Estimation de la loie liée au revenu moyen des ménages d'une iris

Le jeu de données provient de l'**INSEE** et décrit les **ressources économiques des ménages au niveau de zone IRIS** (Îlots Regroupés pour l'Information Statistique). Il s'agit d'unités statistiques infra-communales. Le jeu de données est composé de **13 674 entrées**.

lien du dataset: https://www.insee.fr/fr/statistiques/8229323

On s'intéresse à la variable `DEC_MED21` , qui correspond au **revenu médian annuel** des ménages au sein d'un IRIS.

On notera :

$$X = \text{DEC\_MED21}, \qquad X > 0$$

Par la suite on tentera de modéliser la distribution de `DEC_MED21` , on supposera que X suit une **loi log-normale** :

$$X \sim \text{Log-normale}(m, \sigma^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \log(X) \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Les paramètres m et σ^2 de cette loi seront estimés à partir de notre échantillon dans la suite de cette étude.

In [1]:
```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

from scipy import stats
```

Chargement des données et Dataprep

In [2]:
```
path = "dataset/BASE_TD_FILO_IRIS_2021_DEC.csv"


df = pd.read_csv(path, sep=";", decimal=",")
num_cols = [col for col in df.columns if df[col].str.contains(",", na=False).any()]

for col in num_cols:
    df[col] = df[col].str.replace(",", ".", regex=False)
    df[col] = pd.to_numeric(df[col], errors="coerce")

col_NaN = [c for c in df.columns if df[c].isnull().mean()*100 > 60.0]
print("nb colonnes avec  60% de NaN",len(col_NaN))

quasi_constant = df.columns[
    df.apply(
        lambda x : x.value_counts(normalize=True).iloc[0]
        if x.dropna().size > 0 else 0
    ) > 0.90
]
print("\n nb de colonnes avec 90 % des données avec la même valeur :", len(quasi_constant))
```

```
nb colonnes avec  60% de NaN 0

 nb de colonnes avec 90 % des données avec la même valeur : 0
```

In [3]:
```
def audit(df):
    return pd.DataFrame({
        "dtype": df.dtypes,
        "missing": df.isna().sum(),
        "missing_%": (df.isna().mean() * 100).round(2),
        "unique": df.nunique(),
        "sample": df.iloc[0]
    })


audit(df)
```

Out[3]:

	dtype	missing	missing_%	unique	sample
IRIS	object	0	0.00	16026	010040101
DEC_PIMP21	float64	1536	9.58	83	43.0
DEC_TP6021	float64	1537	9.59	85	29.0
DEC_INCERT21	object	0	0.00	3	2
DEC_Q121	object	0	0.00	2737	12610
DEC_MED21	object	0	0.00	3498	19330
DEC_Q321	object	0	0.00	4343	26390
DEC_EQ21	float64	1536	9.58	190	0.71
DEC_D121	object	0	0.00	1953	7760
DEC_D221	object	0	0.00	2573	11300
DEC_D321	object	0	0.00	2919	13900
DEC_D421	object	0	0.00	3173	16440
DEC_D621	object	0	0.00	3782	21760
DEC_D721	object	0	0.00	4122	24660
DEC_D821	object	0	0.00	4632	28120
DEC_D921	object	0	0.00	5555	33850
DEC_RD21	float64	2219	13.85	817	4.4
DEC_S80S2021	float64	1577	9.84	860	6.3
DEC_GI21	float64	1536	9.58	466	0.318
DEC_PACT21	float64	1536	9.58	605	69.3
DEC_PTSA21	float64	1760	10.98	601	62.5
DEC_PCHO21	float64	1760	10.98	111	3.2
DEC_PBEN21	float64	1760	10.98	166	3.6
DEC_PPEN21	float64	1536	9.58	518	27.1
DEC_PAUT21	float64	1536	9.58	376	3.6
DEC_NOTE21	object	0	0.00	4	0

In [4]:

```
df = df.dropna()
na_counts = df.isna().sum().sort_values(ascending=False)
na_counts
```

Out[4]:
```
IRIS            0
DEC_PIMP21      0
DEC_TP6021      0
DEC_INCERT21    0
DEC_Q121        0
DEC_MED21       0
DEC_Q321        0
DEC_EQ21        0
DEC_D121        0
DEC_D221        0
DEC_D321        0
DEC_D421        0
DEC_D621        0
DEC_D721        0
DEC_D821        0
DEC_D921        0
DEC_RD21        0
DEC_S80S2021    0
DEC_GI21        0
DEC_PACT21      0
DEC_PTSA21      0
DEC_PCHO21      0
DEC_PBEN21      0
DEC_PPEN21      0
DEC_PAUT21      0
DEC_NOTE21      0
dtype: int64
```

In [5]:
```
df.shape
```

Out[5]:
```
(13674, 26)
```

In [6]:
```
df.describe()
```

Out[6]:

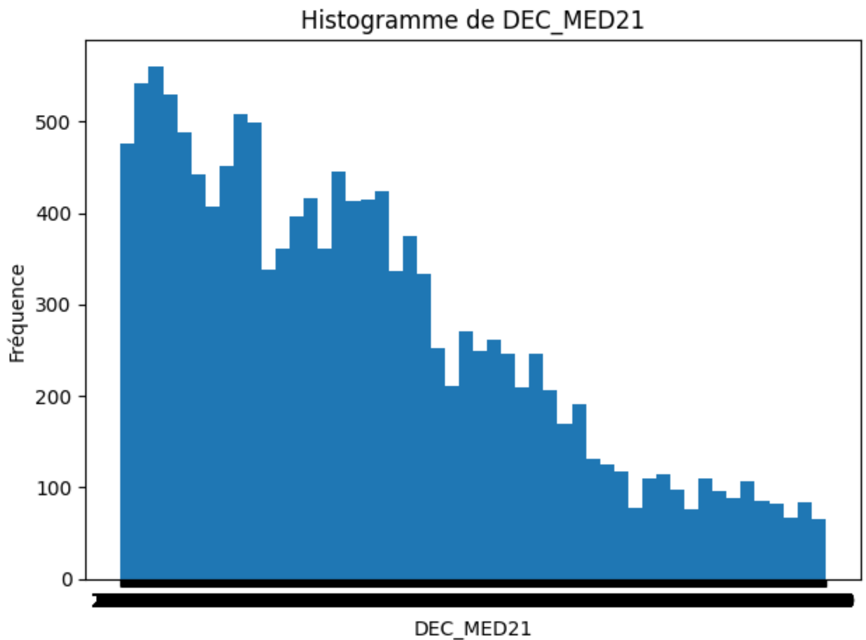
	DEC_PIMP21	DEC_TP6021	DEC_EQ21	DEC_RD21	DEC_S80S2021	DEC_GI21	DEC_PACT21	DEC_PTSA21	DEC_PCHO21	D
count	13674.000000	13674.000000	13674.000000	13674.000000	13674.000000	13674.000000	13674.000000	13674.000000	13674.000000	1
mean	53.881600	24.743235	0.819758	18.694669	9.932280	0.362767	68.288409	60.762608	3.254073	
std	14.230925	13.594410	0.191954	148.426722	6.484679	0.063986	9.691292	9.789245	1.256660	
min	7.000000	3.000000	0.410000	2.400000	2.800000	0.198000	19.400000	16.500000	0.400000	
25%	43.000000	14.000000	0.670000	4.500000	5.900000	0.319000	62.300000	54.600000	2.400000	
50%	54.000000	22.000000	0.790000	6.200000	8.100000	0.358000	68.800000	61.400000	3.000000	
75%	65.000000	33.000000	0.940000	9.200000	11.500000	0.399000	75.100000	67.800000	3.900000	
max	91.000000	83.000000	1.870000	6617.000000	150.300000	0.803000	98.200000	96.500000	13.300000	

In [7]:
```
vars_of_interest = [
    "DEC_MED21",    # Revenu médian
]

subset = df[vars_of_interest].copy()
subset.head()
```

Out[7]:

	DEC_MED21
0	19330
1	16830
2	19940
3	25560
4	19870

In [8]:
```
for col in vars_of_interest:
    data = subset[col]
    plt.figure()
    plt.hist(data, bins = 50)
    plt.title(f"Histogramme de {col}")
    plt.xlabel(col)
    plt.ylabel("Fréquence")
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```



On observe que la variable `DEC_MED21` , le Revenu médian semble suivre une **loi log-normale**

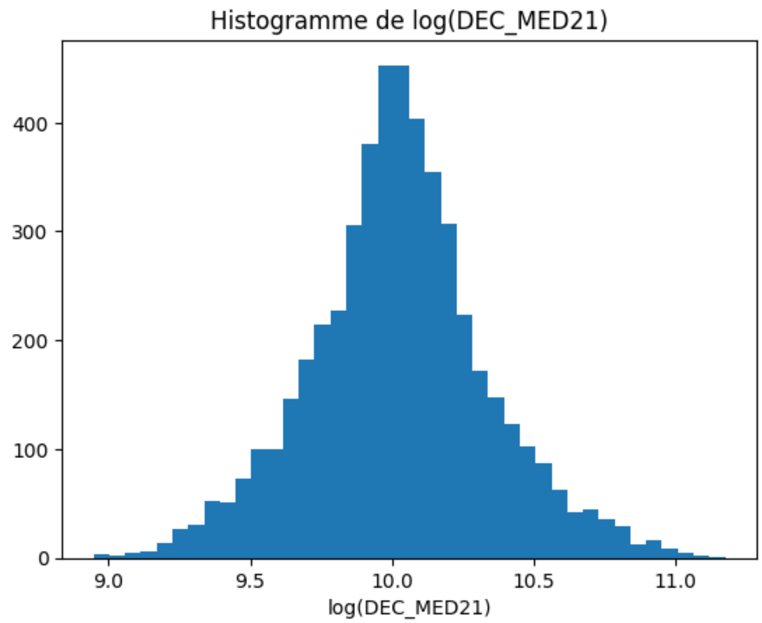
Nous proposons donc de construire deux estimateurs distincts afin d'estimer cette loie:

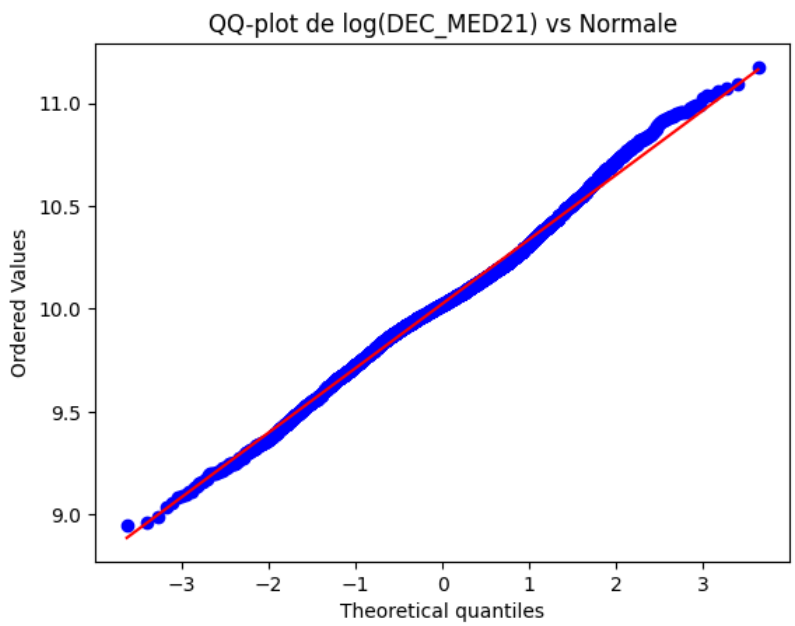
1. les estimateurs des maximum de vraissemblance
2. les etimateurs des moments

Vérifions que `DEC_MED21` suis bien une loie log normal pour se faire nous allons dans un premier temps vérifier la distibution de `log(DEC_MED21)` et enfin l'adéquation à une loi normale

In [9]:
```
sub = df["DEC_MED21"].dropna().astype(np.number).to_frame()
sub["IRIS"] = df.loc[sub.index, "IRIS"]
sub["DEC_MED21"] = pd.to_numeric(sub["DEC_MED21"], errors="coerce")
sub = sub[sub["DEC_MED21"] > 0]


sub_sample = sub.sample(n=5000, random_state=42)


x = sub_sample["DEC_MED21"].to_numpy()
logx = np.log(x)

# Histogramme
plt.figure()
plt.hist(logx, bins=40)
plt.title("Histogramme de log(DEC_MED21)")
plt.xlabel("log(DEC_MED21)")
plt.show()

# QQ-plot
plt.figure()
stats.probplot(logx, dist="norm", plot=plt)
plt.title("QQ-plot de log(DEC_MED21) vs Normale")
plt.show()
```

```
C:\Users\sppre\AppData\Roaming\Python\Python312\site-packages\pandas\core\dtypes\common.py:1645: DeprecationWarning: Converting
`np.inexact` or `np.floating` to a dtype is deprecated. The current result is `float64` which is not strictly correct.
  npdtype = np.dtype(dtype)
```





On a bien log(DEC_MED21) qui suis une loie normale, comme le montrent sa densité et le graphique QQ-plot. On va donc estimer ses paramètres en supposant une loi normale dans un premier temps.

Estimation des paramètres d'une loi log-normale

Estimation par le maximum de vraisemblance

Notre supposition que la variable aléatoire X suit une loi log-normale est donc justifié par le QQ-plot et sa densité.

On a donc :

$$E[X] = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad V[X] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2m+\sigma^2}$$

Par définition, cela signifie que la variable transformée

$$Y = \log(X)$$

suit une loi normale de paramètres m et σ^2, notée :

$$Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un échantillon i.i.d. issu de la loi de X, avec $x_i > 0$ pour tout i. On définit alors

$$y_i = \log(x_i),$$

de sorte que $(y_1, \ldots, y_n)$ est un échantillon i.i.d. issu de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

La densité d'une variable normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est donnée par :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

La fonction de vraisemblance associée à l'échantillon $(y_1, \ldots, y_n)$ s'écrit donc :

$$L(m, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_i-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On va chercher les maximums de vraissemblance pour se faire on considère la log-vraisemblance :

$$\ell(m, \sigma^2) = \log L(m, \sigma^2)$$

ce qui donne :

$$\ell(m, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - m)^2$$

Calcul des estimateurs du maximum de vraisemblance

On dérive la log-vraisemblance par rapport à m :

$$\frac{\partial \ell}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - m)$$

En annulant cette dérivée, on obtient la condition du premier ordre :

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

On dérive ensuite la log-vraisemblance par rapport à σ^2 :

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(y_i - m)^2$$

L'annulation de cette dérivée conduit à l'estimateur :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{m})^2$$

Afin de vérifier que ces estimateurs correspondent bien à un maximum de la fonction de log-vraisemblance, on étudie les dérivées secondes.

La dérivée seconde par rapport à m est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial m^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$$

ce qui montre que la fonction atteint un maximum en m.

De même, la dérivée seconde par rapport à σ^2 est :

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial (\sigma^2)^2} = -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} < 0$$

Ainsi, les points critiques obtenus correspondent bien à des maxima de la log-vraisemblance.

Une variable X suit une loi log-normale de paramètres (m,σ2) si et seulement si log(X) suit une loi normale de paramètres (m,σ2).

- L'EMV de m pour la loi normale de log(X) est l'EMV de m pour la loi log-normale de X.
- L'EMV de σ2 pour la loi normale de log(X) est l'EMV de σ2 pour la loi log-normale de X.

In [10]:

```
# moyenne empirique
moy_emp = np.mean(x)
```

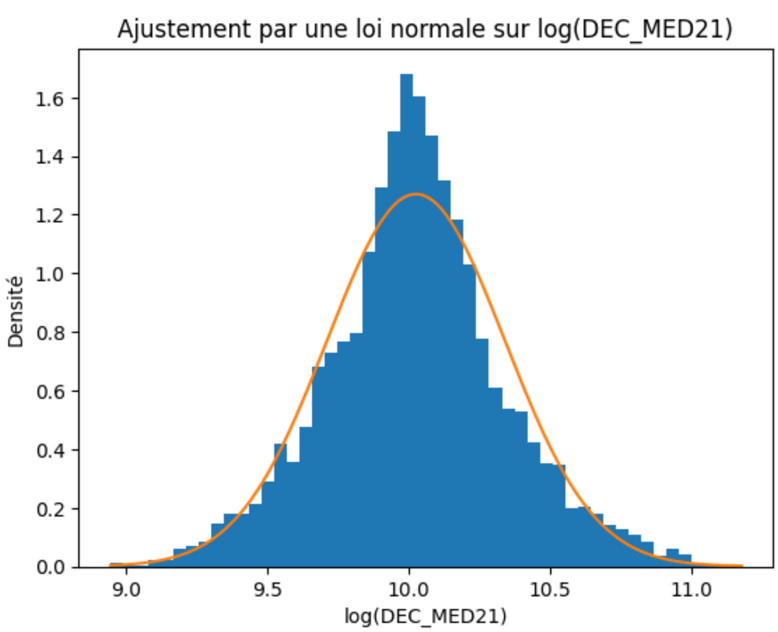
```
#variance empirque
var_emp = np.var(x, ddof=1)

print("Moyenne empirique  =", moy_emp)
print("Variance empirique non biaisée (ddof=1) =", var_emp)
```

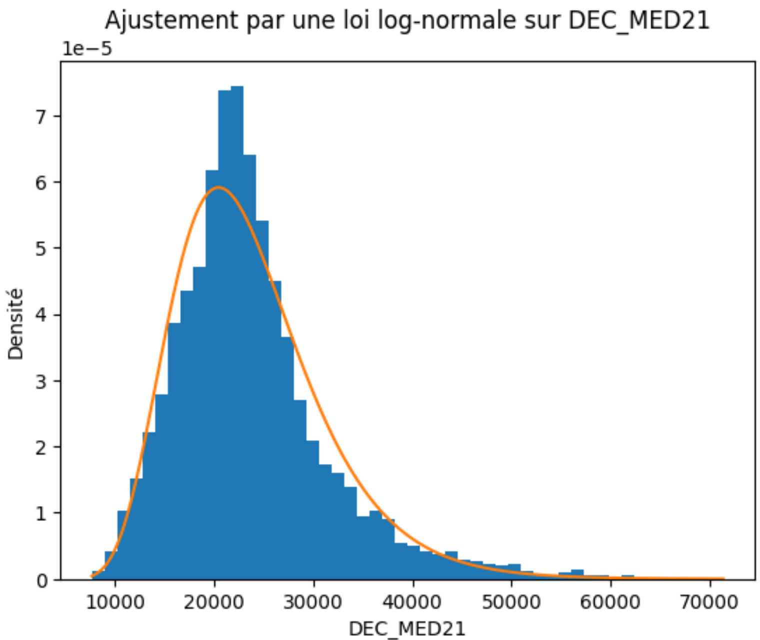
```
Moyenne empirique  = 23751.998
Variance empirique non biaisée (ddof=1) = 62033760.58011202
```

In [11]:
```
n = len(logx)

# moyenne
m_hat_emv = (1/n) * np.sum(logx)

# variance
sigma2_hat_emv = (1/(n-1)) * np.sum((logx - m_hat_emv)**2)

# écart-type
sigma_hat_emv = np.sqrt(sigma2_hat_emv)

print("Estimateur Maximun de vraissemblance de m :", m_hat_emv)
print("Estimateur max de vraissemblance de la variance :", sigma2_hat_emv)
```

```
Estimateur Maximun de vraissemblance de m : 10.025380193806052
Estimateur max de vraissemblance de la variance : 0.09862218315695598
```

In [12]:
```
from scipy.stats import norm, lognorm
# grille pour Log(X)
x_log = np.linspace(logx.min(), logx.max(), 500)

# densité normale estimée
pdf_normal = norm.pdf(x_log, loc=m_hat_emv, scale=sigma_hat_emv)

plt.figure()
plt.hist(logx, bins=50, density=True)
plt.plot(x_log, pdf_normal)
plt.title("Ajustement par une loi normale sur log(DEC_MED21)")
plt.xlabel("log(DEC_MED21)")
plt.ylabel("Densité")
plt.show()

# grille pour X
x_grid = np.linspace(x.min(), x.max(), 500)

# densité log-normale estimée
pdf_lognorm = lognorm.pdf(x_grid, s=sigma_hat_emv, scale=np.exp(m_hat_emv))

plt.figure()
plt.hist(x, bins=50, density=True)
plt.plot(x_grid, pdf_lognorm)
plt.title("Ajustement par une loi log-normale sur DEC_MED21")
plt.xlabel("DEC_MED21")
plt.ylabel("Densité")
plt.show()
```





Ces deux grpahes confirment que le revenu médian (DEC_MED21) suit bien une loi log-normale et que nos estimateurs semblent correspondrent à la loie que suit les données.

Estimations par la méthode des moments

On a $X \sim \text{Log-Normal}(m, \sigma^2)$, comme dit avant:

$$E[X] = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad V[X] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2m+\sigma^2}$$

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un échantillon i.i.d. issu de la loi de X. On définit la moyenne empirique $\bar{x}$ et la variance empirique s^2 par :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

L'estimation des paramètres consiste à résoudre le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} = \bar{x} & (1) \\ (e^{\sigma^2} - 1)e^{2m+\sigma^2} = s^2 & (2) \end{cases}$$

Calcul de l'estimateur de σ^2

On remarque que le terme $e^{2m+\sigma^2}$ dans l'équation (2) peut s'écrire comme le carré de l'expression de l'espérance issue de l'équation (1) :

$$(e^{m+\frac{\sigma^2}{2}})^2 = e^{2m+\sigma^2} = \bar{x}^2$$

En substituant cette égalité dans l'équation (2), on obtient :

$$(e^{\sigma^2} - 1)\bar{x}^2 = s^2$$

$$e^{\sigma^2} - 1 = \frac{s^2}{\bar{x}^2} \quad \Longrightarrow \quad e^{\sigma^2} = 1 + \frac{s^2}{\bar{x}^2}$$

Donc:

$$\hat{\sigma}^2_{MM} = \log\left(1 + \frac{s^2}{\bar{x}^2}\right)$$

Calcul de l'estimateur de m

D'après (1) :

$$m + \frac{\sigma^2}{2} = \log(\bar{x})$$

En utilisant l'estimateur $\hat{\sigma}^2_{MM}$ précédemment calculé, on trouve :

$$\hat{m}_{MM} = \log(\bar{x}) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2_{MM}$$

L'estimateur final est :

$$\hat{m}_{MM} = \log(\bar{x}) - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{s^2}{\bar{x}^2}\right)$$

Pour le reste des calculs on utilisera cette formule :

$$\hat{m}_{MM} = \log(\bar{x}) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2_{MM}$$

In [13]:
```
# Formules correctes
sigma2_hat_mm = np.log(1 + (var_emp / moy_emp**2))
m_hat_mm = np.log(moy_emp) - 0.5 * sigma2_hat_mm

# Calcul de l'écart-type
sigma_hat_mm = np.sqrt(sigma2_hat_mm)

print("Estimateur des moments de m :", m_hat_mm)
print("Estimateur des moments de  la variance:", sigma2_hat_mm)
```

```
Estimateur des moments de m : 10.0232607319065
Estimateur des moments de  la variance: 0.10432240066731328
```

Les estimateurs sont proches des résultats obtenu précedements nous allons maintenant vérifier les propriétés des estimateurs

Vérifions les propriétés des estimateurs

Nous allons vérifier les propriétés des estimateurs du Maximum de Vraisemblance ($\hat{m}_{EMV}, \hat{\sigma}^2_{EMV}$) et de la Méthode des Moments ($\hat{m}_{MM}, \hat{\sigma}^2_{MM}$).

Nous allons vérifier si les estimateurs sont biasés.

Un estimateur $\hat{\theta}$ est dit sans biais si $E[\hat{\theta}] = \theta$.

- **Pour l'EMV :**
  - L'estimateur $\hat{m}$ est **sans biais** :

$$\hat{m}_{EMV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \implies E[\hat{m}_{EMV}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[y_i] = \frac{1}{n}(n \cdot m) = m$$

    alors

$$E[\hat{m}_{EMV}] = m$$

  - L'estimateur $\hat{\sigma}^2$ est **biaisé** pour un échantillon fini : (démonstation en Annexe)

$$E[\hat{\sigma}^2_{EMV}] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

    mais il est asymptotiquement sans biais

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

- **Pour les Moments (MM) :** Nous avons obtenu les estimateurs suivants :

$$\hat{\sigma}^2_{MM} = \log\left(1 + \frac{s^2}{\bar{x}^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \hat{m}_{MM} = \log(\bar{x}) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2_{MM}$$

  Ces estimateurs sont **biaisés** car les fonctions logarithme et quotient ne sont pas linéaires. (La démonstration est en annexes) Nous mettrons en avant ici les méthodes utilisées et les résultats obtenus :

  1. **L'Inégalité de Jensen** : Pour une fonction strictement concave comme le logarithme, on a $E[\log(Z)] < \log(E[Z])$.
  2. **Application à** $\hat{m}_{MM}$: Le premier terme de l'estimateur est $\log(\bar{x})$. Comme la fonction $\log$ est concave, l'espérance de la fonction est inférieure à la fonction de l'espérance : $E[\log(\bar{x})] \neq \log(E[\bar{x}])$.

3. **Conséquence** : $E[\hat{m}_{MM}] \neq m$ et $E[\hat{\sigma}^2_{MM}] \neq \sigma^2$.

Cependant, ils sont **asymptotiquement sans biais** car, par continuité des fonctions et application de la Loi Forte des Grands Nombres ($\bar{x} \xrightarrow{p.s.} E[X]$ et $s^2 \xrightarrow{p.s.} V[X]$) :

$$\lim_{n\to\infty} E[\hat{m}_{MM}] = m \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} E[\hat{\sigma}^2_{MM}] = \sigma^2$$

Loi Forte des Grands Nombres

La **Loi Forte des Grands Nombres** garantit que la moyenne empirique converge presque sûrement vers l'espérance théorique lorsque $n \to \infty$, à condition que la variable X admette un moment d'ordre 1 fini ($E[|X|] < \infty$).

C'est bien le cas pour notre étude nous vérifierons par la suite son application. On a donc nos estimateurs qui convergent vers les paramètres :

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} \theta$$

Théorème de la Limite Centrale

Le **Théorème de la Limite Centrale** indique que pour un échantillon de grande taille ($n \to \infty$), si X admet un moment d'ordre 2 fini on a alors:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Où $m = E[X]$ et $\sigma^2 = V[X]$.

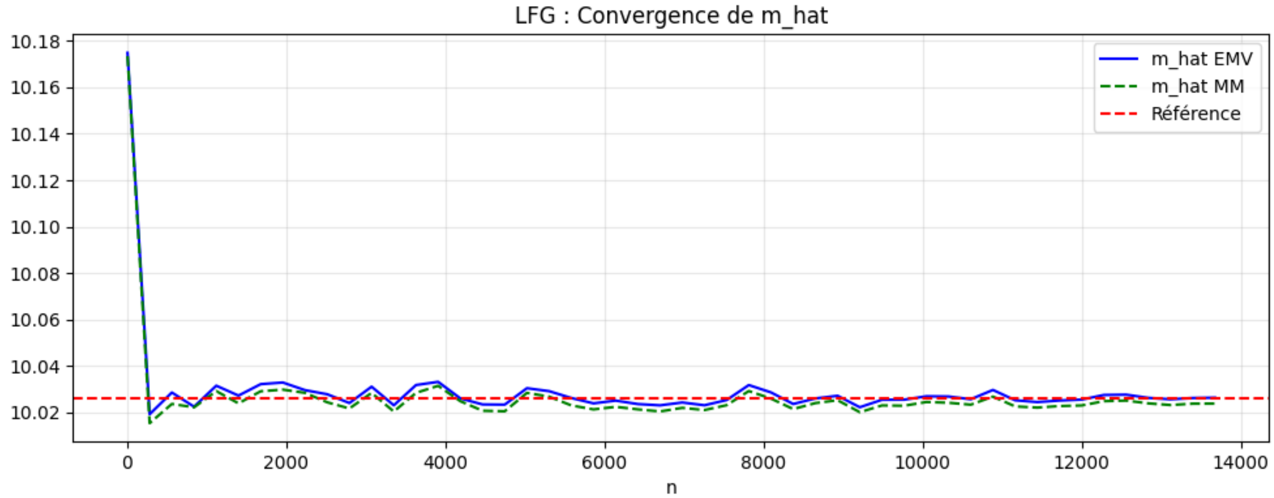
C'est bien le cas pour notre étude nous vérifierons par la suite son application.

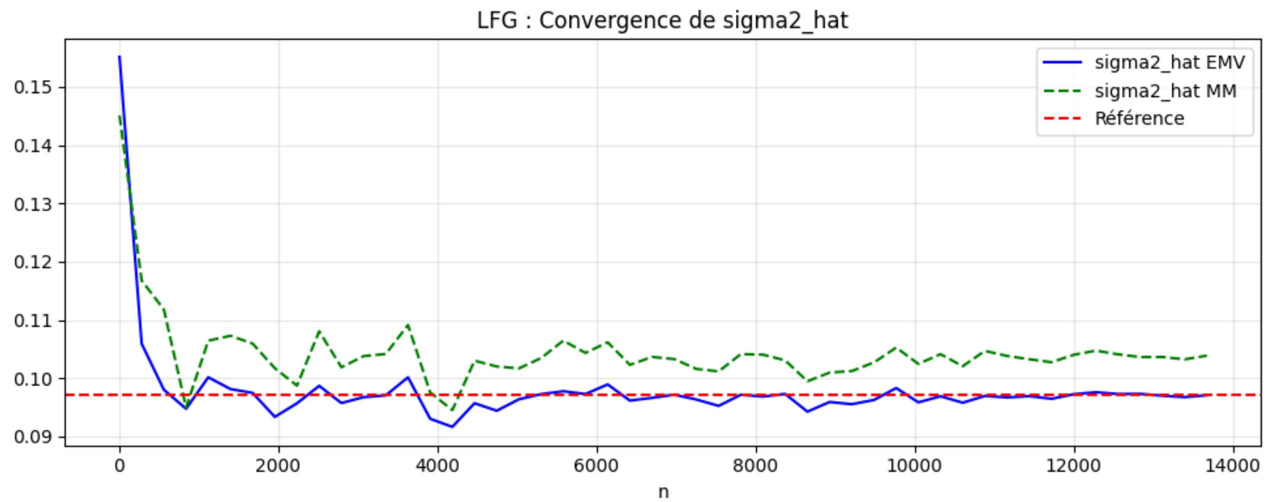
In [17]:

```python
def get_mle_estimates(x):
    log_x = np.log(x)
    m_hat = np.mean(log_x)
    sigma2_hat = np.var(log_x, ddof=1)
    return m_hat, sigma2_hat

def get_mm_estimates(x):
    x_bar = np.mean(x)
    v_emp = np.var(x)
    sigma2_hat = np.log(1 + v_emp / x_bar**2)
    m_hat = np.log(x_bar) - 0.5 * sigma2_hat
    return m_hat, sigma2_hat

x_pop = sub["DEC_MED21"].to_numpy()
logx_pop = np.log(x_pop)
m_ref = np.mean(logx_pop)
sigma2_ref = np.var(logx_pop, ddof=1)
sigma_ref = np.sqrt(sigma2_ref)
n_pop = len(x_pop)

n_small = 30
n_trials = 5000
results = {key: [] for key in ["mle_m", "mle_s2", "mm_m", "mm_s2"]}

for _ in range(n_trials):
    sample = np.random.choice(x_pop, n_small, replace=True)
    for name, func in [("mle", get_mle_estimates), ("mm", get_mm_estimates)]:
        m, s2 = func(sample)
        results[f"{name}_m"].append(m)
        results[f"{name}_s2"].append(s2)

print(f"--- Vérification du Biais (n={n_small}) ---")
print(f"m_ref : {m_ref:.6f} | E[m_EMV] : {np.mean(results['mle_m']):.6f} | E[m_MM] : {np.mean(results['mm_m']):.6f}")
print(f"sigma2_ref : {sigma2_ref:.6f} | E[sigma2_EMV] : {np.mean(results['mle_s2']):.6f} | E[sigma2_MM] : {np.mean(results['mm

n_values = np.linspace(10, n_pop, 50, dtype=int)
conv = {key: [] for key in ["mle_m", "mle_s2", "mm_m", "mm_s2"]}

for n in n_values:
    sample = np.random.choice(x_pop, n, replace=False)
    m_mle, s2_mle = get_mle_estimates(sample)
    m_mm, s2_mm = get_mm_estimates(sample)
    conv["mle_m"].append(m_mle)
    conv["mle_s2"].append(s2_mle)
    conv["mm_m"].append(m_mm)
    conv["mm_s2"].append(s2_mm)
```

```
fig, axes = plt.subplots(2, 1, figsize=(10, 8))
axes[0].plot(n_values, conv["mle_m"], label='m_hat EMV', color='blue')
axes[0].plot(n_values, conv["mm_m"], label='m_hat MM', color='green', linestyle='--')
axes[0].axhline(m_ref, color='red', linestyle='--', label='Référence')
axes[0].set_title('LFG : Convergence de m_hat')
axes[0].set_xlabel('n')
axes[0].legend()
axes[0].grid(alpha=0.3)

axes[1].plot(n_values, conv["mle_s2"], label='sigma2_hat EMV', color='blue')
axes[1].plot(n_values, conv["mm_s2"], label='sigma2_hat MM', color='green', linestyle='--')
axes[1].axhline(sigma2_ref, color='red', linestyle='--', label='Référence')
axes[1].set_title('LFG : Convergence de sigma2_hat')
axes[1].set_xlabel('n')
axes[1].legend()
axes[1].grid(alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

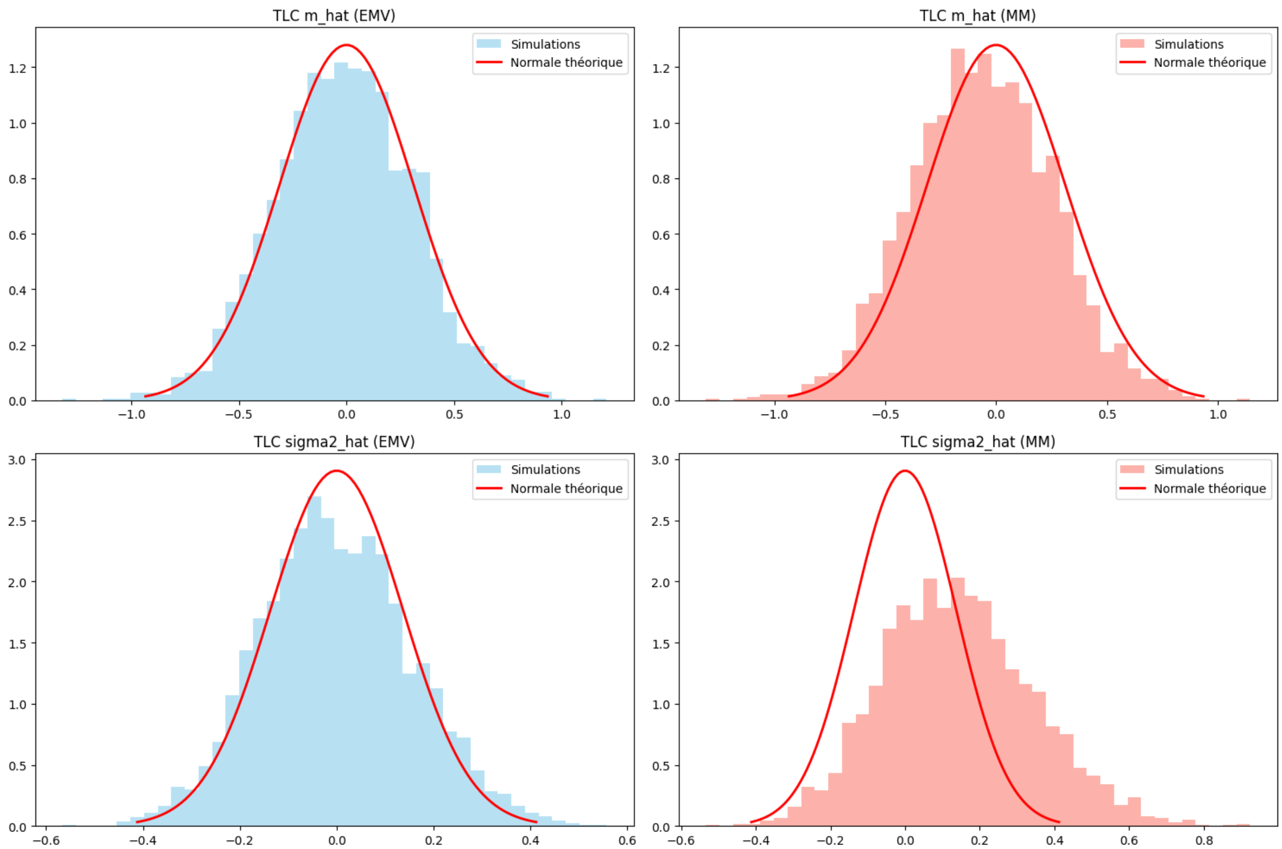
```
--- Vérification du Biais (n=30) ---
m_ref : 10.026414 | E[m_EMV] : 10.027541 | E[m_MM] : 10.025993
sigma2_ref : 0.097093 | E[sigma2_EMV] : 0.096408 | E[sigma2_MM] : 0.097667
```





In [18]:
```
n_clt = 500
n_clt_values = [30, 100, 500, 2000]
n_rep = 3000

err = {key: [] for key in ["mle_m", "mm_m", "mle_s2", "mm_s2"]}

for _ in range(3000):
    sample = np.random.choice(x_pop, n_clt, replace=True)
    m_mle, s2_mle = get_mle_estimates(sample)
    m_mm, s2_mm = get_mm_estimates(sample)
    err["mle_m"].append(np.sqrt(n_clt)*(m_mle - m_ref))
    err["mm_m"].append(np.sqrt(n_clt)*(m_mm - m_ref))
    err["mle_s2"].append(np.sqrt(n_clt)*(s2_mle - sigma2_ref))
```

```
    err["mm_s2"].append(np.sqrt(n_clt)*(s2_mm - sigma2_ref))

fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(15, 10))
x_m = np.linspace(-3*sigma_ref, 3*sigma_ref, 100)
pdf_m = stats.norm.pdf(x_m, 0, sigma_ref)
axes[0, 0].hist(err["mle_m"], bins=40, density=True, alpha=0.6, color='skyblue', label='Simulations')
axes[0, 0].plot(x_m, pdf_m, color='red', lw=2, label='Normale théorique')
axes[0, 0].set_title('TLC m_hat (EMV)')
axes[0, 0].legend()

axes[0, 1].hist(err["mm_m"], bins=40, density=True, alpha=0.6, color='salmon', label='Simulations')
axes[0, 1].plot(x_m, pdf_m, color='red', lw=2, label='Normale théorique')
axes[0, 1].set_title('TLC m_hat (MM)')
axes[0, 1].legend()

std_err_s2 = np.sqrt(2 * sigma2_ref**2)
x_s2 = np.linspace(-3*std_err_s2, 3*std_err_s2, 100)
pdf_s2 = stats.norm.pdf(x_s2, 0, std_err_s2)
axes[1, 0].hist(err["mle_s2"], bins=40, density=True, alpha=0.6, color='skyblue', label='Simulations')
axes[1, 0].plot(x_s2, pdf_s2, color='red', lw=2, label='Normale théorique')
axes[1, 0].set_title('TLC sigma2_hat (EMV)')
axes[1, 0].legend()

axes[1, 1].hist(err["mm_s2"], bins=40, density=True, alpha=0.6, color='salmon', label='Simulations')
axes[1, 1].plot(x_s2, pdf_s2, color='red', lw=2, label='Normale théorique')
axes[1, 1].set_title('TLC sigma2_hat (MM)')
axes[1, 1].legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```



Interprétation des graphiques

L'EMV est plus performant que la méthode des moments car il est sans biais (pour m), et a variance minimale, et converge plus vite vers la réalité. Les tests confirment que nos estimateurs sont consistants et suivent une loi normale.

Efficacité et Information de Fisher

Un estimateur est considéré comme **optimal** s'il atteint la **Borne de Cramér-Rao (BCR)**. La borne est donnée par l'inverse de l'Information de Fisher pour un échantillon de taille n :

$$Var(\hat{\theta}) \geq \mathrm{BCR}(\theta) = \frac{1}{n \cdot I(\theta)}$$

Pour la loi log-normale, la matrice d'Information de Fisher est :

$$I(m, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

Puisque $X \sim \mathrm{Lognormale}(m, \sigma^2)$, alors $Y = \log(X) \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. L'EMV estime les paramètres d'une loi normale sur les données transformées $y_i = \log(x_i)$.

A. Variance de $\hat{m}_{EMV}$: $\hat{m}_{EMV}$ est la moyenne empirique des y_i : $\hat{m} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$.

$$Var(\hat{m}_{EMV}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(y_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

On a $Var(\hat{m}_{EMV}) = \mathrm{BCR}(m)$, l'estimateur est donc **efficace**.

B. Variance de $\hat{\sigma}^2_{EMV}$: Pour la variance de $\hat{\sigma}^2_{EMV}$ nous obtenons:

$$Var(\hat{\sigma}^2_{EMV}) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

Asymptotiquement ($n \to \infty$), on atteint la borne $\frac{2\sigma^4}{n} = \mathrm{BCR}(\sigma^2)$.

Les estimateurs MM sont des fonctions non-linéaires des moments empiriques de X.

A. Variance de $\hat{m}_{MM}$: on admettras que :

$$Var(\hat{m}_{MM}) \approx \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^4}{2n}$$

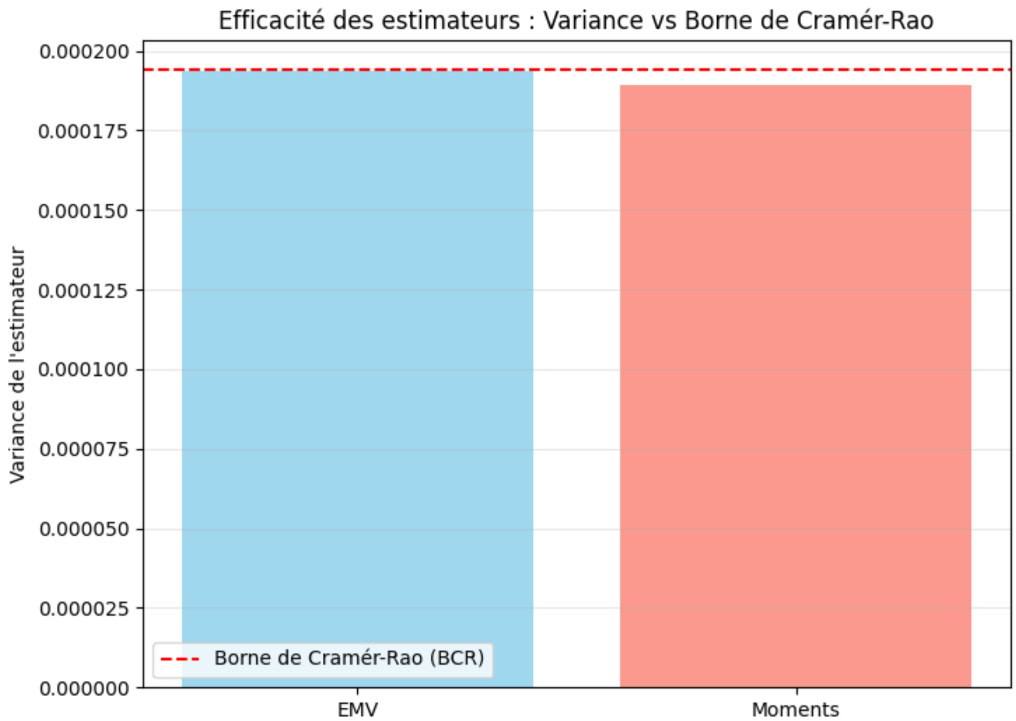
On observe que $Var(\hat{m}_{MM}) > \mathrm{BCR}(m)$.

Il n'est pas nécessaire de calculer la variance pour $\hat{\sigma}^2_{MM}$

Conclusion : L'EMV est la méthode d'estimation à privilégier car il est **asymptotiquement efficace**

In [19]:
```
# --- Comparaison de L'Efficacité ---
n = 500
n_trials = 5000
m_true = m_ref
sigma2_true = np.var(np.log(x_pop))

bcr_m = sigma2_true / n

vars_mle_m = []
vars_mm_m = []

for _ in range(n_trials):
    # Tirage aléatoire dans la population
    sample = np.random.choice(x_pop, size=n, replace=True)

    # 1. Estimation m par EMV
    m_mle = np.mean(np.log(sample))

    # 2. Estimation m par Moments
    x_bar = np.mean(sample)
    v_emp = np.var(sample)
    s2_mm = np.log(1 + v_emp / (x_bar**2))
    m_mm = np.log(x_bar) - 0.5 * s2_mm

    vars_mle_m.append(m_mle)
    vars_mm_m.append(m_mm)

var_reelle_mle = np.var(vars_mle_m)
var_reelle_mm = np.var(vars_mm_m)

# --- Visualisation ---
plt.figure(figsize=(8, 6))
methods = ['EMV', 'Moments']
variances = [var_reelle_mle, var_reelle_mm]
plt.bar(methods, variances, color=['skyblue', 'salmon'], alpha=0.8)
```

```
plt.axhline(y=bcr_m, color='red', linestyle='--', label='Borne de Cramér-Rao (BCR)')
plt.title('Efficacité des estimateurs : Variance vs Borne de Cramér-Rao')
plt.ylabel('Variance de l\'estimateur')
plt.legend()
plt.grid(axis='y', alpha=0.3)
```



On a donc bien la borne de Cramér-Rao atteinte pour les estimateurs emv mais pas par les estimateurs des moments. Les estimateurs Emv sont donc efficaces

Conclusion du Projet

Cette étude visait à modéliser la distribution du revenu médian annuel des ménages au niveau des IRIS (variable DEC_MED21) en utilisant les données de l'INSEE. Nous avons dans un premier valider l'hypothèse que cette variable suit une **loi log-normale**.

Par la suite nous avons utilisés deux méthodespour estimer les paramètres m et σ2 :

- **L'Estimateur du Maximum de Vraisemblance (EMV)** : Les tests ont démontré que cet estimateur est le plus performant. Bien que l'estimateur de la variance soit biaisé pour de petits échantillons, il est asymptotiquement sans biais et, surtout, il s'avère efficace en atteignant la borne de Cramér-Rao.
- **La Méthode des Moments (MM)** : Bien que fournissant des résultats numériques proches pour de grands échantillons , ces estimateurs sont biaisés en raison de la non-linéarité des fonctions logarithmiques . Ils n'atteignent pas la borne de Cramér-Rao, ils sont donc moins optimales que l'EMV.

En conclusion, **l'EMV est la méthode d'estimation à privilégier** pour ce jeu de données car elle offre une convergence plus rapide vers la réalité et une variance minimale.

Ouverture et perspectives

Pour approfondir cette analyse,on pourrait étudier cette même variable d'intérêt en utilisant une **loi de Pareto**. Cette loi est souvent utilisée pour modéliser les distributions de revenus. Comparer les résultats obtenus entre le modèle log-normal et le modèle de Pareto permettrait de déterminer lequel décrit le mieux cette variable.

Annexe

Calcul de l'espérance de l'estimateur de la variance (EMV)

Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ un échantillon i.i.d. de loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

Pour l'estimateur EMV de la variance nous avons obtenu :

$$\hat{\sigma}^2_{\text{EMV}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 \quad \text{où} \quad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2 - n(\bar{Y} - \mu)^2$$

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\Big] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(Y_i - \mu)^2] - n\mathbb{E}[(\bar{Y} - \mu)^2]$$

Or :

- $\mathbb{E}[(Y_i - \mu)^2] = \sigma^2$
- $\mathbb{E}[(\bar{Y} - \mu)^2] = \text{Var}(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Donc :

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\Big] = n\sigma^2 - n \cdot \frac{\sigma^2}{n} = n\sigma^2 - \sigma^2 = (n-1)\sigma^2$$

Espérance de l'estimateur EMV

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2_{\text{EMV}}] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\Big] = \frac{1}{n}(n-1)\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

L'estimateur de la variance EMV est donc **biaisé**.

Calcul du bias des estimateurs des moments

Posons :

$$Z = \frac{S_X^2}{\bar{X}^2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\sigma}^2_{\text{MM}} = \ln(1 + Z)$$

Calculons la valeur de la variance

$$\text{Var}(X) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - (e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}})^2$$

$$(\mathbb{E}[X])^2 = e^{2\mu + \sigma^2}$$

$$\frac{\text{Var}(X)}{(\mathbb{E}[X])^2} = \frac{e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}}{e^{2\mu + \sigma^2}} = \frac{e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)}{e^{2\mu + \sigma^2}} = e^{\sigma^2} - 1$$

$$\ln\left(1 + \frac{\text{Var}(X)}{(\mathbb{E}[X])^2}\right) = \ln(e^{\sigma^2}) = \sigma^2$$

On obtient donc:

$$\sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{\mathbb{V}(X)}{(\mathbb{E}X)^2}\right)$$

Non-linéarité de l'espérance

L'espérance est un opérateur linéaire, mais elle n'est pas compatible avec les fonctions non linéaires :

$$\mathbb{E}[g(Z)] = g(\mathbb{E}[Z]) \quad \text{uniquement si } g \text{ est affine}$$

Dans notre cas :

$$g(z) = \ln(1 + z)$$

Cette fonction est **strictement concave** sur $\mathbb{R}_+$.

Inégalité de Jensen

Comme la fonction $\ln(1+z)$ est concave, l'inégalité de Jensen donne :

$$\mathbb{E}[\ln(1+Z)] \;\leq\; \ln\big(1+\mathbb{E}[Z]\big)$$

Par la loi des grands nombres :

$$\bar{X} \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}(X), \qquad S_X^2 \xrightarrow{a.s.} \mathbb{V}(X)$$

Ainsi, pour n grand on a:

$$\mathbb{E}[Z] \approx \frac{\mathbb{V}(X)}{(\mathbb{E}X)^2}$$

On obtient donc :

$$\mathbb{E}\Big(\widehat{\sigma}^2_{\mathrm{MM}}\Big) = \mathbb{E}[\ln(1+Z)] < \ln\left(1+\frac{\mathbb{V}(X)}{(\mathbb{E}X)^2}\right) = \sigma^2$$

Donc l'estimateur des moments de la variance est **biaisé**