DM, λ-calcul, 2023

Valeran MAYTIE

11 avril 2023

1 Le λ-calcul en appel par valeur

Le λ-calcul en appel par valeur a été introduit par Gordon Plotkin en 1975. Il est défini comme suit. On définit les *valeurs* V :

$$\begin{array}{lr} V ::= x & \text{variables} \\ \quad \mid \lambda x.v & \text{abstractions,} \end{array}$$

où v est un λ-terme arbitraire, pas nécessairement une valeur. La règle de réduction en *appel par valeur*, ou $\beta_{\mathtt{V}}$*-réduction*, est :

$$(\beta_{\mathtt{V}}) \qquad (\lambda x.u)V \to u[x := V],$$

où V est restreint à être une valeur. Cette règle s'applique sous n'importe quel contexte, et modulo les règles usuelles d'α-renommage. On écrira $u \to_{\mathtt{V}} v$ pour dire que u se réécrit (en une étape) en v par cette règle, s'il y a besoin.

Attention, une valeur V n'est *pas* une forme normale en général ; on peut exhiber des réductions $V \to V'$, et dans ce cas V' est aussi une valeur.

Question 1 Montrer que si $u \rightarrow_{\mathtt{V}}^{*} v$ et si v est β-normal (i.e., normal pour la β-réduction), alors v est l'unique forme normale de u en λ-calcul ordinaire.

Réponse :
On définit les règles de réductions $(abs_{\mathtt{V}})$, $(appD_{\mathtt{V}})$ et $(appG_{\mathtt{V}})$ de manière analogue aux règles de la β-réductions pour les réductions sous n'importe quel contexte.

Lemme 1 *Soit u et v des λ-terme, si $u \rightarrow_{\mathtt{V}} v$ alors $u \rightarrow v$.*

Démonstration.
Montrons que $u \rightarrow_{\mathtt{V}} v$ implique $u \rightarrow v$ par récurrence sur $u \rightarrow_{\mathtt{V}} v$.

- *Cas (de base) où $u \rightarrow_{\mathtt{V}} v$ vient de la règle $(\beta_{\mathtt{V}})$. Donc $u = (\lambda x.u')V$ et $v = u'[x := V]$. Comme V est un lambda terme (variable ou lambda abstraction) on $u \rightarrow v$ par définition de la beta réduction.*
- *Cas où $u \rightarrow_{\mathtt{V}} v$ vient de la règle $(abs_{\mathtt{V}})$. Donc $u = (\lambda x.A)$ et $v = (\lambda x.A')$ avec $A \rightarrow_{\mathtt{V}} A'$. Par hypotèse de récurrence on a $A \rightarrow A'$. Donc par (abs) on a $u \rightarrow v$*
- *Cas où $u \rightarrow_{V} v$ vient de la règle $(appG_{\mathtt{V}})$. Donc $u = AB$ et $v = A'B$ avec $A \rightarrow_{\mathtt{V}} A'$. Par hypothèse de récurrence on a $A \rightarrow A'$. Dinc par $(appG)$ on à $u \rightarrow v$*
- *Case où $u \rightarrow_{\mathtt{V}} v$ vient de la règle $(appD_{\mathtt{V}})$ est traité de manière siminlaire.*

□

Lemme 2 *Soit u et v des lambda terme, si $u \rightarrow_{\mathtt{V}}^{*} v$ alors $u \rightarrow^{*} v$.*

Démonstration.
Montrons que $u \rightarrow_{\mathtt{V}}^{*} v$ implique $u \rightarrow^{*} v$ par récurrence sur la longueur k de la réduction $u \rightarrow_{\mathtt{V}}^{*} v$.

- *si $k = 0$ alors $u = v$ donc on a bien la réduction $u \rightarrow v$.*
- *sinon, il existe un w tel que $u \rightarrow_{\mathtt{V}}^{*} w$ en moin de k étapes et $w \rightarrow_{\mathtt{V}} v$. Par hypothèse de récurrence, $u \rightarrow^{*} w$ et par le lemme 1 on a $w \rightarrow v$. Donc par transitivité de la beta réduciton $u \rightarrow v$.*

□

On peut enfin montrer que si $u \rightarrow_{\mathtt{V}}^{*} v$ et v est β-normale alors v est l'unique forme normale de u.
Démonstration.
Soit u un lambda terme et v_1, v_2 des lambdas termes β-normaux tel que, $u \rightarrow_{\mathtt{V}}^{*} v_1$ et $u \rightarrow_{V}^{*} v_2$. Par le lemme 2 on à $u \rightarrow v_1$ et $u \rightarrow v_2$, or la beta réduction est confluente donc $v_1 = v_2$. Donc la $\beta_{\mathtt{V}}$-réduction a bien la propriété de forme normale unique. □

Question 2 Exhiber un terme u qui a une forme normale $u\downarrow$ (pour la β-réduction), mais tel que $u \not\to_{\mathtt{V}}^* u\downarrow$; la $\beta_{\mathtt{V}}$-réduction est donc incomplète.

> *Réponse :*
> *Soit* $\Omega = ((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$
> *On prend* $u = (\lambda xy.y)\Omega$.
> $u\downarrow = (\lambda y.y)$
> $u \not\to_{\mathtt{V}}^* u\downarrow$ *car, il faut transformer* Ω *en valeur ce qui est impossible.*

Question 3 Exhiber un terme normalisable (pour la β-réduction) mais qui n'a aucune forme normale pour la $\beta_{\mathtt{V}}$-réduction. La $\beta_{\mathtt{V}}$-réduction n'est donc pas standardisante.

> *Réponse :*
> *On peut prendre le même terme que la question précédente.*
> u *n'a aucune forme normale car la seule réduction possible est* $(\lambda xy.y)\Omega \to_{\mathtt{V}} (\lambda xy.y)\Omega = u$ *et* u *n'est pas une forme normale.*

2 Confluence du λ-calcul en appel par valeur

On définit une relation de réduction parallèle $\Rightarrow_{\mathtt{V}}$, imitant celle vue en TD pour le λ-calcul ordinaire, par les règles :

$$\frac{}{u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u}\,(0) \qquad \frac{u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u' \quad v \Rightarrow_{\mathtt{V}} V}{(\lambda x.u)v \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'[x := V]}\,(1)$$

$$\frac{u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'}{\lambda x.u \Rightarrow_{\mathtt{V}} \lambda x.u'}\,(\lambda) \qquad \frac{u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u' \quad v \Rightarrow_{\mathtt{V}} v'}{uv \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'v'}\,(@)$$

Ici, V désigne une valeur arbitraire, et u, u', v, v' des λ-termes arbitraires. On dira simplement « $u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'$ » pour dire que le jugement $u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'$ est dérivable dans ce système de règles, autrement pour dire qu'il existe un arbre de preuve, formé à l'aide de ces règles, dont la conclusion est $u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'$. Les règles ont des noms : (0), (1), (λ), $(@)$, que vous devrez nommer dans vos preuves lors de toute utilisation.

On admettra les trois résultats suivants.

Fait 3 *Si* $w \Rightarrow_{\mathtt{V}} w'$ *alors toutes les variables libres dans* w' *sont déjà libres dans* w.

Fait 4 *Pour tous* λ*-termes* s', w' *et* v, *si* x *est une variable qui n'est pas libre dans* w' *et si* $x \neq z$, *alors* $s'[x := v][z := w'] = s'[z := w'][x := v[z := w']]$.

L'égalité est bien sûr à comprendre à α-renommage près.

Fait 5 *Pour tous λ-termes, u, w et w', pour toute variable z, si $w \Rightarrow_{\mathtt{V}} w'$ alors $u[z := w] \Rightarrow_{\mathtt{V}} u[z := w']$.*

C'est une récurrence facile sur la taille de u.

Nous démontrons ensuite le lemme suivant. Je laisse des trous, que vous devrez combler.

Lemme 6 *Pour tous λ-termes u, u', w, pour toute valeur W, pour toute variable z, si $u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'$ et $w \Rightarrow_{\mathtt{V}} W$, alors $u[z := w] \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'[z := W]$.*

Démonstration.

Question 4 Ceci se fait par récurrence, mais sur quoi ?

> *Réponse :*
> *On fait une récurrence sur $u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'$*

On distingue quatre cas, en fonction de la dernière règle utilisée dans la dérivation donnée de $u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'$.

— (0) : dans ce cas, $u = u'$, et on a $u[z := w] \Rightarrow_{\mathtt{V}} u[z := W] = u'[z := W]$ par le fait 5.

— (1) : dans ce cas, u est de la forme $(\lambda x.s)t$, on a $s \Rightarrow_{\mathtt{V}} s'$, $t \Rightarrow_{\mathtt{V}} V$, $u' = s'[x := V]$. Par α-renommage, on peut supposer que $x \neq z$ et que x n'est pas libre dans W.

Question 5 Terminer ce cas. Autrement dit, démontrer que $(\lambda x.s[z := w])(t[z := w]) \Rightarrow_{\mathtt{V}} s'[x := V][z := W]$. Où l'hypothèse que W est une valeur est-elle utilisée ?

> *Réponse :*
> *Par hypothèse de récurrence, $s[z := w] \Rightarrow_{\mathtt{V}} s'[z := W]$ et $t[z := w] \Rightarrow_{\mathtt{V}} V[z := W]$. On a donc $(\lambda x.s[z := w])t[z := w] \Rightarrow_{\mathtt{V}} s'[z := W][x := V[z := W]]$ par la règle (1). Comme x n'est pas libre dans W et que $x \neq z$ on a $s'[z := W][x := V[z := W]] = s'[x := V][z := W]$ par le fait 4.*
> *On a donc bien $u[z := w] \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'[z := W]$*

— (λ) : dans ce cas, u est de la forme $\lambda x.s$, u' est de la forme $\lambda x.s'$, et $s \Rightarrow_{\mathtt{V}} s'$. Par hypothèse de récurrence, $s[z := w] \Rightarrow_{\mathtt{V}} s'[z := W]$, et l'on obtient $u[z := w] \Rightarrow_{\mathtt{V}} u'[z := W]$ par la règle (λ).

— $(@)$: similairement, on utilise l'hypothèse de récurrence et la règle $(@)$. $\square$

Le fait suivant est une analyse de cas facile sur la dernière règle utilisée dans la dérivation donnée de $V \Rightarrow_{\mathtt{V}} t$.

Fait 7 *Pour toute valeur V et pour tout λ-terme t, si $V \Rightarrow_{\mathtt{V}} t$ alors t est une valeur.*

Nous démontrons le lemme suivant. Je laisse des trous dans la preuve, que vous devrez combler, comme plus haut.

Lemme 8 *La relation $\Rightarrow_{\mathtt{V}}$ est fortement confluente.*

*Démonstration.*On doit démontrer que pour tous λ-termes s, t_1, t_2, si $s \Rightarrow_{\mathtt{V}} t_1$ et $s \Rightarrow_{\mathtt{V}} t_2$, alors il existe un λ-terme t_3 tel que $t_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} t_3$ et $t_2 \Rightarrow_{\mathtt{V}} t_3$. Nous le démontrons par récurrence.

Question 6 Sur quoi porte cette récurrence ?

> *Réponse :*
> *On fait une récurrence sur les réductions $s \Rightarrow_{\mathtt{V}} t_1$ et $s \Rightarrow_{\mathtt{V}} t_2$.*

A symétrie près, il y a 10 cas, selon la dernière règle utilisée.

— (0)/n'importe quoi [4 cas d'un coup !] : on a $s = t_1$, dont on peut prendre $t_3 \stackrel{\text{def}}{=} t_2$; on a $s = t_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} t_3 = t_2$, et $t_2 \Rightarrow_{\mathtt{V}} t_3 = t_2$ par (0).

— (1)/(1). C'est l'un des deux cas compliqués. On est dans une situation de la forme :

$$\dfrac{u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_1 \quad v \Rightarrow_{\mathtt{V}} V_1}{(\lambda x.u)v \Rightarrow_{\mathtt{V}} \underbrace{u_1[x := V_1]}_{t_1}}\,(1) \qquad \dfrac{u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_2 \quad v \Rightarrow_{\mathtt{V}} V_2}{(\lambda x.u)v \Rightarrow_{\mathtt{V}} \underbrace{u_2[x := V_2]}_{t_2}}\,(1)$$

et $s = (\lambda x.u)v$. Par hypothèse de récurrence, il existe un λ-terme u_3 tel que $u_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3$ et $u_2 \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3$, et il existe un λ-terme v_3 tel que $V_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} v_3$ et $V_2 \Rightarrow_{\mathtt{V}} v_3$. Par le fait 7, v_3 est une valeur. Par le lemme 6, on a alors $u_1[x := V_1] \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3[x := v_3]$ et $u_2[x := V_2] \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3[x := v_3]$. On peut donc prendre $t_3 \stackrel{\text{def}}{=} u_3[x := v_3]$.

— (1)/(λ) : impossible.

— (1)/(@). C'est l'autre cas compliqué. On est dans une situation de la forme :

$$\dfrac{u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_1 \quad v \Rightarrow_{\mathtt{V}} V_1}{\underbrace{(\lambda x.u)v}_{s} \Rightarrow_{\mathtt{V}} \underbrace{u_1[x := V_1]}_{t_1}}\ (1) \qquad \dfrac{\lambda x.u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_2 \quad v \Rightarrow_{\mathtt{V}} v_2}{\underbrace{(\lambda x.u)v}_{s} \Rightarrow_{\mathtt{V}} \underbrace{u_2 v_2}_{t_2}}\ (@)$$

Question 7 Terminer la démonstration du cas (1)/(@). On donnera t_3 explicitement.

Réponse :

$u_2 = \lambda x.u_3$ avec $u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3$ car les seules règles de réductions possibles pour réduire $\lambda x.u$ sont (λ) ou (0) dans ce cas $u = u_3$. Par hypothèse de récurrence il existe des λ-termes u_4 et V_2 tel que $u_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_4$, $u_3 \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_4$, $V_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} V_2$ et $v_2 \Rightarrow_{\mathtt{V}} V_2$. V_1 est une valeur danc V est aussi une valeur, par le fait 7.

$$\begin{aligned} u_2 v_2 &= (\lambda x.u_3)v_2 \\ &\Rightarrow_{\mathtt{V}} u_4[x := V_2] && \textit{règle } (1) \end{aligned}$$

$$u_1[x := V_1] \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_4[x := V_2] \qquad \textit{lemme } 6$$

On prend donc $t_3 \stackrel{def}{=} u_4[x := V_2]$.

— (λ)/(λ) : alors $s = \lambda x.u$, on a dérivé $u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_1$ et $u \Rightarrow_{V} u_2$ par des dérivations plus courtes, $t_1 = \lambda x.u_1$ et $t_2 = \lambda x.u_2$. Par hypothèse de récurrence, on a un λ-terme u_3 tel que $u_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3$ et $u_2 \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3$. On applique la règle (λ), et on obtient $t_1 = \lambda x.u_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} t_3$ et $t_2 = \lambda x.u_2 \Rightarrow_{\mathtt{V}} t_3$, où $t_3 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x.u_3$.

— (λ)/(@) : impossible.

— (@)/(@). On a :

$$\dfrac{u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_1 \quad v \Rightarrow_{\mathtt{V}} v_1}{\underbrace{uv}_{s} \Rightarrow_{\mathtt{V}} \underbrace{u_1 v_1}_{t_1}}\ (@) \qquad \dfrac{u \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_2 \quad v \Rightarrow_{\mathtt{V}} v_2}{\underbrace{uv}_{s} \Rightarrow_{\mathtt{V}} \underbrace{u_2 v_2}_{t_2}}\ (@)$$

Par hypothèse de récurrence, on peut trouver un terme u_3 tel que $u_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3$ et $u_2 \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3$, ainsi qu'un terme v_3 tel que $v_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} v_3$ et $v_2 \Rightarrow_{\mathtt{V}} v_3$. On a alors $u_1 v_1 \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3 v_3$ et $u_2 v_2 \Rightarrow_{\mathtt{V}} u_3 v_3$ par la règle (@), et l'on pose donc $t_3 \stackrel{\text{def}}{=} u_3 v_3$. □

On admettra le résultat suivant, qui est facile à démontrer.

Fait 9 *Pour tous λ-termes s et t, si $s \rightarrow_{\mathtt{V}} t$ alors $s \Rightarrow_{\mathtt{V}} t$, et si $s \Rightarrow_{\mathtt{V}} t$ alors $s \rightarrow^*_{\mathtt{V}} t$.*

Question 8 En déduire que $\rightarrow_{\mathtt{V}}$ est confluente.

> <u>*Réponse :*</u>
>
> ***Lemme 10*** *Si R et S sont deux relations binaires, et :*
>
> *(a) $R \subseteq S \subseteq R^*$*
>
> *(b) S est confluente*
>
> *alors R est confluent*
>
> Démonstration.
>
> *Démontré en cours.* $\square$
>
> *D'après le <u>fait 9</u> on a $\rightarrow_{\mathtt{V}} \subseteq \Rightarrow_{\mathtt{V}} \rightarrow^*_{\mathtt{V}}$. De plus $\Rightarrow_{\mathtt{V}}$ est fortement confluente (<u>lemme 8</u>).*
>
> *Donc $\rightarrow_{\mathtt{V}}$ est bien confluente d'apèrs le <u>lemme 10</u>.* $\square$

3 Enumérations calculables des λ-termes

On pose :

$$
\begin{aligned}
\ulcorner n \urcorner &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda f.\lambda x.f^n(x) && \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\
\mathbf{V} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda x.\lambda y.x \\
\mathbf{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda x.\lambda y.y \\
\ulcorner S \urcorner &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx) \\
\ulcorner + \urcorner &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx) \\
\langle u, v \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda p.puv \\
\ulcorner p_1 \urcorner &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda c.c\mathbf{V} \\
\ulcorner p_2 \urcorner &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda c.c\mathbf{F} \\
\mathbf{asr\_helper} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda c.\ulcorner p_1 \urcorner c \langle \mathbf{F}, \ulcorner S \urcorner (\ulcorner p_2 \urcorner c) \rangle \langle \mathbf{V}, \ulcorner p_2 \urcorner c \rangle \\
\mathbf{asr} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda n.\ulcorner p_2 \urcorner (n\ \mathbf{asr\_helper}\ \langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle)
\end{aligned}
$$

Question 9 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, **asr** $\ulcorner n \urcorner \rightarrow^* \ulcorner asr(n) \urcorner$, où asr est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ que vous expliciterez.

Réponse :

On pose $asr(n) = n/2$. *Si n est pair sinon* $asr(n) = (n-1)/2$.

Pour ça il faut montrer que le deuxième élément du couple renvoyé par $\ulcorner n \urcorner$ **asr_helper** $\langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle$ *est égale à* $\ulcorner asr(n) \urcorner$

Montrons que $\ulcorner n \urcorner$ **asr_helper** $\langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle \rightarrow^* \langle \mathbf{F}, \ulcorner asr(n) \urcorner \rangle$ *si* n *pair sinon* $\ulcorner n \urcorner$ **asr_helper** $\langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle \rightarrow^* \langle \mathbf{V}, \ulcorner asr(n) \urcorner \rangle$ *par récurrence sur* n.

- *Cas (de base) où* $n = 0$. $\ulcorner 0 \urcorner$ **asr_helper** $\langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle \rightarrow^* \langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle$. *On réduit* **asr** $\ulcorner n \urcorner \rightarrow^* \ulcorner 0 \urcorner$. *On a bien* **asr** $\ulcorner 0 \urcorner \rightarrow^* \ulcorner 0/2 = 0 \urcorner$
- *Comme* n *une application de* n *foit la fonction* f *qui dans notre cas est* **asr_helper**. *Il suffit d'appliquer encore une foit* **asr_helper** *au résultat de* $\ulcorner n \urcorner$ **asr_helper** $\langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle$ *pour avoir le résultat de* $\ulcorner n+1 \urcorner$ **asr_helper** $\langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle$.

  On a deux cas :

  - *n est pair, alors* $\ulcorner n \urcorner$ **asr_helper**$\langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle \rightarrow^* \langle \mathbf{F}, \ulcorner n/2 \urcorner \rangle$ *par hypothèse de récurrence. On calcule* **asr_helper**$\langle \mathbf{F}, \ulcorner n/2 \urcorner \rangle \rightarrow^* \langle \mathbf{V}, \ulcorner n/2 \urcorner \rangle$. *On a bien* $\ulcorner n+1 \urcorner$ **asr_helper**$\langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle \rightarrow^* \langle \mathbf{V}, \ulcorner asr(n+1) \urcorner \rangle$, *car* $n+1$ *est impaire donc* $asr(n+1) = (n+1-1)/2 = n/2$
  - *n est impaire, alors* $\ulcorner n \urcorner$ **asr_helper**$\langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle \rightarrow^* \langle \mathbf{V}, \ulcorner (n-1)/2 \urcorner \rangle$ *par hypothèse de récurrence. On calcule* **asr_helper** $\langle \mathbf{V}, \ulcorner (n-1)/2 \urcorner \rangle \rightarrow^* \langle \mathbf{F}, \ulcorner S \urcorner \ulcorner (n-1)/2 \urcorner$. $\ulcorner S \urcorner \ulcorner n \urcorner$ *est la représentation de* $n+1$. $\ulcorner S \urcorner \ulcorner (n-1)/2 \urcorner$ *représente donc* $(n-1)/2 + 1 = (n+1)/2 = asr(n+1)$. *On a bien* $\ulcorner n+1 \urcorner$ **asr_helper**$\langle \mathbf{F}, \ulcorner 0 \urcorner \rangle \rightarrow^* \langle \mathbf{F}, \ulcorner asr(n+1) \urcorner \rangle$

asr$\ulcorner n \urcorner$ *se réduit bien en* $\ulcorner asr(n) \urcorner$ $\square$

On rappelle qu'il existe une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, donnée par la formule :

$$[m, n] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m.$$

(Nous utiliserons la notation $[m, n]$ plutôt que la notation $\langle m, n\rangle$ utilisée en cours, pour éviter un conflit de notation avec la construction $\langle u, v\rangle$ rappelée plus haut.)

Question 10 Exhiber un λ-terme $\mathbf{cpl}$ tel que $\mathbf{cpl}\ \ulcorner m \urcorner\ \ulcorner n \urcorner \to^* \ulcorner [m, n] \urcorner$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Ne cherchez surtout pas à l'obtenir en forme normale ; préférez la clarté.

> *Réponse :*
>
> *On pose :*
>
> $\ulcorner \times \urcorner \stackrel{\textit{def}}{=} \lambda x.\lambda y.\lambda f.x\ (y\ f)$
>
> *On a donc*
>
> $\mathbf{cpl} \stackrel{\textit{def}}{=} \lambda m.\lambda n.\ulcorner S \urcorner\ (\mathbf{asr}\ (\ulcorner \times \urcorner\ (\ulcorner S \urcorner\ m\ n)\ (\ulcorner S \urcorner\ (\ulcorner S \urcorner\ \ulcorner 1 \urcorner\ m)\ n)))\ m$

On suppose une énumération $n \mapsto x_n$ des variables du λ-calcul ; autrement dit, une bijection. On notera $\#_x$ le numéro de chaque variable x, autrement dit $x \mapsto \#_x$ est la fonction inverse. Pour tout λ-terme t, on définit un entier $\mathbf{num}(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{num}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} [0, \#_x] \\ \mathbf{num}(uv) &\stackrel{\text{def}}{=} [1, [\mathbf{num}(u), \mathbf{num}(v)]] \\ \mathbf{num}(\lambda x.u) &\stackrel{\text{def}}{=} [\#_x + 2, \mathbf{num}(u)] \end{aligned}$$

On fera attention au fait que $\mathbf{num}(t)$ n'est pas invariant par α-équivalence ; par exemple, $\mathbf{num}(\lambda x.x) \neq \mathbf{num}(\lambda y.y)$.

Question 11 Décrire un λ-terme $\mathbf{kwote}$ tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{kwote}\ \ulcorner n \urcorner \to^* \ulcorner \mathbf{num}\ (\ulcorner n \urcorner) \urcorner$. (Prenez du temps à analyser le côté droit ; notamment, $\ulcorner n \urcorner$ est vu comme un λ-terme, dont on prend le numéro $\mathbf{num}\ (\ulcorner n \urcorner)$, écrit ensuite sous forme d'entier de Church.) On supposera pour cela que, dans la définition de $\ulcorner n \urcorner$ utilisée dans le côté droit de la réduction, $\#_f = 0$ et $\#_x = 1$. Vous êtes encouragés à produire des λ-termes auxiliaires, et à utiliser ceux produits plus haut ; ne développez surtout pas leurs définitions pour former les λ-termes désirés : privilégiez la clarté.

On pose :

$\mathbf{kwote\_helper} \stackrel{def}{=} \lambda x.\mathbf{cpl} \ulcorner 1 \urcorner\ (\mathbf{cpl}\ (\mathbf{cpl} \ulcorner 0 \urcorner \ulcorner 0 \urcorner)\ x)$

$\mathbf{kwote\_iterator} \stackrel{def}{=} \lambda c.c\ \mathbf{kwote\_helper}\ (\mathbf{cpl} \ulcorner 0 \urcorner \ulcorner 1 \urcorner)$

$\mathbf{kwote\_helper}$ *est le lambda terme qui va remplasser tout les* f *dans* $\ulcorner n \urcorner$*. On aura donc* $[1, [0, 0], \mathbf{kwote\_helper}(f \ldots (f\ x))]$ *grâce à* $\mathbf{kwote\_iterator}$.

On définit $\mathbf{kwote} \stackrel{def}{=} \lambda n.\mathbf{cpl} \ulcorner 2 \urcorner\ (\mathbf{cpl} \ulcorner 3 \urcorner\ (\mathbf{kwote\_iterator}\ n))$

La fonction $\mathbf{num}$ est une bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble des λ-termes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons t_n l'unique λ-terme tel que $\mathbf{num}(t_n) = n$.

Question 12 Exhiber un λ-terme $\mathbf{diag}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{diag} \ulcorner n \urcorner \to^* \ulcorner \mathbf{num}(t_n \ulcorner n \urcorner) \urcorner$.

Réponse :

Comme $\mathbf{num}(t_n) = n$ *on a :*

$\mathbf{num}(t_n\ u) = [1, [n, \mathbf{num}(u)]]$

$\mathbf{diag} \stackrel{def}{=} \lambda n.\mathbf{cpl} \ulcorner 1 \urcorner\ (\mathbf{cpl}\ n, (\mathbf{kwote}\ n)))$

Question 13 En déduire que, pour chaque λ-terme u, il existe un λ-terme B_u tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_u \ulcorner n \urcorner =_\beta u \ulcorner \mathbf{num}(t_n \ulcorner n \urcorner) \urcorner$. On décrira B_u explicitement ; comme d'habitude, on est encouragé à utiliser les termes précédemment définis, et à ne surtout pas les remplacer par leurs définitions.

Réponse :

$B_u \stackrel{def}{=} \lambda n.u\ (\mathbf{diag}\ n)$

Par définition de $\mathbf{diag}$ *on a* $B_u \to^* \lambda n.u \ulcorner \mathbf{num}(t_n\ n) \urcorner$*. Donc* $B_u \ulcorner n \urcorner =_\beta u \ulcorner \mathbf{num}(t_n \ulcorner n \urcorner) \urcorner$.

Question 14 En déduire, pour chaque λ-terme u, un λ-terme A_u tel que $A_u =_\beta u \ulcorner \mathbf{num}(A_u) \urcorner$. (Indication : poser $n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{num}\ (B_u)$. On donnera A_u explicitement, toujours en utilisant les termes précédemment construits, sans les remplacer par leurs définitions.) L'existence de ce terme pour chaque u est le *deuxième théorème de point fixe* du λ-calcul.

Réponse :

$A_u = B_u \ulcorner n \urcorner$ *avec* $n = \mathbf{num}(B_u)$

On calcule $A_u \to^* u\ (\mathbf{diag} \ulcorner \mathbf{num}(B_u) \urcorner)$*. Par définition de* $\mathbf{diag}$*, on a* $\mathbf{diag} \ulcorner \mathbf{num}(B_u) \urcorner \to^* \ulcorner \mathbf{num}(t_n \ulcorner \mathbf{num}(B_u) \urcorner) \urcorner$*. Or* t_n *est défini comme l'unique lambda terme tel que* $\mathbf{num}(t_n) = n$*, or* $n = \mathbf{num}(B_u)$ *donc* $t_n = B_u$*. Enfin* $\mathbf{diag} \ulcorner \mathbf{num}(B_u) \urcorner \to^* \ulcorner \mathbf{num}(B_u \ulcorner n \urcorner) \urcorner$.

On obtient bien $A_u =_\beta u \ulcorner \mathbf{num}(A_u) \urcorner$.

On dit qu'un ensemble L de λ-termes est *récursif* si et seulement si la fonction caractéristique de $\{\mathbf{num}(t) \mid t \in L\}$ est récursive ; autrement dit, si la fonction qui à tout $n \in \mathbb{N}$ associe 1 si $t_n \in L$ et 0 sinon est récursive au sens usuel.

On dit qu'un ensemble X de λ-termes est *β-saturé* si et seulement pour tout $u \in X$, pour tout $v =_\beta u$, v est dans X.

On dit que deux ensembles X et Y de λ-termes sont *séparés* par un ensemble L si et seulement si X est inclus dans L et Y est inclus dans le complémentaire de L ; en formules, si $X \subseteq L$ et $Y \cap L = \emptyset$. X et Y sont *récursivement séparables* si et seulement si X et Y sont séparés par un ensemble récursif de λ-termes.

Question 15 Soient X et Y deux ensembles de λ-termes séparés par un ensemble récursif L. Montrer qu'il existe un λ-terme D tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— $D\ulcorner n \urcorner =_\beta \mathbf{V}$ si et seulement si $t_n \in L$, et

— $D\ulcorner n \urcorner =_\beta \mathbf{F}$ si et seulement si $t_n \notin L$.

Réponse :

Comme la fonction qui détermine si n est dans L est récursif, on peut la coder en lambda calcul. On nome ce lambda term D_l. Comme défini plus haut D_l renvoi $\ulcorner 1 \urcorner$ si t_n est dans L sinon $\ulcorner 0 \urcorner$.

On défini donc $D \stackrel{def}{=} \lambda n.(D_l\ n)\ (\lambda y.\mathbf{V})\ \mathbf{F}$.

D renvoi $\mathbf{F}$ si $n = 0$ sinon il renvoi $\mathbf{V}$ □

Question 16 En utilisant le deuxième théorème de point fixe, pour tous λ-termes t, u, v, construire un λ-terme j tel que :

— si $t\ulcorner \mathbf{num}(j) \urcorner =_\beta \mathbf{V}$, alors $j =_\beta v$;

— et si $t\ulcorner \mathbf{num}(j) \urcorner =_\beta \mathbf{F}$, alors $j =_\beta u$.

Réponse :

On pose $j \stackrel{def}{=} A_s$ avec $s \stackrel{def}{=} \lambda n.t\ n\ u\ v$

On réduit $A_s \to^* s\ \ulcorner \mathbf{num}(A_s) \urcorner$ (définition de A_s). On pose $n \stackrel{def}{=} \mathbf{num}(A_s)$ pour plus de lisibilité. On obtient donc $s\ \ulcorner n \urcorner \to^* t\ \ulcorner n \urcorner\ u\ v$.

Donc si :

— *si $t\ \ulcorner n \urcorner =_\beta \mathbf{V}$ alors $s\ \ulcorner n \urcorner =_\beta \mathbf{V}\ u\ v \to^* u$, donc $j =_\beta u$.*

— *si $t\ \ulcorner n \urcorner =_\beta \mathbf{F}$ alors $s\ \ulcorner n \urcorner =_\beta \mathbf{F}\ u\ v \to^* v$, donc $j =_\beta v$.*

Question 17 Déduire des questions précédentes que deux ensembles β-saturés non vides X et Y de λ-termes ne sont *jamais* récursivement séparables.

> *Réponse :*
>
> *Supposons que X et Y sont séparés récursivement par L (un ensemble récursif). On a donc un lambda terme $D \ulcorner n \urcorner$ qui détermine si t_n est dans L ou non grâce à la **Question 15**. Soit $x \in X$ et $y \in Y$.*
>
> *On applique le résultat de la **Question 16** avec $t = D$, $u = x$ et $v = y$.*
>
> *Par définition de D, $D \ulcorner n \urcorner$ renvoie toujours* **V** *ou* **F**.
>
> *On a deux cas :*
>
> — *si $D \ulcorner num(j) \urcorner =_\beta$* **V**, *on a donc $j \in L$ et $j =_\beta y$. Or Y est β-saturé donc $j \in Y$.*
>
> — *si $D \ulcorner num(j) \urcorner =_\beta$* **F**, *on a donc $j \notin L$ et $j =_\beta x$. Or X est β-saturé donc $j \in X$.*
>
> *Par définition de la sépration si $j \in L$ alors $j \notin Y$, ou si $j \notin L$ alors $j \notin X$.*
>
> *Or dans les deux cas ci-dessus j ne respecte par la définition. Cela remet donc en cause l'existence de j ce qui n'est pas possible par le deuxième thèorème de point fixe **Question 14**.*
>
> *Deux ensembles β-saturés non vides ne sont donc jamais récursivement séparables.* $\square$

Comme cas particulier de ce résultat (en prenant pour Y le complémentaire de X), on obtient : les seuls ensembles β-saturés X de λ-termes qui sont récursifs sont (1) l'ensemble vide et (2) l'ensemble de tous les λ-termes. On reconnaît ici une version λ-calculatoire du théorème de Rice.