Exercices

(3 - 1) *(Déterminisation)*

Q 1) Dessiner l'automate suivant puis le déterminiser (les états finaux sont représentés par le symbole $\star$) :

			a	b
$\rightarrow$	0		3	0
	1	$\star$	0	$0,3$
	2		2	0
	3	$\star$	2	$0,1$

Q 2) En utilisant l'automate déterministe, montrer que le mot `abbabbb` est accepté. Donner un chemin acceptant dans l'automate non déterministe.

(3 - 2) *(Constructions)*

Q 1) Construire un automate (déterministe ou non déterministe) qui reconnaît le langage L_1 des mots sur l'alphabet $\{\texttt{a},\texttt{b}\}$ qui ont exactement deux occurrences de la lettre `b`.

Q 2) Construire un automate (déterministe ou non déterministe) qui reconnaît le langage L_2 des mots sur l'alphabet $\{\texttt{a},\texttt{b}\}$ qui contiennent le mot `ab`.

Q 3) En utilisant les constructions vues en cours, obtenir un automate pour $L_1 \cup L_2$.

Q 4) En utilisant les constructions vues en cours, obtenir un automate pour $L_1 L_2$.

Q 5) En utilisant les constructions vues en cours, obtenir un automate pour $L_1^\star$.

Q 6) En utilisant les constructions vues en cours, obtenir un automate pour $L_1^\star L_2$.

(3 - 3) *(Déterminisation)*

Q 1) Déterminiser les automates obtenus à l'exercice précédent.

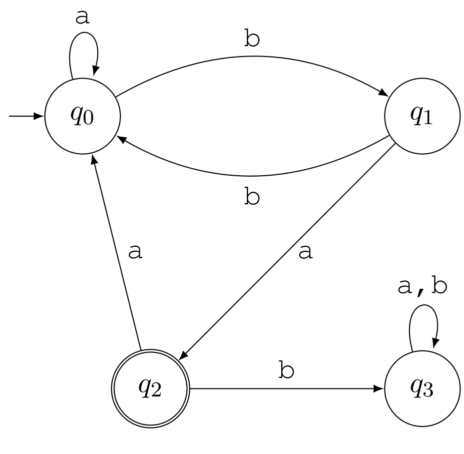
Q 2) Construire un automate pour le langage $L_1^\star \setminus L_2$.

(3 - 4) *(Opérations sur les langages)*

Soit $\mathcal{A}$ un automate déterministe reconnaissant un langage L sur l'alphabet $\{\texttt{a},\texttt{b}\}$. Dans les questions suivantes, on demande :

— De prouver que le langage en question est rationnel, en expliquant, partant d'un automate $\mathcal{A}$ déterministe quelconque, comment le transformer pour obtenir un automate (déterministe ou non) pour le nouveau langage ;

— Puis de faire la transformation explicitement sur l'automate $\mathcal{A}_1$ ci-dessous :



- $\text{Pref}(L) = \{u | \exists v, uv \in L\}$. C'est l'ensemble des préfixes des mots de L.
- $\text{Suff}(L) = \{u | \exists v, vu \in L\}$. C'est l'ensemble des suffixes des mots de L.
- $b^{-1}L = \{u | bu \in L\}$. C'est l'ensemble des mots de L qui commencent par b auxquels on a enlevé la première lettre (donc le b).
- $\text{half}(L) = \{x_1x_3x_5x_7 \dots x_{2n-1} | x_1x_2x_3 \dots x_{2n} \in L\}$. C'est l'ensemble des mots de L de longueur paire auxquels on a enlevé une lettre sur deux.
- $\text{double}(L) = \{x_1\mathtt{a}x_2\mathtt{a}x_3\mathtt{a}x_4\mathtt{a} \dots x_n\mathtt{a} | x_1x_2x_3 \dots x_n \in L\}$. C'est l'ensemble des mots de L auxquels on a ajouté un symbole `a` entre toutes les lettres.

(3 - 5) *(Automate mystère)*

Soit $\mathcal{A}$ un automate déterministe sur l'alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, constitué de n états numérotés de 0 à $n-1$ (q_0 étant l'état initial).

On construit un automate non déterministe $\mathcal{B}$ sur l'alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \#\}$ de la façon suivante : $\mathcal{B}$ est constitué de $2n$ copies de l'automate $\mathcal{A}$, c'est à dire deux copies par état de l'automate initial.

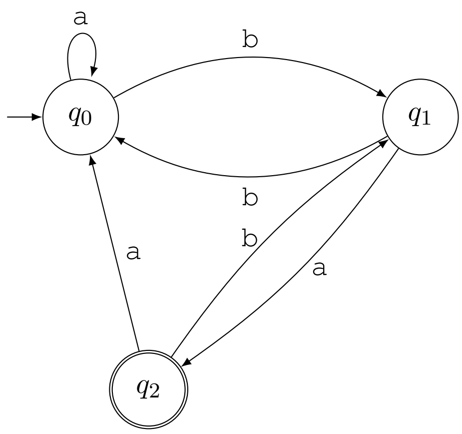
Pour chaque état q_i de l'automate initial, on a donc deux copies de $\mathcal{A}$:

— La première copie est identique à $\mathcal{A}$, mais sans état final et avec comme état initial q_i

— La deuxième copie est identique à $\mathcal{A}$, mais sans état initial et avec q_i comme état final

— Pour chaque état (précédemment) final de la première copie, il y a une transition étiquetée # vers l'état q_0 de la deuxième copie.

Q 1) Construire l'automate $\mathcal{B}$ dans le cas de l'automate $\mathcal{A}$ suivant :



Q 2) Que reconnaît l'automate $\mathcal{B}$? On pourra commencer par tester les mots `ba#a`, `ba#ba` et `a#ba`.

(3 - 6) *(Tennis)*

Assia et Bertrand jouent au tennis. C'est Assia qui a le service. A chaque fois que Assia gagne un point, on note la lettre `a`. Si c'est Bertrand qui gagne, on note la lettre `b`.

Soit L l'ensemble des mots qui correspondent aux jeux gagnés par Assia. Par exemple `aaaa` est dans L, `abababaa` est dans L, mais pas `ab` (le jeu n'est pas fini), ni `bbbb` (c'est Bertrand qui a gagné le jeu), ni `aaaaa` (le jeu serait déjà fini après les 4 points d'Assia, donc on est en train de commencer un nouveau jeu).

Construire un automate déterministe pour le langage L. On utilisera comme états $0-0$, $15-0$, etc.