CHAPITRE 1
RÉSOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE DU PIVOTS DE GAUSS
INTRODUCTION AUX ESPACES VECTORIELS

Table des matières

1. Introduction

Les systèmes d'équations linéaires sont présents dans différents domaines scientifiques et notamment en mathématiques. Les deux des exemples ci-dessous tirés de la science au lycée donnent une idée de la façon dont ils se présentent.

Le premier exemple provient de la physique. Supposons que nous ayons trois objets, nous supposons qu'on a une masse de 2 kg et nous voulons trouver les deux masses inconnues. L'expérience avec un mètre permet d'obtenir ces deux balances équilibrées

Pour que les masses s'équilibrent, il faut que la somme des moments à gauche soit égale à la somme des moments à droite, où le moment d'un objet est sa masse multipliée par la distance qui le sépare du point de balance. Cela donne un système de deux équations linéaires.

$$\begin{cases} 40h + 15c = 100 \\ \qquad\quad 25c = 50 + 50h \end{cases}$$

Le deuxième exemple est tiré de la chimie. Nous voulons mélanger, dans des conditions contrôlées, du toluène C_7H_8 et de l'acide nitrique HNO_3 pour produire du trinitrotoluène $C_7H_5O_6N_3$ avec l'eau comme sous-produit (les conditions doivent être très bien contrôlées - le trinitrotoluène est mieux connu sous le nom TNT).

Dans quelle proportion devrions-nous les mélanger? Le nombre d'atomes, de chaque élément, présents avant la réaction

$$\mathrm{xC_7H_8 + yHNO_3 \longrightarrow zC_7H_5O_6N_3 + wH_2O}$$

doit être égal au nombre d'atomes présents après. En appliquant cela aux éléments C, H, N et O, on obtient ce système.

$$\begin{cases} 7x = 7z \\ 8x + 1y = 5z + 2w \\ 1y = 3z \\ 3y = 6z + 1w \end{cases} \tag{1}$$

Ces deux exemples se conduisent à la résolution d'un système d'équations. Dans chaque système, les équations n'impliquent que la première puissance de chaque variable : équations linéaires. Ce chapitre montre comment résoudre un tel système d'équations.

2. Méthode de Gauss

Définition 2.1. — (1) *Une* ***combinaison linéaire*** *de $x_1, \ldots, x_n$ est une expression de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

où les nombres $a_1, \ldots, a_n$ sont les coefficients de cette combinaison.

(2) *Une* ***équation linéaire*** *de variables $x_1, \ldots, x_n$ est une équation de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{2}$$

où $b \in \mathbb{R}$ est une ***constante****.*

(3) *Un n-uplet $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ est une* ***solution*** *de l'équation (2) si en substituant les nombres $s_1, \ldots, s_n$ aux variables $x_1, \ldots, x_n$ on obtient un énoncé vrai : $a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = b$.*

(4) *Un* ***système d'équations linéaires*** *à m équations et à n variables*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{cases}$$

admet comme solution $(s_1, \ldots, s_n)$ si ce n-uplet est une solution de toutes les équations.

Remarque 2.2. — La combinaison $3x_1 + 2x_2$ de x_1 et x_2 est linéaire. Les combinaisons $3x_1^2 + 2x_2$ et $3x_1 + 2\sin(x_2)$ ne sont pas linéaires.

Nous supposerons habituellement les variables $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distinctes au départ, car dans une somme où l'un des termes x_i apparait avec répétition nous pouvons réarranger pour que x_i n'apparait qu'une fois, comme $2x+3y+4x = 6x+3y$. Nous incluons des termes avec un coefficient zéro, comme dans $x-2y+0z$ et à d'autres moment nous les omettrons, selon ce qui est pratique.

Remarque 2.3. — *On prendra garde qu'une solution d'un système linéaire à n inconnues n'est pas un nombre mais un n-uplet de nombres dans un certain ordre.*
La paire **ordonée** $(-1, 5)$ *est une solution du système*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 + \ \ x_2 = 6 \end{cases}$$

En revanche, la paire $(5, -1)$ *n'est pas une solution.*

3. Systèmes équivalents

Considérons les deux systèmes linéaires

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 8x + \ \ y = 15 \end{cases}$$

Si le couple de nombres (x_0, y_0) est solution de (1), alors $2x_0+3y_0 = 7$ et $6x_0-4y_0 = 8$; donc on a aussi $8x_0 - y_0 = (2x_0 + 3y_0) + (6x_0 - 4y_0) = 7 + 8 = 15$. Ainsi le couple (x_0, y_0) est solution de (2) car il vérifie les deux équations de (2).

Inversement si le (x_0, y_0) est solution de (2), alors $2x_0 + 3y_0 = 7$ et $8x_0 - y_0 = 15$; donc $6x_0 - 4y_0 = (8x_0 - y_0) - (2x_0 + 3y_0) = 15 - 7 = 8$. Le couple est par conséquent solution de (1) car il vérifie les deux équations de (1).

Ces deux système ont les mêmes solutions, on dit qu'il sont équivalents

Définition 3.1. — *De façon générale, deux systèmes d'équations linéaires à n inconnues sont dits équivalents si toute solution de l'un est solution de l'autre.*

Trouver l'ensemble de solutions d'un système linéaire, c'est ***résoudre*** ce système. Nous n'avons pas besoin de devinettes ou de chance, il y a un algorithme qui fonctionne toujours. On l'appelle ***algorithme de Gauss*** (ou ***élimination gaussienne*** ou ***élimination linéaire***). Cet algorithme consiste à construire des systèmes équivalents à un système donné. Par application répétée de ces techniques, nous transformerons le système à résoudre en un système équivalent qui sera plus simple (en un sens à préciser).

Exemple 3.2. — Pour résoudre le système

$$\begin{cases} \phantom{\frac{1}{3}x_1 + 5x_2 - {}} 3x_3 = 9 & L_1 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 & L_2 \\ \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 \phantom{{} - 2x_3} = 3 & L_3 \end{cases}$$

nous le transformons, étape par étape, jusqu'à ce qu'il se présente sous une forme que nous pouvons facilement résoudre.

La première transformation réécrit le système en échangeant la première et la troisième ligne (rangée),

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 \phantom{{} - 2x_3} = 3 & L_1 \longleftarrow L_3 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ \phantom{\frac{1}{3}x_1 + 5x_2 - {}} 3x_3 = 9 & L_3 \longleftarrow L_1 \end{cases}$$

La deuxième transformation multiplie par 3 la première ligne,

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 & L_1 \longleftarrow 3 \times L_1 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ 3x_3 = 9 & L_3 \longleftarrow L_3 \end{cases}$$

La troisième transformation est la seule transformation non triviale dans cet exemple. Nous multiplions mentalement les deux côtés de la première ligne par -1, ajoutons mentalement cela à la deuxième ligne, et écrivons le résultat dans la nouvelle deuxième ligne. Cela revient à remplacer L_2 par $L_2 - L_1$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ - \ x_2 - 2x_3 = -7 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ 3x_3 = 9 & L_3 \longleftarrow L_3 \end{cases}$$

Ces étapes ont amené le système à une forme échelonnée où l'on peut facilement trouver la valeur de chaque variable. La dernière équation (du bas) montre que $x_3 = 3$, et le remplacement de x_3 par 3 dans l'équation du milieu montre que $x_2 = 1$. En substituant ces deux éléments dans la première équation (du haut), on obtient $x_1 = 3$. Le système a donc une solution unique ; l'ensemble de solutions est $\{(3, 1, 3)\}$.

Nous pouvons aussi pousser l'algorithme pour avoir une forme encore plus facile, en répétant ces opérations élémentaires

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ - \ x_2 = -1 & L_2 \longleftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3 \\ 3x_3 = 9 & L_3 \longleftarrow L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 & L_1 \longleftarrow L_1 + 6L_2 \\ - x_2 = -1 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ 3x_3 = 9 & L_3 \longleftarrow L_3 \end{cases}$$

Puis on trouve l'ensemble de solutions $\{(3, 1, 3)\}$.

Nous utiliserons la méthode de Gauss tout au long de cet UE. C'est une méthode rapide et facile. Nous allons maintenant montrer que c'est aussi une méthode sûre : La méthode de Gauss ne perd jamais de solutions et ne capte jamais de solutions étrangères, de sorte qu'un n-uplet est une solution du système linéaire avant que nous appliquions la méthode si, et seulement si, il est une solution après.

***Théorème 3.3* (Algorithme de Gauss).** — *Si un système linéaire est transformé à un autre système linéaire par l'une des opérations*

(1) ***Echange*** *de deux lignes;*

(2) ***Multiplication*** *d'une ligne par un scalaire non nul;*

(3) ***Ajout*** *du multiple d'une ligne à une autre ligne*

alors les deux systèmes sont équivalents (et donc ont le même ensemble de solutions).

Chacune des trois opérations a une restriction. Multiplier une ligne par 0 n'est pas autorisé car cela peut évidemment changer l'ensemble de solutions. De même, l'ajout d'un multiple d'une ligne à elle-même n'est pas autorisé car l'ajout de -1 fois la ligne à elle-même a pour effet de multiplier la ligne par 0, et nous interdisons d'échanger une ligne avec elle-même, pour faciliter certains résultats dans les chapitres suivants. En plus, c'est inutile.

Démonstration. — Il est claire que les deux premières opérations transforment un sytème linéaire en un système équivalent. Montrons le résultat pour la troisième opération. Soit le système

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \quad L_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \quad L_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \quad L_m \end{array}\right.$$

Choisissons un nombre λ et deux équations (lignes) L_i et L_j $(i \neq j)$, et formons un nouveau système linéaire (S') qui a le même nombre d'inconnues que (S) en gardant inchangées toutes les autres équations sauf L_i, et en remplaçant L_i par l'équation $L_i + \lambda L_j$,

$$(a_{i,1} + \lambda a_{j,1})x_1 + (a_{i,2} + \lambda a_{j,2})x_2 + \dots (a_{i,n} + \lambda a_{j,n})x_n = b_i + \lambda b_j \quad (L_i')$$

Ce nouveau système (S') est équivalent à (S). En effet, si le n-uplet $(s_1, \dots, s_n)$ vérifie (S), on a $a_{k,1}s_1 + a_{k,2}s_2 + \dots + a_{k,n}s_n = b_k$ pour tout k, $1 \leq k \leq m$, donc aussi

$$(a_{i,1}s_1 + a_{i,2}s_2 + \dots + a_{i,n}s_n) + \lambda(a_{j,1}s_1 + a_{j,2}s_2 + \dots + a_{i,n}s_n) = b_i + \lambda b_j$$

ou encore

$$(a_{i,1} + \lambda a_{j,1})s_1 + (a_{i,2} + \lambda a_{j,2})s_2 + \dots + (a_{i,n} + \lambda a_{j,n})s_n = b_i + \lambda b_j$$

Donc toutes les équations de (S') sont vérifiées. On en déduit que toute solution de (S) est solution de (S').

Réciproquement si le n-uplet $(s_1, \dots, s_n)$ vérifie (S'), alors pour $k \neq i$,

$$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots a_{k,n}x_n = b_k$$

et

$$(a_{i,1} + \lambda a_{j,1})s_1 + (a_{i,2} + \lambda a_{j,2})s_2 + \dots + (a_{i,n} + \lambda a_{j,n})s_n = b_i + \lambda b_j$$

d'où

$$\begin{aligned}&[a_{i,1} + \lambda a_{j,1})s_1 + (a_{i,2} + \lambda a_{j,2})s_2 + \dots + (a_{i,n} + \lambda a_{j,n})s_n] \\ &\qquad -\lambda(a_{j,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots a_{j,n}x_n) = [b_i + \lambda b_j] - \lambda b_j\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots a_{i,n}x_n = b_i$$

Par conséquent $(s_1, \dots, s_n)$ vérifie les équations du système (S). $\square$

Définition 3.4. — *Les trois opérations du théorème 3.3 sont les* ***opérations élémentaires*** *de réduction, ou opérations en ligne, ou opérations gaussiennes :*

(1) est une opération élémentaire de première espèce, $L_i \longleftarrow L_j$*;*

(2) est une opération élémentaire de seconde espèce, $L_i \longleftarrow \lambda L_i$*;*

(3) est une opération élémentaire de troisième espèce, $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$

3.1. Première description de la méthode du pivot de Gauss. — La méthode de Gauss utilise systématiquement les opérations de lignes pour résoudre un système. Considérons toujours le système (S) et considérons un coefficient **non nul** $a_{k,j}$ de l'équation L_j, et choisissons pour λ le nombre $-\frac{a_{k,i}}{a_{k,j}}$. Alors dans l'équation $L_i + \lambda L_j$ le coefficient de x_k est nul.

Exemple 3.5. — Considérons le système

$$(S_1)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4 & L_1 \\ 4x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = 5 & L_2 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 1 & L_3 \\ 5x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 6 & L_4 \end{cases}$$

Choisissons $j = 2$ (2ème ligne); le coefficient de x_2 dans l'équation L_2 est -1; il est non nul.

$$(S_1)\begin{cases} 3x_1 + \quad 2x_2 - 5x_3 = 4 & L_1 \\ 4x_1 + \boxed{-1}x_2 + 2x_3 = 5 & L_2 \\ \ \ x_1 + \quad\ \ x_2 - \ \ x_3 = 1 & L_3 \\ 5x_1 - \quad 4x_2 + 9x_3 = 6 & L_4 \end{cases}$$

Remplaçons l'équation L_1 par $L_1 + 2L_2$. Dans le nouveau système (S') l'équation L_1 sera remplacée par l'équation

$$11x_1 + 0x_2 - x_3 = 14$$

dans laquelle le coefficient de x_2 est nul.

Nous pouvons recommencer toujours avec $j = 2$, nous remplacerons L_3 par L_3+L_2, nous obtenons ainsi le système

$$(S_2)\begin{cases} 11x_1 + \quad 0x_2 - \ \ x_3 = 14 & L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_2 \\ 4x_1 + \boxed{-1}x_2 + 2x_3 = 5 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ 5x_1 + \quad 0x_2 + \ \ x_3 = 6 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \\ 5x_1 - \quad 4x_2 + 9x_3 = 6 & L_4 \longleftarrow L_4 \end{cases}$$

Puis nous remplaçons L_4 par $L_4 - 4L_2$, pour obtenir le système

$$(S_3)\begin{cases} 11x_1 + \quad 0x_2 - \ \ x_3 = 14 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 4x_1 + \boxed{-1}x_2 + 2x_3 = 5 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ 5x_1 + \quad 0x_2 + \ \ x_3 = 6 & L_3 \longleftarrow L_3 \\ -11x_1 + \quad 0x_2 + \ \ x_3 = -14 & L_4 \longleftarrow L_4 - 4L_2 \end{cases}$$

c-à-d

$$(S_3)\begin{cases} 11x_1 \qquad\quad - \ \ x_3 = 14 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 5x_1 \qquad\quad + \ \ x_3 = 6 \\ -11x_1 \qquad\quad + \ \ x_3 = -14. \end{cases}$$

Ce sytème est équivalent au sytème (S) initial. Il est plus simple.

Nous pouvons maintenant essayer de faire avec x_3 ce que nous avons fait avec x_2, c'est-à-dire nous ramener à un système où tous les coefficients de x_3 sont nuls à l'exception d'un seul. Nous allons choisir de garder x_3 dans la première équation L_1, et de le faire disparaitre dans les autres équations. Pour cela nous ajouterons

— à la seconde équation la première multipliée par 2

— à la troisième équation la première multipliée par 1

— à la quatrième équation la première multipliée par 1

ce qui donne le système

$$(S_4)\begin{cases} 11x_1 + 0x_2 + \boxed{-1}\,x_3 = 14 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 26x_1 - x_2 + 0x_3 = 33 & L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1 \\ 16x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 20 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 & L_4 \longleftarrow L_4 + L_1 \end{cases}$$

Remarquons que la quatrième équation disparait : elle exprime une condition vide. On voit que la troisième équation donne x_1; puis, la première donne x_3 et la seconde donne x_2.

Mais oublions ces remarques; on peut continuer notre algorithme en nous ramenons à un système où tous les coefficients de x_1 sont nuls, sauf celui de la troisième équation. Pour cela nous ajoutons

— à la première équation la troisième multipliée par -11/16

— à la deuxième équation la troisième multipliée par -26/16

pour obtenir le système

$$(S_5)\begin{cases} \qquad\qquad - \ x_3 = \frac{1}{4} \\ \qquad - \ x_2 \qquad = \frac{1}{2} \\ 16x_1 \qquad\qquad = 20 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

La première équation nous donne $x_3 = -1/4$, la deuxième donne $x_2 = -1/2$, la troisième donne $x_1 = 5/4$. La dernière équation est, on le sait, une condition vide.

Ainsi l'ensemble de solution du système de départ est

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right) \right\}.$$

Il admet une solution unique.

3.2. Présentation des calculs et du vocabulaire. — Pour simplifier l'écriture nous ferons disparaitre les inconnues, pour n'écrire que les coefficients du système. Ainsi le système (S_1) s'ecrira sous forme d'un tableau à 5 ligne et 4 colonnes :

$$\begin{array}{rrr|l} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 9 & 6 \end{array}$$

Dans les trois première colonnes nous avons écrit les coefficients des inconnues x_1, x_2 et x_3 respectivement. La quatrième est formée des seconds membres des équations. Elle est séparée des autres par un trait vertical, car elle ne joue pas le même rôle.

Pour réduire une colonne nous devons choisir dans celle-ci un élément non nul qui –multiplié par des facteurs adéquats – viendra se retrancher aux autres éléments de la colonne. On l'appelle un **pivot**. L'inconnue correspondante est appelée **inconnue principale**. Dans un système linéaire les inconnues qui ne sont principales sont appelées **inconnues libres** ou **inconnues auxiliaires**. Il est utile de pouvoir repérer les pivots à tous les stades de la réduction, c'est pourquoi nous les entourons d'un petit carré. Ainsi le système suivant

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 6 \end{cases}$$

Son tableau est donnée par

$$\begin{array}{rrr|l} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 9 & 6 \end{array}$$

Après réduction de la deuxième colonne on obtient

$$\begin{array}{rrr|r} 11 & 0 & -1 & 14 \\ 4 & \boxed{-1} & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ -11 & 0 & 1 & -14 \end{array}$$

On continu la réduction en choisissons un pivot sur chaque ligne restante (lorsque cela est possible) puis on réduit la colonne correspondante à ce pivot. On obtient alors

$$\begin{array}{rrr|r} 11 & 0 & -1 & 14 \\ 4 & \boxed{-1} & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ -11 & 0 & 1 & -14 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrr|r} 11 & 0 & \boxed{-1} & 14 \\ 26 & \boxed{-1} & 0 & 33 \\ 16 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & \boxed{-1} & 1/4 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 1/2 \\ \boxed{16} & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3.3. Des précisions sur le choix des pivots. — Considérons le système à 4 équations et 4 inconnues x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

dont le tableau de coefficients est

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

Choisissons un premier pivot, par exemple le coefficient de x_1 dans la quatrième ligne

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

Donc la réduction la première colonne donne

$$\begin{array}{rrrr|rl} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & \quad L_1 \longleftarrow L_1 - L_4 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 & \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_4 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -3 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_4 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 1 & \quad L_4 \longleftarrow L_4 \end{array}$$

Nous devons choisir un deuxième pivot, dans une des trois dernière colonnes car la première est déjà réduite. Il doit être non nul, et il ne doit pas être dans la dernière ligne, ligne où nous avons déjà choisi le premier pivot.

Retenons les critère de choix d'un nouveau pivot

— Il doit être non nul;
— Il doit se trouver dans une colonne où il n'y a pas encore de pivot;
— Il doit se trouver dans une ligne où il n'y a pas encore de pivot;
— Il ne doit pas se trouver dans la colonne du second membre.

Dans le cas présent choisissons pour pivot, le 1 qui se trouve dans la première ligne et la seconde colonne (coefficient de x_2 dans la première équation). Nous obtenons

$$\begin{array}{rrrr|rl} 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 3 & \quad L_1 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & 12 & \quad L_2 \longleftarrow L_2 + 5L_1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & 0 & -2 & \quad L_4 \longleftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

En appliquant les règles de choix de pivot que nous avons fixés ci-dessus, il ne reste plus que trois pivots possibles : dans les colonnes 3 et 4 et les lignes 2 et 3. Nous pouvons choisir le -4 (colonne 4 et ligne 3) mais avant cela nous allons simplifié la ligne 3 en la multipliant par $-1/4$,

$$\begin{array}{rrrr|rl} 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 3 & \\ 0 & 0 & -5 & 7 & 12 & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & \quad L_3 \longleftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & 0 & -2 & \end{array}$$

et nous réduisons la quatrième colonne

$$\begin{array}{cccc|cl} 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & L_1 \longleftarrow L_1 - L_3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -9 & L_2 \longleftarrow L_2 - 7L_3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & L_3 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & 0 & -2 & L_4 \end{array}$$

Ensuite nous simplifiant la ligne 2 en la multipliant par $-1/5$ et nous choisissons le seul pivot possible (colonne 3 ligne 2)

$$\begin{array}{cccc|cl} 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 9/5 & L_2 \longleftarrow -\frac{1}{5}L_2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & \\ \boxed{1} & 0 & 3 & 0 & -2 & \end{array}$$

et nous terminons par réduire la troisième colonne

$$\begin{array}{cccc|rl} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 9/5 & L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 9/5 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & L_3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -37/5 & L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}$$

Ceci est le tableau des coefficients du système réduit suivant (et qui est équivalent au système de départ)

$$\left\{ \begin{array}{lllll} & x_2 & & & = 9/5 \\ & & x_3 & & = 9/5 \\ & & & x_4 & = 3 \\ x_1 & & & & = -37/5 \end{array} \right.$$

et l'ensemble de solutions est (l'ensemble formé d'un seul vecteur)

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{37}{5}, \frac{9}{5}, \frac{9}{5}, 3 \right) \right\}$$

et qui coincide avec l'ensemble de solutions du système du départ.

3.4. Conséquences des règles de choix des pivots. — Il ne peut y avoir plus d'un pivot par colonne, donc le nombre de pivots est au plus égal au nombre des colonnes (c'est-à-dire au nombre des inconnues).

Il ne peut y avoir plus d'un pivot par ligne, donc le nombre de pivots est au plus égal au nombre de lignes (c'est-à-dire au nombre des équations).

Il peut arriver que dans le système final il y ait une ligne ou une colonne sans pivot. Si une ligne est sans pivot, elle ne contient alors que des zéros dans le tableau principal et si elle a un coefficient non nul, c'est dans la colonne des seconds membres.

4. Description de l'ensemble de solutions

Un système linéaire avec une solution unique a un ensemble de solutions avec un seul élément (un seul $n$uplet). Un système linéaire sans solutions a un ensemble de solutions vide. Dans ces cas-là, l'ensemble de solutions est facile à décrire. Les ensembles de solutions ne sont difficiles à décrire que lorsqu'ils contiennent de nombreux éléments.

***Exemple 4.1* (Système sans solutions).** — Considérons le système

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Réduisons son tableau correspondant

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & \boxed{1} & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & \boxed{1} & 1 & 4 & \\ 3 & 0 & 2 & 5 & L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ -2 & 0 & -1 & -7 & L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 0 & \boxed{1} & 0 & 8 & L_1 \longleftarrow L_1 - L_3 \\ 1 & 0 & 0 & 13 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_3 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & -4 & \\ -1 & 0 & 0 & -11 & L_4 \longleftarrow L_4 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 0 & \boxed{1} & 0 & 8 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & L_2 \longleftarrow L_2 + L_4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -15 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_4 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -11 & \end{array}$$

La deuxième ligne de ce système signifie que

$$0x + 0y + 0z = 2$$

ce qui est impossible. Le système initial n'a donc pas de solution (son ensemble de solutions est l'ensemble vide),

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

***Exemple 4.2* (Système ayant une solution inique).** — Considérons le système

$$\begin{cases} 2x + y + \ \ z = 2 \\ 5x + y + \ \ z = 1 \\ 4x + y + 2z = 2 \\ 3x + y \qquad = 1 \end{cases}$$

Réduisons son tableau correspondant

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & \\ 3 & 0 & 0 & -1 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & L_4 \longleftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & L_1 \longleftarrow L_1 - L_3 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & \\ 3 & 0 & 0 & -1 & L_4 \longleftarrow L_4 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & -1/3 & L_2 \longleftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & -1/3 & L_4 \longleftarrow \frac{1}{3}L_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & \\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1/3 & \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2/3 & L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_4 \longleftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

La dernière équation du ce système est une condition vide

$$0x + 0y + 0z = 0$$

Les inconnues x, y et z sont des inconnues principales et le système initial est équivalent à

$$\begin{cases} \quad y \qquad = 2 \\ x \qquad\quad = -1/3 \\ \qquad\quad z = 2/3 \end{cases}$$

Il y a donc une solution unique : l'ensemble de solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

Exemple 4.3 **(Système ayant une infinité de solutions)**

Considérons le système

$$\begin{cases} 2x \phantom{{}-y} + z = 3 \\ x - y - z = 1 \\ 3x - y \phantom{{}+z} = 4 \end{cases}$$

Nous allons réduire le tableau correspondant

$$\begin{array}{rrr|ll} 2 & 0 & 1 & 3 & L_1 \\ 1 & \boxed{-1} & -1 & 1 & L_2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|ll} 2 & 0 & \boxed{1} & 3 & L_1 \\ 1 & \boxed{-1} & -1 & 1 & L_2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|ll} 2 & 0 & \boxed{1} & 3 & L_1 \\ 3 & \boxed{-1} & 0 & 4 & L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

La troisième ligne est une condition vide. Nous avons deux inconnues principales : y et z. L'inconnue sans pivot x est une inconnue libre. Nous allons l'utiliser pour décrire l'ensemble de solutions. Le système réduit devient

$$\begin{cases} 2x \phantom{{}-y} + z = 3 \\ 3x - y \phantom{{}+z} = 4 \end{cases}$$

Si on pose $x = \alpha$ comme paramètre, alors on peut décrire les inconnues principales en fonction de ce paramètre. La première équation donne $z = 3 - 2\alpha$ et la deuxième équation $y = -4 + 3\alpha$. Donc l'ensemble de solutions est l'ensemble des triplets

$$\{(\alpha, 3\alpha - 4, -2\alpha + 3); \quad \alpha \in \mathbb{R}\}. \tag{3}$$

Notre système linéaire admet donc une infinité de solutions : à chaque nombre réel α, nous avons une solution. Par exemple si $\alpha = 0$ le triplet $(0, -4, 3)$ est une solution du système.

Cette présentation de l'ensemble de solutions n'est pas unique (mais l'ensemble de solutions $\mathcal{S}$ est unique). Cela dépend de la façon dont nous avons choisi les pivots. Pour illustrer cela nous allons prendre d'autres choix de pivots:

$$\begin{array}{rrr|ll} 2 & 0 & 1 & 3 & L_1 \\ 1 & \boxed{-1} & -1 & 1 & L_2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|ll} \boxed{2} & 0 & 1 & 3 & L_1 \\ 1 & \boxed{-1} & -1 & 1 & L_2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} \boxed{2} & 0 & 1 & 3 & L_1 \\ 0 & \boxed{-1} & -3/2 & -1/2 & L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Donc les inconnues x et y sont principales et z est une inconnue libre. Le système réduit devient

$$\begin{cases} 2x \quad + \quad z = 3 \\ \quad - y - 3/2z = -1/2 \end{cases}$$

Donc si on pose $z = \beta$, alors $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\beta$ et $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\beta$. L'ensemble de solution s'écrit

$$\left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\beta, \beta \right) ; \quad \beta \in \mathbb{R} \right\}. \tag{4}$$

Par exemple si $\beta = 0$ le triplet $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ est une solution du système. Si $\beta = 3$, on retrouve le triplet solution $(0, -4, 3)$ ci-dessus. On peut aussi remarquer que (3) et (4) sont deux présentations différentes d'un même ensemble.

Exemple 4.4 **(Système ayant une infinité de solutions)**
Considérons le système

$$\begin{cases} x + y + \ z - \ w = 1 \\ \quad y - \ z + \ w = -1 \\ 3x \quad + 6z - 6w = 6 \\ \quad - y + \ z - \ w = 1 \end{cases}$$

et réduisons son tableau pour trouver l'ensemble de solutions. Le meilleur choix du premier pivot est le 1 qui se trouve dans la ligne 1 – colonne 1, car la première colonne contient déjà deux zéros et il suffit d'annuler le coefficient 3 de x dans la troisième ligne pour la réduire.

$$\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 3 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl} \boxed{1} & 0 & 2 & -2 & 2 & \quad L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \quad L_4 \longleftarrow L_1 + L_2 \end{array}$$

Nous ne pouvons plus choisir d'autres pivots. Les deux dernières lignes sont des conditions vides. Les inconnues x et y sont principales et les inconnues z et w sont libres. Nous pouvons donc exprimer x et y en fonction de z et w pour décrire l'ensemble de solutions.

Le système réduit est

$$\begin{cases} x \quad + 2z - 2w = 2 \\ \quad y - \ z + \ w = -1 \end{cases}$$

La première équation donne $x = 2 - 2z + 2w$ et la deuxième donne $y = -1 + z - w$. L'ensemble de solutions est donc paramétré par z et w sous la forme

$$\mathcal{S} = \{(2 - 2z + 2w, 1 + z - w, z, w);\quad z, w \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

Le paramétrage de l'ensemble de solutions montre que les systèmes linéaires à une ou plusieurs variables libre ont une infinité de solutions. Par exemple dans l'exemple précédent nous avons une infinité de solutions chacune est associée à des valeurs numériques données à z et w.

Il existe une notation *matricielle* qui rend plus facile la lecture de l'ensemble de solutions des systèmes linéaire. Nous allons écrire l'ensemble de solutions (5) en regroupant les terme constants ensemble, les coefficients de z ensemble et les coefficients de w ensemble. Nous les présentons sous forme verticale dite aussi **matrice à une colonne**. Cette notation sera justifiée les chapitres suivants.

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; z, w \in \mathbb{R}\right\}$$

Par exemple la première ligne signifie $x = 2 - 2z + 2w$ et la deuxième ligne $y = -1 + z - w$. (La prochaine section donne une interprétation géométrique qui nous aidera à imaginer les ensembles de solutions.)

Définition 4.5. — *Un vecteur colonne, souvent appelé simplement vecteur, est une matrice à une colonne,*

$$\begin{pmatrix}a_{1,1}\\a_{2,1}\\\vdots\\a_{n,1}\end{pmatrix}$$

Une matrice avec une seule ligne est un vecteur de ligne,

$$\begin{pmatrix}a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,n}\end{pmatrix}$$

Les entrées d'un vecteur sont parfois appelées composantes. Un vecteur colonne ou ligne dont toutes les composantes sont nulle est appelé **vecteur nul***.*

Nous utilisons pour les vecteurs des lettres minuscules romaines ou grecques surlignées d'une flèche. Nous ôterons la flèche dans les prochains chapitres. Par exemple,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$$

est un vecteur colonne dont la troisième composante est 5.

Un vecteur nul sera noté $\overrightarrow{0}$. Il existe des vecteurs nuls différents – le vecteur nul à une composante, le vecteur nul à deux composantes, le vecteur nul à trois composantes, etc. – mais néanmoins nous dirons souvent "le" vecteur nul, en espérant que la taille sera claire d'après le contexte.

Définition 4.6. — *L'équation linéaire* $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ *d'inconnues* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *est satisfaite pour le vecteur*

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

si $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$. *Un vecteur solution d'un système d'équations linéaires est un vecteur qui satisfait toutes les équations de ce système.*

Pour décrire les ensembles de solutions des systèmes linéaires nous sommes amené à ajouter les vecteurs et à les multiplier par des nombres réels. Avant de donner des exemples, nous devons d'abord définir ces opérations.

Définition 4.7. — *Le vecteur somme des deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *est le vecteur des sommes*

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

La multiplication scalaire du vecteur $\vec{v}$ *par un numbre réel* α *est le vecteur des multiples*

$$\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$$

Nous écrivons la multiplication scalaire comme $\alpha \cdot \vec{v}$ et nous omettrons parfois le ”·” entre α et $\vec{v}$ pour écrire $\alpha\vec{v}$.

Exemple 4.8. — Ces opérations sont évidentes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 2-1 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Observez que les définitions de l'addition et de la multiplication scalaire concordent là où elles se superposent; par exemple, $\vec{v} + \vec{v} = 2 \cdot \vec{v}$.

Avec ces définitions, nous sommes prêts à utiliser la notation ”matricielle” et ”vectorielle” pour résoudre les systèmes linéaires et exprimer l'ensemble de solutions.

Exemple 4.9. — Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y \phantom{{}-z} - w \phantom{{}+u} = 4 \\ \phantom{2x+{}} y \phantom{{}-z} + w + u = 4 \\ x \phantom{{}+y} - z + 2w \phantom{{}+u} = 0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 0 & 1 & 2 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_3$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 0 & \boxed{1} & 2 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$$

La dernière colonne est déjà réduite

$$\begin{array}{rrrrr|l} 0 & \boxed{1} & 2 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Les inconnues principales sont donc x, y et u. Nous les exprimons en fonction des variables (sans pivot) libres z et w. Donc l'ensemble des solutions est

$$\{(z - 2w, 4 - 2z + 5w, z, w, 2z - 6w); \quad z, w \in \mathbb{R}\}$$

qui s'écrit en notation vectorielle

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

Par exemple si, $z = w = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une solution particulière du système.

Exemple 4.10. — Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ 5x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

On a

$$\begin{array}{rrr|l} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} \boxed{1} & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2 \\ \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

d'où l'ensemble de solutions

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; z \in \mathbb{R} \right\}$$

Comme dans l'exemple précédent, le vecteur qui n'est pas associé à un paramètre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une solution particulière du système.

Remarque 4.11. — Pouvons-nous toujours décrire l'ensemble de solutions des systèmes linéaires comme somme d'une solution particulière et d'une combinaisons de vecteurs sans restriction?

Nous avons remarqué que les ensembles de solutions décrits de cette façon comptent un nombre infini d'éléments, alors répondre à cette question nous permettrait de connaître la taille des ensembles de solutions. La section suivante montre que la réponse est "oui". La section 6 de ce chapitre utilise ensuite cette réponse pour décrire la géométrie des ensembles de solutions.

5. Générale = Particulière + Homogène

Dans la section précédente, les descriptions des solutions correspondent toutes à un schéma général. Ils ont un vecteur qui est une solution particulière du système ajoutée à une *combinaison sans restriction* d'autres vecteurs. Par exemple dans l'exemple 4.9 nous avons trouvé

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ u \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}}_{\text{combinaison sans restriction}} \;;\; z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

La combinaison sans restriction signifie que z et w peuvent être des nombres réels quelconques - il n'y a pas de condition comme "tel que $2z - w = 0$" pour nous restreindre à quelles paires z, w.

Théorème 5.1. — *L'ensemble de solutions d'un système linéaire est de la forme*

$$\{\vec{p} + c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k;\ \ c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\}$$

où $\vec{p}$ est une solution particulière et le nombre de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_k$ est égale au nombre de variables libres dans la réduction de Gauss du système.

La description de la solution comporte deux parties, la solution particulière $\vec{p}$ et la combinaison linéaire sans condition des $\vec{v}_i$. Pour montrer le théorème nous avons besoin des deux lemmes ci-dessous.

Nous nous concentrerons d'abord sur la combinaison sans restriction. Pour cela, nous considérons les systèmes qui ont le vecteur nul comme une solution particulière pour nous ramener de $\vec{p} + c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k$ à $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k$.

Définition 5.2. — *Une équation linéaire est dite* **homogène** *si son second membre est nul. Autrement dit, elle s'ecrit sous la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$.*

Un **système linéaire homogène** *est un système linéaire où toutes les équations sont homogènes.*

Exemple 5.3. — A un système linéaire, comme par exemple

$$\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 2x - \ \ y = 1 \end{cases}$$

on peut associer un système homogène (en plaçant des zéros au second membre)

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2x - \ \ y = 0 \end{cases}$$

Comparons la réduction du système initial

$$\begin{array}{rr|l} 3 & 4 & 5 \\ 2 & \boxed{-1} & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr|l} 11 & 0 & 9 \\ 2 & \boxed{-1} & 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 9/11 \\ 2 & \boxed{-1} & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr|r} \boxed{1} & 0 & 9/11 \\ 0 & \boxed{-1} & -7/11 \end{array}$$

avec la réduction du système homogène associé

$$\begin{array}{rr|l} 3 & 4 & 0 \\ 2 & \boxed{-1} & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr|l} 11 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-1} & 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rr|l} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-1} & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr|l} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array}$$

Évidemment, les deux réductions vont dans le même sens. Nous pouvons étudier comment réduire un système linéaire en étudiant plutôt comment réduire le système homogène associé.

L'étude du système homogène associé présente un grand avantage par rapport à l'étude du système original. Les systèmes non homogènes peuvent être incohérents. Mais un système homogène doit être cohérent puisqu'il existe toujours au moins une solution, le vecteur nul.

Exemple 5.4. — Quelques systèmes linéaires homogènes n'ont que le vecteur nul comme solution. Par exemple, considérons le système

$$\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ 6x+4y =0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

On a

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{L_2-2L_1} \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{L_1-2L_3,-\frac{1}{2}L_2} \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{L_1+L_2,L_3-L_2} \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Donc $x=0$, $y=0$ et $z=0$ et l'ensemble de solutions est formé du seul vecteur nul

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple 5.5. — D'autres systèmes linéaires homogènes peuvent avoir plusieurs solutions. C'est l'exemple de l'équation chimique (1),

$$\begin{cases} 7x -7z =0 \\ 8x+y-5z-2w=0 \\ y-3z =0 \\ 3y-6z-w=0 \end{cases}$$

On a

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 7 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} 7 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \longleftarrow L_2-L_3 \\ \\ L_4 \longleftarrow L_4-3L_3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 7 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} 7 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \longleftarrow L_2-2L_4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 7 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow \frac{1}{7}L_2 \\ L_2 \longleftarrow \frac{1}{8}L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{-1} & 0 & \end{array}$$

Les inconnues x, y et w sont principales, et z est une inconnue libre. L'ensemble de solutions

$$\left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad z \in \mathbb{R} \right\}$$

a donc une infinité de vecteurs en plus du vecteur nul (si $z = 0$).

Lemme 5.6. — *Pour tout système linéaire homogène, il existe des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ tels que l'ensemble de solutions est*

$$\{c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k; \;\; c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}$$

où k est le nombre de variables libres du système réduit.

Nous allons faire une démonstration par récurrence.

Démonstration. — Considérons un système homogène

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

S'il le système réduit contient une condition vide "$0 = 0$", on peut l'ignorer (s'il ne contient que des équations du type "$0 = 0$" alors le lemme est trivial, puisqu'aucune variable n'est libre).

Supposons que qu'il existe k variables libres. On peut supposer, sans perdre de généralité, que les $n - k$ premières variables sont principales et les k dernières sont libres. Le système réduit s'écrit alors sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & & & \cdots & & + & \alpha_1 x_{n-k-1} & + & \cdots & + & \alpha_k x_n & = & 0 \\ & & x_2 & + & \cdots & & + & \beta_1 x_{n-k-1} & + & \cdots & + & \beta_k x_n & = & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & x_{n-k-1} & + & \zeta_1 x_{n-k-1} & + & \cdots & + & \zeta_k x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

On peut donc exprimer les variables principales $x_1, x_2, \dots, x_{n-k}$ en fonction des variables libres $x_{n-k-1}, \dots x_n$ et toute solution s'écrit sous la forme $c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k$ où les vecteurs $\vec{v}_j$ sont donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\zeta_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_k \\ \vdots \\ -\zeta_k \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots, \text{etc.}$$

□

Pour terminer la preuve du théorème 5.1, le prochain lemme considère que la solution particulière fait partie de la description de l'ensemble de solutions.

Lemme 5.7. — *Pour tout système linéaire et toute solution particulière $\vec{p}$ de ce système, l'ensemble de solutions est égal à*

$$\{\vec{p} + \vec{v};\ \ \vec{v} \textit{ solution du système homogène associé}\}.$$

Démonstration. — En effet, si $\vec{s}$ est une solution du système linéaire, alors $\vec{s} - \vec{p}$ est une solution du système homogène associé, puisque pour chaque équation nous avons

$$\begin{aligned} &a_{j,1}(s_1 - p_1) + \cdots a_{j,n}(s_n - p_n) \\ &= (a_{j,1}s_1 + \cdots a_{j,n}s_n) - (a_{j,1}p_1 + \cdots a_{j,n}p_n) = b_j - b_j = 0 \end{aligned}$$

et $\vec{s}$ peut s'écrire sous la forme demandée $\vec{s} = \vec{p} + (\vec{s} - \vec{p})$.

Inversement, Si $\vec{p}$ est une solution particulière et $\vec{v}$ une solution homogène, alors $\vec{p} + \vec{v}$ est une solution du système linéaire puisque pour chaque équation nous avons

$$\begin{aligned} &a_{j,1}(p_1 + v_1) + \cdots a_{j,n}(p_n + v_n) \\ &= (a_{j,1}p_1 + \cdots a_{j,n}p_n) + (a_{j,1}v_1 + \cdots a_{j,n}v_n) = b_j + 0 = b_j \end{aligned}$$

□

Les deux lemmes ensemble établissent le théorème 5.1. Nous allons l'appeler "Théorème : Générale = Particulière + Homogène".

Exemple 5.8. — Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y - \ \ z = 1 \\ 2x + 4y \qquad = 2 \\ \qquad y - 3z = 0 \end{cases}$$

On a

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \end{array} \begin{array}{r} L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \longleftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{r} L_1 \longleftarrow L_1 - 5L_2 \\ \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2 \end{array}$$

Donc l'ensemble de solutions est le singleton

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ce vecteur est clairement une solution particulière du système. Le système homogène associé se réduit (en suivant les même opérations

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{array}$$

et l'ensemble de solutions du système homogène est le singleton

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc comme nous l'avons déjà vu, la solution générale est la somme de la solution particulière et de la solution homogène.

Exemple 5.9. — L'exemple suivant explique que le cas où la solution générale est vide correspond également au modèle Générale = Particulière + Homogène.

$$\begin{cases} x \phantom{{}-y} + z + w = -1 \\ 2x - y \phantom{{}+z} + w = 3 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \end{cases}$$

On a

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \begin{array}{r} \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Le système initial n'a pas de solutions parce que les deux dernières équations sont contradictoires. Mais le système homogène associé a une solution, comme tous les systèmes homogènes.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Le système homogène a en fait une infinité de solutions

$$\left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

Cependant, parce que le système initial n'a pas de solution particulière, son ensemble de solutions générales est vide - il n'y a pas de vecteurs de la forme $\vec{p} + \vec{v}$ car il n'y a pas de $\vec{p}$.

Corollaire 5.10. — *L'ensemble de solutions d'un système linéaire est soit vide, soit contient un unique vecteur, soit contient une infinité de vecteurs.*

Démonstration. — Nous avons vu des exemples de ces trois situations et il suffit de prouver que il n'y a pas d'autres possibilités.

D'abord, on peut remarquer que si un système homogène admet comme solution un vecteur non nul $\vec{v}$, alors il admettrait une infinité de solutions, puisque toute multiplication scalaire de $\vec{v}$ par un nombre réel est encore solution.

Maintenant on applique le théorème 5.7 pour conclure que l'ensemble de solutions $\{\vec{p} + \vec{v}; \ \vec{v}$ solution du système homogène$\}$ est ou bien vide (s'il n'y a pas de solution particulière), ou bien contient un unique vecteur (s'il y a une solution particulière et que le système homogène n'a pas de solution non nulle) ou bien une infinité de solution (s'il y a une solution particulière et que le système homogène a une solution non nulle).

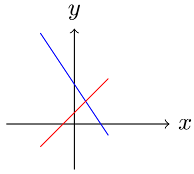
□

6. Interprétation géométrique

Nous avons montré dans la section précédente qu'un système linéaire peut avoir comme ensemble de solutions ou l'ensemble vide, ou un seul vecteur ou une infinité de vecteurs.

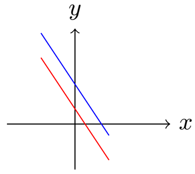
Ceci est facile à voir géométriquement dans le cas de systèmes avec deux équations et deux inconnues. Dessinez chaque équation à deux inconnues comme une droite dans le plan, puis les deux droites pourraient avoir une intersection unique, être parallèles ou confondues.

Unique solution



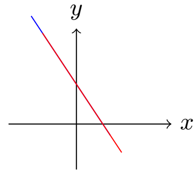
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - \ \ y = -1 \end{cases}$$

Pas de solution



$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

Infinité de solutions



$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = 14 \end{cases}$$

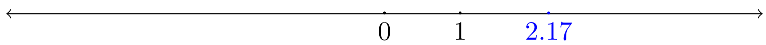
Ces figures ne sont pas une manière de prouver les résultats de la section précédente, parce que ces résultats s'appliquent aux systèmes linéaires avec un nombre quelconque de variables. Mais ils fournissent un aperçu visuel, une autre façon de voir ces résultats.

Cette section développe ce dont nous avons besoin pour exprimer nos résultats géométriquement. En particulier, bien que le cas bidimensionnel soit familier, pour une généralisation à des systèmes comportant plus de deux inconnues, nous aurons besoin d'une géométrie en dimension supérieure.

6.1. Espaces vectoriels. — "Géométrie en dimension supérieure" sonne exotique. C'est exotique, intéressant et révélateur. Mais ce n'est pas inaccessible.

Nous commençons par définir l'espace unidimensionnel comme étant $\mathbb{R}$. Pour voir si la définition est raisonnable, imaginez un espace unidimensionnel

et choisissez un point pour 0 et un autre pour 1.

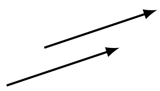


Maintenant, avec une longueur, une direction et un sens, nous avons une correspondance avec $\mathbb{R}$. Par exemple, pour trouver le point correspondant à $+2,17$, commencez à 0 et dirigez-vous dans la direction de 1, et allez $2,17$ fois plus loin.

L'idée de base ici, combinant la longueur, la direction et le sens, est la clé de l'extension à des dimensions plus élevées.

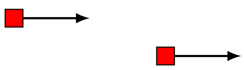
Un objet dans $\mathbb{R}$, ou dans n'importe quel $\mathbb{R}^n$, composé d'une longueur, d'une direction et d'un sens est un vecteur (nous utilisons le même mot que dans la section précédente car nous allons montrer ci-dessous comment décrire un tel objet avec un vecteur colonne). Nous pouvons dessiner un vecteur comme ayant une certaine longueur et pointant dans une certaine direction.

Il y a une subtilité dans la définition d'un vecteur comme étant constitué d'une longueur et d'une direction - les deux vecteurs



sont égaux, même s'ils commencent à des endroits différents. Ils sont égaux parce qu'ils ont des longueurs égales et des directions égales. Encore une fois : ces vecteurs ne se ressemblent pas, ils sont égaux.

Comment des choses qui se trouvent dans des endroits différents peuvent-elles être égales ? Pensez un vecteur comme représentant un déplacement (le mot "vecteur", introduit en mathématique par Grassmann, signifie en latin "transporteur" ou "conducteur"). Ces deux carrés subissent des déplacements égaux malgré le fait qu'ils commencent à des endroits différents.



Plus généralement, deux vecteurs dans le plan sont égaux si et seulement s'ils ont le même décalage dans les premières composantes et le même décalage dans les secondes composantes : le vecteur allant de (a_1, a_2) à (b_1, b_2) est égal au vecteur allant de (c_1, c_2) à (d_1, d_2) si et seulement si $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ et $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$.

Dire "le vecteur allant de (a_1, a_2) à (b_1, b_2)" serait peu maniable. Nous décrivons plutôt ce vecteur comme

$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi le vecteur de déplacement de $+1$ horizontalement et $+2$ verticalement est représenté par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous dessinons souvent un vecteur (flèche) comme commençant à l'origine, et nous disons alors qu'il est dans la position canonique (ou position naturelle ou position standard). Si

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

est dans sa position canonique, alors le vecteur part de l'origine au point (v_1, v_2).

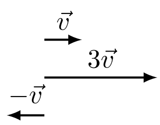
Ainsi, nous appellerons ces deux ensembles ensembles $\mathbb{R}^2$

$$\{(x_1, x_2);\ \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \quad \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

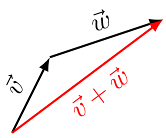
Dans la section précédente, nous avons défini des vecteurs et des opérations vectorielles avec une motivation algébrique ;

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

nous pouvons maintenant comprendre ces opérations géométriquement. Par exemple, si $\vec{v}$ représente un déplacement, alors $3 \cdot \vec{v} = 3\vec{v}$ représente un déplacement dans la même direction, même sens mais trois fois plus loin et $-1 \cdot \vec{v} = -\vec{v}$ représente un déplacement de la même longueur que $\vec{v}$ mais dans la direction et dans le sens opposée.

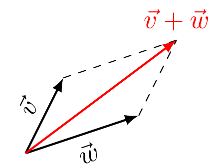


Et si, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ représentent des déplacements, $\vec{v} + \vec{w}$ représente la combinaison des deux déplacements.



La longue flèche est le déplacement combiné dans ce sens : imaginez que vous marchez sur le pont d'un navire. Supposons qu'en une minute le mouvement du navire lui donne un déplacement par rapport à la mer de $\vec{v}$, et en la même minute votre marche vous donne un déplacement par rapport au pont du navire de $\vec{w}$. Alors $\vec{v}+\vec{w}$ est votre déplacement par rapport à la mer.

Une autre façon de comprendre la somme vectorielle est d'utiliser la règle des parallélogrammes. Dessinez le parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Puis la somme $\vec{v}+\vec{w}$ s'étend le long de la diagonale jusqu'au coin le plus éloigné.



Les dessins ci-dessus montrent comment les vecteurs et les opérations vectorielles se comportent dans $\mathbb{R}^2$. On peut étendre ceci à $\mathbb{R}^3$, ou même à des espaces plus élevés où nous pouvons pas avoir de représentations, avec la généralisation évidente : le vecteur allant de $(a_1, \cdots, a_n)$ à $(b_1, \cdots, b_n)$ est représenté en colonne par

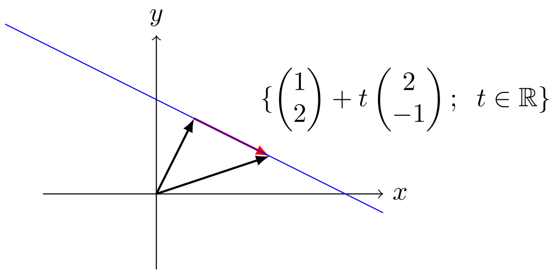
$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}$$

Les vecteurs sont égaux s'ils ont la même représentation. On ne fait pas trop attention à distinguer entre un point et le vecteur dont la représentation canonique se termine à ce point.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} ; \; v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Et, nous faisons l'addition et la multiplication scalaire par composante.

Après avoir considéré les points, nous passons maintenant aux droites. Dans $\mathbb{R}^2$, la droite passant par $(1,2)$ et $(3,1)$ est composée des (extrémités des) vecteurs de l'ensemble $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \; t \in \mathbb{R}\}$

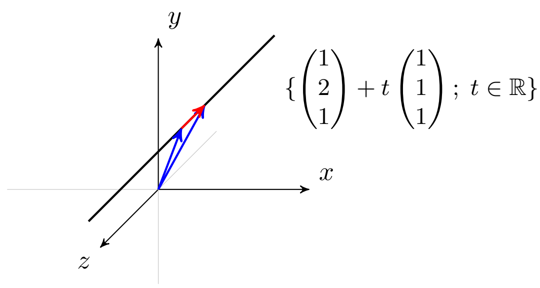


Dans cette description, le vecteur associé au paramètre t

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est celui montré dans l'image (en rouge) comme ayant tout son corps sur la droite – c'est un vecteur directeur de la droite . Notez que les points sur la droite à gauche de $x = 1$ sont décrits en utilisant des valeurs négatives de t.

Dans $\mathbb{R}^3$, la droite passant par $(1, 2, 1)$ et $(2, 3, 2)$ est l'ensemble des (extrémités de) vecteurs de $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; t \in \mathbb{R}\}$,



et les droites dans des espaces encore plus grands fonctionnent de la même manière.

Dans $\mathbb{R}^3$, une droite utilise un paramètre pour qu'une particule sur cette droite puisse se déplacer librement dans une dimension. Un plan comporte deux paramètres. Par exemple, le plan passant par les points $(1, 0, 5)$, $(2, 1, -3)$, et $(-2, 4, 0.5)$ est constitué des (extrémités des) vecteurs de l'ensemble

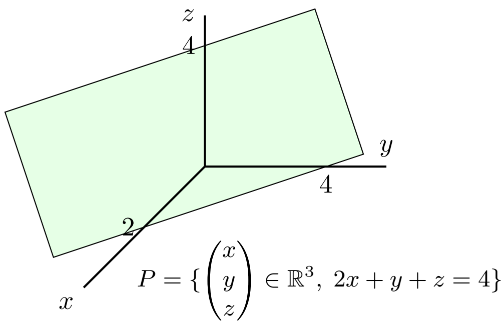
$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4.5 \end{pmatrix} \;;\; t, s \in \mathbb{R}\}$$

Les vecteurs colonnes associés aux paramètres proviennent des calculs

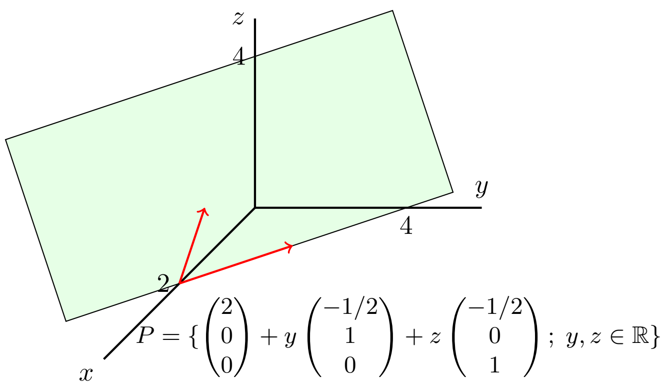
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Comme pour la droite, notez que nous décrivons certains points dans ce plan avec des t négatifs ou des s négatifs ou les deux.

Les manuels d'algèbre ou géométrie décrivent souvent un plan en utilisant une seule équation linéaire



Pour traduire ceci à la description vectorielle, considérez l'équation comme un système linéaire à une équation et paramétrez : $x = 2 - y/2 - z/2$.



Les vecteurs associés à y et z sont représentés en rouge, décalés de l'origine de 2 unités le long de l'axe des x, de sorte que leur corps entier se trouve dans le plan. Ainsi, la somme vectorielle des deux, a tout son corps dans le plan avec le reste du parallélogramme.

D'une façon générale, un ensemble de la forme $\{\vec{p} + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_k\vec{v}_k;\ \ t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R}\}$ où $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ et $k \leq n$ est *une surface linéaire de dimension* k. Par exemple, dans $\mathbb{R}^4$,

$$\{ \begin{pmatrix} 2 \\ \pi \\ 3 \\ -0.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \ t \in \mathbb{R}\}$$

est une droite,

$$\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \ s, t \in \mathbb{R}\}$$

est un plan, et

$$\{\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\0.5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\;;\;\; r,s,t\in\mathbb{R}\}$$

est une surface linéaire de dimension 3.

Encore une fois, l'intuition est qu'une ligne permet le mouvement dans une direction, un plan permet le mouvement dans des combinaisons de deux directions, etc. Lorsque la dimension de la surface linéaire est inférieure d'une unité à la dimension de l'espace, c'est-à-dire, lorsque dans $\mathbb{R}^n$ nous avons une surface linéaire de dimension$(n-1)$, la surface est appelée un *hyperplan*.

Une description d'une surface linéaire peut être trompeuse sur la dimension. Par exemple,

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\0\\-2\end{pmatrix}\;;\;\; t,s\in\mathbb{R}\}$$

est un plan dégénéré parce qu'il s'agit en fait d'une droite, puisque les vecteurs sont multiples les uns des autres et on peut en omettre un,

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\;;\;\; r\in\mathbb{R}\}$$

Nous verrons dans le chapitre suivant quelles relations entre les vecteurs provoquent la dégénérescence de la surface linéaire qu'ils génèrent.

Nous pouvons maintenant reformuler en termes géométriques les conclusions que nous avons tirées précédemment.

Tout d'abord, l'ensemble de solutions d'un système linéaire avec n inconnues est une surface linéaire en $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, il s'agit d'une surface linéaire à k dimensions, où k est le nombre de variables libres d'une réduction de Gauss du système. Par exemple, dans le cas d'une équation unique, l'ensemble de solutions est un hyperplan à $n-1$ dimension dans $\mathbb{R}^n$, où $n>1$. Deuxièmement, l'ensemble de solutions d'un système linéaire homogène est une surface linéaire **passant par l'origine**. Enfin, on peut considérer l'ensemble de solutions générales de tout système linéaire comme étant l'ensemble de solutions de son système homogène associé décalé de l'origine par un vecteur, à savoir par une solution particulière.

Compétences visées.

Savoir résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss, déterminer son ensemble de solutions et faire une interprétation géométrique de cet ensemble.

---

version 1, January 14, 2022

- *Url :* `http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Alg-Lin-S2`