Analyse Fonctionnelle pour Physiciens

Baptiste Claudon
January 7, 2021

Notes personnelles basées sur le cours de Simon Bossoney.
Suit les cours d'Analyse I à III de Joachim Stubbe et le cours d'Analyse IV de Matthias Ruf.

Contents

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
3ème année de Physique
Baptiste CLAUDON

Part I
Espaces Fonctionnels

I. LE THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS

Théorème 1. Théorème de Diniz Soit (f_n) une suite de fonctions réelles et continues définies sur un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et convergent simplement et de manière monotone vers $f \in C(K, \mathbb{R})$. Alors cette suite converge uniformément vers f.

Preuve. Choisir, sans perte de généralité que (f_n) est décroissante et converge simplement vers 0. Soit $\epsilon > 0$. Poser pour $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \{x \in K : f_n(x) < \epsilon\} \tag{1}$$

Par continuité des fonctions de la suite, tous ces ensembles sont des ouverts. Puisque la suite tend vers 0, on a :

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \tag{2}$$

K étant compact, il existe un nombre $F \in \mathbb{N}$ tel que

$$K = \bigcup_{n=0}^{F} V_n = K \tag{3}$$

Puisque la suite est monotone décroissante, on a que $m < n$ implique $V_m \subseteq V_n$, donc $V_F = K$. □

Définition 1. Soit F une famille de fonctions définies sur un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$. On dit que F sépare X si :

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists f \in F : f(x) \neq f(y) \tag{4}$$

Définition 2. On dit que F ne s'annule pas sur X si :

$$\forall x \in X \exists f \in F : f(x) \neq 0 \tag{5}$$

Définition 3. Si B est un sous-ensemble d'une $\mathbb{K}$-algèbre A, alors la $\mathbb{K}$-algèbre engendrée par B, $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}(B)$ est la plus petite $\mathbb{K}$-algèbre contenant B.

Théorème 2. Théorème de Stone-Weierstrass Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et soit $F \subseteq C(X, \mathbb{R})$ une famille de fonctions qui sépare X et qui ne s'annule pas sur X. Alors l'algèbre réelle $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}(F)$ engendrée par F est uniformément dense dans $C(X, \mathbb{R})$:

$$\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}(F)}^{||\cdot||_\infty} = C(X, \mathbb{R}) \tag{6}$$

Preuve.

Lemme 1. Il existe une suite (P_n) de polynômes sur $[-1, 1]$ qui converge uniformément vers x.

Définir la suite de polynômes par $P_0 = 0$ et :

$$\forall n \geq 0 : P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2) \tag{7}$$

On déduit alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1] : 0 \leq P_n(x) \leq |x|$. Alors, on déduit que la suite (P_n) est croissante. Puisque qu'elle est majorée elle doit converger. La limite doit être point fixe de l'application donc est $x \mapsto |x|$. Par le théorème de Diniz 1, la convergence est uniforme.

Lemme 2. Si $f, g_i \in \overline{\mathcal{A}(F)}$, $i = 1, ..., n$, alors $|f|, \min_{i=1,...,n} g_i, \max_{i=1,...,n} g_i$ appartiennent aussi à $\overline{\mathcal{A}(F)}$.

Si $f \neq 0$, poser $h = \frac{f}{||f||}$. Noter $h \in \overline{\mathcal{A}(F)}$ et a son image dans $[-1, 1]$. Par le lemme 1, il existe un polynôme P tel que $P(h)$ converge uniformément vers $\frac{|f|}{||f||}$. Pour $g_1, g_2 \in \overline{\mathcal{A}(F)}$, utiliser :

$$\min\{g_1, g_2\} = \frac{f + g + |f - g|}{2} \tag{8}$$

et

$$\max\{g_1, g_2\} = \frac{f + g - |f - g|}{2} \tag{9}$$

Conclure alors récursivement.

Lemme 3. Pour tous $x, y \in X$ et $x \neq y$, et pour tout couple de réels α, β, il existe un élément $f \in \mathcal{A}(F)$ tel que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

Avec les hypothèses du théorème, pour $z = x, y$, il existe $h_z \in F : h_z(x) \neq 0$. Il existe également $g \in F$ tel que $g(x) \neq g(y)$. La fonction :

$$f : X \to \mathbb{R}, t \mapsto \alpha \frac{g(t) - g(y)}{g(x) - g(y)} \frac{h_x(t)}{h_x(x)} + \beta \frac{g(t) - g(x)}{g(y) - g(x)} \frac{h_y(t)}{h_y(y)} \tag{10}$$

satisfait les hypothèses du lemme.

Lemme 4. Soient $f \in C(X, \mathbb{R}), x_0 \in X$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe $g_{x_0,\epsilon} \in \overline{\mathcal{A}(F)}$:

$$g_{x_0,\epsilon}(x_0) = f(x_0) \text{ et } g_{x_0,\epsilon} < f + \epsilon \tag{11}$$

Grâce au lemme 3, pour chaque $y \in X \backslash \{x_0\}$, on peut choisir $h_y \in \mathcal{A}(F)$ telle que $f(y) = h_y(y)$ et $f(x_0) = f_y(x_0)$. Puisque h_y et f sont continues, l'ensemble :

$$U_y = \{x \in X : h_y(x) < f(x) + \epsilon\} \tag{12}$$

est un ouvert. Puisque $\forall y \in X,\ y \in U_y$, on a (l'inclusion réciproque étant explicite) :

$$X = \bigcup_{y \in X} U_y \tag{13}$$

Comme X est compact, il existe une sous-collection d'ouvert finie $\{U_{y_i}\}_{1 \leq i \leq p}$ telle que :

$$X = \bigcup_{i=1}^{p} U_y \tag{14}$$

Poser alors $g_{x_0,\epsilon} = \max_{i=1,\ldots,p} h_{y_i}$. Cette fonction satisfait les hypothèses du lemme et appartient à l'algèbre engendrée par le lemme 2.

Lemme 5. Soient $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Il existe une fonction $g \in \overline{\mathcal{A}(F)}$ telle que $f - \epsilon \leq g \leq f + \epsilon$.

Par le lemme 4, on peut choisir pour tout $x \in X$ une fonction $g_{x,\epsilon} \in \overline{\mathcal{A}(F)}$ telle que $g_{x,\epsilon}(x) = f(x)$ et $g_{x,\epsilon} < f + \epsilon$. Pour chaque $x \in V$, définir :

$$V_x = \{z \in X : f(x) - \epsilon < g_{x,\epsilon}(z)\} \tag{15}$$

Puisque $g_{x,\epsilon}$ est définie comme le maximum de plusieurs fonctions continues, elle est continue. V_x est donc ouvert pour chaque $x \in X$. Procédant comme auparavant, remarquer que l'union des membres de la famille d'ouverts vaut X, en extraire une sous-famille finie. Définir cette fois g comme le minimum des fonctions sélectionnées. Par le lemme 2, $g \in \overline{\mathcal{A}(F)}$. Elle vérifie de plus les propriétés recherchées par le lemme, et plus généralement par le théorème de Stone-Weierstrass. $\square$

Corollaire 1. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $F \subseteq C(X, \mathbb{C})$ une famille de fonction qui sépare X, invariante sous conjugaison complexe et qui ne s'annule pas sur X. Alors l'algèbre complexe $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(F)$ engendrée par F est uniformément dense dans $C(X, \mathbb{C})$, c'est-à-dire $f \in \overline{\mathcal{A}(F)}$.

Preuve. On a $F = F^*$ car :

$$F^* \subseteq F = (F^*)^* \subseteq F^* \tag{16}$$

Comme F sépare X et ne s'annule pas sur X, $G = (F + F^*) \cup i(F - F^*)$ ne s'annule pas sur X non plus et sépare aussi X. Or $F \subseteq C(X, \mathbb{R})$ et par le théorème de Stone-Weierstrass 2, $C(X, \mathbb{R}) = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(G)}$. Comme $C(X, \mathbb{C}) = C(X, \mathbb{R}) + iC(X, \mathbb{R})$ et que $\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(G)}, i\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(G)} \subset \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(G)}$, on a que $C(X, \mathbb{C}) = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(G)}$. Or : $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(G) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(F)$. $\square$

Corollaire 2. Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble compact. L'ensemble $\mathbb{C}[X]$ est uniformément dense dans $C(X, \mathbb{C})$.

Preuve. $\mathbb{C}[X] = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\{1, id_X\})$ vérifie les hypothèses du corollaire 1. $\square$

Corollaire 3. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. L'algèbre engendrée sur les complexes par F défini comme :

$$F = \left\{ e^{2\pi ni \frac{x-a}{b-a}}, x \in I, n \in \mathbb{N} \right\} \tag{17}$$

est uniformément dense dans $V = \{f : f \in C([a, b], \mathbb{C}), f(a) = f(b)\}$.

Preuve. La fonction φ définie par :

$$\varphi : [a, b] \to \partial B_1(0), x \mapsto e^{2\pi ni \frac{x-a}{b-a}} \tag{18}$$

induit un homéomorphisme isométrique $\Phi : C(\partial B_1(0), \mathbb{C}) \to V, f \mapsto f \circ \varphi$. Or, $C(\partial B_1(0), \mathbb{C}) = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\{1, z \mapsto z, z \mapsto z^*\})}$ puisque $\{1, z \mapsto z, z \mapsto z^*\}$ satisfait les hypothèses du corollaire 1 et $F = \Phi|_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\{1, z \mapsto z, z \mapsto z^*\})}$. $\square$

II. SYSTÈMES COMPLETS ET ORTHONORMÉS

Définition 4. Soit $\mathcal{H}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $F \subseteq \mathcal{H}$ est dite complète si l'ensemble $\mathrm{Vect}(F)$ des combinaisons linéaires d'éléments de F est un ensemble dense de $\mathcal{H}$.

Théorème 3. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ séparable. Soit $B = \{\varphi_n\}_{n\in I}$ une famille de vecteurs othonormée. Alors $|B| \leq |\mathbb{N}|$.

Preuve. Puisque $\mathcal{H}$ est séparable, il existe une famille $D = \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ dense dans $\mathcal{H}$. Il existe alors pour chaque $\varphi_k \in B$ un élément de $\psi_k \in D$ tel que $||\varphi_k - \psi_k|| \leq 1/\sqrt{2}$. Si $\varphi_k \neq \varphi_l$, alors par orthonormalité $||\varphi_k - \varphi_l||^2 = 2$ est par conséquent, $||\varphi_k - \varphi_l|| = \sqrt{2}$. Mais alors, $\psi_k \neq \psi_l$ puisque la supposition contraire entraînerait $||\varphi_k - \varphi_l|| \leq ||\varphi_k - \psi_k|| + ||\varphi_l - \psi_k|| < \sqrt{2}$, une contradiction. On a alors une fonction injective de B dans D. □

Théorème 4. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Il existe alors un système complet et orthonormé $\{b_n\}_{n\in I}$ avec $I \subseteq \mathbb{N}$.

Preuve. Comme $\mathcal{H}$ est séparable, il existe une famille $D = \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $\mathcal{H}$. On va itérativement construire une famille $\{v_n\}_{n\in J} \subseteq D$ de la manière suivante :

$$\varphi(n+1) = \inf\{k \in \mathbb{N} : k > \varphi(n) \text{ et } d_k \notin \mathrm{Vect}[v_0, ..., v_n]\} \tag{19}$$

$$\varphi(0) = 0, v_{n+1} = d_{\varphi(n+1)} \tag{20}$$

Clairement, la famille $\{v_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ est formée de vecteurs linéairement indépendants. De plus, $\mathrm{Vect}[v_n]_{n\in J}$ est dense dans $\mathcal{H}$, puisque $D \subseteq \mathrm{Vect}[v_n]_{n\in J}$. On forme maintenant une famille de vecteurs orthonormés à partir de $\{v_n\}_{n\in J}$ et $\mathrm{Vect}[v_n]_{n\in J}$.

$$b_n = \frac{1}{||v_n - \sum_{k=0}^{n-1}\langle b_k, v_n\rangle b_k||}\left(v_n - \sum_{k=0}^{n-1}\langle b_k, v_n\rangle b_k\right) \tag{21}$$

Manifestement, $\{b_n\}_{n\in J}$ est une famille de vecteurs orthonormés et $\mathrm{Vect}[b_n]_{n\in J} = \mathrm{Vect}[v_n]_{n\in J}$, de sorte de $\{b_n\}_{n\in J}$ forme un système complet. □

Théorème 5. Soit $\{b_n\}_{n\in B}, B \subseteq \mathbb{N}$ une famille de vecteurs orthonormés d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\{b_n\}_{n\in B}$ est complet
2. $\forall x \in \mathcal{H}$, $x = \sum_{n\in B}\langle b_n, x\rangle b_n$
3. $\forall x, y \in \mathcal{H}$, $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in B}\langle x, b_n\rangle\langle b_n, y\rangle$

Preuve. Montrer que 1. $\Longrightarrow$ 2.. Pour $F \subseteq B$, $|F| < \infty$, former les espaces $V_F = \mathrm{Vect}[\{b_n\}_{n\in F}]$. Tous ces espaces sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{H}$ fermés, complets et convexes. $\{b_n\}_{n\in B}$ étant complet, $\cup_{F\subseteq B:|F|<\infty}V_F$ est dense dans $\mathcal{H}$. Soient $x \in \mathcal{H}$, $\epsilon > 0$. Il existe alors un $y \in V_F$ tel que $||x - y|| < \epsilon$. A fortiori, notant x_{V_F} la projection de x sur V_F (et de même pour G ensuite), $||x - x_{V_F}|| < \epsilon$, et si $F \subseteq G \subseteq B$, $|G| < \infty$, on a :

$$||x - x_{V_G}|| = \inf\{||x - y|| : y \in V_G\} \leq \inf\{||x - y|| : y \in V_F\} < \epsilon \tag{22}$$

C'est-à-dire, les projections de x sur les V_F convergent vers x. Poser $x_{V_F} = \sum_{n\in F}\lambda_n b_n$. Puisque $x - x_{V_F} \perp V_F$, on doit avoir pour $b_m \in V_F$:

$$0 = \langle x, b_m\rangle - \overline{\lambda}\langle b_m, b_m\rangle \tag{23}$$

d'où $\lambda_m = \langle b_m, x\rangle$ et enfin :

$$x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in B, k\leq n}\langle b_k, x\rangle b_k \tag{24}$$

Montrer que 2. $\Longrightarrow$ 3.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in B}\sum_{m\in B}\langle b_n, x\rangle\langle y, b_m\rangle\langle b_n, b_m\rangle = \sum_{n\in B}\langle x, b_n\rangle\langle b_n, y\rangle \tag{25}$$

Montrer que 3. $\Longrightarrow$ 1.. En posant $x = y$, on obtient $||x|| = \sum_{n\in B}|\langle x, b_n\rangle|^2 < \infty$. Ainsi, la suite $\left(\sum_{k\in B, k\leq n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\langle b_k, x\rangle b_k$ est une suite de Cauchy dont on a clairement la limite x car $(\langle x, b_k\rangle)_{k\in B}$ est une suite dans $l^2(B)$. □

Part II
Mesures et intégrales

III. SÉPARATION ET PARTITION

Pour $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, poser $d : \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$:

$$(x, A) \mapsto \inf\{|x - y| : y \in A\} \tag{26}$$

Théorème 6. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors la fonction $d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$:

$$x \mapsto d(x, A) \tag{27}$$

est continue.

Preuve. Soit $A \neq \emptyset$. Soit $\epsilon > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $|x - y| < \delta$. Supposer (autrement inverser les rôles) que $d_A(y) \leq d_A(x)$. Utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|d_A(x) - d_A(y)| = \inf_{z \in A} d(x, z) - \inf_{z \in A} d(y, z) \leq d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) - \inf_{z \in A} d(y, z) < \delta \tag{28}$$

Prendre $\delta = \epsilon$. □

Définition 5. Un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est dit relativement compact si sa fermeture est compact.

Lemme 6. Soit un compact $K \subset \mathbb{R}^n$. Il existe alors un ouvert U relativement compact tel que $K \subset U$.

Preuve. Si $K = \emptyset$, prendre $U = B_1(x), x \in \mathbb{R}^n$. Sinon, considérer la famille d'ouverts $\{B_1(x)\}_{x \in K}$ qui recouvre K. Extraire une sous-famille finie $F \subset K$ qui recouvre K. L'ouvert :

$$U = \bigcup_{x \in F} B_1(x) \tag{29}$$

satisfait aux exigences du lemme. □

Définition 6. Soient $K \subset V \subseteq \mathbb{R}^n$, avec K compact et V ouvert. On dit qu'une fonction $f \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ sépare K de $\mathbb{R}^n \backslash V$ et note $K \prec f \prec V$, si $f^{-1}\{1\}$ est un voisinage de K et si $\mathrm{supp}(f) \subset V$.

Lemme 7. Lemme d'Urysohn Soient $K \subset V \subseteq \mathbb{R}^n$, avec K compact et V ouvert. Il existe alors une fonction f telle que $K \prec f \prec V$.

Preuve. Par le lemme 6, il existe un ouvert U contenant K relativement compact. Remplaçant si nécessaire V par $V \cap U$, on peut supposer que V est relativement compact. La fonction :

$$g(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^n \backslash V)}{d(x, \mathbb{R}^n \backslash V) + d(x, K)} \tag{30}$$

est manifestement définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et continue comme combinaison de fonctions continues. De plus, $g|_K = 1$ et $g|_{\mathbb{R}^n \backslash V} = 0$. Soient alors les ouverts $W = g^{-1}]2/3, 1]$ et $U = g^{-1}]1/3, 1]$. Clairement, $K \subset W \subset \overline{U} \subset V$ et la fonction :

$$f(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^n \backslash U)}{d(x, \mathbb{R}^n \backslash U) + d(x, W)} \tag{31}$$

satisfait aux critères du lemme. □

Définition 7. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\{V_n\}_{1 \leq n \leq m}$ une collection finie d'ensembles ouverts qui recouvrent K. Une famille de m fonctions $f_n \prec V_n$ telles que :

$$\sum_{n=1}^{m} f_n(x) = 1, \forall x \in K \tag{32}$$

est appelée une partition de K subordonnée au recouvrement $\{V_n\}_{1 \leq n \leq m}$.

Corollaire 4. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact et $\{V_n\}_{1 \leq n \leq m}$ une collection finie d'ensembles ouverts qui recouvrent K. Il existe alors une partition de K subordonnée à $\{V_n\}_{1 \leq n \leq m}$.

Preuve. Soit $x \in K$. Il existe V_{n_x} du recouvrement tel que $x \in V_n$. Par le lemme d'Urysohn 7, il existe une fonction g_x telle que $\{x\} \prec g_x \prec V_{n_x}$. L'ensemble $K_x = g_x^{-1}\{1\}$ est alors un voisinage compact de $\{x\}$. Comme K est compact et puisque $\{\mathring{K}_x\}_{x \in K}$ recouvre K, il existe une sous-collection finie $\{K_{x_j}\}_{j=1,...,p}$ qui recouvre K. Pour chaque V_n du recouvrement initiale, poser :

$$C_n = \bigcup_{K_{x_j} \subset V_n, 1 \leq i \leq p} K_{x_j} \tag{33}$$

Tous les C_n sont compacts et leur collection recouvre K. De plus, $C_n \subset V_n$, $n = 1, ..., m$. Une nouvelle application du lemme d'Urysohn livre alors m fonctions h_n telles que $C_n \prec h_n \prec V_n$. Poser alors $f_1 = h_1$ et $f_n = h_n \prod_{k=1}^{n-1}(1 - h_k)$, pour $n \geq 2$. Clairement, $f_n \prec V_n$ pour $n = 1, ..., m$ et :

$$\sum_{n=1}^{m} f_n = 1 - \prod_{n=1}^{m}(1 - h_n) \tag{34}$$

De plus, si $x \in K$, $x \in C_n$ pour au moins un n, de sorte que $h_n(x) = 1$, c'est-à-dire la propriété espérée. □

IV. MESURES ET FONCTIONNELLES POSITIVES

Définition 8. Une fonctionnelle $\Phi : C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est dite positive si $f \geq 0$ implique $\Phi(f) \geq 0$.

Définition 9. Soit $\Phi : C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonctionnelle positive. Soient $K, V \subset \mathbb{R}^n$ avec K compact, V ouvert. Définir :

$$\mu(K) = \inf\{\Phi(f) : K \prec f\} \in \mathbb{R}^+ \tag{35}$$

$$\mu(V) = \sup\{\Phi(f) : f \prec V\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \tag{36}$$

Lemme 8. Soient $K, V \subset \mathbb{R}^n$, K compact, V ouvert. Alors :

$$\mu(K) = \inf\{\mu(W) : K \subset W, W \text{ ouvert}\} \tag{37}$$

$$\mu(V) = \sup\{\mu(C) : C \subset V, C \text{ compact}\} \tag{38}$$

Preuve. Si $K \subset W \subset \mathbb{R}^n$, K compact, W ouvert, alors par le lemme d'Urysohn 7, il existe une fonction $K \prec f \prec W$. Puisque $f^{-1}\{1\}$ est un voisinage de K, on a :

$$\mu(K) = \inf\{\Phi(f) : K \prec f\} \geq \inf\{\mu(U) : K \subset U, U \text{ ouvert}\} \geq \mu(K) \tag{39}$$

Similairement, puisque pour une fonction $f \prec V$, on a $\text{supp}(f) \subset V$ et que $\text{supp}(f)$ est compact, on :

$$\mu(V) = \sup\{\Phi(f) : f \prec V\} \leq \sup\{\mu(C) : C \subset V, C \text{ compact}\} \leq \mu(V) \tag{40}$$

□

Définition 10. On définit une mesure intérieure $\mu_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ et une mesure extérieure $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ par :

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ compact}\} \text{ et } \mu^*(E) = \inf\{\mu(V) : E \subseteq V, V \text{ ouvert}\} \tag{41}$$

Lemme 9. Si $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de nombres réels positifs, alors :

$$\inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n | \forall k : a_k \in F_k\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \inf F_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \tag{42}$$

Preuve. Noter A le terme de gauche, B le terme de droite. D'abord, remarquer que B minore l'ensemble $\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n | \forall k : a_k \in F_k\}$ donc $B \leq A$. Si $B = \infty$, alors $A = B$. Supposer donc $B < \infty$. Alors, $\forall n \geq 0$, $\inf F_n < \infty$. Soit $x > B$ et poser $\epsilon = x - B$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in F_n : a_n < \inf F_n + \epsilon/2^{n+1} \tag{43}$$

Alors, $A \leq \sum_{n \geq 0} a_n \leq B + \epsilon = x$. Puisque x est arbitraire, $A \leq B$. □

Lemme 10. La mesure intérieure μ_* est sur-additive alors que la mesure extérieure est sous-additive. C'est-à-dire que si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints, on a :

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_*(E_n) \tag{44}$$

et

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n) \tag{45}$$

Preuve. Pour montrer la première inégalité, il suffit de montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=0}^{m} E_n\right) \geq \sum_{n=0}^{m} \mu_*(E_n) \tag{46}$$

Par définition de la mesure extérieure,

$$\sum_{n=0}^{m} \mu_*(E_n) = \sup\left\{\sum_{n=0}^{m} \mu(K_n) : K_n \subseteq E_n, K_n \text{ compact}\right\} \tag{47}$$

Puisque l'union finie de compact est contenue dans l'union finie des $(E_n)_{n=0}^m$, il suffit de montrer que :

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{m} K_n\right) \geq \sum_{n=0}^{m} \mu(K_n) \tag{48}$$

Plus simplement, il suffit de montrer que pour deux compacts disjoints K_1 et K_2, $\mu(K_1 \cup K_2) \geq \mu(K_1) + \mu(K_2)$. Soit alors $K_1 \cup K_2 \prec f$. Comme K_1 est disjoint de K_2, le lemme d'Urysohn 7 assure qu'il existe f_1 telle que $K_1 \prec f_1 \prec \mathbb{R}^N \backslash K_2$. Par le même argument, il existe f_2 telle que $K_2 \prec f_2 \prec \mathbb{R}^N \backslash \mathrm{supp}(f_1)$. Alors $K_1 \cup K_2 \prec f(f_1 + f_2) \leq f$, $K_1 \prec ff_1$ et $K_2 \prec ff_2$, de sorte que :

$$\Phi(f) \geq \Phi(ff_1) + \Phi(ff_2) \geq \mu(K_1) + \mu(K_2) \tag{49}$$

En prenant l'infimum sur toutes les fonctions f, on trouve $\mu(K_1 \cup K_2) \geq \mu(K_1) + \mu(K_2)$.

Soit maintenant une suite d'ouverts $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $E_n \subseteq V_n$. Clairement, $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$. Soit $f \prec \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$. Puisque f est à support compact, le corollaire 4 implique qu'il existe une partition $(f_n)_{n=0}^m$ de $\mathrm{supp}(f)$ subordonnée au recouvrement fini $\{V_n\}_{n=0}^m$. Alors :

$$\Phi(f) = \Phi\left(f\sum_{n=0}^{m} f_n\right) = \sum_{n=0}^{m} \Phi(ff_n) \leq \sum_{n=0}^{m} \mu(V_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(V_n) \tag{50}$$

Il suit en prenant l'infimum à gauche :

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(V_n) \tag{51}$$

Par le lemme 9 :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{m} E_n\right) \leq \inf\left\{\mu\left(\bigcup_{n=0}^{m} V_n\right) : \forall k, E_k \subseteq V_k\right\} \leq \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \mu(V_n) : \forall k, E_k \subseteq V_k\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n) \tag{52}$$

□

Définition 11. Soit $\Phi : C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle positive ainsi que ses mesures intérieures et extérieures μ_* et μ^*. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^N$ est dit mesurable si et seulement si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$:

$$\mu_*(K \cap E) = \mu^*(K \cap E) \tag{53}$$

La collection des ensembles mesurables est dénotée Σ.

Lemme 11. Soit $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \in \Sigma$ et :

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_*(E_n) \tag{54}$$

Preuve. Commencer par montrer que l'union des $\{E_n\}$ est dans Σ. Prendre $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. Alors :

$$\begin{aligned}\mu_*\left(K \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \mu_*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K \cap E_n\right)\\ &\leq \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K\cap E_n\right), \text{ car } \mu_* \leq \mu^*\\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(K\cap E_n), \text{ par sous-additivité 10}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_*(K\cap E_n), \text{ car } E_n \in \Sigma\\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_*(E_n), \text{ par monotonie}\\ &\leq \mu_*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right), \text{ par sur-additivité 10}\end{aligned} \tag{55}$$

Ainsi, d'une part :

$$\mu_*\left(K \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \mu^*\left(K \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_*(K\cap E_n) \leq \mu_*\left(K \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \tag{56}$$

donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$. D'autre part, en prenant le supremum sur tous les compacts $K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$:

$$\mu_*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_*(E_n) \leq \mu_*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \tag{57}$$

□

Lemme 12. Soient $E, F \in \Sigma$, alors $E\backslash F \in \Sigma$.

Preuve. Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ compact. Il reste à montrer que $\mu_*(K \cap (E\backslash F)) \geq \mu^*(K \cap (E\backslash F))$. Comme $K \cap (E\backslash F) \subseteq K$, $K \cap E \subseteq K$ et $K \cap F \subseteq K$, il existe des ouverts V_E et V_F de mesures extérieures finies tels que $K \cap E \subseteq V_E$ et $K \cap F \subseteq V_F$. Soient des compacts $K \subseteq K \cap E$ et $K_F \subseteq K \cap F$. On a alors :

$$K_E\backslash V_F \subseteq K \cap E\backslash K \cap F = K \cap (E\backslash F) \subseteq V_E\backslash K_F \tag{58}$$

Remarquer alors que $K_E\backslash V_F$ est compact, $V_E\backslash K_F$ est ouvert et que :

$$V_E\backslash K_F = (V_E\backslash K_E) \cup (K_E\backslash V_F) \cup (V_F\backslash K_F) \tag{59}$$

Par monotonie et sous-additivité de la mesure extérieure, on a :

$$\begin{aligned}\mu^*(K \cap (E\backslash F)) &\leq \mu^*(V_E\backslash K_F)\\ &\leq \mu^*(V_E\backslash K_E) + \mu^*(K_E\backslash V_F) + \mu^*(V_F\backslash K_F)\\ &\leq \mu^*(V_E) - \mu^*(K_E) + \mu_*(K\cap(E\backslash F)) + \mu^*(V_F) - \mu^*(K_F)\end{aligned} \tag{60}$$

en utilisant la mesurabilité des compacts. Avec la mesurabilité de $K \cap E$ et $K \cap F$, on obtient de plus :

$$\inf\{\mu^*(V_E) - \mu^*(K_E) + \mu^*(V_F) - \mu^*(K_F) : K_E \subseteq K\cap E \subseteq V_E, K_F \subseteq K \cap F \subseteq V_F\} = 0 \tag{61}$$

□

Théorème 7. Soit $\Phi : C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle positive, sa mesure intérieure μ_* et extérieure μ^* ainsi sur les ensembles mesurables Σ. Alors Σ est une σ-algèbre borelienne. De plus μ définit alors une mesure régulière et complète sur Σ.

Preuve. Clairement, $\emptyset \in \Sigma$. Le complémentaire d'une ensemble mesurable est mesurable par le lemme 12. Soit maintenant $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$. Poser $F_0 = E_0$ et pour $n \geq 1$, $F_n = E_n\backslash(\bigcup_{0\geq m\geq n-1} F_m)$. $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ par le lemme 11 et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Ainsi, Σ est une σ-algèbre. Ensuite, puisque les fermés sont mesurables, les ouverts le sont aussi par le lemme 12, c'est-à-dire Σ est borelienne. Montrer maintenant que μ définit bien une mesure sur Σ. Soit $E \in \Sigma$. Par sous-additivité de la mesure intérieure, la mesurabilité de E et des $B_n(0)$ ainsi que la sur-additivité de μ_*, on a :

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(0)\right)\cap E\right) \\
&= \mu^*\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(0)\backslash B_{n-1}(0)\right)\cap E\right) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu^*(B_n(0)\backslash B_{n-1}(0)\cap E) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu^*((B_n(0)\cap (B_n(0)\backslash B_{n-1}(0)\cap E)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu_*((B_n(0)\cap (B_n(0)\backslash B_{n-1}(0)\cap E)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu_*(B_n(0)\backslash B_{n-1}(0)\cap E) \\
&= \mu_*\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(0)\backslash B_{n-1}(0)\right)\cap E\right) \\
&= \mu_*(E)
\end{aligned} \tag{62}$$

En utilisant le lemme 11, il est clair que μ définit bien une mesure. La régularité de μ est claire par les dernières équations, et la complétude découle de la définition de μ. □

Définition 12. Si Φ est l'intégrale de Riemann, alors μ est la mesure de Lebesgue.

Théorème 8. Théorème de Riesz-Kakutani Soit $\Phi : C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle positive. Il existe alors une mesure μ régulière et complète, définie sur une σ-algèbre $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ borelienne, telle que :

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^n) : \Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\mu \tag{63}$$

Preuve. Il est suffisant de prouver le théorème dans le cas où f prend des valeurs réelles. En fait, il suffit de prouver que :

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) : \Phi f \leq \int_{\mathbb{R}^N} f \mathrm{d}\mu \tag{64}$$

En effet, dès lors :

$$-\Phi f = \Phi(-f) \leq \int_{\mathbb{R}^N} (-f)\mathrm{d}\mu = -\int_{\mathbb{R}^N} f \mathrm{d}\mu \tag{65}$$

Soit $K = \mathrm{supp}(f)$ et $[a, b]$ son image. Soit $\epsilon > 0$ et pour chaque $i = 0, ..., n$ avec $y_i - y_{i-1} < \epsilon$:

$$y_0 < a < y_1 < ... < y_n = b \tag{66}$$

Définir pour chaque $i = 1, .., n$:

$$E_i = \{x \in \mathbb{R}^N : y_{i-1} < f(x) < y_i\} \cap K \tag{67}$$

Car f est continue, f est Borel-mesurable et les ensembles E_i sont des ensembles de Borel disjoints d'union K. Aussi, il existe des ouverts V_i tels que $E_i \subseteq V_i$ et $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \epsilon/n$. De plus :

$$\forall x \in V_i : f(x) < y_i + \epsilon \tag{68}$$

Par le corollaire 4, il existe, pour chaque i, $h_i \prec V_i$ une partition de K extraite de la famille finie des $\{V_i\}_{i=1}^n$. En particulier, $f = \sum h_i f$ d'où :

$$\mu(K) \leq \Phi\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) = \sum_{i=1}^n \Phi h_i \tag{69}$$

D'autre part, puisque $h_i f \leq (y_i + \epsilon)h_i$ et $y_i < f(x) + \epsilon$ sur E_i :

$$\begin{aligned}
\Phi f = \sum_{i=1}^n \Phi(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i+\epsilon)\Phi h_i = \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\epsilon)\Phi h_i - |a|\sum_{i=1}^n \Phi h_i \leq \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\epsilon)(\mu(E_i)+\epsilon/n) - |a|\mu(K) \\
= \sum_{i=1}^n (y_i-\epsilon)\mu(E_i) + 2\epsilon\mu(K) + \frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\epsilon) \leq \int_{\mathbb{R}^N} f\mathrm{d}\mu + \epsilon(2\mu(K)+|a|+b+\epsilon)
\end{aligned} \tag{70}$$

□

V. RÉSULTATS DE DENSITÉ

Définition 13. Une mesure μ définie sur une σ-algèbre $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ borélienne est dite intérieurement régulière si :

$$\forall E \in \Sigma, \mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact et } K \subset E\} \tag{71}$$

Elle est dite extérieurement-régulière si

$$\forall E \in \Sigma, \mu(E) = \inf\{\mu(V) : V \text{ ouvert et } E \subset V\} \tag{72}$$

Elle est enfin régulière si elle est simultanément extérieurement et intérieurement régulière, et localement finie si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \text{ un ouvert } U \in \Sigma : x \in U \text{ et } \mu(U) < \infty \tag{73}$$

Lemme 13. Une mesure régulière et localement finie μ dans $\mathbb{R}^n$ assigne à tout compact K de $\mathbb{R}^n$ une mesure finie.

Preuve. Pour chaque $x \in K$ il existe un ouvert V_x contenant x et de mesure finie. L'ensemble des tels V_x recouvre K, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $(V_i)_{i=1,..p}$, associé aux $(x_i)_{i=1,..p}$. Poser :

$$E_i = K \bigcap_{i=1}^{p} \left(V_i \backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \right) \tag{74}$$

La régularité de μ implique la mesurabilité de ces ensembles. De plus, $K = \bigcup_{i=1}^p E_i$ et cette union est disjointe. Ainsi :

$$\mu(K) = \sum_{i=1}^{p} \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \mu(V_i) < \infty \tag{75}$$

□

Lemme 14. L'espace des fonctions simples Lebesgue intégrables est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$, pour une mesure régulière et localement finie μ.

Preuve. Trouvons $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ pour une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ positive. Poser pour $m \in \mathbb{N}$:

$$f_m : x \mapsto \chi_{B_m(0)}(x) \min\{f(x), m\} \tag{76}$$

Alors, pour chaque $m \geq 0$, $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$. Puisque $|f - f_m|^p \leq |f|^p$, le théorème de la convergence dominée implique que (f_m) converge vers f dans la norme $|| \cdot ||_p$. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq k$ implique $||f_k - f||_p < \epsilon/2$. Par définition de l'intégrale de Lebesgue, et puisque $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$, on peut approcher f_m par une fonction étagée simple positive, celle-ci se laissant approcher par une fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, telle que $||f_m - \varphi||_1 < \frac{\epsilon^p}{2^p m^{p-1}}$. Puisque f_m est majorée par m, on peut le supposer aussi pour φ. On a alors $|f_m(x) - \varphi(x)| \leq m$, et $|f_m - \varphi|^p \leq m^{p-1}|f_m - \varphi|$. Par conséquent,

$$||f_m - \varphi||_p^p \leq m^{p-1}||f_m - \varphi||_1 \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \tag{77}$$

C'est-à-dire $||f - \varphi||_p < \epsilon$. □

Lemme 15. L'espace des combinaisons linéaires de fonctions indicatrices sur des ouverts de mesures finies ou sur des compacts est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$, pour une mesure régulière et localement finie μ.

Preuve. Soient $\epsilon > 0$ et E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ et de mesure finie. Puisque μ est régulière, il existe un compact K_E et un ouvert V_E tel que $K_E \subseteq E \subseteq V_E$ et :

$$\mu(V_E) - \epsilon^p \leq \mu(E) \leq \mu(K_E) + \epsilon^p$$

. Il suit :

$$||\chi_{V_E} - \chi_E||_p, ||\chi_{K_E} - \chi_E||_p < \epsilon \tag{78}$$

Utiliser le lemme 14 pour conclure. □

Lemme 16. Pour une mesure régulière et localement finie μ, l'espace des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$:

$$\overline{C_c(\mathbb{R}^n)}^{||\cdot||_{L^p(\mathbb{R}^n,\mu)}} = L^p(\mathbb{R}^n, \mu) \tag{79}$$

Preuve. Grâce au lemme 15, on peut se concentrer sur les indicatrices d'ouverts de mesure finie ou de compact. Par le lemme d'Urysohn 7, il existe $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tel que $K \prec f \prec V$. Par monotonie de l'intégrale de Lebesgue, on a dans le cas où $\mu^K + \epsilon^p \geq \mu(V)$:

$$||\chi_K - f||_1, ||\chi_V - f||_1 \leq \epsilon^p \tag{80}$$

ce qui implique :

$$||\chi_K - f||_p, ||\chi_V - f||_1 \leq \epsilon \tag{81}$$

□

Théorème 9. Pour une mesure régulière et localement finie μ, l'espace des fonctions continues à support compact et infiniment continument dérivable est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$:

$$\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^{||\cdot||_{L^p(\mathbb{R}^n,\mu)}} = L^p(\mathbb{R}^n, \mu) \tag{82}$$

Preuve. Partir du lemme 16. Un compact dans $\mathbb{R}^n$ étant fermé et borné, il doit pour une fonction $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y avoir $L > 0$ tel que $\text{supp}(f) \subseteq [-L, L]^n$. La fonction étant uniformément continue sur ce dernier ensemble, il doit exister une fonction simple du type :

$$s = \sum_{l=1}^{m} s_l \chi_{d_n + [0,p[^n} \tag{83}$$

telle que :

$$|f - s| < \frac{\epsilon}{\mu\left([-L, L]^n\right)^{1/p}} \implies ||f - s||_p < p \tag{84}$$

Finalement, pour un intervalle $[a, b[^n$, considérons les fonctions lisses du type $(f_n) = (\prod_{k=1}^m f_{m,k}))$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et

$$f_{m,k}(x_k) = \chi_{]a-1/m,b[}(x_k) e^{\frac{1}{m^2(x_k+1/m-a)(x_k-b)}} \tag{85}$$

Alors, $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = \chi_{[a,b[^n}(x)$ simplement et chaque élément de la suite est intégrable. Par le théorème de la convergence dominée, la suite tend dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ vers $\chi_{[a,b]^n}$. □

Corollaire 5. Si λ est la mesure de Lebesgue, alors l'espace de Schwartz est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\overline{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}^{||\cdot||_{L^p(\mathbb{R}^n,\lambda)}} = L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \tag{86}$$

Part III
Opérateurs bornés

Définition 14. Soient X, Y des espaces vectoriels normés et soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. La transposée $A^T \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ de A est définie par :

$$A^T(\eta) = \eta \circ A \tag{87}$$

Noter Γ l'application du théorème de Riesz-Fréchet l'isomorphisme anti-linéaire isométrique associant à chaque élément $x \in \mathcal{H}$ la fonctionnelle linéaire et continue de $\mathcal{H}'$ définie par $x^*(y) = \langle y, x\rangle$.

Définition 15. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'adjoint de A est défini par :

$$A^* = \Gamma^{-1} \circ A^T \circ \Gamma \tag{88}$$

VI. SPECTRE DES OPÉRATEURS BORNÉS

L'ensemble des opérateurs de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, dits Hilbertiens, qui sont inversibles est noté $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ ou $\mathrm{Inv}(\mathcal{H})$.

Théorème 10. $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ est un ouvert de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Preuve. Soient $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{H})$, $B \in B_{||A^{-1}||}(A)$. Alors $||BA^{-1} - 1|| \leq ||B - 1||||A^{-1}|| < 1$, c'est-à-dire $BA^{-1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{H})$ et à fortiori B inversible. $\square$

Lemme 17. Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors $\sigma(A)$ est fermé et sous-ensemble du disque centré à l'origine de $\mathbb{C}$ de rayon $||A||$.

Preuve. Supposer que $|\lambda| > ||A||$, alors $||A\lambda^{-1}|| < 1$ et $1 - \lambda^{-1}A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{H})$. Par conséquent, $\lambda - A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{H})$ et $\lambda \notin \sigma(A)$. Si $\lambda \notin \sigma(A)$ et $|\mu - \lambda| < ||(A - \lambda)^{-1}||$, alors par le théorème 10, $A - \mu \in \mathrm{Inv}(\mathcal{H})$. C'est-à-dire le complément spectre d'un opérateur est ouvert. $\square$

Définition 16. Le rayon spectral d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est défini par

$$r(A) = \sup\{||z|| : z \in \sigma(A)\} \tag{89}$$

Théorème 11. Le spectre d'opérateurs bornés vérifie :

1. Si $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est unitaire, alors $\sigma(U) \subseteq \partial B_1(0)$.
2. Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est auto-adjoint, alors $\sigma(A) \subseteq [-||A||, ||A||] \subset R$ et $r(A) = ||A||$.
3. Si $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et p est un polynômes à coefficients $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ complexes, alors :

$$\sigma(p(B)) = p(\sigma(B)) \tag{90}$$

Preuve.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$. Alors $U - \lambda = \lambda\left(\frac{U}{\lambda} - 1\right)$ et $\left|\left|\frac{U}{\lambda}\right|\right| < 1$. Donc l'inverse de $\left(\frac{U}{\lambda} - 1\right)$ existe. Si $\lambda \in B_1(0)\backslash\{0\}$, on a en utilisant que U^* est unitaire que $\lambda U^* < 1$, que $U - \lambda = U(1 - \lambda U^*)$ inversible. Si $\lambda = 0$, $U - \lambda = U^*$.

2. Le lemme 17 assure $r(A) \leq ||A||$. Supposer par l'absurde que ni $||A||$ ni $-||A||$ ne fasse partie du spectre. Dans ce cas, $(A + ||A||)(A - ||A||) = A^2 - ||A||^2 \in \mathrm{Inv}\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Il existe donc $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inverse de cet opérateur. De plus,

$$(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \langle x, (||A||^2 - A^2)y\rangle \tag{91}$$

est une application sesqui-linéaire positive donc vérifie Cauchy-Schwartz. Par définition de la norme, il existe une suite $(x_n) \in \mathcal{H}$ de vecteurs unitaires telle que $||A|| = \lim_{n\to\infty} ||Ax_n||$. Alors, en utilisant que A est auto-adjoint :

$$\begin{aligned} 1 = ||x_n||^2 = \langle (A^2 - ||A||^2)Bx_n, x_n\rangle = \left|\langle Bx_n, (||A||^2 - A^2)x_n\rangle\right| \\ \leq \langle Bx_n, (||A||^2 - A^2)Bx_n\rangle^{1/2}\langle x_n, (||A||^2 - A^2)x_n\rangle^{1/2} \leq ||B||^{1/2}(||A||^2 - ||Ax_n||^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{92}$$

Ce qui est absurde. Ainsi, $||A|| \in \sigma(A)$ ou $-||A|| \in \sigma(A)$.

3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(Z) - \lambda \in \mathbb{C}[Z]$. Par le théorème fondamental de l'algèbre, il existe n nombres complexes tels que $p(Z) - \lambda = a\prod_{j=1}^{n}(Z - \lambda_j)$, $a \in \mathbb{C}$. Il suit :

$$\lambda \in \sigma(p(B)) \Leftrightarrow \exists k : \lambda_k \in \sigma(B) \Leftrightarrow \exists \lambda_k \in \sigma(B) : p(\lambda_k) - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in p(\sigma(B)) \tag{93}$$

$\square$

VII. LE CALCUL FONCTIONNEL

Définition 17. Soit A un opérateur borné auto-adjoint sur un espace de Hilbert et $f \in C(\sigma(A), \mathbb{R})$. Définir :

$$f(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A) \tag{94}$$

pour (p_n) une suite de polynôme convergeant uniformément sur $\sigma(A)$ vers f.

Proposition 1. La définition 17 définit uniquement toutes les fonctions continues du spectre de A, borné et auto-adjoint, vers $\mathbb{R}$.

Preuve. D'après le théorème de Stone-Weierstrass 2, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels qui converge uniformément sur $\sigma(A)$ vers f. Poser la suite $(p_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Puisque $\sigma(p_n(A)) = p_n(\sigma(A))$:

$$||p_n(A)||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = r(p_n(A)) = \sup\{||\lambda|| : \lambda \in \sigma(p_n(A))\} = \sup\{||\lambda|| : \lambda \in p_n(\sigma(A))\} = ||p_n||_{L^\infty(\sigma(A))} \tag{95}$$

Par conséquence, puisque (p_n) est de Cauchy pour $||\cdot||_{L^\infty(\sigma(A))}$, $(p_n(A))$ est de Cauchy pour $||\cdot||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ et converge donc vers un élément dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, qui est par définition $f(A)$. Montrer que cette définition ne dépend pas de la suite de polynômes. Soit (q_n) une autre suite de polynômes convergeant uniformément sur $\sigma(A)$ vers f. Alors :

$$||f(A) - q_n(A)|| \le ||f(A) - p_n(A)|| + ||p_n(A) - q_n(A)|| \le ||f(A) - p_n(A)|| + ||p_n - f||_{L^\infty(\sigma(A))} + ||q_n - f||_{L^\infty(\sigma(A))} \tag{96}$$

d'où l'unicité de la définition. □

Théorème 12. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint. Il existe alors un unique *-morphisme unitaire et isométrique $\Phi : C(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec les propriétés suivantes :

1. $\Phi(x \mapsto 1) = 1$ et $\Phi(x \mapsto x) = A$
2. $\forall f, g \in C(\sigma(A)), \lambda \in \mathbb{C}$:
$$\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda\Phi(g), \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g), \Phi(f)^* = \Phi\left(\overline{f}\right) \tag{97}$$
3. $\forall f \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$, $||\Phi(f)|| = ||f||_{L^\infty(\sigma(A))}$

Preuve. Prendre $\Phi(f) = f(A)$. Seul l'unicité demande une preuve explicite. Soit Ψ un tel morphisme. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[\sigma(A)]$, $\Psi(p) = p(A)$. Comme ce morphisme est supposé isométrique et que l'ensemble des polynômes est dense dans $\{f(A) : f \in C(\sigma(A))\}$ pour la norme opérateur, on peut conclure $\Psi(f) = f(A)$, $\forall f \in C(\sigma(A))$. □

VIII. DÉCOMPOSITION SPECTRALE

Théorème 13. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint. Il existe alors une famille de vecteurs orthonormés $\{e_k : k \in K\}$, $|K| \le |\mathbb{N}|$, telle que :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k\in K} \overline{\{f(A)e_k : f \in C(\sigma(A))\}} \tag{98}$$

Preuve. Soit (b_n) une famille orthonormée, complète et dénombrable de $\mathcal{H}$. Considérer :

$$H_0 = \overline{\{f(A)b_0 : f \in C(\sigma(A))\}} \tag{99}$$

Il est invariant par calcul fonctionnel et fermé. Définir $j_1 = \min\{n \in \mathbb{N}^* : b_n \notin H_0\}$. Les b_i d'indice plus petits sont clairement toujours dans H_0 et $(1 - P_{H_0})b_{j_1} \neq 0$. Normaliser cette composante orthogonale et lui appliquer le calcul fonctionnel pour définir :

$$H_1 = \left\{ f(A)\frac{(1 - P_{H_0})b_{j_1}}{||(1 - P_{H_0})b_{j_1}||} : f \in C(\sigma(A)) \right\}^{\perp\perp} \tag{100}$$

Les deux espaces sont alors en somme direct et leur somme directe et un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert. Ils sont de plus invariants par calcul fonctionnel. Définir par récurrence $j_{n+1} = \min\{m \in \mathbb{N}^*, m \ge 1 + j_n : b_m \notin \oplus_{k=0}^n H_k\}$ et

$$H_{n+1} = \left\{ f(A)\frac{(1 - P_{\oplus_{k=0}^n H_k})b_{j_{n+1}}}{||(1 - P_{\oplus_{k=0}^n H_k})b_{j_{n+1}}||} : f \in C(\sigma(A))|| \right\}^{\perp\perp} \tag{101}$$

C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ contenant par construction tous ses éléments. Conclusion établie. □

Théorème 14. Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints bornés Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint. Il existe alors une famille d'indice K de cardinalité au plus dénombrable, une famille de mesures boréliennes et régulières $\{\mu_k\}_{k\in K}$ sur $\sigma(A)$ et un isomorphime unitaire $V : \mathcal{H} \to \bigoplus_{k\in K} L^2(\sigma(A), \mu_k)$ tels que

$$VAV^{-1} = M_x \tag{102}$$

où M_x est l'opérateur de multiplication par x sur $\bigoplus_{k\in K} L^2(\sigma(A), \mu_k)$.

Preuve. Poursuivre avec les notations de la preuve du théorème 13. Remarquer que la fonctionnelle $\Phi_k : C(\sigma(A)) \to \mathbb{C}$

$$f \mapsto \langle e_k, f(A)e_k\rangle \tag{103}$$

est, pour f positive, une fonctionnelle positive. D'après le théorème 8 et un résultat des exercices, il existe donc une mesure μ_k sur $\sigma(A)$ telle que

$$\forall f \in C(\sigma(A)), \Phi_k(f) = \int_{\sigma(A)} f d\mu_k \tag{104}$$

Si $f(A)e_k$, $g(A)e_k$ sont dans H_k, alors par le calcul fonctionnel et le théorème 8, on a :

$$\langle f(A)e_k, g(A)e_k\rangle = \langle e_k, \overline{f(A)}g(A)e_k\rangle = \langle e_k, \overline{f}g(A)e_k\rangle = \int_{\sigma(A)} \overline{f}g d\mu_k \tag{105}$$

Par construction de H_k, $x \in H_k$ si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\sigma(A))$ telle que $\lim_n ||x - f_n(A)e_k|| = 0$. La suite $(f_n(A))$ est donc une suite de Cauchy dans H_k et on a

$$||f_m(A)e_k - f_n(A)e_k||^2 = \langle e_k, (\overline{f_m(A) - f_n(A)})(f_m(A) - f_n(A))e_k\rangle = ||f_m - f_n||^2_{L^2(\sigma(A),\mu_k)} \tag{106}$$

La suite converge donc également dans $L^2(\sigma(A), \mu_k)$ vers un élément $f_x \in L^2(\sigma(A), \mu_k)$. Manifestement, par continuité des normes $||f_x||^2_{L^2(\sigma(A),\mu_k)} = ||x||^2_{H_k}$. L'application $H_k \to L^2(\sigma(A), \mu_k), x \mapsto f_x$ est donc un isomorphisme unitaire. Puisque $H = \bigoplus H_k$, x s'écrit de manière unique comme somme d'éléments x_k de H_k. Par la discussion précédente, il existe pour chaque $k \in K$ un isomorphisme unitaire V_k qui associe à x_k une fonction $f_{x,k} \in L^2(\sigma(A), \mu_k)$. Poser :

$$V : H \to \bigoplus_{k\in K} L^2(\sigma(A), \mu_k) \qquad x \mapsto \bigoplus_{k\in K} f_{x,k} \tag{107}$$

Montrer finalement que $VA = VM_x$. Par décomposition de $\mathcal{H}$:

$$VAx = VA \bigoplus_{k\in K} x_k \tag{108}$$

Par continuité de A et de V :

$$VAx = \bigoplus_{k\in K} VAx_k \tag{109}$$

Par définition des x_k et calcul fonctionnel :

$$VAx = \bigoplus_{k\in K} VA \lim_{n\to\infty} f_{n,k}(A)e_k \tag{110}$$

Par continuité de A :

$$VAx = \bigoplus_{k\in K} V \lim_{n\to\infty} M_x f_{n,k}(A)e_k \tag{111}$$

Par continuité de V :

$$VAx = \bigoplus_{k\in K} \lim_{n\to\infty} VM_x f_{n,k}(A)e_k \tag{112}$$

Par définition de V :

$$VAx = \bigoplus_{k\in K} \lim_{n\to\infty} M_x f_{n,k} \tag{113}$$

Et finalement par continuité de M_x et définitions de V et x :

$$VAx = \bigoplus_{k\in K} M_x \lim_{n\to\infty} f_{n,k} = M_x Vx \tag{114}$$

□

Part IV
Opérateurs Non-bornés

IX. NOTIONS FONDAMENTALES DES OPÉRATEURS NON-BORNÉS

Définition 18. Soit $(D(A), A)$ un opérateur. Le graphe $G(A)$ est défini par

$$G(A) = \{(x, y) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} : x \in D(A), y = Ax\} \tag{115}$$

Définition 19. Si la fermeture du graphe d'un opérateur est le graphe d'un opérateur, on dit que cet opérateur est fermable.

Définition 20. L'opérateur $(D(B), B)$ est une extension de $(D(A), A)$ si et seulement si $G(A) \subset G(B)$. Noter $A \subset B$.

Définition 21. Soient $(D(A_1), A_1)$ et $(D(A_2), A_2)$ deux opérateurs. Alors $D(A_1 + A_2) = D(A_1) \cap D(A_2)$ et $D(A_2A_1) = \{x \in D(A_1) : A_1x \in D(A_2)\}$ et on définit sur ces ensembles :

$$(A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x \qquad (A_2A_1)x = A_2(A_1x) \tag{116}$$

Définition 22. Soit $(D(A), A)$ un opérateur avec $D(A)$ dense dans $\mathcal{H}$. Le domaine de l'adjoint est défini par $D(A^*)$ est défini par :

$$D(A^*) = \{y \in \mathcal{H} : \exists! z_y \in \mathcal{H} : \forall x \in D(A), \langle y, Ax\rangle = \langle z_y, x\rangle\} \tag{117}$$

Définir l'action de l'adjoint par $y \mapsto z_y$.

Définition 23. Un opérateur densément défini est dit auto-adjoint si son graphe est égal à celui de son opérateur.

Définition 24. Un opérateur A densément défini est dit normal si son domaine de définition est égal à celui de son adjoint et si pour chaque élément $x \in D(A)$, $||A^*x|| = ||Ax||$.

Théorème 15. Soit $(D(A), A)$ un opérateur sur $\mathcal{H}$. Alors :

$$G(A^*) = \left(G(-A)^t\right)^{\perp} \tag{118}$$

Avec le produit scalaire sur $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ définit comme la somme des produits scalaires des premières composantes avec les premières et des deuxièmes avec les deuxièmes. En particulier, l'adjoint d'un opérateur est toujours fermé.

Preuve. Soit $X = (x_1, x_2) \in (G(A)^t)^{\perp}$. De manière équivalente :

$$\begin{aligned} &\forall Y = (y_1, y_2) \in G(A)^{-t} : \langle x_1, y_2\rangle = \langle x_2, y_1\rangle \\ \Leftrightarrow &\forall Y = (y_1, y_2) \in G(A)^{-t} : \langle x_1, Ay_1\rangle = \langle x_2, y_1\rangle \\ \Leftrightarrow &x_2 = A^*x_1 \end{aligned} \tag{119}$$

□

X. LES THÉORÈMES DE BANACH-STEINHAUS ET DU GRAPHE FERMÉ

Lemme 18. Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ pour deux espaces normés X et Y. Pour tout $x \in X$ et $r > 0$, on a :

$$\sup\{||Ax'|| : x' \in B_r(x)\} \geq ||A||r \tag{120}$$

Preuve. Pour $\xi \in X$,

$$\max\{||A(x-\xi)||, ||A(x+\xi)||\} \geq \frac{1}{2}\left(||A(x-\xi)|| + ||A(x+\xi)||\right) \geq ||A\xi|| \tag{121}$$

Conclure en passant au supremum pour $\xi \in B_r(0)$. □

Définition 25. Une famille $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X, Y)$ est simplement bornée si pour tout $x \in X$, $\sup\{||Ax|| : A \in \mathcal{F}\} < \infty$ ou uniformément bornée sur $\sup\{||A|| \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Théorème 16. Théorème de Banach-Steinhaus Soient X un espace de Banach, Y un espace normé et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ une famille simplement bornée, alors $\mathcal{F}$ est uniformément bornée.

Preuve. Supposer que la famille ne soit pas uniformément bornée. On peut alors choisir une suite d'opérateur $(A_n) \subseteq F$ telle que $||A_n|| \geq 4^n$. Poser $x_0 = 0$ et $x_n \in B_{3^{-n}}(x_{n-1})$ et $||A_n x_n|| \geq \frac{2}{3}||A_n||3^{-n}$, qui existe par le lemme précédent 18. La suite (x_n) étant de Cauchy, elle converge vers $x \in X$. De plus, $||x - x_n|| \leq \frac{3^{-n}}{2}$. Mais, par construction des x_n et l'inégalité triangulaire inverse, on trouve :

$$||A_n x|| \geq \frac{3^{-n}}{6}||A_n|| \geq \frac{4^n}{6 \times 3^n} \tag{122}$$

ce qui contredit la majoration simple. □

Définition 26. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On dit qu'un sous-ensemble D est faiblement séquentiellement compact si pour toute suite (x_n) dans D, il existe $x \in D$ et une sous-suite $(y_m) \subseteq (x_n)$, telle que pour tout $v \in \mathcal{H}$:

$$\lim_{n\to\infty} \langle y_n, v\rangle = \langle x, v\rangle \tag{123}$$

Théorème 17. Théorème de Bolzano-Weierstrass Le disque unité $\overline{B_1(0)}$, dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable, est séquentiellement compact.

Preuve. Soient $(x_n) \subset \overline{B_1(0)}$ et (e_n) un système ortho-normé et complet de $\mathcal{H}$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $(\langle x_n, e_m\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{C}$. Pour $m = 1$, on peut choisir une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de l'espace de Hilbert dénoté par z_1. Poser y_1, d'indice N_1, la premier élément de la sous-suite tel que pour tous les $k \geq N_1$, $|\langle x_{n_k}, e_1\rangle| < 1$. Répéter le processus pour chaque m de manière à avoir une distance plus petite que $1/2^{m-1}$. Par itération, on construit une sous-suite (y_m) de (x_n) et une suite $(z_n) \subset \mathbb{C}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{m\to\infty} \langle y_m, e_k\rangle = z_k \tag{124}$$

Pour tout $v \in \mathrm{Vect}\,(e_i)$, on a alors $\lim_{m\to\infty}\langle y_m, v\rangle$ existe et :

$$\left|\lim_{m\to\infty} \langle y_m, v\rangle\right| \leq \limsup_{m\to\infty} |\langle y_m, v\rangle| \leq ||v|| \tag{125}$$

L'application $\mathrm{Vect}\,(e_i) \to \mathbb{C}$, $v \mapsto \lim_{m\to\infty}\langle y_m, v\rangle$ est alors une fonctionnelle linéaire bornée. Puisque (e_i) est une famille dense de l'espace de Hilbert, on peut étendre l'opérateur à tout l'espace. Le théorème de Riesz-Fréchet permet alors de conclure.

□

Lemme 19. Soit $(D(T), T)$ un opérateur fermé et densément défini. Alors $D(T^*)$ est dense.

Lemme 20. Soit $(D(T), T)$ un opérateur fermé sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ avec $D(T) = \mathcal{H}$. Alors $D(T^*) = \mathcal{H}$.

Preuve. Comme $D(T)$ est dense, T^* existe. Par le lemme 19, $D(T^*)$ est dense. Soit $v \in \mathcal{H}$ et choisir une suite $(v_n) \subset D(T^*)$, bornée, telle que $\lim_{n\to\infty} v_n = v$. Pour $w \in \mathcal{H}$, on a $\langle v_n, Tw\rangle = \langle T^* v_n, w\rangle$ et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle T^* v_n, w\rangle| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||Tw||||v_n|| < \infty \tag{126}$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus 16, $\sup_{n\in\mathbb{N}} < \infty$. Par Bolzano-Weierstrass 17, il existe une sous-suite $\left(T^* v_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(T^* v_n)$ et un $y \in \mathcal{H}$, tels que

$$\forall x \in \mathcal{H} : \lim_{n\to\infty} \langle T^* v_{\sigma(n)}, x\rangle = \langle y, x\rangle = \langle v, Tx\rangle \tag{127}$$

□

Théorème 18. Théorème du graphe fermé Soit $(D(T), T)$ un opérateur fermé sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable avec $D(T) = \mathcal{H}$. Alors T est borné.

Preuve. Supposer T non-borné. Il existe une suite $(u_n) \subset B_1(0)$, telle que $\lim_{n\to\infty} ||Tu_n|| = \infty$. D'un autre côté, pour $x \in \mathcal{H} = D(T^*)$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle Tu_n, x\rangle| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle u_n, T^* x\rangle| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||u_n||||T^* x|| = ||T^* x|| \tag{128}$$

□

XI. LE COEUR ET L'ADJOINT ESSENTIEL

Définition 27. Pour un opérateur $(D(T), T)$ fermé, définir l'ensemble résolvant $\rho(T)$ par :

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : \ker(T - z) = 0 \text{ et } \mathcal{H} = \operatorname{ran}(T - z)\} \tag{129}$$

et le spectre $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$. Pour $z \in \rho(T)$, $R(z, T) = (T - z)^{-1}$ est appelé la résolvante.

Proposition 2. Une définition équivalente de l'ensemble résolvant est la suivante :

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : A(T - \lambda) = 1_{D(T)} \text{ et } (T - \lambda)A = 1\} \tag{130}$$

Preuve. Montrer que la résolvante est bornée. Puisque $(D(T), T)$ est fermé, le graphe de T l'est. Sa transposée l'est donc aussi, tout comme $G(T - \lambda)$, pour $\lambda \in \rho(T)$, ou encore $G(T - \lambda)^t = G(R(\lambda, t))$. L'opérateur $R(\lambda, T)$ est donc fermé, défini sur tout l'espace de Hilbert et le théorème du graphe fermé X implique alors que $R(\lambda, T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. □

Proposition 3. Soit $(D(T), T)$ un opérateur fermé. Alors $z \in \rho(T)$ si et seulement si $\overline{z} \in \rho(T^*)$ et

$$R(z, T)^* = R(\overline{z}, T^*) \tag{131}$$

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour que $(T - z)x$ soit bien défini, il faut et suffit que Tx le soit, donc $x \in D(T)$. Donc $D(T - z) = D(T)$. Puis, pour chaque $x \in D(T)$, et $y \in \mathcal{H}$, dire que $x \mapsto \langle y, (T - z)x\rangle$ est continu revient à dire que $x \mapsto \langle y, Tx\rangle - \langle \overline{z}y, x\rangle$ est continu, c'est-à-dire $x \in D(T^*)$. Ainsi, $D(T - z)^* = D(T^*)$ et $(T - z)^* = T^* - \overline{z}$. Soit $z \in \rho(T)$. Cela implique donc que $R(z, T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec

$$(T - \lambda)R(z, T) = 1_{\mathcal{H}} \tag{132}$$

et

$$R(z, T)(T - z) = 1_{D(T)} \tag{133}$$

Ainsi, $R(z, T)^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et

$$\begin{aligned} G(R(z, T)^*) &= G(-R(z, T))^{t^\perp} = G(-(T - z))^\perp = G(-(T - z))^{t^{t^\perp}} \\ &= G(-(T - z))^{t^{\perp^t}} = G((T - z)^*)^t = G(T^* - \overline{z})^t \end{aligned} \tag{134}$$

Ceci montre donc que $R(z, T)^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est l'inverse borné de $T^* - \overline{z}$ et que par conséquence, $\overline{z} \in \rho(T^*)$, ainsi que $R(z, T)^* = R(\overline{z}, T^*)$. La réciproque est une conséquence de cet argument, puisque T étant fermé, on a $T = T^{**}$. □

Définition 28. Un opérateur $(D(T), T)$ est dit symétrique si $T \subset T^*$ et $D(T)$ est dense.

Lemme 21. Un opérateur $(D(T), T)$ symétrique est fermable. De plus, $\ker(T \pm i) = \{0\}$ et

$$\overline{\operatorname{Ran}(T \pm i)} = \operatorname{Ran}(\overline{T} \pm i) \tag{135}$$

où $\overline{T} = T^{**}$ est la fermeture de T.

Preuve. Comme l'adjoint d'un opérateur densément défini existe toujours et qu'il est fermé, on a pour un opérateur symétrique que $G(T)$ est contenu dans le graphe $G(T^*)$, qui lui est fermé. On a alors que T est fermable et que $\overline{G(T)} = G(T)^{\perp^\perp} = G(-T^*)^{t^\perp} = G(T^{**})$.
Puisque $T \subset T^*$, on a pour $x \in D(T)$, $\langle x, Tx\rangle = \langle T^*x, x\rangle = \langle Tx, T\rangle = \overline{\langle x, Tx\rangle}$. Ainsi

$$\begin{aligned} ||(T \pm i)x||^2 &= \langle Tx, Tx\rangle \mp i\langle x, Tx\rangle \pm i\langle Tx, x\rangle + \langle x, x\rangle \\ &= ||Tx||^2 + ||x||^2 \geq ||x||^2, ||Tx||^2 \end{aligned} \tag{136}$$

Ceci implique que $\operatorname{Ker}(T \pm i) = \{0\}$. De plus, ceci montre que $(y_n) = ((T \pm i)x_n)$ est une suite de Cauchy dans l'image de $T \pm i$ si et seulement (x_n) est de Cauchy dans $D(T)$ et (Tx_n) est de Cauchy dans l'image de T, c'est-à-dire si et seulement si $(\lim x_n, \lim y_n) \in G(\overline{T})$. Donc, $\overline{\operatorname{Ran}(T \pm i)} = \operatorname{Ran}(\overline{T} \pm i)$. □

Théorème 19. Théorème de von Neumann Soit $(D(T), T)$ un opérateur symétrique et fermé sur un espace de Hilbert séparable $(\mathcal{H})$. Alors T est auto-adjoint si et seulement si $i \in \rho(T)$. Dans un tel cas $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Preuve. Supposons d'abord que $\pm i \in \rho(T)$. Alors, $R(\pm i, T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existent et $\operatorname{Ran}(T \pm i) = \mathcal{H}$. Pour $x \in D(T^*)$, il existe alors un $y \in D(T)$, tel que $(T^* \pm i)x = (T \pm i)y$. Puisque T est symétrique, $T \subset T^*$. Mais par la proposition précédente, $\pm i \in \rho(T^*)$ aussi, et $x = y$. Ainsi, $D(T) = D(T^*)$ et $T = T^*$.
Supposons maintenant que $T = T^*$. Alors, T est à fortiori symétrique, $T = \overline{T}$ et par le lemme précédent 21, $\operatorname{Ker}(T \pm i) = \{0\}$ et l'image de $t \pm i$ est fermée. Si x est orthogonal à l'image de $T \pm i$, alors $\forall y \in D(T) : \langle x, (T \pm i)y\rangle = 0$, de sorte que $D(T^*) = D(T)$ et $\langle (T \mp i)x, y\rangle = 0$. Comme $D(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$, ceci implique que $(T \mp i)x = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker}(T \pm i)$, donc $x = 0$. Ainsi, l'image de $T \pm i$ est l'espace de Hilbert entier. Comme $T \pm i$ sont des opérateurs fermés sur $D(T)$, on a que $(T \pm i)^{-1}$ sont fermés aussi et définis sur tout $\mathcal{H}$. Par le théorème du graphe fermé, $(T \pm i)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\pm i \in \rho(T)$.
Supposons enfin que $T = T^*$ et que $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\backslash 0$. Alors $b^{-1}(T - a)$ est auto-adjoint aussi et $\pm i \in \rho(b^{-1}(T - a))$, d'où on conclut que $\pm ib \in \rho(T - a)$, où encore, que $a \pm ib \in \rho(T)$. Conclure que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. □

Définition 29. Un opérateur $(D(T), T)$ symétrique est dit essentiellement auto-adjoint si sa fermeture $\overline{T} = T^{**}$ est auto-adjointe. Dans ce cas, $D(T)$ est un coeur pour T^{**}.

Corollaire 6. Un opérateur $(D(T), T)$ symétrique est essentiellement auto-adjoint si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\overline{\text{Ran}(T \pm i)} = \mathcal{H}$
- $\text{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$

Preuve. Commençons par noter que ces deux conditions sont équivalentes. En effet :

$$\overline{\text{Ran}(T \pm i)} = \mathcal{H} \Leftrightarrow \text{Ran}(T \pm i)^{\perp} = \{0\} \tag{137}$$

Mais l'orthogonal de l'image d'un opérateur n'est rien d'autre que le noyau de son adjoint et $(T \pm i)^* = T^* \mp i$.
Par le lemme précédent, $\overline{\text{Ran}(T \pm i)} = \text{Ran}(\overline{T} \pm i)$, donc $\overline{\text{Ran}(T \pm i)} = \mathcal{H}$ est équivalent à dire que $\overline{T} \pm i$ est une bijection entre $D(\overline{T})$ et $\mathcal{H}$.
Puisque $\overline{T} \pm i$ est fermé, $(\overline{T} \pm i)^{-1}$ l'est aussi et, d'après le théorème du graphe fermé X, on a que $(\overline{T} \pm i)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On a alors $\pm i \in \rho(\overline{T})$, ce qui, par le théorème de von Neumann 19, est équivalent à dire que $\overline{T}$ est auto-adjoint. □

XII. DÉCOMPOSITION SPECTRALE D'OPÉRATEURS NON-BORNÉS

Proposition 4. Pour un opérateur A densément défini et fermé, on a la décomposition :

$$\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H} = G(A^*) \bigoplus G(-A)^t \tag{138}$$

Preuve. Clair puisque $G(A^*)$ est fermé, puisque qu'écrit comme le complément orthogonal d'un sous-espace fermé et convexe. □

Lemme 22. Soient $(D(A), A)$ un opérateur densément définit et fermé, et $u, v \in \mathcal{H}$. Il existe alors un unique couple $(x, y) \in D(A) \times D(A^*)$ tel que $y - Ax = u$ et $x + A^*y = w$. De plus :

$$||u||^2 + ||w||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + ||Ax||^2 + ||A^*y||^2 \tag{139}$$

Preuve. Puisque $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H} = G(A^*) \bigoplus G(A)^{-t}$, voir proposition 4, et que $(u, v) \in \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, il existe une unique décomposition :

$$(u, v) = (y, A^*y) + (-Ax, x) \tag{140}$$

avec $(x, y) \in D(A) \times D(A^*)$. Par le théorème de Pythagore :

$$||u||^2 + ||w||^2 = ||(y, A^*y) + (-Ax, x)||^2_{\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}} = ||y||^2 + ||A^*y||^2 + ||Ax||^2 + ||x||^2 \tag{141}$$

□

Théorème 20. Soit $(D(A), A)$ un opérateur densément défini et fermé. Alors :

1. $(D(A^*A), 1 + A^*A)$ est un opérateur auto-adjoint
2. $1 + A^*A$ est une bijection entre $D(A^*A)$ et $\mathcal{H}$
3. $(1 + A^*A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est auto-adjoint et $||(1 + A^*A)^{-1}|| \leq 1$
4. $D(A^*A)$ est un coeur pour A

Preuve. Commençons par prouver que $1 + A^*A$ est une bijection entre $D(A^*A$ et $\mathcal{H}$. En appliquant le lemme 22 aux cas $v = 0$ et $w \in \mathcal{H}$, on trouve des couples $(x, y) \in D(A) \times D(A^*)$ tels que $0 = y - Ax$ et $w = x + A^*y$. Ceci implique que pour tout $w \in \mathcal{H}$, il existe un unique $x \in D(A)$, tel que $Ax \in D(A^*)$ et $1 + A^*A)x = w$. L'opérateur établit alors bien une bijection entre $D(A^*A$ et $\mathcal{H}$.
$(1 + A^*A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $||(1 + A^*A)^{-1}|| \leq 1$ suivent de $||w||^2 = ||x||^2 + 2||Ax||^2 + ||A^*Ax||^2 \geq ||x||^2$.
Montrons maintenant que $(D(A^*A), 1 + A^*A)$ est auto-adjoint. Tout d'abord, cet opérateur est fermé car le graphe d'un opérateur borné est toujours fermé, que $G(B^{-1}) = G(B)^t$ et que le graphe d'un opérateur est fermé si et seulement si le graphe transposé l'est. Remarquer que $D(A^*A)$, et donc $D(1 + A^*A)$, est dense dans $\mathcal{H}$. Soit $y \in D(A^*A)^{\perp}$ et montrons que $y = 0$. Il doit exister un unique $x \in D(1 + A^*A)$ tel que $y = x + A^*Ax$. Alors :

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle x, x + A^*Ax \rangle = ||x||^2 + ||Ax||^2 \tag{142}$$

donc $x = 0 = Ax = y$. Soit désormais $y \in D(1 + A^*A)$. Il existe alors un unique $z \in \mathcal{H}$ tel que :

$$\langle y, x + A^*Ax \rangle = \langle z, x \rangle \tag{143}$$

Mais $1 + A^*A$ étant une bijection, il doit exister un unique $y' \in D(1 + A^*A)$ tel que $z = y' + A^*Ay'$. Mais alors pour tout $x \in D(1 + A^*A)$:

$$\langle y, x + A^*Ax \rangle = \langle z, x \rangle = \langle y', x + A^*Ax \rangle \tag{144}$$

de sorte que $y = y'$ et $z = y + A^*Ay$. Prenons maintenant $x, y \in \mathcal{H}$ arbitraires. Par bijectivité et le fait que $1 + A^*A$ est auto-adjoint sur $D(A^*A)$:

$$\langle y, (1 + A^*A)^{-1}x \rangle = \langle (1 + A^*A)^{-1}y, x \rangle \tag{145}$$

Montrer enfin le dernier point. Supposer $(x, Ax) \in G(A)$ est orthogonal dans $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ au graphe de A restreint à $D(A^*A)$ et montrons que $x = 0$. Cela provient du fait que pour tout $y \in D(A^*A)$, on a que :

$$0 = \langle (x, Ax), (y, Ay) \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, (1 + A^*A)y \rangle \tag{146}$$

$\square$

Théorème 21. Soit $(D(A), A)$ un opérateur normal. Alors

1. $x \in D(A^2) \implies (1 + A^*A)^{-1/2}x \in D(A^2)$
2. Pour $x \in D(A)$, $A(1 + A^*A)^{-1}x = (1 + A^*A)^{-1}Ax$ et $A^*(1 + A^*A)^{-1}x = (1 + A^*A)^{-1}A^*x$
3. Pour $x \in D(A^2)$, $A(1 + A^*A)^{-1/2}x = (1 + A^*A)^{-1/2}Ax$ et $A^*(1 + A^*A)^{-1/2}x = (1 + A^*A)^{-1/2}A^*x$
4. $(1+A^*A)^{-1/2}A$ et $(1+A^*A)^{-1/2}A^*$ sont bornés sur $D(A^2)$, de norme inférieure à 1, de sorte qu'il existe des extensions bornées uniques T_A et T_{A^*}. De plus, $T_A^* = T_{A^*}$
5. $1 - T_{A^*}T_A = (1 + A^*A)^{-1}$

Preuve. Commencer par la discussion suivante. On a $D(A^2) = D(A^*A) = D(AA^*) = D(A^{*2})$. Par exemple :

$$\begin{aligned}
x \in D(A^*A) &\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \langle y, A^*Ax \rangle \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \langle Ay, Ax \rangle \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \sum_{k=0}^{3} i^k \langle A(y + i^k x), A(y + i^k x) \rangle \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \sum_{k=0}^{3} i^k ||A(y + i^k x)||^2 \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \sum_{k=0}^{3} i^k ||A^*(y + i^k x)||^2 \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \langle A^*y, A^*x \rangle \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\
&\Leftrightarrow A^*x \in D(A) \\
&\Leftrightarrow x \in D(AA^*)
\end{aligned} \tag{147}$$

De plus, si $x \in D(A^2)$, alors :

$$\langle x, A^*Ax \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = ||Ax||^2 = ||A^*x||^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, AA^*x \rangle \tag{148}$$

et en appliquant encore une fois l'identité de polarisation, on a que pour un tel opérateur normal $(D(A), A)$:

$$\forall x \in D(A^*A) = D(AA^*) : AA^*x = A^*Ax \tag{149}$$

Puisque $(1 + A^*A)^{-1}$ est borné, on peut par le calcul fonctionnel sur les opérateurs bornés définir l'opérateur $(1 + A^*A)^{-1/2}$. Celui-ci sera aussi borné, auto-adjoint et de norme inférieure à 1. Manifestement :

$$(1 + A^*A)^{-1/2}(1 + A^*A)^{-1/2} = (1 + A^*A)^{-1} \tag{150}$$

Prouvons désormais chaque point explicitement.

1. Si $x \in D(A^2)$, il doit exister $y \in \mathcal{H}$ tel que $x = (1 + A^*A)y$. Mais alors, par le calcul fonctionnel, on a $(1+A^*A)^{-1/2}x = (1 + A^*A)^{-3/2}y = (1 + A^*A)^{-1}(1 + A^*A)^{-1/2}y \in D(A^2)$.

2. Si $x \in D(A)$, il existe $y \in D(A^2)$ tel que $(1 + A^*A)y = x$. Ceci montre que $A^*Ay = x - y \in D(A)$, d'où $y \in D(AA^*A)$, ou encore, $Ay \in D(AA^*) = D(A^*A)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} A(1 + A^*A)^{-1}x &= Ay = (1 + A^*A)^{-1}(1 + A^*A)Ay = (1 + A^*A)^{-1}(Ay + A^*AAy) \\ &= (1 + A^*A)^{-1}(Ay + AA^*Ay) = (1 + A^*A)^{-1}A(1 + A^*A)y = (1 + A^*A)^{-1}Ax \end{aligned} \tag{151}$$

   Le raisonnement pour l'autre égalité est analogue.

3. Par définition du calcul fonctionnel, il doit exister une suite (p_n) convergeant uniformément sur $\sigma(((1 + A^*A)^{-1}))$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ de telle sorte que $||(1 + A^*A)^{-1/2} - p_n((1 + A^*A)^{-1})|| \to 0$. Pour $x, y \in D(A^2)$:

$$\begin{aligned} \langle x, A(1 + A^*A)^{-1/2}y\rangle &= \langle A^*x, (1 + A^*A)^{-1/2}y\rangle = \langle A^*x, \lim_{n\to\infty} p_n((1 + A^*A)^{-1})y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A^*x, p_n((1 + A^*A)^{-1})y\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle x, Ap_n((1 + A^*A)^{-1})y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, p_n((1 + A^*A)^{-1})Ay\rangle \\ &= \langle x, \lim_{n\to\infty} p_n((A + A^*A)^{-1})Ay\rangle = \langle x, (1 + A^*A)^{-1/2}Ay\rangle \end{aligned} \tag{152}$$

   Les éléments de matrices de $(1 + A^*A)^{-1/2}A$ et de $A(1 + A^*A)^{-1/2}$ étant égaux sur $D(A^2)$ qui est dense dans $\mathcal{H}$, on peut conclure.

4. Il existe des extensions bornées de T_A et T_{A^*} de $A(1+A^*A)^{-1/2}$ et $A^*(1+A^*A)^{-1/2}$ respectivement. De plus, $T_A^* = T_{A^*}$ et $||T_A|| \leq 1$. Pour $x \in D(A^2)$, on a que :

$$\begin{aligned} &||(1 + A^*A)^{-1/2}Ax||^2 = \langle Ax, (1 + A^*A)^{-1/2}(1 + A^*A)^{-1/2}Ax\rangle = \langle Ax, (1 + A^*A)^{-1}Ax\rangle = \langle x, A^*(1 + A^*A)^{-1}Ax\rangle \\ &= \langle x, A^*A(1 + A^*A)^{-1}x\rangle \leq \langle x, A^*A(1 + A^*A)^{-1}x\rangle + \langle x, (1 + A^*A)^{-1}x\rangle = \langle x, (1 + A^*A)(1 + A^*A)^{-1}\rangle = ||x||^2 \end{aligned} \tag{153}$$

   L'opérateur $(1 + A^*A)^{-1/2}A$ est donc bien borné sur $D(A^2)$, de norme inférieure à 1, et possède donc une unique extension sur tout $\mathcal{H}$. Il en va de manière similaire pour $(1 + A^*A)^{-1/2}A^*$. Finalement, pour $x, y \in D(A^2)$, on a :

$$\langle x, A(1 + A^*A)^{-1/2}y\rangle = \langle A^*x, (1 + A^*A)^{-1/2}y\rangle = \langle (1 + A^*A)^{-1/2}A^*x, y\rangle \tag{154}$$

   ce qui montre bien que $(A(1 + A^*A)^{-1/2})^* = (1 + A^*A)^{-1/2}A^*$. L'extension de l'adjoint étant l'adjoint de l'extension, $T_A^* = T_{A^*}$.

5. Prendre à nouveau $x, y \in D(A)$:

$$\begin{aligned} \langle x, (1 - T_{A^*}T_A)y\rangle &= \langle x, y\rangle - \langle T_Ax, T_Ay\rangle = \langle x, y\rangle - \langle (1 + A^*A)^{-1/2}Ax, (1 + A^*A)^{-1/2}Ay\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \langle Ax, (1 + A^*A)^{-1/2}(1 + A^*A)^{-1/2}Ay\rangle = \langle x, y\rangle - \langle Ax, (1 + A^*A)^{-1}Ay\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \langle x, A^*A(1 + A^*A)^{-1}y\rangle = \langle x, (1 + A^*A)(1 + A^*A)^{-1}y\rangle - \langle x, A^*A(1 + A^*A)^{-1}y\rangle \\ &= \langle x, (1 + A^*A)^{-1}y\rangle \end{aligned} \tag{155}$$

   Ces deux opérateurs bornés ont donc les mêmes éléments de matrice sur un ensemble dense de $\mathcal{H}$ et sont donc identiques.

□

Théorème 22. Soit $(D(A), A)$ un opérateur auto-adjoint. Alors, il existe une famille dénombrable $(\nu_n)_{n\in B}$ de mesures boreliennes, régulières et finies sur $\sigma(A)$ et un unique opérateur unitaire $U : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n\in B} L^2(\sigma(A), \nu_n)$ tels que

1. $UD(A) = \{(f_n)_{n\in B} \in \bigoplus_{n\in B} L^2(\sigma(A), \nu_n) : (xf_n(x))_{n\in B} \in \bigoplus_{n\in B} L^2(\sigma(A), \nu_n)\}$
2. Sur $D(A)$, on a $A = U^{-1}M_xU$

Preuve. Commençons par la discussion suivante. Si $(D(A), A)$ est auto-adjoint, il est à fortiori normal. Par le théorème précédent 21, T_A est donc un opérateur auto-adjoint borné de norme inférieure à 1. Par conséquent son spectre est dans $[-1, 1]$ et par le théorème de la décomposition spectrale pour opérateurs auto-adjoints bornés 14, il existe une famille de mesures régulières boréliennes $(\mu_n)_{n\in B}$ sur $\sigma(A)$ et avec $|B| \leq |\mathbb{N}|$ et un opérateur unitaire V :

$$V : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n\in B} L^2(\sigma(A), \mu_n) : VT_AV^{-1} = M_x \tag{156}$$

Par le théorème 21, on a alors que :

$$(1+A^*A)^{-1} = 1 - T_A^2 = V^{-1}(1-M_x^2)V \tag{157}$$

Clairement :

$$VD(A^2) = V\text{Ran}(1+A^*A)^{-1} = \text{Ran}(1-M_x^2) = \left\{((1-x^2)f_n(x))_{n\in B} : (f_n)_{n\in B} \in \bigoplus_{n\in B} L^2(\sigma(A),\mu_n)\right\} \tag{158}$$

Manifestement, on a aussi $V(1+A^*A)^{-1/2}V^{-1} = M_{\sqrt{1-x^2}}$. Puis sur $VD(A^2)$, on a :

$$M_x = VA(1+A^2)^{-1/2}V^{-1} = V(1+A^2)^{-1/2}AV^{-1} = V(1+A^2)^{-1/2}V^{-1}VAV^{-1} = M_{\sqrt{1_x^2}}VAV^{-1} \tag{159}$$

de sorte que sur $VD(A^2)$, $VAV^{-1} = M_{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$. Puisque $D(A^2)$ est un coeur pour A, $G(A)$ sera la fermeture dans $\mathcal{H}\bigoplus\mathcal{H}$ du graphe de A restreint à $D(A^2)$. Puisque V est unitaire, on aura que $(D(A),A)$ sera unitairement équivalent à la fermeture du graphe $M_{\frac{x}{\sqrt{1_x^2}}}$ restreint à $VD(A^2)$. De même, (D(A),A) est unitairement équivalent $(VD(A), M_{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}})$. Par le point 5 du théorème 21, $(1+A^2)^{-1} = 1-T_A^2$ est une injection, de sorte que par unitarité de V, l'opérateur $1-M_x^2$ est une bijection dans $\bigoplus_{n\in B} L^2(\sigma(A),\mu_n)$. Il en résulte que pour tout $n\in B$, $\mu_n\{-1,1\} = 0$ car sinon le vecteur $\bigoplus_{k\in B} x_k$ avec $x_k = \delta_{nk}\chi_{\{-1,1\}}$ serait un vecteur non-nul avec $1-M_x^2\bigoplus_{k\in B} x_k = 0$. Considérons alors

$$\varphi : \mathbb{R} \to]-1,1[, x \mapsto y = \varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Cette fonction est clairement une bijection continue avec inverse $\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$. Si $\Sigma_n \subseteq \mathcal{P}(]-1,1[)$ est la σ-algèbre borélienne sur laquelle est définie μ_n, alors :

$$\Sigma_n^\varphi = \{\varphi^{-1}\{E\} : E \in \Sigma_n\} \tag{160}$$

est une σ-algèbre borélienne de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On définit alors une mesure ν_n :

$$\nu_n : F = \varphi^{-1}\{E\} \in \Sigma_n^\varphi \to \mathbb{R}_+, F \mapsto \mu_n(E) \tag{161}$$

Il est alors clair que f est une fonction Σ_n-mesurable si et seulement si $f\circ\varphi$ est Σ_n^φ-mesurable et que s est une fonction Σ-simple si et seulement si $s\circ\varphi$ est une fonction Σ_n^φ-simple. Par définition de ν_n, il est alors clair que pour une fonction Σ_n^φ-simple :

$$\int_{\mathbb{R}} s\,d\nu_n = \int_{\sigma(A)} s\circ\varphi^{-1}d\mu_n \tag{162}$$

et que par conséquent, la composition des fonctions par φ induit un isomorphisme unitaire $W_n : L^2(\sigma(A),\mu_n) \to L^2(\mathbb{R},\nu_n)$. φ étant une bijection continue entre intervalles réels de sorte que des compacts de $\mathbb{R}$ sont envoyés sur des compacts de $]-1,1[$, et que la régularité de μ_n a alors comme conséquence la régularité de ν_n. La composition par φ montre alors aussi que

$$W_n M_{\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}} = M_x W_n \tag{163}$$

sur l'ensemble $VD(A)_n$ et la composition par φ nous donne que

$$W_nVD(A)_n = \left\{\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} : f \in L^2(\mathbb{R},\nu_n)\right\} \tag{164}$$

Mais alors,

$$g \in W_nVD(A)_n \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)}(1+x^2)g(x)d\nu_n < \infty \Leftrightarrow g, xg(x) \in L^2(\mathbb{R},\nu_n) \tag{165}$$

Ainsi :

$$W_nVD(A)_n = \{f \in L^2(\mathbb{R},\nu_n) : M_x f \in L^2(\mathbb{R},\nu_n)\} \tag{166}$$

En définissant $W = \bigoplus_{n\in B} W_n$ et $U = WV$, on la conclusion du théorème. $\square$