Architectures d'Ordinateurs Quantiques — Devoirs
PHQ 598 — Devoir #2
Date de remise: 1 octobre 2024 — Automne 2024
À remettre le: 15 octobre 2024

Dans ce devoir, on s'intéresse à résoudre un problème d'optimisation par calcul adiabatique. La SEPAQ veut réintroduire des lynx roux dans ses parcs. Seulement, ces lynx sont des animaux territoriaux qui n'aiment pas la compagnie. Chaque lynx doit donc avoir un territoire suffisamment grand.

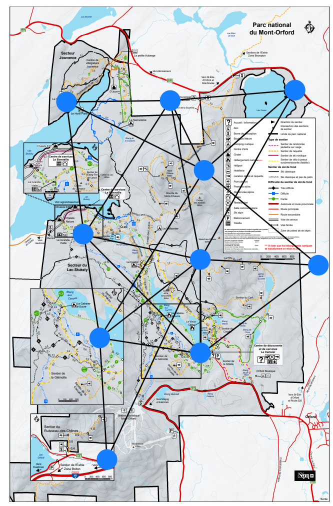

Figure 1: (a) Lynx dans la neige [1]. (b) Graphe des habitats possibles (bleu) avec les corridors en noir [2-3].

Plus précisément, vous avez un ensemble V d'endroits potentiels où des lynx pourraient habiter. Vous avez aussi un ensemble E de corridors entre ces habitats, où les lynx peuvent circuler. Vous devez trouver le nombre maximal de lynx pouvant être réintroduis, avec la contrainte que deux lynx ne peuvent pas habiter des habitats reliés par un corridor.

En termes mathématiques, on veut trouver dans un graph $G = (V, E) = (\text{habitats}, \text{corridors})$ l'ensemble $\{n_j\}$, avec $n_j \in \{0, 1\} = \{\text{pas de lynx}, \text{lynx}\}$ respectant les deux conditions suivantes:

$$\text{EIM} = \max_{\{n_j\}} \sum_{j=1}^{N} n_j, \tag{1}$$

$$n_j + n_k \leq 1 \;\forall\; (j, k) \in E. \tag{2}$$

Ce problème se nomme Ensemble Indépendant Maximal (EIM).

Au lieu d'étudier immédiatement le cas des lynx qui nous intéresse, on commence par un cas plus simple représenté à la fig. 2. Pour ce graphe simple, la solution à l'EIM est unique et donnée par $\{0, 1\}$. On commence par trouver l'Hamiltonien dont l'état fondamental est cette

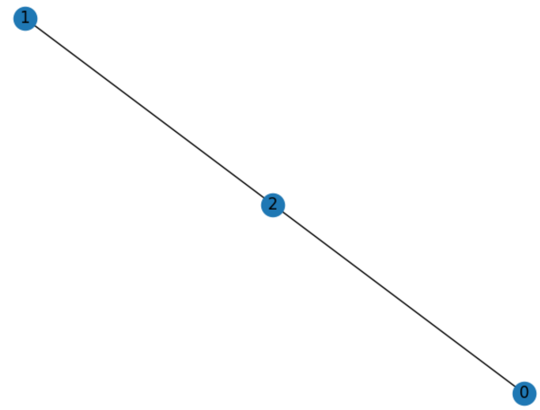

Figure 2: Graphe simple à 3 noeuds étiquettés par des entiers, $V = \{0, 1, 2\}$. Ces noeuds sont reliés selon $E = \{(1, 2), (2, 0)\}$

solution. Comme on veut satisfaire les deux conditions ci-haut, on divise notre Hamiltonien en deux parties.

1. Pour la première condition ci-haut, on cherche à maximiser le nombre de qubits dans l'état 1 (Ensemble Indépendant Maximal). Pour quel Hamiltonien local $\hat{H}_1$ obtient-on un état fondamental respectant cette condition ? (On ignore ici la deuxième condition).

2. Pour la seconde condition ci-haut, on cherche à empêcher les cas où deux qubits adjacents sont dans l'état 1. Deux qubits sont considérés adjacents si leurs indices font partie de l'ensemble des liens E. Pour quel Hamiltonien $\hat{H}_2$ obtient-on un état fondamental respectant cette condition ? (On ignore ici la première condition).

3. Pour trouver la solution, on prend un Hamiltonien où les deux parties sont additionnées, $\hat{H}_p = a_1\hat{H}_1 + a_2\hat{H}_2$. Montrez que l'état fondamental ne dépend que du ratio a_1/a_2.

4. Quel ratio d'énergie devrait-on prendre entre ces deux termes pour que l'état fondamental soit la solution de l'EIM ? Plus précisément, quel ratio a_1/a_2 devrait-on choisir ?

5. Écrivez, pour un graph général $G = (V, E)$, l'Hamiltonien dont l'état fondamental est la solution du MIS.

Pour la prochaine partie, on s'intéresse à résoudre notre problème d'EIM pour les lynx sur un ordinateur quantique (simulé) basé sur les atomes neutres, tels que ceux construits par la compagnie Pasqal.

6. Les ordinateurs quantiques construits par Pascal peuvent réaliser un Hamiltonien (dans le référentiel tournant à la fréquence de la pompe)

$$\hat{H}/\hbar = \sum_j \left[\Omega(t) X_j - \delta(t)\hat{n}_j + \sum_{k<j} \frac{C}{r_{kj}^6} \hat{n}_j \hat{n}_k \right]$$

Sachant que le dernier terme est fixé par la position des atomes au début du calcul, comment devrait-on choisir $\Omega(t)$ et $\delta(t)$ afin de trouver la solution de l'EIM par un algorithme adiabatique ? *Note: il n'est pas évident de choisir les positions des atomes afin d'encoder les informations d'un graphe voulu. Ici vous pouvez prendre les positions déjà calculées dans le code.*

7. Pour le graph G donné dans le code accompagnant cet énoncé, trouvez l'EIM par un algorithme adiabatique.

8. Quel est le nombre maximal de lynx qu'on pourrait réintroduire ? Donnez en ensemble de positions respectant les conditions du problème du EIM.

Pour ce devoir, vous devrez fournir:

- Les réponses analytiques aux questions 1-6
- La réponse à la question 8
- Le code demandé à la question 7 sous la forme d'un jupyter notebook ou d'un fichier python. Ce notebook devrait contenir
  - Un graphique de la probabilité de trouver une réponse au moins aussi bonne que l'algorithme heuristique classique en fonction du temps final T de votre rampe adiabatique.

References

[1] Image de Lynx: National Geographic.

[2] Carte du mont orford: SEPAQ

[3] Données issue de mon chapeau

[4] Merci à Victor Drouin-Touchette de chez Pasqal pour m'avoir suggéré son projet sur la résolution d'EIM: Code Pulser