2^m d$ avec c, d impairs, arriver à une contradiction.)

Licence Portail MI, Nancy,
semestre d'automne 2021/22

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 6 : Ensembles infinis

1. Ensembles dénombrables.

1. Montrer que l'ensemble $M_1 \subset \mathbb{N}$ des nombres impairs ainsi que l'ensemble M_0 des nombres pairs sont dénombrables.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable : construire une application bijective $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.
3. Soit $K_1, K_2 \subset M$ deux ensembles dénombrables tels que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Montrer que $K = K_1 \cup K_2$ est dénombrable.
4. Montrer que $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, définie par
$$f((x,y)) = \frac{(x+y+1)(x+y)}{2} + y,$$
est bijective : faire un schéma graphique, en notant à coté de chaque couple $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ dans le plan son « numéro » $f((x,y))$. Laissez vous guider par ce schéma pour montrer que f est bijective : montrer que $f((k-i,i)) = \binom{k+1}{2}+i$ pour $i = 0,\ldots,k$, et et que $f((k+1,0)) = f((0,k))+1$. En déduire que $[[\binom{k+1}{2}, \binom{k+1}{2}+k]]$ correspond sous f bijectivement à $\{(k,0),(k-1,1),\ldots,(0,k)\}$. (Illustrer ceci dans le graphique.) Conclure.
5. Montrer que $\mathbb{N}^3$ est dénombrable. (Utiliser les résultats précédents.)

2. À propos de l'« Hôtel de Hilbert ».

1. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective, mais non surjective.
2. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective, mais non injective.
3. Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est paire}\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impaire}\}$.
   Montrer que $\mathbb{N}$ est la réunion disjointe de A et de B.
   Conclure que $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$.
   Montrer que $f : A \to B$, $k \mapsto k+1$ est bijective et conclure que $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$.
   Montrer que $g : \mathbb{N} \to A$, $m \mapsto 2m$ est bijective et conclure que $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$.
   Conclure que $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) + \mathrm{card}(\mathbb{N})$. Est-ce absurde, ou pas ?
4. Montrer, comme au point 3., que $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) + \mathrm{card}(\mathbb{N}) + \mathrm{card}(\mathbb{N})$, etc.

On peut faire encore mieux : voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Hôtel_de_Hilbert.

3. Le théorème de Cantor-Bernstein pour les ensembles finis. Soit A et B des ensembles finis. Montrer : *s'il existe des applications injectives $f : A \to B$ et $g : B \to A$, alors il existe aussi une application bijective $h : A \to B$.*

Pour comprendre l'enjeu de ce résultat, qui se généralise aux ensembles infinis, lire `https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Cantor-Bernstein#Explication_intuitive` .

Licence Portail MI, Nancy,
semestre d'automne 2021/22

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 7 : Ensembles, logique

1. Implication logique : exemples. Rappeler du cours la définition de l'implication logique $A \Rightarrow B$ ("si A, alors B") par les valeurs de vérité, puis dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $2 > 3$, alors 4 est un nombre premier.
2. Si $3^2 + 4^2 = 5^2$, alors $4^2 + 5^2 = 6^2$.
3. Si $4^2 + 5^2 = 6^2$, alors $3^2 + 4^2 = 5^2$.
4. Si $3^2 + 4^2 = 5^2$, alors $33^2 + 44^2 = 55^2$.
5. Si $(10)^{\frac{21}{10}} > (\frac{21}{20})^{100}$, alors $(10)^{\frac{42}{10}} > (\frac{21}{20})^{200}$.
6. Si $i^2 = -1$, alors $i^4 = 1$.
7. Si ($j^3 = 1$ et $j \neq 1$), alors $j^2 + j + 1 = 0$.
8. Si $2 = 0$, alors ($3 = 1$ et $4 = 0$ et $5 = 1$).
9. Si un nombre ω est infiniment grand (plus grand que tout nombre naturel), alors $\frac{1}{\omega}$ est un nombre infiniment petit (non-nul et plus petit que $\frac{1}{n}$ pour tout nombre naturel n).

2. Le connecteur NAND. En électronique numérique, le connecteur suivant (NAND = NOT AND) joue un rôle important, en tant qu' "atome" d'un circuit intégré : α NAND β est définie comme $\neg(\alpha \wedge \beta)$. Ecrire la table de vérité de ce connecteur, puis montrer qu'on peut retrouver les autres connecteurs à partir de NAND de la façon suivante :

1. $\neg\alpha$ équivaut à α NAND α
2. $\alpha \wedge \beta$ équivaut à (α NAND β) NAND (α NAND β)
3. $\alpha \vee \beta$ équivaut à (α NAND α) NAND (β NAND β)
4. $\alpha \Rightarrow \beta$ équivaut à α NAND (β NAND β)
5. $\alpha \Leftrightarrow \beta$ équivaut à (α NAND β) NAND ((α NAND α) NAND (β NAND β))

3. Calcul des prédicats. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie. En utilisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, exprimer les affirmations suivantes :

1. La fonction f est croissante.
2. La fonction f n'est pas croissante.
3. La fonction f est décroissante.
4. L'ensemble A possède un plus grand élément.
5. L'ensemble A ne possède pas de plus grand élément.
6. L'ensemble A est majoré.
7. L'ensemble A n'est pas majoré.

Indications :
1. Vous connaissez la définition : f est croissante si, quand $x \leq y$, alors $f(x) \leq f(y)$. Écrivez cette condition on utilsant $\forall$...
3. Attention : la négation de 1. est 2., et non 3 !
6. Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *majorée* si tout ses éléments sont plus petits qu'une certaine constante réelle. Utiliser $\exists$...
7. Par exemple, $A = \mathbb{R}^+$ n'est pas majoré.

4. Calcul des prédicats. Ecrire la négation logique des formules suivantes :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : (|a_n - \ell| < \varepsilon) \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \tag{2}$$

(Pour la manipulation formelle, il n'est pas nécessaire de savoir ce qu'est a_n, ℓ, I ou f. Mair, pour fixer les idées, disons que a_n et ℓ sont des nombres réels, I un intervalle réel, et $f : I \to \mathbb{R}$ une foncton : quelle serait alors l'interprétation des formules (1) et (2) ?)

5. Calcul des prédicats.

1. Les propositions "$\forall x$ ($A(x)$ ou $B(x)$)" et "($\forall x$ $A(x)$) ou ($\forall x$ $B(x)$)" sont-elles équivalentes ?
2. Les propositions "$\forall x$ ($A(x)$ et $B(x)$)" et "($\forall x$ $A(x)$) et ($\forall x$ $B(x)$)" sont-elles équivalentes ?
3. Les propositions "$\exists x$ ($A(x)$ ou $B(x)$)" et "($\exists x$ $A(x)$) ou ($\exists x$ $B(x)$)" sont-elles équivalentes ?
4. Les propositions "$\exists x$ ($A(x)$ et $B(x)$)" et "($\exists x$ $A(x)$) et ($\exists x$ $B(x)$)" sont-elles équivalentes ?

6. Le paradoxe de Russell, et le paradoxe du menteur.

1. Analyser la proposition suivante : *Je mens en ce moment.* Est-elle vraie au fausse ?
2. Soit $M = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$.
   Quel est le cardinal de M ?
   Donner la liste des couples $(x, y) \in M^2$ tels que $x \in y$, puis des couples tels que $x \notin y$. Existe-t-il un élément $x \in M$ tel que $x \in x$?
3. Soit Ω l' "ensemble de tous les ensembles", i.e., les éléments de Ω sont tous les ensembles qui existent. On considère la partie suivante

   $$M := \{x \in \Omega \mid x \notin x\}.$$

   La proposition suivante : $M \in M$, est-elle vraie ou fausse ?

Pour plus d'informations, vous pouvez consulter la page `https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Russell`.