Si $m \neq -j$, on peut considerer un troisieme sous espace $\mathcal{E}(j\ m-1)$

On se propose dans ce qui suit de construire les bases orthonormees respectives des sousespaces $\mathcal{E}(j\ m+1)$ et $\mathcal{E}(j\ m-1)$.

On montre d'abord que $J_+|kjm\rangle$ et $J_+|jk'm\rangle$ sont orthogonaux si $k \neq k'$

De même que $J_-|kjm\rangle$ et $J_-|k'jm\rangle$ sont orthogonaux si $k \neq k'$

Nous savons déjà que.

$$J_+J_- = J^2 - J_3^2 + \hbar J_3$$

$$J_-J_+ = J^2 - J_3^2 - \hbar J_3$$

d'où

$$\langle kjm|J_+J_-|k'jm\rangle = \hbar^2(j(j+1) - m^2 + m)\underbrace{\langle kjm|k'jm\rangle}_{\delta_{kk'}}$$

de même

$$\langle kjm|J_-J_+|k'jm\rangle = \hbar^2(j(j+1) - m^2 - m)\underbrace{\langle kjm|k'jm\rangle}_{\delta_{kk'}}$$

Considérons alors les $g(j\,m)$ vecteurs de $\mathcal{E}(j\,m+1)$ donnés par l'équation

$$|k\,j\,m+1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}} J_+|k\,j\,m\rangle$$

Ces vecteurs sont orthonormés et forment une base dans $\mathcal{E}(j\,m+1)$

De même, les vecteurs

$$|k\,j\,m-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}} J_-|k\,j\,m\rangle$$

forment une base dans le sous espace $\mathcal{E}(j\,m-1)$.

Ainsi, $\dim g(j\,m) = g(j\,m+1) = g(j,m-1)$

En procédant de cette méthode, on construit la base de chacun des $2j+1$ $\mathcal{E}(j\,m)$ sous espaces, et nous obtenons ce que nous appelons une base standard de l'espace des états

La relation d'orthonormalisation et de fermeture s'écrivent pour une telle base.

$$\langle k j m | k' j' m' \rangle = \delta_{kk'} \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_{j} \sum_{k=1}^{g(j)} \sum_{m=-j}^{j} | k j m \rangle \langle k j m | = 1$$

Théorie du moment cinétique

complément.

D : Application au moment cinétique orbitale :

D-1 : Valeurs et fonctions propres de L^2 et L_z

D-1-a : Equations aux valeurs propres en $\{|\vec{r}\rangle\}$

En coordonnées cartésiennes

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ L_y &= \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ L_z &= \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \text{ les 3 composantes de } \vec{L}$$

En coordonnées sphériques.

$$L_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{tg\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{tg\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{tg\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\,\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_- = \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\,\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

On rappelle la correspondance entre les coordonnées sphériques et cartésiennes :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

et $d^3r = dx\,dy\,dz = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

avec : $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = d\Omega$ (l'élément d'angle solide)

En représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$ les équations aux valeurs propres des opérateurs L^2 et L_z sont respectivement :

$$-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{tg\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\psi(r,\theta,\varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1)\psi(r,\theta,\varphi)$$

et

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(r,\theta,\varphi) = m\,\psi(r,\theta,\varphi)$$

b)

r n'apparait dans aucun operateur differentiel dans les deux equations, il peut être donc traité comme un paramètre. Nous nous tenons compte que des variables θ et φ.

Nous designons ainsi les fonctions propres communes à L^2 et L_z par l'expression : $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$.

d'où $L^2 Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

$L_z Y_\ell^m(\theta,\varphi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

D-1-b : Valeurs de ℓ et de m.

On represent l'equation aux valeurs propre de L_z, ~~...~~ on peut ecrire :

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} Y_\ell^m(\theta,\varphi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

Cette egalité montre que $Y_\ell^m = F_\ell^m(\theta)\, e^{im\varphi}$

Sachant que $Y_\ell^m(\theta,\varphi=0) = Y_\ell^m(\theta,\varphi=2\pi)$

(φ est l'angle azimutal)

d'où $e^{im2\pi} = 1$.

Cette egalité montre que dans le cas d'un moment cinetique orbital m est forcement un entier. ℓ est aussi un entier.

c)

D-1-c : Principales propriétés des harmoniques sphériques.

- Relations de récurrence.

Nous savons déjà que :

$$L_\pm Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm1)}\; Y_\ell^{m\pm1}(\theta,\varphi)$$

En utilisant les développements analytiques des opérateurs L_+ et L_- on obtient les équations suivantes :

$$e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - m\cot g\theta\right) Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\; Y_\ell^{m+1}(\theta,\varphi)$$

$$e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - m\cot g\theta\right) Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\; Y_\ell^{m-1}(\theta,\varphi)$$

- Relation d'orthonormalisation

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \; Y_\ell^{m*}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$$

- Relation de Fermeture :

Toute fonction de θ et de φ : $f(\theta,\varphi)$ est développable d'une façon unique sur les harmoniques sphériques et d'une

façon unique :

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_{l,m}\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$\text{avec} \quad C_{l,m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, f(\theta,\varphi)\, Y_l^{m*}(\theta,\varphi)$$

Les harmoniques sphériques constituent une base dans l'espace E_Ω des fonctions de θ et φ. Cette propriété se traduit par la relation de fermeture.

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_l^{m*}(\theta,\varphi)\, Y_l^m(\theta',\varphi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\, \delta(\varphi-\varphi')$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}(\delta\theta - \delta\theta')(\delta\varphi - \delta\varphi')$$

- Parité et conjugaison complexe :

* Parité :

rappelons que la symétrie par rapport à l'origine se traduit par la transformation de x en $-x$, y en $-y$ et z en $-z$.

En coordonnées sphérique, cette symetrie traduit comme suit :

$$r \longrightarrow r$$
$$\theta \longrightarrow \pi - \theta$$
$$\varphi \longrightarrow \varphi + \pi$$

d'où $\Pi \, Y_\ell^m(\theta, \varphi) = Y_\ell^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell \, Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ Vu TD

- Complexe conjugué :

$$\left[Y_\ell^m(\theta, \varphi) \right]^* = (-1)^m \, Y_\ell^{-m}(\theta, \varphi)$$ Vu TD

fin