3. Une particule de masse m, assujettie à se déplacer dans le plan xOy, a pour hamiltonien :

$$H_0 = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2(X^2 + Y^2)$$

(oscillateur harmonique à deux dimensions, de pulsation ω). On veut étudier l'effet sur cette particule d'une perturbation W donnée par :

$$W = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes, et W_1 et W_2 ont pour expression :

$$W_1 = m\omega^2 XY$$

$$W_2 = \hbar\omega\left(\frac{L_z^2}{\hbar^2} - 2\right)$$

(L_z est la composante sur Oz du moment cinétique orbital de la particule).

Dans les calculs de perturbation, on se limitera toujours au premier ordre pour les énergies et à l'ordre zéro pour les vecteurs d'état.

a. Indiquer sans calculs les valeurs propres de H_0, leur degré de dégénérescence, et les vecteurs propres associés.

Dans la suite, on s'intéressera uniquement au deuxième niveau excité de H_0, d'énergie $3\hbar\omega$ et trois fois dégénéré.

b. Calculer les matrices représentant les restrictions de W_1 et W_2 au sous-espace propre de la valeur propre $3\hbar\omega$ de H_0.

c. On suppose $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \ll 1$.

Calculer par la théorie des perturbations l'effet du terme $\lambda_1 W_1$ sur le deuxième niveau excité de H_0.

d. Comparer les résultats obtenus en *c* au développement limité de la solution exacte, que l'on cherchera en s'inspirant des méthodes développées dans le complément H_V (modes propres de vibration de deux oscillateurs harmoniques couplés).

e. On suppose $\lambda_2 \ll \lambda_1 \ll 1$. En considérant les résultats de la question *c* comme une nouvelle situation non-perturbée, calculer l'effet du terme $\lambda_2 W_2$.

f. On suppose maintenant que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \ll 1$.

Calculer par la théorie des perturbations l'effet du terme $\lambda_2 W_2$ sur le deuxième niveau excité de H_0.

g. Comparer les résultats obtenus en *f* à la solution exacte telle qu'elle peut être déduite des considérations du complément D_VI.

h. On suppose enfin que $\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll 1$. En considérant les résultats de la question *f* comme une nouvelle situation non-perturbée, calculer l'effet du terme $\lambda_1 W_1$.

La theorie des Perturbations

(Perturbations stationnaires)

a) $$H_0 = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (X^2 + Y^2)$$

$$= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 Y^2$$

$$= H_{0x} + H_{0y}$$

$$E_{nx} = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right)$$

$$E_{ny} = \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right)$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n_x + n_y + 1\right) = \hbar\omega(n+1)$$

$E_0 = \hbar\omega \longrightarrow$ 1 fois degenerée

$E_1 = 2\hbar\omega \longrightarrow$ 2 fois degenerée $\quad n = 1 \longrightarrow n_x = 1,\ n_y = 0$; $n_x = 0,\ n_y = 1$

$E_2 = 3\hbar\omega \longrightarrow$ 3 fois degenerée $\quad n = 2 \longrightarrow n_x = 2 \quad n_y = 0$; $n_x = 1 \quad n_y = 1$; $n_x = 0 \quad n_y = 2$

$E_n = \hbar\omega(n+1) \longrightarrow (n+1)$ fois degenerée $\quad n_x = n - n_y$

d'où n_x prend $n+1$ valeurs : $n_x = 0, 1, 2 \ldots n$

d'où $(n+1)$ valeurs.

Les vecteurs propres de Ho sont donnés par le produit tensoriel des vecteurs propres de Hox et de Hoy

d'où, on peut écrire $|n\rangle = |nx\rangle \otimes |ny\rangle = |nx\rangle |ny\rangle = |nx\ ny\rangle$

toutes les écritures sont bonnes.

$|nx\rangle$ est $\vec{v}$ propre de Hox.

$|ny\rangle$ " " " " Hoy.

b) Le sous espace propre de $E_2 = 3\hbar\omega_0$ est engendré par les vecteurs propres de E_2. Ils sont : $|2\ 0\rangle$; $|1\ 1\rangle$; $|0\ 2\rangle$

$|0\ 2\rangle = |nx=0, ny=2\rangle$

$|1\ 1\rangle = |nx=1, ny=1\rangle$

$|2\ 0\rangle = |nx=2, ny=0\rangle$

Pour faire ce calcul, on doit exprimer W_1 et W_2 en fonction des opérateurs créations et annihilation : a_x^+, a_x ; a_y et a_y^+.

Pour rappel :

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a_x^+ + a_x\right) \quad \text{et} \quad P_x = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a_x^+ - a_x\right)$$

de même

$$Y = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a_y^+ + a_y\right) \quad \text{et} \quad P_y = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a_y^+ - a_y\right)$$

$$W_1 = m\omega^2 XY = \frac{m\omega^2\hbar}{2m\omega}\left(a_x^+ + a_x\right)\left(a_y^+ + a_y\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(a_x^+ + a_x\right)\left(a_y^+ + a_y\right)$$

avec $[a_x, a_y] = [a_x^+, a_y] = [a_x, a_y^+] = [a_x^+, a_y^+] = 0$

$$[a_x, a_x^+] = 1 = [a_y, a_y^+]$$

$$W_1 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(a_x^+ a_y^+ + a_x^+ a_y + a_x a_y^+ + a_x^+ a_y^+\right)$$

$$W_1 |\underset{\underset{n_x}{\uparrow}}{2}\ \underset{\underset{n_y}{\uparrow}}{0}\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(a_x^+ a_y^+ |20\rangle + \underbrace{a_x^+ a_y |20\rangle}_{=0} + a_x a_y^+ |20\rangle + \underbrace{a_x a_y |20\rangle}_{=0}\right)$$

par rappel : $a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1}\ |n+1\rangle$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\ |n-1\rangle$$

$$a|0\rangle = 0$$

d'où $W_1 |20\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(a_x^+ a_y^+ |20\rangle + a_x a_y^+ |20\rangle\right)$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\sqrt{3}\sqrt{1}\ |31\rangle + \sqrt{2}\sqrt{1}\ |11\rangle\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar\omega\ |31\rangle + \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\ |11\rangle$$

$$W_{11}\,|11\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(a_x^+ a_y^+ |11\rangle + a_x^+ a_y |11\rangle + a_x a_y^+ |11\rangle + a_x a_y |11\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\sqrt{2}\sqrt{2}\,|22\rangle + \sqrt{2}\sqrt{1}\,|20\rangle + \sqrt{1}\sqrt{2}\,|02\rangle + \sqrt{1}\sqrt{1}\,|00\rangle\right)$$

$$= \hbar\omega\,|22\rangle + \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}|20\rangle + \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}|02\rangle + \frac{\hbar\omega}{2}|00\rangle$$

$$W_1\,|02\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(a_x^+ a_y^+ |02\rangle + a_x^+ a_y |02\rangle + \underbrace{a_x a_y^+ |02\rangle}_{=0} + \underbrace{a_x a_y |02\rangle}_{=0}\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega_0}{2}\left(a_x^+ a_y^+ |02\rangle + a_x^+ a_y |02\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega_0}{2}\left(\sqrt{1}\sqrt{3}\,|13\rangle + \sqrt{1}\sqrt{2}\,|11\rangle\right)$$

$$= \sqrt{3}\,\frac{\hbar\omega_0}{2}|13\rangle + \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Je rappelle que $|22\rangle$, $|13\rangle$ et $|31\rangle$ n'appartiennent pas au sous espace propre de $E_2 = 3\hbar\omega$.

A cette étape, je construis la matrice $[W_1]$: matrice du potentiel W_1 dans la base : $\{|20\rangle, |11\rangle, |02\rangle\}$.

Calcul des éléments de matrice :

$\langle 20|W_1|20\rangle = 0$; $\langle 11|W_1|11\rangle = 0$; $\langle 02|W_1|02\rangle = 0$

et $\langle 20|W_1|02\rangle = 0$

Les éléments non nuls sont :

$$\langle 20|W_1|11\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} = \langle 11|W_1|20\rangle$$

$$\langle 02|W_1|11\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} = \langle 11|W_1|02\rangle$$

La matrice de W_1 restreinte à la base de vecteurs propre $E_2 = 3\hbar\omega$ est

$$\begin{array}{c|ccc} & |20\rangle & |11\rangle & |02\rangle \\ \hline \langle 20| & 0 & \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 \\ \langle 11| & \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \\ \langle 02| & 0 & \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 \end{array} = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcul de la matrice $[W_2]$ restreinte au sous espace propre de $E_2 = 3\hbar\omega$

D'abord, j'exprime L_z en fonction des operateurs création et annihilation.

$$L_z = P_x Y - P_y X$$

je rappelle que $[X, P_x] = [Y, P_y] = i\hbar$ et $[X, P_y] = [Y, P_x] = 0$

$$L_z = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\, i\left(a_x^+ - a_x\right)\left(a_y^+ + a_y\right) - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}\, i\left(a_y^+ - a_y\right)\left(a_x^+ + a_x\right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2}\left(a_x^+ - a_x\right)\left(a_y^+ + a_y\right) - \frac{i\hbar}{2}\left(a_y^+ - a_y\right)\left(a_x^+ + a_x\right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2}\left(\cancel{a_x^+ a_y^+} + a_x^+ a_y - a_x a_y^+ - \cancel{a_y a_x} - \cancel{a_y^+ a_x^+} - a_y^+ a_x + a_y a_x^+ + \cancel{a_y a_x}\right)$$

$$= i\hbar\left(a_y a_x^+ - a_x a_y^+\right)$$

5

$$L_z^2 = -\hbar^2 \left(a_y a_x^+ - a_x a_y^+ \right)^2$$

$$= -\hbar^2 \left(a_y^2 a_x^{+2} + a_x^2 a_y^{+2} - a_y a_x^+ a_x a_y^+ - a_x a_y^+ a_y a_x^+ \right)$$

$$= -\hbar^2 \left(a_y^2 a_x^{+2} + a_x^2 a_y^{+2} - \underbrace{a_x^+ a_x}_{N_x} a_y a_y^+ - \underbrace{a_y^+ a_y}_{N_y} a_x a_x^+ \right)$$

On rappelle que $[a, a^+] = a a^+ - a^+ a = 1$ et $a^+ a = N$

d'où $a a^+ = N + 1$

$a_x a_x^+ = N_x + 1$ et $a_y a_y^+ = N_y + 1$

$$L_z^2 = -\hbar^2 \left(a_y^2 a_x^{+2} + a_x^2 a_y^{+2} - N_x (N_y + 1) - N_y (N_x + 1) \right)$$

$$W_2 = \hbar\omega \left[\frac{L_z^2}{\hbar^2} - 2 \right] = \hbar\omega \left[N_x(N_y+1) + N_y(N_x+1) - a_x^{+2} a_y^2 - a_x^2 a_y^{+2} - 2 \right]$$

Calcul des Termes des elements de matrices

$$W_{22} |11\rangle = \hbar\omega \Big[N_x(N_y+1)|11\rangle + N_y(N_x+1)|11\rangle - a_x^{+2} a_y^2 |11\rangle - a_x^2 a_y^{+2} |11\rangle$$
$$- 2|11\rangle$$

$$= \hbar\omega \left[2|11\rangle + 2|11\rangle - 2|11\rangle \right] = 2\hbar\omega |11\rangle$$

détails des calculs :

$N_x(N_y+1)|11\rangle = 1(1+1)|11\rangle = 2|11\rangle$

$N_y(N_x+1)|11\rangle = 1(1+1)|11\rangle = 2|11\rangle$

$a_x^{+2} a_y^2 |11\rangle = a_x^+ a_y \sqrt{2}\sqrt{1}\ |2\,0\rangle = \sqrt{2}\, a_x^+ a_y |2\,0\rangle = 0$

$a_y^{+2} a_x^2 |11\rangle = a_y^+ a_x \sqrt{1}\sqrt{2}\ |0\,2\rangle = \sqrt{2}\, a_y^+ a_x |0\,2\rangle = 0$

$W_2|2\,0\rangle = \hbar\omega\left[N_x(1+N_y) + N_y(N_x+1) - a_x^{+2}a_y^2 - a_x^2 a_y^{+2} - 2\right]|2\,0\rangle$

$= \hbar\omega\left[2|2\,0\rangle + 0|2\,0\rangle - 0 - a_x^2 a_y^{+2}|2\,0\rangle - 2|2\,0\rangle\right]$

$= -\hbar\omega\ a_x^2 a_y^{+2}|2\,0\rangle = -\hbar\omega \sqrt{2}\sqrt{1}\ a_x a_y^+ |1\,1\rangle$

$= -\hbar\omega\sqrt{2}\sqrt{1}\sqrt{2}\ |0\,2\rangle$

$= -2\hbar\omega\,|0\,2\rangle$

• $a_x^{+2} a_y^2 |2\,0\rangle = 0$ car $a_y|2\,0\rangle = 0$

$W_2|0\,2\rangle = \hbar\omega\left[N_x(N_y+1) + N_y(N_x+1) - a_x^{+2}a_y^2 - a_x^2 a_y^{+2} - 2\right]|0\,2\rangle$

$= \hbar\omega\left[0|0\,2\rangle + 2|0\,2\rangle - a_x^{+2}a_y^2|0\,2\rangle - 0 - 2|0\,2\rangle\right]$

$= -\hbar\omega\ a_x^{+2}a_y^2|0\,2\rangle = -\hbar\omega\sqrt{1}\sqrt{2}\ a_x^+ a_y|1\,1\rangle$

$= -\hbar\omega\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{1}\,|2\,0\rangle = -2\hbar\omega\,|2\,0\rangle$

En bilan :

$W_2 |11\rangle = 2\hbar\omega |11\rangle$

$W_2 |20\rangle = -2\hbar\omega |02\rangle$

$W_2 |02\rangle = -2\hbar\omega |20\rangle$

La matrice du potentiel W_2 dans la base : $\{|20\rangle, |11\rangle, |02\rangle\}$

est comme suit :

$$[W_2] = \begin{array}{c|ccc} & |20\rangle & |11\rangle & |02\rangle \\ \hline \langle 20| & 0 & 0 & -2\hbar\omega \\ \langle 11| & 0 & 2\hbar\omega & 0 \\ \langle 02| & -2\hbar\omega & 0 & 0 \end{array}$$

$$= 2\hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \ll 1$

Effet de W_1 sur le niveau d'énergie $E_2 = 3\hbar\omega$

Nous sommes dans le cas d'un niveau dégénéré (3 fois), notre démarche ensuite à diagonaliser la matrice $[W_1]$ et trouver la correction d'énergie à l'ordre 1.

_ Calcul des valeurs propres de $[W_1]$:

$$\Delta\left([W_2]-\lambda I\right)=0 = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} & -\lambda & \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda\frac{\hbar^2\omega^2}{2} + \lambda\frac{\hbar^2\omega_0^2}{2} = 0$$

$$= -\lambda^3 + \lambda\hbar^2\omega^2 = 0$$

$$= \lambda\left(-\lambda^2 + \hbar^2\omega_0^2\right)$$

On obtient, 3 valeurs propres : $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \hbar\omega$ et $\lambda_3 = -\hbar\omega$

Calcul du $\vec{v}$ propre associé à $\lambda = 0$

Soit $|\psi_0\rangle = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$ ce vecteur propre :

$[W_1]|\psi_0\rangle = 0|\psi_0\rangle$

$$\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

$\beta = 0$

$\alpha + \gamma = 0$ d'où $\alpha = -\gamma$

$$|\psi_0\rangle = \alpha\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\alpha 0\rangle - |0\alpha\rangle\right\}$$

Calcul du vecteur propre associé à $\lambda = \hbar\omega$

$|\psi_1\rangle$ est ce vecteur propre $\quad |\psi_1\rangle = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$

$[W_2]|\psi_1\rangle = \hbar\omega|\psi_1\rangle$

$$\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \hbar\omega\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \to \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\beta = \hbar\omega\alpha \qquad \beta = \sqrt{2}\alpha \\ \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}(\alpha+\gamma) = \hbar\omega\beta \\ \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\beta = \hbar\omega\gamma \to \beta = \sqrt{2}\gamma \end{array}\right\} \alpha = \gamma$$

d'où $|\psi_1\rangle = \beta' \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}|20\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle + \frac{1}{2}|02\rangle$$

Enfin, le vecteur propre associé à $\lambda = -\hbar\omega$

$|\psi_2\rangle$ est ce vecteur propre : $|\psi_2\rangle = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$

$$[W_1]\,|\psi_2\rangle = -\hbar\omega\,|\psi_2\rangle$$

$$\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -\hbar\omega \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

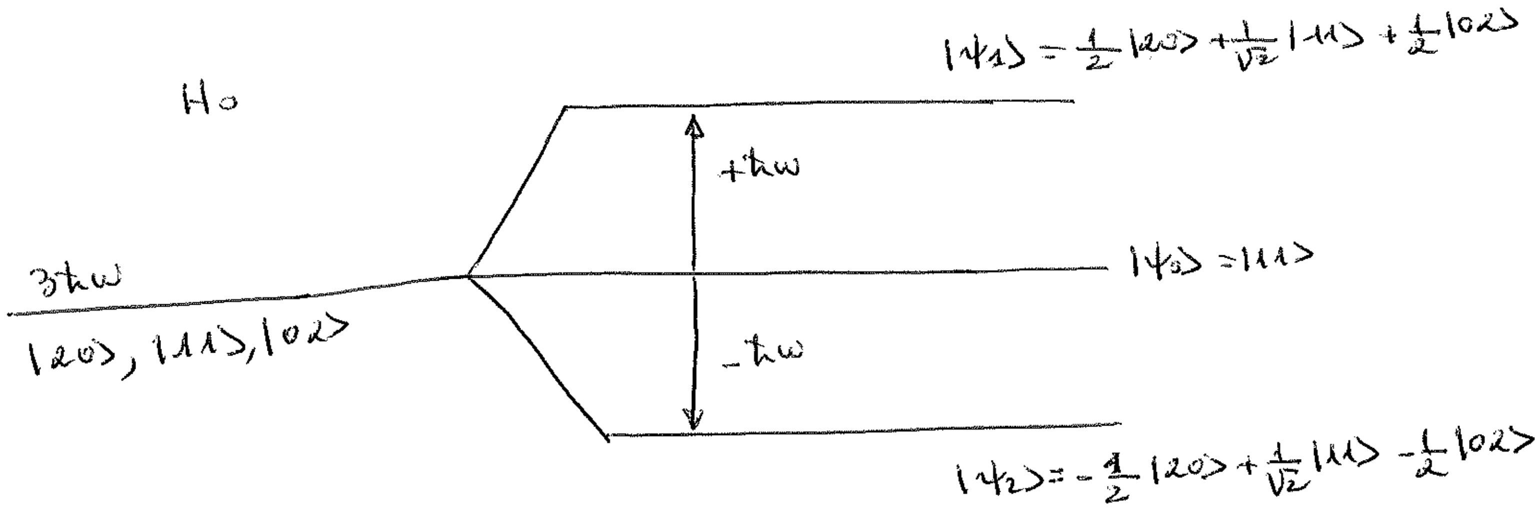
$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\beta = -\hbar\omega\alpha & \Rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{2}} = -\alpha \\ \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}(\alpha+\gamma) = -\hbar\omega\beta & \\ \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\beta = -\hbar\omega\gamma & \frac{\beta}{\sqrt{2}} = -\gamma \end{array}\right\} \alpha = \gamma$$

$$|\psi_2\rangle = \beta \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$|\psi_2\rangle = -\frac{1}{2}|20\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle - \frac{1}{2}|02\rangle$$

La perturbation W_1 a enlevé complètement la dégénérescence du niveau $E_2 = 3\hbar\omega$.

Shema



d) Question ecartée.

e) On suppose que $\lambda_2 \ll \lambda_1 \ll 1$

Dans cette situation, on va calculer l'effet de W_2 en tenant compte déjà ~~de~~ l'effet de W_1.

Ainsi, on se trouve dans le cas de calcul de perturbation de niveaux non degenerés. Ces niveaux sont $|\psi_0\rangle = |11\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}|20\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle + \frac{1}{2}|02\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = -\frac{1}{2}|20\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle - \frac{1}{2}|02\rangle$$

D'après le Cours $\Delta E = \langle\psi|W|\psi\rangle$ est la correction apportée par la perturbation W à la valeur propre associée à l'état $|\psi\rangle$ qui est vecteur propre de l'hamiltonien non pertubé.

On a pour $\Delta E_0 = \langle \psi_0 | W_2 | \psi_0 \rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\hbar\omega \\ 0 & +2\hbar\omega & 0 \\ -2\hbar\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\hbar\omega \\ 0 \\ -2\hbar\omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(+4\hbar\omega) = +2\hbar\omega$$

$\Delta E_1 = \langle \psi_1 | W_2 | \psi_1 \rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\hbar\omega \\ 0 & +2\hbar\omega & 0 \\ -2\hbar\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2\hbar\omega}{\sqrt{2}} \\ +2\hbar\omega \\ -\frac{2\hbar\omega}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-\hbar\omega + 2\hbar\omega - \hbar\omega)$$

$$= 0\hbar\omega = 0$$

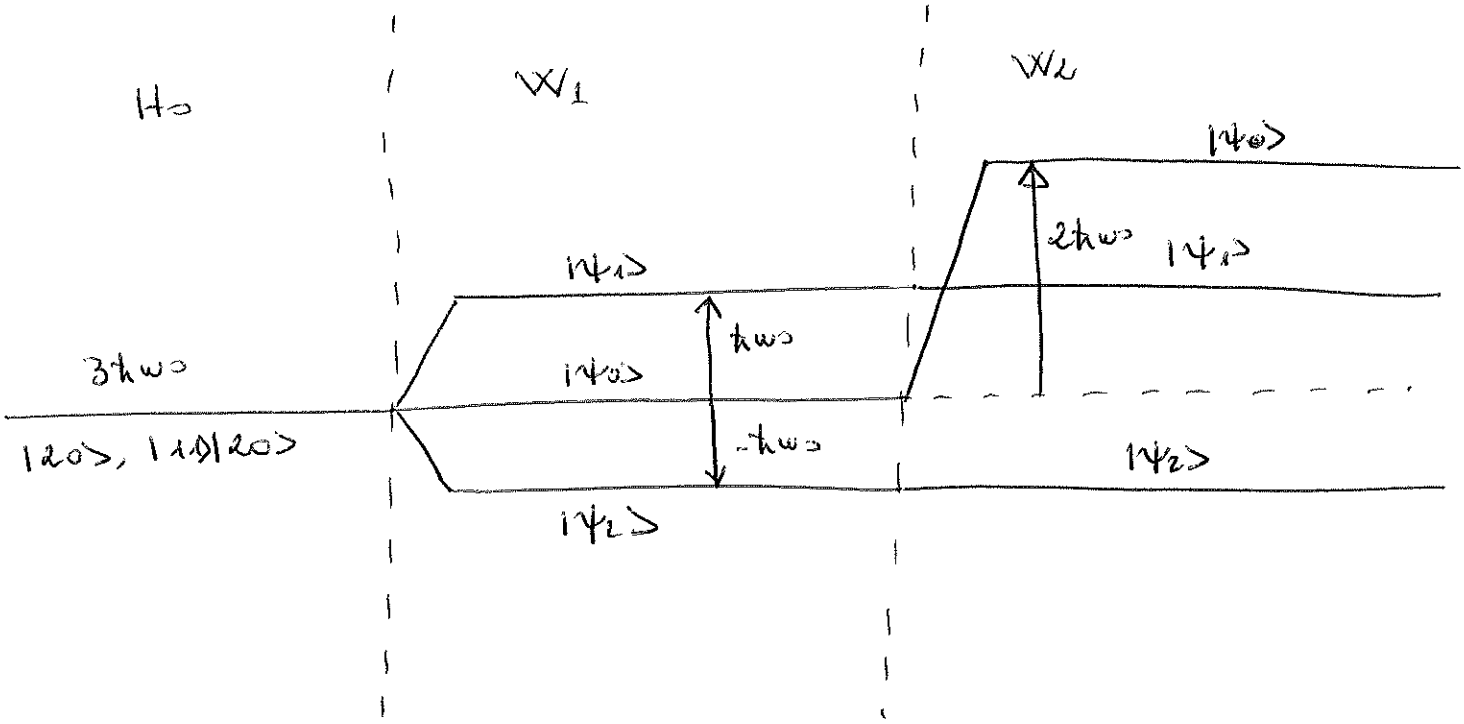
$\Delta E_2 = \langle \psi_2 | W_2 | \psi_2 \rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\hbar\omega \\ 0 & +2\hbar\omega & 0 \\ -2\hbar\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\frac{2\hbar\omega}{\sqrt{2}} \\ +2\hbar\omega \\ +\frac{2\hbar\omega}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-\hbar\omega + 2\hbar\omega - \hbar\omega) = 0\hbar\omega$$

$$= 0$$

Diagramme :



f) On considère maintenant que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \ll 1$

Dans cette situation, la perturbation à prendre en compte est W_2.

Le calcul de l'effet de cette perturbation consiste à diagonaliser la matrice de W_2 dans la base des états propres de $E_2 = 3\hbar\omega_0$

• Diagonalisation de $[W_2]$ et calcul de ses vecteurs propres.

$$\Delta([W_2] - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2\hbar\omega \\ 0 & -\lambda+2\hbar\omega & 0 \\ -2\hbar\omega & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-\lambda+2\hbar\omega) - 4\hbar^2\omega^2(-\lambda+2\hbar\omega)$$

$$= (-\lambda+2\hbar\omega)(\lambda^2 - 4\hbar^2\omega^2)$$

$$= (-\lambda+2\hbar\omega)(\lambda-2\hbar\omega)(\lambda+2\hbar\omega)$$

$\lambda_1 = -2\hbar\omega$ est une valeur simple

$\lambda_2 = 2\hbar\omega$ est une valeur double. (λ_2 est deux fois dégénérées)

Une première remarque ; la perturbation W_2 a levé partiellement la degénérescence du niveau $E_2 = 3\hbar\omega_0$. Nous avions un état 3 fois degénéré au début. Maintenant, on a un état simple et un état deux fois degénéré.

. Calcul des vecteurs propres.

. vecteur propre associé à $\lambda_1 = -2\hbar\omega$

$|\psi_1\rangle$ est ce vecteur $|\psi_1\rangle = \begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$

$$W_2|\psi_1\rangle = -2\hbar\omega|\psi_1\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\hbar\omega \\ 0 & 2\hbar\omega & 0 \\ -2\hbar\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = -2\hbar\omega\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$$

$$-2\hbar\omega\,\gamma = -2\hbar\omega\,\alpha \qquad \alpha = \gamma$$

$$2\hbar\omega\,\beta = -2\hbar\omega\,\beta \qquad \beta = 0$$

$$|\psi_1\rangle = \alpha\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|2\,0\rangle + |0\,2\rangle\right\}$$

. Vecteurs propres associés à $\lambda = 2\hbar\omega$

J'ai mis un "s" car il y a deux vecteurs propres, et ce niveau est 2 fois degénéré.

Soit $|\psi_{2i}\rangle$ un de ces deux vecteurs

i car $\lambda = 2\hbar\omega$ est dégénérée. ($i = 1$ ou 2)

$$W/2 \, |\psi_{2i}\rangle = 2\hbar\omega \, |\psi_{2i}\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\hbar\omega \\ 0 & 2\hbar\omega & 0 \\ -2\hbar\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2\hbar\omega \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -2\hbar\omega\,\gamma = 2\hbar\omega\,\alpha \\ 2\hbar\omega\,\beta = 2\hbar\omega\,\beta \end{matrix}\right\} \text{ deux vecteurs propres : } \left\{\begin{matrix} \gamma = -\alpha \\ \beta \text{ quelconque} \end{matrix}\right.$$

$$|\psi_{21}\rangle = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

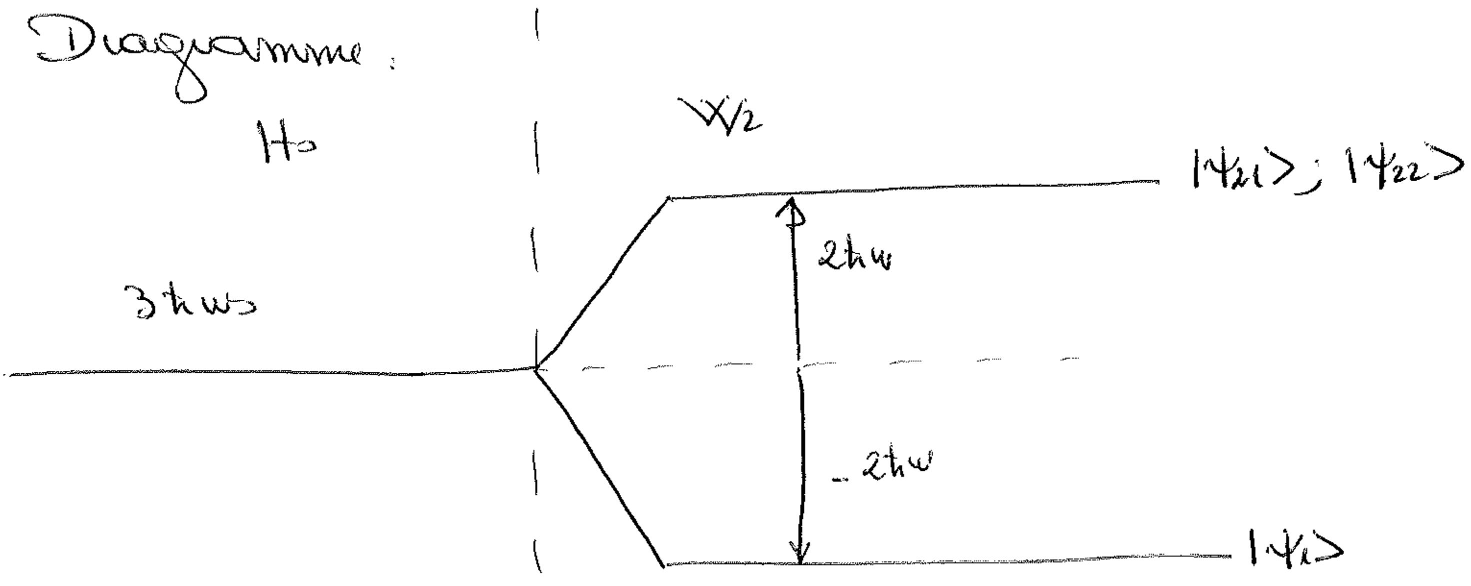
$$|\psi_{22}\rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Dans cette base

$$|\psi_{21}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |2\,0\rangle - |0\,2\rangle \right\}$$

$$|\psi_{22}\rangle = |1\,1\rangle$$

Diagramme :



$|\psi_{21}\rangle$ et $|\psi_{22}\rangle$ sont associés à la meme energies corrigée : $E_2 + 2\hbar\omega$

Nous avons un niveau deux fois degeneres ou deux etats confondus.

La degenerescence est partiellement levée.

g) question ecartée.

h) $\lambda_1 << \lambda_2 << 1$

Dans cette phase, on tient compte de l'effet de W_1.

On doit faire deux calculs separés.

. le premier, concerne $|\psi_1\rangle$ qui est un niveau non degeneré

$\Delta E_1 = \langle \psi_1 | W_1 | \psi_1 \rangle$

. Le second, concerne les niveaux degeneres $|\psi_{21}\rangle$ et $|\psi_{22}\rangle$ et nous allons diagonaliser W_1 dans cette base $\{|\psi_{21}\rangle, |\psi_{22}\rangle\}$.

Ce calcul nous donnera la correction de l'energie au premier ordre

• Premier calcul.

$$\Delta E_1 = \langle \psi_1 | W_1 | \psi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\hbar\omega}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Delta E_1 = 0$$

Second calcul.

Calcul des elements de matrice de W_1 dans la base $\{|\psi_{21}\rangle \; |\psi_{22}\rangle\}$

$$|\psi_{21}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |20\rangle - |02\rangle \}$$

$$|\psi_{22}\rangle = |11\rangle$$

On sait que

$$W_1 |\psi_{22}\rangle = W_1 |11\rangle = \hbar\omega |22\rangle + \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} |20\rangle + \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} |02\rangle + \frac{\hbar\omega}{2} |00\rangle$$

(voir pos 4) calcul déjà réalisé.

$$W_1 |\psi_{21}\rangle = W_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |20\rangle - |02\rangle \}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ W_1 |20\rangle - W_1 |02\rangle \}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \hbar\omega_0 \{ |31\rangle - |13\rangle \}$$

La matrice de W_1 dans la base $\{|\psi_{21}\rangle, |\psi_{22}\rangle\}$ est nulle.

$\langle\psi_{21}|W_1|\psi_{21}\rangle$; $\langle\psi_{21}|W_1|\psi_{22}\rangle = 0$

$\langle\psi_{22}|W_1|\psi_{22}\rangle = 0$

La correction est nulle.

A vérifier SVP. Merci.

fin de l'exercice.

Cohen Tannoudji Tome 2. Exercice 3

page : 1191.