# Chapitre 4
# Introduction aux lois continues

Cours proba-stats - Université Lorraine - L2 Informatique
Resp.: J. UNTERBERGER

10 janvier 2023

## Table des matières

On a vu que la loi d'une variable aléatoire discrète était caractérisée par sa fonction de répartition. On admettra que ce résultat est encore vrai sur $\mathbb{R}$.

**Définition.**

Une **variable aléatoire réelle continue** est une variable aléatoire $X$ dont la fonction de répartition $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$.

# 1 Variable aléatoire réelle à densité

**Définition.**

• Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que $f$ est une densité sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes :

1. $f$ est continue par morceaux,
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

• Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que $X$ est une variable aléatoire réelle *de densité* $f$ si pour tout $B$,

$$P_X(B) = P(X \in B) = \int_B f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)1_B(x)dx.$$

En particulier, pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a :

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in ]a,b[) = \mathbb{P}(X \in ]a,b]) = \mathbb{P}(X \in [a,b[) = \int_a^b f(x)dx,$$

et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

La *fonction de répartition* de $X$ est l'application $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :

$$F_X(t) = P_X(]-\infty,t]) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

**Proposition.**

La fonction de répartition $F_X$ d'une variable aléatoire $X$ *de densité* $f$ est une fonction continue, $C^1$ par morceaux. C'est l'unique primitive de la densité $f$ dont la limite en $-\infty$ est nulle.

Réciproquement, si $F_X$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$, et si $F_X$ est une fonction continue, $C^1$ par morceaux, alors $X$ est une variable aléatoire à densité, et la densité $f$ de $X$ s'obtient de la façon suivante :

— si $F_X$ est dérivable en $x$, alors on prend $f(x) = F'_X(x)$ ;
— sinon, on prend pour $f(x)$ une valeur arbitraire.

## 2 Exemples classiques

### 2.1 Loi uniforme

**Définition.**

Une variable aléatoire suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ si elle est de densité :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition est alors :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < a, \\ \frac{t-a}{b-a} \text{ si } a \leqslant t \leqslant b, \\ 1 \text{ si } t > b. \end{cases}$$

Un cas particulier est la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

**Proposition.**

Si $X$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $Y = (b-a)X + a$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$.

On peut en déduire une façon de simuler une variable aléatoire uniforme sur $[a,b]$ à partir de la touche random de la calculatrice.

### 2.2 Loi exponentielle

**Définition.**

Une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si elle est de densité :

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{\mathbb{R}^+}(x).$$

La fonction de répartition est alors :

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ pour } t \geqslant 0.$$

Les variables exponentielles satisfont la propriété d'absence de mémoire suivante :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+,\ P(X > s + t | X > s) = P(X > t).$$

C'est à cause de cette propriété que la loi exponentielle est utilisée quand on veut modéliser la durée de vie d'un composant électronique, ou le temps entre les arrivées de deux clients successifs dans une file d'attente (il y a en particulier des liens très forts entre les lois exponentielles et les lois de Poisson).

**Exemple 1.** La durée d'une conversation téléphonique mesurée en minutes suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/10$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un entre juste devant vous. Avec quelle probabilité devez-vous attendre plus de 10 min ? Plus de 20 min ?

$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10} e^{\frac{-x}{10}}\, dx = e^{-10/10} = e^{-1} \approx 0.368$$

$$P(10 < X < 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{\frac{-x}{10}}\, dx = e^{-10/10} - e^{-20/10} = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.233$$

$$P(X > 20) = \int_{20}^{\infty} \frac{1}{10} e^{\frac{-x}{10}} dx = e^{-2} \approx 0.135$$

$$P(X > 20 | X > 10) = P(X > 10) = e^{-1}$$

**Proposition.**

Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, et soit $\lambda > 0$. Alors, la variable $Y = \frac{-1}{\lambda} \ln(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

Cela donne une façon de simuler une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda$ à partir de la touche random de la calculatrice.

### 2.3 Loi Gaussienne ou normale

**Définition.**

Une variable aléatoire suit la loi normale de moyenne $m$ et d'écart-type $\sigma$, notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, si elle est de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On sait démontrer que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2/2) dx = \sqrt{2\pi},$$

ce qui permet de montrer que $f$ est bien une densité.
Ces lois interviennent dans le théoréme central limite, que nous verrons plus tard. Elles ont été introduites pour approximer une loi binomiale quand le paramètre $n$ est grand. Elles sont souvent utilisées aussi pour modéliser de petites erreurs ou variations aléatoires autour d'une quantité déterministe.
Il n'existe pas d'expression analytique de la fonction de répartition, c'est-à-dire qu'elle ne s'exprime pas à partir de fonctions usuelles ! Mais elle devient elle-même une fonction usuelle.

**Proposition.**

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $Y = m + \sigma X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Donc si on sait simuler une loi $\mathcal{N}(0,1)$, on sait simuler toutes les lois $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

## 3 Espérance des variables aléatoires à densité

**Définition.**

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. On dit qu'elle est *intégrable* ou qu'elle *admet une espérance* si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) < \infty$. Dans ce cas, son *espérance* est le nombre

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

**Exemple 2.** Considérons une variable aléatoire $X$ de loi uniforme sur $[a, b]$ où $a < b$ sont deux nombres réels fixés. C'est une variable aléatoire à densité, le support de sa densité est $[a, b]$, donc borné et donc $X$ est intégrable :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

**Exemple 3.** On considère une variable aléatoire $X$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La densité $f$ de $X$ est donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)1_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Pour savoir si $X$ est intégrable, on doit étudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\lambda \exp(-\lambda x)1_{\mathbb{R}_+}(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda x \exp(-\lambda x)dx.$$

C'est une intégrale impropre en $+\infty$. Comme la fonction à intégrer est le produit d'un polynôme et d'une fonction exponentielle, on souhaite intégrer par parties. Soit donc $M > 0$ :

$$\begin{aligned}\int_0^M \lambda x \exp(-\lambda x)dx &= [-x\exp(-\lambda x)]_0^M + \int_0^M \exp(-\lambda x)dx \\ &= -M\exp(-\lambda M) + [-\frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda x)]_0^M \\ &= -M\exp(-\lambda M) + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda M).\end{aligned}$$

On voit alors que quand $M$ tend vers $+\infty$, cette expression converge vers $\frac{1}{\lambda}$, donc l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$ converge, donc la variable aléatoire $X$ est intégrable et

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda x \exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{\lambda}.$$

**Remarque.** On peut aussi définir la variance d'une variable aléatoire à densité. Soit $X$ une v.a. de densité $f$. La v.a. $X^2$ est intégrable ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx < +\infty$. Si c'est le cas,

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$