Lemme 1 : Si $\hbar^2 j(j+1)$ et $m\hbar$ sont les valeurs propres de J^2 et J_3 respectivement associées au même vecteur propre $|jm\rangle$, alors

$$-j \leq m \leq j$$

Dem :

$$\| J_+ |jm\rangle \|^2 = \langle jm | J_- J_+ | jm \rangle$$

$$= \langle jm | J^2 - J_3^2 - \hbar J_3 | jm \rangle$$

$$= \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m$$

avec $j(j+1) - m^2 - m \geq 0$

avec $j(j+1) - m^2 - m = (j-m)(j+m+1)$

d'où $j \geq m$ et et $m \geq -j-1$

$$-j-1 \leq m \leq j$$

La seconde partie de la démonstration :

$$\| J_- |jm\rangle \|^2 = \langle jm | J_+ J_- | jm \rangle$$

$$= \langle jm | J^2 - J_3^2 + \hbar J_3 | jm \rangle$$

$$= \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 + \hbar^2 m$$

$$= \hbar^2 \left[j(j+1) - m(m-1) \right]$$

et $j(j+1) - m(m-1) \geq 0$

Sachant que $j(j+1) - m(m-1) = (j-m+1)(j+m)$

Nous avons $(j-m+1)(j+m) \geq 0$

d'où $m \geq -j$ et $m \leq j+1$

$$-j \leq m \leq j+1$$

En combinant les 2 inegalites:

$$-j+1 \leq m \leq j$$

$$-j \leq m \leq j+1$$

Nous obtenons $-j \leq m \leq j$

Lemme II : Soit $|jm\rangle$ est un vecteur propre de J^2 et J_3 avec les valeurs propres $\hbar^2 j(j+1)$ et $m\hbar$ respectivement:

1) Si $m = -j$ alors $J_- |jm\rangle = 0$

2) Si $m > -j$ alors $J_- |jm\rangle$ est vecteur propre de J^2 et de J_3 avec les valeurs propres $\hbar^2 j(j+1)$ et $(m-1)\hbar$ respectivement.

Dem1: Nous savons que $\| J_- |j\,m\rangle \|^2 = \hbar^2 j(j+1) - m^2\hbar^2 + m\hbar^2$

si $j = -m$ le moment s'annule :

$$j(j+1) - m(m-1) = (j-m+1)(j+m)$$

Comme la norme est nulle, le vecteur lui-même est nul : $J_- |j\,m\rangle = \vec{0}$

On peut écrire aussi :

$$J_+ J_- |j\,m\rangle = \hbar^2 j(j+1) - m^2\hbar^2 + m\hbar^2 |j\,m\rangle$$

$$= \hbar^2 [j(j+1) - m^2 + m] |j\,m\rangle$$

$$= \hbar^2 (j+m)(j-m+1) |j\,m\rangle$$

si $|j\,m\rangle = |j\,-j\rangle$

$$J_+ J_- |j\,-j\rangle = \hbar^2 (j-j)(j-j+1) |j\,-j\rangle$$

$$= 0$$

d'où $J_+ J_- |j\,-j\rangle = 0$ et ainsi $J_- |j\,-j\rangle = 0$

Dem2: Supposons que j est strictement supérieur à $-j$ $(m > -j)$

Nous savons que $[J^2, J_-] = 0$

On écrit alors

$$[J^2, J_-]|jm\rangle = 0 = J^2 J_-|jm\rangle - J_- J^2|jm\rangle = 0$$

Ainsi, $J^2 J_-|jm\rangle = J_- J^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) J_-|jm\rangle$

d'où $J_-|jm\rangle$ est vecteur propre de J^2 avec la valeur propre $\hbar^2 j(j+1)$

Nous savons aussi que :

$$[J_3, J_-] = -\hbar J_-$$

Ainsi

$$[J_3, J_-]|jm\rangle = -\hbar J_-|jm\rangle$$

$$J_3 J_-|jm\rangle - J_- J_3|jm\rangle = -\hbar J_-|jm\rangle$$

et

$$\begin{aligned} J_3 J_-|jm\rangle &= J_- J_3|jm\rangle - \hbar J_-|jm\rangle \\ &= m\hbar J_-|jm\rangle - \hbar J_-|jm\rangle \\ &= \hbar(m-1) J_-|jm\rangle \end{aligned}$$

Ainsi, $J_-|jm\rangle$ est vecteur propre de J_3 avec la valeur propre $\hbar(m-1)$.

Lemme III

Soit $|j\,m\rangle$ est vecteur propre de J^2 et J_z avec les valeurs propres $\hbar^2 j(j+1)$ et $m\hbar$ respectivement :

1) si $j=m$ $J_+|j\,m\rangle = 0$

2) si $m<j$, $J_+|j\,m\rangle$ est un vecteur propre de J^2 et J_z avec les valeurs propres $\hbar^2 j(j+1)$ et $\hbar(m+1)$ respectivement.

Dem :

1) $$J_-J_+|j\,m\rangle = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z |j\,m\rangle$$

$$= \left(\hbar^2 j(j+1) - m\hbar^2 - \hbar^2 m\right)|j\,m\rangle$$

$$= \hbar^2\left(j(j+1) - m(m+1)\right)|j\,m\rangle$$

si $m=j$ $J_-J_+|j\,j\rangle = 0$ ou $J_-\left(J_+|j\,j\rangle\right) = 0$

Ainsi $J_+|j\,j\rangle = 0$

On peut aussi utiliser la norme.

2) On utilise comme point de départ pour la démonstration $[J^2, J_+] = 0$ et on l'applique au ket $|j\,m\rangle$

Puis le commutateur $[J_z, J_+] = \hbar J_+$

II.3: Détermination du spectre de J^2 et J_3

Nous savons qu'à chaque action de J_- m décroît d'une unité, ainsi max − min = $j - -j = 2j$ est nécessairement un entier positif ou nul, d'où le résultat majeur suivant : j est soit entier ou demi-entier

j est entier si 2j est pair

j est demi entier si 2j est impair

$j = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$

Par ailleurs, comme deux valeurs m et −m doivent être simultanément présentes, les valeurs de m sont réparties symétriquement autour de zéro : au total, pour un j donné, les valeurs propres de J_3 sont en nombre de $2j+1$ et données par

$$-j\hbar, (-j+1)\hbar, (-j+2)\hbar \ldots (j-2)\hbar, (j-1)\hbar, j\hbar$$

et le nombre quantique m prend les valeurs :

$$-j, -j+1, -j+2 \ldots j-2, j-1, j$$

II.4 Representation standard $\{|kjm\rangle\}$

Considerons $\vec{J}$ un moment cinetique qui agit sur les ket d'un espace $\mathcal{E}$.

On veut construire la base de vecteurs propres commun à J^2 et J_z (J^2 et J_z sont deux observables qui commutent).

Prenons le couple $\hbar^2 j(j+1)$ et $m\hbar$ et cherchons les vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres.

Ces vecteurs forment un sous espace noté $\mathcal{E}(j,m)$ de l'espace $\mathcal{E}$ et de dim ≥ 1 car généralement J^2 et J_z ne forment pas un ECOC sauf dans des cas particuliers.

Choisissons une base $\{|kjm\rangle\}$ $k = 1, 2, 3 \ldots g(jm)$ dans ce sous espace. k enumere les kets de la base ayant les même valeurs de j et m.

Si $m \neq j$, on peut imaginer un autre sous espace de l'espace des etats que nous notons $\mathcal{E}(j, m+1)$