Théorie du Moment Cinétique

I Introduction

En mécanique classique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

$\vec{r}$ est le vecteur position

$\vec{p}$ est le vecteur impulsion

En mécanique quantique $\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P}$

$\vec{R}$ est l'opérateur vectorielle position

$\vec{P}$ est l'opérateur vectorielle impulsion

$\vec{L}$ est un opérateur vectorielle qui a 3 composantes

L_x, L_y et L_z.

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} L_x &= YP_z - ZP_y \\ L_y &= ZP_x - XP_z \\ L_z &= XP_y - YP_x \end{aligned}$$

X, Y, Z, P_x, P_y et P_z sont des opérateurs hermitiques

d'où, L_x, L_y et L_z sont aussi hermitiques

I-1 Relations de Commutation

$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$

$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$

$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$

Ces relations peuvent etre obtenues à partir des relations de Commutation des operateurs position et impulsion:

$$[X, P_x] = [Y, P_y] = [Z, P_z] = i\hbar$$

Remarque:

- le $\hbar$ dans les commutateurs est necessaire pour l'homogeneité
- le "i" est necessaire car la regle qui precède les Commutateurs des opérateurs hermitiques est anti-hermitique: $(\Omega^+ = -\Omega)$

$\vec{L}$ est appelé moment cinétique orbitale, il est l'analogue quantique d'un mouvement classique d'une particule autour d'un Centre fixe.

On désigne par $\vec{S}$ le moment cinétique de spin: appelé aussi moment cinétique intrinsèque. Cette grandeur n'a pas d'équivalent classique.

Les composantes de $\vec{S}$ satisfont les mêmes relations de commutation que celles de $\vec{L}$.

$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$; $[S_y, S_z] = i\hbar S_x$; $[S_z, S_x] = i\hbar S_y$.

I-2 Généralisation.

Pour la présentation du théorie du moment cinétique en M.Q on introduit un moment cinétique abstrait qu'on désigne par l'opérateur vectorièl $\vec{J}$ et dont les trois composantes J_x, J_y et J_z vérifient les relations de commutation à savoir

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x$$

$$[J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

Ces relations de commutations peuvent être réduites à la relation : $\vec{J} \wedge \vec{J} = i\hbar \vec{J}$

Autres relations spécifiques aux composantes des opérateurs vectoriels : Moments.

En utilisant la relation de commutation :

$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, calculons les commutateurs $[J_i, J^2]$ où $J_i = J_x, J_y$ et/ou J_z

$$[J_x, J^2] = [J_x, J_x^2] + [J_x, J_y^2] + [J_x, J_z^2]$$

$$[J_x, J_x^2] = 0$$

$$[J_x, J_y^2] = J_y[J_x, J_y] + [J_x, J_y]J_y$$

$$= i\hbar J_y J_z + i\hbar J_z J_y$$

$$[J_x, J_z^2] = J_z[J_x, J_z] + [J_x, J_z]J_z$$

$$= -i\hbar J_z J_y - i\hbar J_y J_z$$

d'où $[J_x, J^2] = i\hbar(J_y J_z + J_z J_y - J_z J_y - J_y J_z) = 0$

de même pour les autres composantes

$$[J_y, J^2] = 0 \quad \text{et} \quad [J_z, J^2] = 0$$

Chaque composante du moment cinétique commute avec la norme.

Remarque : On peut construire une base de vecteurs propres communs à J^2 et à l'une des composante de l'opérateur $\vec{J}$.

II Théorie générale du moment cinétique

II-1 : Les opérateurs J_+ et J_-

Il est commode d'introduire les deux combinaisons remarquables : $J_+ = J_x + iJ_y$ et $J_- = J_x - iJ_y$

J_+ et J_- sont des adjoints l'un de l'autre :

d'où $J_+^+ = J_-$ et $J_-^+ = J_+$

Leur produit est hermitique :

$$(AB)^+ = B^+A^+$$

$$(J_+J_-)^+ = J_-^+ J_+^+ = J_+ J_-$$

$$(J_-J_+)^+ = J_+^+ J_-^+ = J_- J_+$$

Les relations de commutation impliquant les opérateurs J_+ et J_-

- $[J_+, J^2] = [J_x, J^2] + i[J_y, J^2] = 0$
- $[J_-, J^2] = [J_x, J^2] - i[J_y, J_z] = 0$

* $[J_z, J_+] = [J_z, J_x + iJ_y]$

$= [J_z, J_x] + i[J_z, J_y]$

$= i\hbar J_y + i(-i\hbar J_x)$

$= i\hbar J_y + \hbar J_x = \hbar(J_x + iJ_y) = \hbar J_+$

* $[J_z, J_-] = [J_z, J_x] - i[J_z, J_y]$

$= i\hbar J_y - i(-i\hbar J_x)$

$= i\hbar J_y - \hbar J_x = -\hbar(J_x - iJ_y)$

$= -\hbar J_-$

* $[J_+, J_-] = [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y]$

$= [J_x, -iJ_y] + [iJ_y, J_x]$

$= -i[J_x, J_y] + i[J_y, J_x]$

$= -i(i\hbar J_z) + i(-i\hbar J_z)$

$= \hbar J_z + \hbar J_z = 2\hbar J_z$

* $[J_-, J_+] = -2\hbar J_z$

Autres formules importante

$J_+J_- = (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y)$

$= J_x^2 + J_y^2 + iJ_yJ_x - iJ_xJ_y$

$$J_+J_- = J_x^2 + J_y^2 + i\left(J_yJ_x - J_xJ_y\right)$$

$$= J_x^2 + J_y^2 + i\left[J_y, J_x\right]$$

$$= J_x^2 + J_y^2 + i\left(-i\hbar J_3\right)$$

$$= J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_3$$

$$J_-J_+ = \left(J_x - iJ_y\right)\left(J_x + iJ_y\right)$$

$$= J_x^2 + J_y^2 + i\left(J_xJ_y - J_yJ_x\right)$$

$$= J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_3$$

d'où $J_+J_- = J^2 - J_3^2 + \hbar J_3$

$$J_-J_+ = J^2 - J_3^2 - \hbar J_3$$

Ainsi : $J_+J_- = J_-J_+ + 2\hbar J_3$

$$J_+J_- + J_-J_+ = 2\left(J_x^2 + J_y^2\right)$$

$$J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right)$$

$$J^2 - J_3^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right)$$

Remarque : Les 3 composantes J_x, J_y et J_z ont le même spectre (isotropie de l'espace)

Elles sont équivalentes les unes aux autres au sens où il y a une opération unitaire telle que

$$J_v = R_{vv} J_v R_{vv}^{+}$$

On sait que J_x se déduit de J_y par une rotation d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe Oz.

Comme J^2 et J_z commutent, ces deux opérateurs ont des vecteurs propres communs que nous désignons par le ket $|jm\rangle$ avec

$$J^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle$$

$$J_3 |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle$$

Il est à savoir que J^2 et J_z ne constituent pas en général un ECOC.

II-2 Valeurs propres de J^2 et J_3