$a^+(a^n|\varphi_n\rangle)$ est un vecteur propre de H associé à 1

$(a^+)^2(a^n|\varphi_n\rangle)$ = = = = = = = 2

$(a^+)^k(a^n|\varphi_n\rangle)$ = = = = = = = k

Nous avons écrit que $\hat{H} = N + \frac{1}{2}$ et $H = \hbar\omega\hat{H} = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$

Ainsi, le spectre de H est donné par les valeurs : $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$

En mécanique quantique, l'énergie de l'oscillateur harmonique est quantifiée. Elle ne peut pas prendre n'importe quelle valeur !
E_f = (l'énergie de l'état fondamentale)

$E_f = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (E_f > V_{min})$

5 Retour sur les opérateurs a et a^+

Nous avons vu que d'après lemme I si $|\varphi_n\rangle$ est v p de N avec la valeur propre n, $a|\varphi_n\rangle$ est aussi vecteur propre de N avec la valeur propre n-1.

On dit que a est un opérateur d'annihilation.
a^+ est un opérateur de création.

Leur action sur un vecteur propre de N ou H fait augmenter (pour a^+) et réduire (pour a) le niveau d'énergie d'un quantum.

III Etats propres de l'Hamiltonien

1) La représentation $\{|\varphi_n\rangle\}$
(1-a) Expression des vecteurs de cette base en fonction de $|\varphi_0\rangle$.

9

$|\varphi_0\rangle$ est le vecteur propre de N et de H associé à la basse ou la plus faible valeur propre pour chacun des operateurs

$$N|\varphi_0\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad H|\varphi_0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|\varphi_0\rangle$$

On sait d'apres lemme II

$a^+|\varphi_0\rangle$ est vecteur propre de N est associé a $n=1$

d'ou $a^+|\varphi_0\rangle = c\,|\varphi_1\rangle$ ($a^+|\varphi_0\rangle$ est colineaire avec $|\varphi_1\rangle$)

On peut aussi ecrire : $|\varphi_1\rangle = \alpha\, a^+|\varphi_0\rangle$

d'ou $\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = |\alpha|^2 \langle\varphi_0|a a^+|\varphi_0\rangle = |\alpha|^2\langle\varphi_0|N+1|\varphi_0\rangle = |\alpha|^2 = 1$

Ainsi $|\varphi_1\rangle = a^+|\varphi_0\rangle$

On peut de meme construire $|\varphi_2\rangle$

$$|\varphi_2\rangle = \alpha_2\, a^+|\varphi_1\rangle = \alpha_2\, a_+^2|\varphi_0\rangle$$

$$\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = 1 = |\alpha_2|^2\langle\varphi_1|a a^+|\varphi_1\rangle = |\alpha_2|^2\langle\varphi_1|N+1|\varphi_1\rangle = 2|\alpha_2|^2$$

d'ou $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Ainsi, $|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}a^+|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{+2}|\varphi_0\rangle$

de même pour $|\varphi_3\rangle$; $|\varphi_3\rangle = \alpha_3\, a^+|\varphi_2\rangle$

$$\langle\varphi_3|\varphi_3\rangle = 1 = |\alpha_3|^2\langle\varphi_2|a a^+|\varphi_2\rangle = |\alpha_3|^2\langle\varphi_2|N+1|\varphi_2\rangle$$
$$= |\alpha_3|^2\, 3\,\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = |\alpha_3|^2\times 3$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$|\varphi_3\rangle = \frac{a^+}{\sqrt{3}}|\varphi_2\rangle = \frac{(a^+)^2}{\sqrt{2\times 3}}|\varphi_1\rangle = \frac{(a^+)^3}{\sqrt{3!}}|\varphi_0\rangle$$

$$|\varphi_n\rangle = \alpha_n\, a^+ |\varphi_{n-1}\rangle \quad \text{et } \alpha = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$|\varphi_n\rangle = \frac{a^+}{\sqrt{3}} |\varphi_{n-1}\rangle = \frac{(a^+)^2}{\sqrt{n\times(n-1)}} |\varphi_{n-2}\rangle \ldots$$

$$= \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_0\rangle$$

2 Relation d'orthogonalisation et de fermeture

H est hermitique, donc ses vecteurs propres sont orthogonaux

Admettons aussi que H est une observable : $\mathbb{1} = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$

Montrons la relation d'orthogonalisation : $\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle = \delta_{nn'}$

$$\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\,n'!}} \langle\varphi_0| a^n (a^+)^{n'} |\varphi_0\rangle$$

or $a^n (a^+)^{n'} |\varphi_0\rangle = a^{n-1} (a a^+)(a^+)^{n'-1} |\varphi_0\rangle$

$= a^{n-1}(N+1)(a^+)^{n'-1}|\varphi_0\rangle$ et $N(a^+)^{n'-1}|\varphi_0\rangle = n'-1|\varphi_0\rangle$

$= a^{n-1}(n'-1+1)(a^+)^{n'-1}|\varphi_0\rangle$

$= n'\, a^{n-1}(a^+)^{n'-1}|\varphi_0\rangle$

$= n'\, a^{n-2}(a a^+)(a^+)^{n'-2}|\varphi_0\rangle$

$= n'\, a^{n-2}(N+1)(a^+)^{n'-2}|\varphi_0\rangle$

$= n'\, a^{n-2}(n-2+1)(a^+)^{n-2}|\varphi_0\rangle$

$= n'(n'-1)\, a^{n-2}(a^+)^{n'-2}|\varphi_0\rangle$

$= n'!\; a^{n-n'}|\varphi_0\rangle$ si $n > n'$

$= n'.(n'-1).\ldots.(n'-n+1)(a^+)^{n'-n}|\varphi_0\rangle$ si $n'>n$

si $n = n'$ $\quad a^n (a^+)^n |\varphi_0\rangle = n! |\varphi_0\rangle$

On sait que

si $n > n'$ $\quad \langle\varphi_0| a^{n-n'} |\varphi_0\rangle = 0$ car $a^{n-n'} |\varphi_0\rangle = 0$

par def $a|\varphi_0\rangle = 0$

si $n < n'$ $\quad \langle\varphi_0| (a^+)^{n'-n} |\varphi_0\rangle = 0$ car $\langle\varphi_0|(a^+)^{n'-n} = 0$

car $\langle\varphi_0| a^+ = 0$

si $n = n'$ $\quad \langle\varphi_0| a^n (a^+)^n |\varphi_0\rangle = n! \langle\varphi_0|\varphi_0\rangle$

et $\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = \dfrac{n!}{\sqrt{n!n!}} \langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1$

3 Action des divers operateurs sur les vecteurs propres de H et N

3-a) Action de a, a^+, X et P

$a|\varphi_n\rangle = \alpha |\varphi_{n-1}\rangle$

$\langle\varphi_n|a^+a|\varphi_n\rangle = |\alpha|^2 = n$ et $\alpha = \sqrt{n}$

d'où $a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n} |\varphi_{n-1}\rangle$

$a^+|\varphi_n\rangle = \alpha |\varphi_{n+1}\rangle$

$a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\varphi_{n+1}\rangle$

de même $\quad \langle\varphi_n| a^+ = \langle\varphi_{n-1}| \sqrt{n}$

$\langle\varphi_n| a = \langle\varphi_{n+1}| \sqrt{n+1}$

$$X|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a)|\varphi_n\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle + \sqrt{n}\,|\varphi_{n-1}\rangle\right)$$

$$P|\varphi_n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(a^+ - a)|\varphi_n\rangle$$
$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle - \sqrt{n}\,|\varphi_{n-1}\rangle\right)$$

3-b : Eléments de matrice de a, a^+, X et P

$$\langle\varphi_{n'}|a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}\;\delta_{n'\,n-1}$$
$$\langle\varphi_{n'}|a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\;\delta_{n'\,n+1}$$
$$\langle\varphi_{n'}|X|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\;\delta_{n'\,n+1} + \sqrt{n}\;\delta_{n'\,n-1}\right)$$
$$\langle\varphi_{n'}|P|\varphi_n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\sqrt{n+1}\;\delta_{n'\,n+1} - \sqrt{n}\;\delta_{n'\,n-1}\right)$$

4) Fonctions d'ondes associées aux états stationnaires

Calcul de $\varphi_0(x) = \langle x|\varphi_0\rangle$

nous savons que $a|\varphi_0\rangle = 0$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,X + i\frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right)|\varphi_0\rangle = 0$$

en représentation $\{|x\rangle\}$, nous obtenons l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\;x + i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0(x) = 0$$

d'où $\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0(x) = 0$

la solution générale de cette équation $\varphi_0(x) = C\, e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$

par normalisation, nous trouvons la constante C.

pour rappel : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$

d'où $\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$

$$\varphi_n(x) = \langle x|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle x|(a^+)^n|\varphi_0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \varphi_0(x)$$

$$= \left[\frac{1}{n!\,2^n}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{1/2}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

En utilisant cette formule, nous obtenons toutes les fonctions d'onde solutions de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique

$$\varphi_1(x) = \left[\frac{4}{\pi}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3\right]^{1/4} x\, e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

$$\varphi_2(x) = \left(\frac{m\omega}{4\pi\hbar}\right)^{1/4}\left[2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right] e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

IV Discussion physique :

1) Valeurs moyennes de X et P

$$\langle \varphi_n | X | \varphi_n \rangle = \langle \varphi_n | \left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega 2}} \left(\sqrt{n+1}\, |\varphi_{n+1}\rangle + \sqrt{n}\, |\varphi_{n-1}\rangle \right) \right.$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n+1} \underbrace{\langle \varphi_n | \varphi_{n+1} \rangle}_{0} + \sqrt{n} \underbrace{\langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle}_{0} \right)$$

$$\langle \varphi_n | P | \varphi_n \rangle = \langle \varphi_n | \, i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\sqrt{n+1}\, |\varphi_{n+1}\rangle - \sqrt{n}\, |\varphi_{n-1}\rangle \right)$$

$$= i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\sqrt{n+1} \underbrace{\langle \varphi_n | \varphi_{n+1} \rangle}_{=0} - \sqrt{n} \underbrace{\langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle}_{=0} \right)$$

2) Ecarts quadratiques moyens $(\Delta X)^2$ et $(\Delta P)^2$

$$(\Delta X)^2 = \langle \varphi_n | X^2 | \varphi_n \rangle - \langle \varphi_n | X | \varphi_n \rangle^2 = \langle \varphi_n | X^2 | \varphi_n \rangle$$

$$X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^+ + a)(a^+ + a) = \frac{\hbar}{2m\omega} \left((a^+)^2 + a^2 + a^+ a + a a^+ \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \left((a^+)^2 + a^2 + 2 a^+ a + 1 \right)$$

$$(\Delta X)^2 = \langle \varphi_n | X^2 | \varphi_n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \varphi_n | 2 a^+ a + 1 | \varphi_n \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$(\Delta P)^2 = \langle \varphi_n | P^2 | \varphi_n \rangle = m\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Delta X \, \Delta P = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar$$

3. Valeurs moyennes des energies cinetiques et potentielle

$$\langle \varphi_n | V(X) | \varphi_n \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \langle \varphi_n | X^2 | \varphi_n \rangle$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 (\Delta X)^2 = \frac{1}{2} \hbar\omega \left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\langle \varphi_n | \frac{P^2}{2m} | \varphi_n \rangle = \frac{1}{2m} \langle \varphi_n | P^2 | \varphi_n \rangle$$

$$= \frac{1}{2m} (\Delta P)^2 = \frac{1}{2} \hbar\omega \left(n+\frac{1}{2}\right)$$

d'où $\langle \varphi_n | V(X) | \varphi_n \rangle = \langle \varphi_n | \frac{P^2}{2m} | \varphi_n \rangle = \frac{E_n}{2}$

Les energies cinetiques et potentielles sont egales.