

Graphes planaires

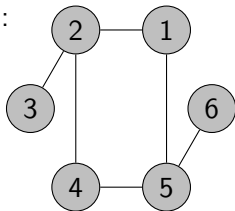
Graphes planaires

Graphe planaire

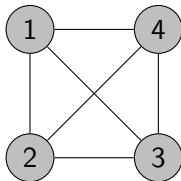
Un graphe est *planaire* s'il peut être représenté dans le plan sans croisement d'arêtes/arcs.

Exemples

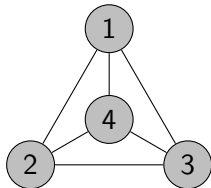
G_1 :



G_2 :



G_2 :

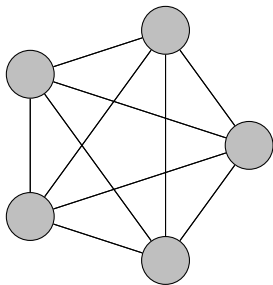


Graphes planaires

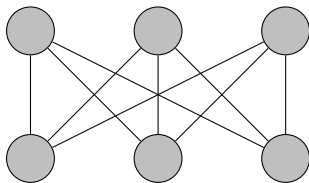
Plan de la partie

1. K_5 n'est pas planaire
2. $K_{3,3}$ n'est pas planaire
3. les graphes non planaires sont ceux pouvant être transformés en K_5 ou $K_{3,3}$

K_5 :



$K_{3,3}$:



Graphes planaires

Régions

Région

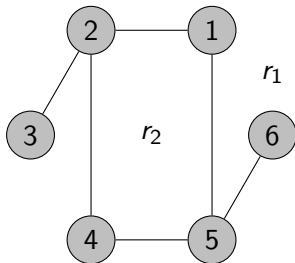
Une *région* r est une partie non vide du plan telle que toute paire de points de r est joignable par une courbe continue composée de points de r .

Remarque

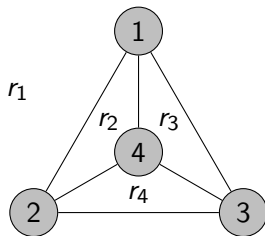
Tout graphe planaire induit une partition du plan en régions.

Exemples

G_1 :



G_2 :



Graphes planaires

Régions

Degré d'une région

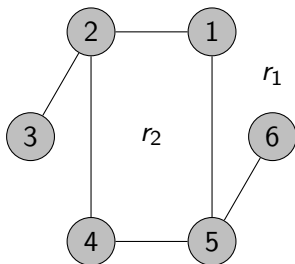
Le *degré d'une région* r , noté $\deg_G(r)$, d'un graphe planaire G est la longueur de sa frontière.

Exemples

frontière de r_1 :

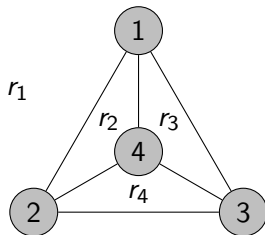
(1, 5, 6, 5, 4, 2, 3, 2, 1)

G_1 :



$$\deg_{G_1}(r_1) = 8 \quad \deg_{G_1}(r_2) = 4$$

G_2 :



$$\begin{aligned} \deg_{G_2}(r_1) &= 3 & \deg_{G_2}(r_2) &= 3 \\ \deg_{G_2}(r_3) &= 3 & \deg_{G_2}(r_4) &= 3 \end{aligned}$$

Graphes planaires

Régions

Soit $G = (V, E)$ graphe simple non orienté planaire.

Propriété

Soit R l'ensemble des régions induites, alors

$$\sum_{r \in R} \deg_G(r) = 2|E|$$

Idée de preuve

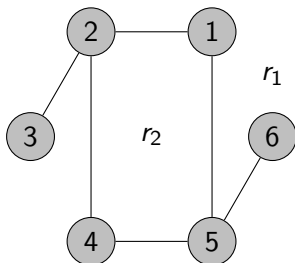
Chaque arête est comptée exactement deux fois dans la somme.

Graphes planaires

Régions

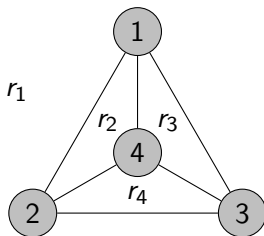
Exemples

G_1 :



$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 \deg_{G_1}(r_i) &= 8 + 4 \\ &= 12 \\ &= 2|E_1|\end{aligned}$$

G_2 :



$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 \deg_{G_2}(r_i) &= 3 + 3 + 3 + 3 \\ &= 12 \\ &= 2|E_2|\end{aligned}$$

Graphes planaires

Formule d'Euler

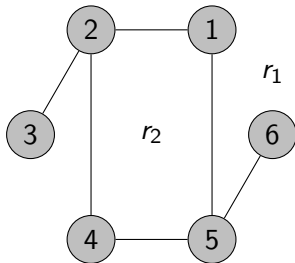
Formule d'Euler

Soit $G = (V, E)$ graphe simple non orienté non vide planaire et connexe, et R l'ensemble de ses régions, alors :

$$|V| - |E| + |R| = 2$$

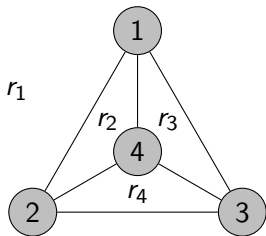
Exemples

G_1 :



$$\begin{aligned} |V_1| - |E_1| + |R_1| &= 6 - 6 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

G_2 :



$$\begin{aligned} |V_2| - |E_2| + |R_2| &= 4 - 6 + 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Graphes planaires

Formule d'Euler

Graphe maximal planaire

Un graphe simple non orienté est *maximal planaire* si l'ajout d'une arête rend le graphe non planaire.

Propriété

Dans un graphe maximal planaire toute région est délimitée par 3 arêtes.

Corollaire 1

Soit $G = (V, E)$ maximal planaire et R l'ensemble de ses régions, alors

$$3|R| = 2|E|$$

Graphes planaires

Formule d'Euler

Corollaire 2

Soit $G = (V, E)$ graphe simple planaire et R l'ensemble de ses régions, alors

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Preuve

Soit $G' = (V, E')$ maximal planaire avec $E \subseteq E'$ et R' l'ensemble de ses régions. Alors

$$\begin{aligned} 2|E'| &= 3|R'| && (\text{cor. 1}) \\ &= 3(2 - |V| + |E'|) && (\text{formule d'Euler}) \\ &= 6 - 3|V| + 3|E'| \end{aligned}$$

d'où

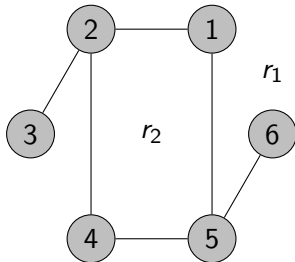
$$|E| \leq |E'| = 3|V| - 6$$

Graphes planaires

Formule d'Euler

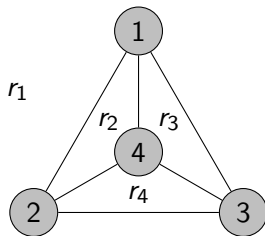
Exemples

$G_1 :$



$$|E_1| = 6 \leq 12 = 3|V_1| - 6$$

$G_2 :$



$$|E_2| = 6 \leq 6 = 3|V_2| - 6$$

Graphes planaires

K_5 n'est pas planaire

Proposition

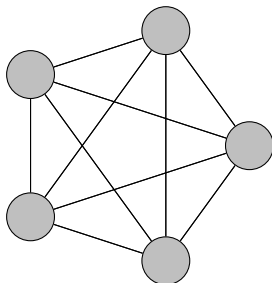
K_5 n'est pas planaire.

Preuve

On n'a pas

$$|E| = 10 \not\leq 9 = 3|V| - 6$$

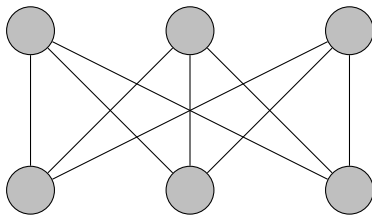
donc K_5 n'est pas planaire.



Graphes planaires

$K_{3,3}$ n'est pas planaire

La condition précédente ne permet pas de montrer que $K_{3,3}$ n'est pas planaire :



$$|E| = 9 \leq 12 = 3|V| - 6$$

Remarque

$|E| \leq 3|V| - 6$ est une condition nécessaire pour qu'un graphe soit planaire, mais pas suffisante.

Graphes planaires

$K_{3,3}$ n'est pas planaire

Proposition

$K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Preuve

Supposons $K_{3,3}$ planaire (\star), et soit R l'ensemble de ses régions. $K_{3,3}$ étant biparti, il ne contient pas de triangle, donc chaque région est au moins de degré 4, d'où

$$4|R| \leq \sum_{r \in R} \deg_G(r) = 2|E|$$

or la formule d'Euler donne $4|V| - 4|E| + 4|R| = 8$ d'où

$$8 - 4|V| + 4|E| \leq 2|E| \quad \text{i.e.} \quad |E| \leq 2|V| - 4$$

Mais pour $K_{3,3}$ on a $|E| = 9$ et $2|V| - 4 = 8$, contredit (\star).

Graphes planaires

Mineur d'un graphe

Soit G graphe simple non orienté.

Mineur d'un graphe

M est un *mineur de G* s'il est résultat d'une succession des opérations suivantes à partir de G :

Suppression d'un sommet isolé v :

$$(V, E) \mapsto (V \setminus \{v\}, E)$$

Suppression d'une arête $\{u, v\}$:

$$(V, E) \mapsto (V, E \setminus \{ \{u, v\} \})$$

Contraction d'une arête $\{u, v\}$:

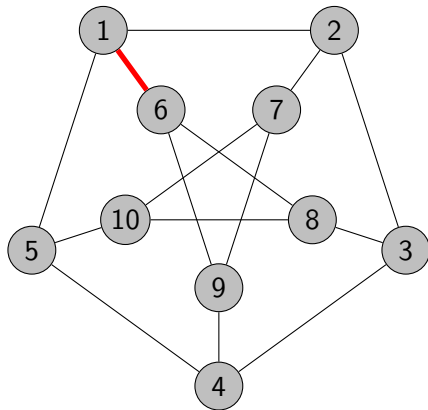
$$(V, E) \mapsto (\sigma(V), \sigma(E \setminus \{ \{u, v\} \}))$$

où $\sigma = \{u \mapsto w, v \mapsto w\}$ avec w un nouveau sommet

Graphes planaires

Mineur d'un graphe

Exemple

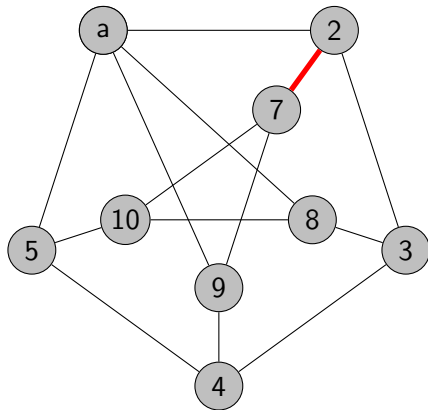


1. contraction de $\{1, 6\}$

Graphes planaires

Mineur d'un graphe

Exemple

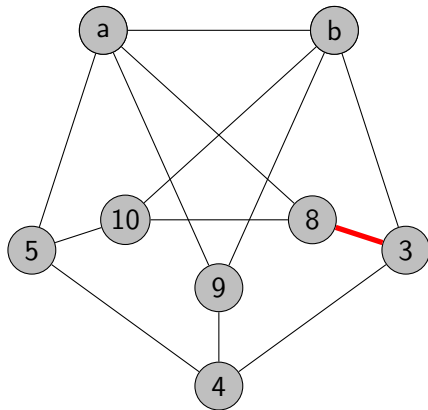


1. contraction de $\{1, 6\}$
2. contraction de $\{2, 7\}$

Graphes planaires

Mineur d'un graphe

Exemple

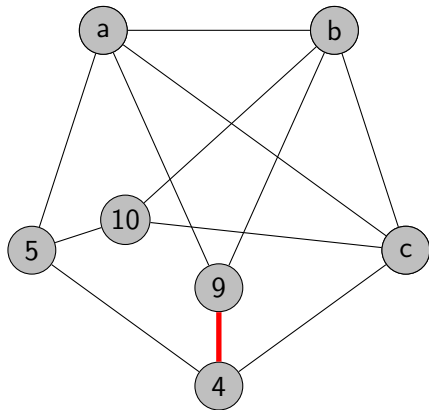


1. contraction de $\{1, 6\}$
2. contraction de $\{2, 7\}$
3. contraction de $\{3, 8\}$

Graphes planaires

Mineur d'un graphe

Exemple

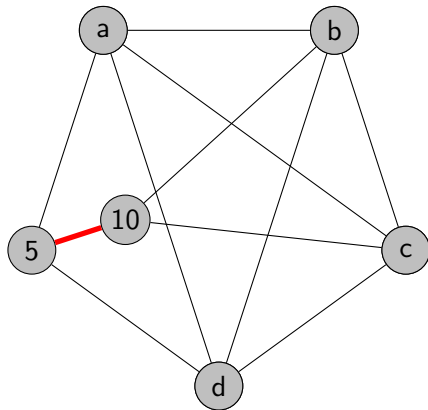


1. contraction de $\{1, 6\}$
2. contraction de $\{2, 7\}$
3. contraction de $\{3, 8\}$
4. contraction de $\{4, 9\}$

Graphes planaires

Mineur d'un graphe

Exemple

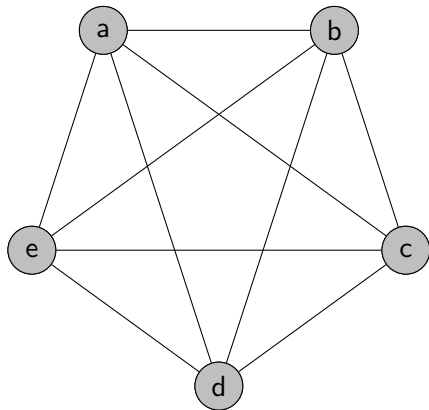


1. contraction de $\{1, 6\}$
2. contraction de $\{2, 7\}$
3. contraction de $\{3, 8\}$
4. contraction de $\{4, 9\}$
5. contraction de $\{5, 10\}$

Graphes planaires

Mineur d'un graphe

Exemple



1. contraction de $\{1, 6\}$
2. contraction de $\{2, 7\}$
3. contraction de $\{3, 8\}$
4. contraction de $\{4, 9\}$
5. contraction de $\{5, 10\}$

Graphes planaires

Caractérisation des graphes planaires

Théorème (Kuratowski / Wagner)

Un graphe simple non orienté est planaire si et seulement s'il n'a ni K_5 ni $K_{3,3}$ pour mineur.

Preuve

⇒ Les opérations d'obtention d'un mineur préservent la planarité : si G est planaire, la suppression d'un sommet isolé, la suppression d'une arête, ou la contraction d'une arête produit un graphe lui aussi planaire.

⇐ Admis.