

# Analyse Fonctionnelle pour Physiciens

Baptiste Claudon  
January 19, 2021

Notes personnelles basées sur le cours de Simon Bossoney.  
Suit les cours d'Analyse I à III de Joachim Stubbe et le cours d'Analyse IV de Matthias Ruf.

## Contents

### I Espaces Fonctionnels

|                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| I. Le théorème de Stone-Weierstrass  | 3 |
| II. Systèmes complets et orthonormés | 5 |

### II Mesures et intégrales

|   |    |
|---|----|
| III. Séparation et partition            | 6  |
| IV. Mesures et fonctionnelles positives | 7  |
| V. Résultats de densité                 | 11 |

### III Opérateurs bornés

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| VI. Spectre des opérateurs bornés | 13 |
| VII. Le calcul fonctionnel        | 14 |
| VIII. Décomposition Spectrale     | 14 |

### IV Opérateurs Non-bornés

|   |    |
|---|----|
| IX. Notions fondamentales des opérateurs non-bornés     | 16 |
| X. Les théorèmes de Banach-Steinhaus et du graphe fermé | 16 |
| XI. Le coeur et l'adjoint essentiel                     | 18 |
| XII. Décomposition spectrale d'opérateurs non-bornés    | 19 |

## Part I

# Espaces Fonctionnels

### I. LE THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS

**Théorème 1. Théorème de Diniz** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions réelles et continues définies sur un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  et convergent simplement et de manière monotone vers  $f \in C(K, \mathbb{R})$ . Alors cette suite converge uniformément vers  $f$ .

**Preuve.** Choisir, sans perte de généralité que  $(f_n)$  est décroissante et converge simplement vers 0. Soit  $\epsilon > 0$ . Poser pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$V_n = \{x \in K : f_n(x) < \epsilon\} \quad (1)$$

Par continuité des fonctions de la suite, tous ces ensembles sont des ouverts. Puisque la suite tend vers 0, on a :

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \quad (2)$$

$K$  étant compact, il existe un nombre  $F \in \mathbb{N}$  tel que

$$K = \bigcup_{n=0}^F V_n = K \quad (3)$$

Puisque la suite est monotone décroissante, on a que  $m < n$  implique  $V_m \subseteq V_n$ , donc  $V_F = K$ .  $\square$

**Définition 1.** Soit  $F$  une famille de fonctions définies sur un ensemble  $X \subset \mathbb{R}^n$ . On dit que  $F$  sépare  $X$  si :

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists f \in F : f(x) \neq f(y) \quad (4)$$

**Définition 2.** On dit que  $F$  ne s'annule pas sur  $X$  si :

$$\forall x \in X \exists f \in F : f(x) \neq 0 \quad (5)$$

**Définition 3.** Si  $B$  est un sous-ensemble d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $A$ , alors la  $\mathbb{K}$ -algèbre engendrée par  $B$ ,  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}(B)$  est la plus petite  $\mathbb{K}$ -algèbre contenant  $B$ .

**Théorème 2. Théorème de Stone-Weierstrass** Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble compact et soit  $F \subseteq C(X, \mathbb{R})$  une famille de fonctions qui sépare  $X$  et qui ne s'annule pas sur  $X$ . Alors l'algèbre réelle  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}(F)$  engendrée par  $F$  est uniformément dense dans  $C(X, \mathbb{R})$  :

$$\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}(F)}^{\|\cdot\|_{\infty}} = C(X, \mathbb{R}) \quad (6)$$

**Preuve.**

**Lemme 1.** Il existe une suite  $(P_n)$  de polynômes sur  $[-1, 1]$  qui converge uniformément vers  $x$ .

Définir la suite de polynômes par  $P_0 = 0$  et :

$$\forall n \geq 0 : P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2) \quad (7)$$

On déduit alors par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1] : 0 \leq P_n(x) \leq |x|$ . Alors, on déduit que la suite  $(P_n)$  est croissante. Puisque qu'elle est majorée elle doit converger. La limite doit être point fixe de l'application donc est  $x \mapsto |x|$ . Par le théorème de Diniz 1, la convergence est uniforme.

**Lemme 2.** Si  $f, g_i \in \overline{\mathcal{A}(F)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , alors  $|f|, \min_{i=1, \dots, n} g_i, \max_{i=1, \dots, n} g_i$  appartiennent aussi à  $\overline{\mathcal{A}(F)}$ .

Si  $f \neq 0$ , poser  $h = \frac{f}{\|f\|}$ . Noter  $h \in \overline{\mathcal{A}(F)}$  et a son image dans  $[-1, 1]$ . Par le lemme 1, il existe un polynôme  $P$  tel que  $P(h)$  converge uniformément vers  $\frac{|f|}{\|f\|}$ . Pour  $g_1, g_2 \in \overline{\mathcal{A}(F)}$ , utiliser :

$$\min\{g_1, g_2\} = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad (8)$$

et

$$\max\{g_1, g_2\} = \frac{f + g - |f - g|}{2} \quad (9)$$

Conclure alors récursivement.

**Lemme 3.** Pour tous  $x, y \in X$  et  $x \neq y$ , et pour tout couple de réels  $\alpha, \beta$ , il existe un élément  $f \in \mathcal{A}(F)$  tel que  $f(x) = \alpha$  et  $f(y) = \beta$ .

Avec les hypothèses du théorème, pour  $z = x, y$ , il existe  $h_z \in F : h_z(x) \neq 0$ . Il existe également  $g \in F$  tel que  $g(x) \neq g(y)$ . La fonction :

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \alpha \frac{g(t) - g(y)}{g(x) - g(y)} \frac{h_x(t)}{h_x(x)} + \beta \frac{g(t) - g(x)}{g(y) - g(x)} \frac{h_y(t)}{h_y(y)} \quad (10)$$

satisfait les hypothèses du lemme.

**Lemme 4.** Soient  $f \in C(X, \mathbb{R}), x_0 \in X$  et  $\epsilon > 0$ . Alors il existe  $g_{x_0, \epsilon} \in \overline{\mathcal{A}(F)}$  :

$$g_{x_0, \epsilon}(x_0) = f(x_0) \text{ et } g_{x_0, \epsilon} < f + \epsilon \quad (11)$$

Grâce au lemme 3, pour chaque  $y \in X \setminus \{x_0\}$ , on peut choisir  $h_y \in \mathcal{A}(F)$  telle que  $f(y) = h_y(y)$  et  $f(x_0) = f_y(x_0)$ . Puisque  $h_y$  et  $f$  sont continues, l'ensemble :

$$U_y = \{x \in X : h_y(x) < f(x) + \epsilon\} \quad (12)$$

est un ouvert. Puisque  $\forall y \in X, y \in U_y$ , on a (l'inclusion réciproque étant explicite) :

$$X = \bigcup_{y \in X} U_y \quad (13)$$

Comme  $X$  est compact, il existe une sous-collection d'ouvert finie  $\{U_{y_i}\}_{1 \leq i \leq p}$  telle que :

$$X = \bigcup_{i=1}^p U_{y_i} \quad (14)$$

Poser alors  $g_{x_0, \epsilon} = \max_{i=1, \dots, p} h_{y_i}$ . Cette fonction satisfait les hypothèses du lemme et appartient à l'algèbre engendrée par le lemme 2.

**Lemme 5.** Soient  $f \in C(X, \mathbb{R})$  et  $\epsilon > 0$ . Il existe une fonction  $g \in \overline{\mathcal{A}(F)}$  telle que  $f - \epsilon \leq g \leq f + \epsilon$ .

Par le lemme 4, on peut choisir pour tout  $x \in X$  une fonction  $g_{x, \epsilon} \in \overline{\mathcal{A}(F)}$  telle que  $g_{x, \epsilon}(x) = f(x)$  et  $g_{x, \epsilon} < f + \epsilon$ . Pour chaque  $x \in X$ , définir :

$$V_x = \{z \in X : f(x) - \epsilon < g_{x, \epsilon}(z)\} \quad (15)$$

Puisque  $g_{x, \epsilon}$  est définie comme le maximum de plusieurs fonctions continues, elle est continue.  $V_x$  est donc ouvert pour chaque  $x \in X$ . Procédant comme auparavant, remarquer que l'union des membres de la famille d'ouverts vaut  $X$ , en extraire une sous-famille finie. Définir cette fois  $g$  comme le minimum des fonctions sélectionnées. Par le lemme 2,  $g \in \overline{\mathcal{A}(F)}$ . Elle vérifie de plus les propriétés recherchées par le lemme, et plus généralement par le théorème de Stone-Weierstrass.  $\square$

**Corollaire 1.** Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble compact et  $F \subseteq C(X, \mathbb{C})$  une famille de fonction qui sépare  $X$ , invariante sous conjugaison complexe et qui ne s'annule pas sur  $X$ . Alors l'algèbre complexe  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(F)$  engendrée par  $F$  est uniformément dense dans  $C(X, \mathbb{C})$ , c'est-à-dire  $f \in \overline{\mathcal{A}(F)}$ .

**Preuve.** On a  $F = F^*$  car :

$$F^* \subseteq F = (F^*)^* \subseteq F^* \quad (16)$$

Comme  $F$  sépare  $X$  et ne s'annule pas sur  $X$ ,  $G = (F + F^*) \cup i(F - F^*)$  ne s'annule pas sur  $X$  non plus et sépare aussi  $X$ . Or  $F \subseteq C(X, \mathbb{R})$  et par le théorème de Stone-Weierstrass 2,  $C(X, \mathbb{R}) = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(G)}$ . Comme  $C(X, \mathbb{C}) = C(X, \mathbb{R}) + iC(X, \mathbb{R})$  et que  $\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(G)}, i\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(G)} \subset \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(G)}$ , on a que  $C(X, \mathbb{C}) = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(G)}$ . Or :  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(G) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(F)$ .  $\square$

**Corollaire 2.** Soit  $X \subset \mathbb{R}$  un ensemble compact. L'ensemble  $\mathbb{C}[X]$  est uniformément dense dans  $C(X, \mathbb{C})$ .

**Preuve.**  $\mathbb{C}[X] = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\{1, id_X\})$  vérifie les hypothèses du corollaire 1.  $\square$

**Corollaire 3.** Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ . L'algèbre engendrée sur les complexes par  $F$  défini comme :

$$F = \left\{ e^{2\pi n i \frac{x-a}{b-a}}, x \in I, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (17)$$

est uniformément dense dans  $V = \{f : f \in C([a, b], \mathbb{C}), f(a) = f(b)\}$ .

**Preuve.** La fonction  $\varphi$  définie par :

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \partial B_1(0), x \mapsto e^{2\pi n i \frac{x-a}{b-a}} \quad (18)$$

induit un homéomorphisme isométrique  $\Phi : C(\partial B_1(0), \mathbb{C}) \rightarrow V, f \mapsto f \circ \varphi$ . Or,  $C(\partial B_1(0), \mathbb{C}) = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\{1, z \mapsto z, z \mapsto z^*\})}$  puisque  $\{1, z \mapsto z, z \mapsto z^*\}$  satisfait les hypothèses du corollaire 1 et  $F = \Phi|_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\{1, z \mapsto z, z \mapsto z^*\})}$ .  $\square$

## II. SYSTÈMES COMPLETS ET ORTHONORMÉS

**Définition 4.** Soit  $\mathcal{H}$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille  $F \subseteq \mathcal{H}$  est dite complète si l'ensemble  $\text{Vect}(F)$  des combinaisons linéaires d'éléments de  $F$  est un ensemble dense de  $\mathcal{H}$ .

**Théorème 3.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K}$  séparable. Soit  $B = \{\varphi_n\}_{n \in I}$  une famille de vecteurs orthonormée. Alors  $|B| \leq |\mathbb{N}|$ .

**Preuve.** Puisque  $\mathcal{H}$  est séparable, il existe une famille  $D = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$  dense dans  $\mathcal{H}$ . Il existe alors pour chaque  $\varphi_k \in B$  un élément de  $\psi_k \in D$  tel que  $\|\varphi_k - \psi_k\| \leq 1/\sqrt{2}$ . Si  $\varphi_k \neq \varphi_l$ , alors par orthonormalité  $\|\varphi_k - \varphi_l\|^2 = 2$  est par conséquent,  $\|\varphi_k - \varphi_l\| = \sqrt{2}$ . Mais alors,  $\psi_k \neq \psi_l$  puisque la supposition contraire entraînerait  $\|\varphi_k - \varphi_l\| \leq \|\varphi_k - \psi_k\| + \|\varphi_l - \psi_l\| < \sqrt{2}$ , une contradiction. On a alors une fonction injective de  $B$  dans  $D$ .  $\square$

**Théorème 4.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable. Il existe alors un système complet et orthonormé  $\{b_n\}_{n \in I}$  avec  $I \subseteq \mathbb{N}$ .

**Preuve.** Comme  $\mathcal{H}$  est séparable, il existe une famille  $D = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dense dans  $\mathcal{H}$ . On va itérativement construire une famille  $\{v_n\}_{n \in J} \subseteq D$  de la manière suivante :

$$\varphi(n+1) = \inf\{k \in \mathbb{N} : k > \varphi(n) \text{ et } d_k \notin \text{Vect}[v_0, \dots, v_n]\} \quad (19)$$

$$\varphi(0) = 0, v_{n+1} = d_{\varphi(n+1)} \quad (20)$$

Clairement, la famille  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{J}}$  est formée de vecteurs linéairement indépendants. De plus,  $\text{Vect}[v_n]_{n \in J}$  est dense dans  $\mathcal{H}$ , puisque  $D \subseteq \text{Vect}[v_n]_{n \in J}$ . On forme maintenant une famille de vecteurs orthonormés à partir de  $\{v_n\}_{n \in J}$  et  $\text{Vect}[v_n]_{n \in J}$ .

$$b_n = \frac{1}{\|v_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle b_k, v_n \rangle b_k\|} \left( v_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle b_k, v_n \rangle b_k \right) \quad (21)$$

Manifestement,  $\{b_n\}_{n \in J}$  est une famille de vecteurs orthonormés et  $\text{Vect}[b_n]_{n \in J} = \text{Vect}[v_n]_{n \in J}$ , de sorte de  $\{b_n\}_{n \in J}$  forme un système complet.  $\square$

**Théorème 5.** Soit  $\{b_n\}_{n \in B}, B \subseteq \mathbb{N}$  une famille de vecteurs orthonormés d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  séparable. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $\{b_n\}_{n \in B}$  est complet
2.  $\forall x \in \mathcal{H}, x = \sum_{n \in B} \langle b_n, x \rangle b_n$
3.  $\forall x, y \in \mathcal{H}, \langle x, y \rangle = \sum_{n \in B} \langle x, b_n \rangle \langle b_n, y \rangle$

**Preuve.** Montrer que 1.  $\implies$  2.. Pour  $F \subseteq B, |F| < \infty$ , former les espaces  $V_F = \text{Vect}[\{b_n\}_{n \in F}]$ . Tous ces espaces sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{H}$  fermés, complets et convexes.  $\{b_n\}_{n \in B}$  étant complet,  $\cup_{F \subseteq B: |F| < \infty} V_F$  est dense dans  $\mathcal{H}$ . Soient  $x \in \mathcal{H}, \epsilon > 0$ . Il existe alors un  $y \in V_F$  tel que  $\|x - y\| < \epsilon$ . A fortiori, notant  $x_{V_F}$  la projection de  $x$  sur  $V_F$  (et de même pour  $G$  ensuite),  $\|x - x_{V_F}\| < \epsilon$ , et si  $F \subseteq G \subseteq B, |G| < \infty$ , on a :

$$\|x - x_{V_G}\| = \inf\{\|x - y\| : y \in V_G\} \leq \inf\{\|x - y\| : y \in V_F\} < \epsilon \quad (22)$$

C'est-à-dire, les projections de  $x$  sur les  $V_F$  convergent vers  $x$ . Poser  $x_{V_F} = \sum_{n \in F} \lambda_n b_n$ . Puisque  $x - x_{V_F} \perp V_F$ , on doit avoir pour  $b_m \in V_F$  :

$$0 = \langle x, b_m \rangle - \bar{\lambda} \langle b_m, b_m \rangle \quad (23)$$

d'où  $\lambda_m = \langle b_m, x \rangle$  et enfin :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in B, k \leq n} \langle b_k, x \rangle b_k \quad (24)$$

Montrer que 2.  $\implies$  3.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in B} \sum_{m \in B} \langle b_n, x \rangle \langle y, b_m \rangle \langle b_n, b_m \rangle = \sum_{n \in B} \langle x, b_n \rangle \langle b_n, y \rangle \quad (25)$$

Montrer que 3.  $\implies$  1.. En posant  $x = y$ , on obtient  $\|x\| = \sum_{n \in B} |\langle x, b_n \rangle|^2 < \infty$ . Ainsi, la suite  $\left( \sum_{k \in B, k \leq n} \langle b_k, x \rangle b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dont on a clairement la limite  $x$  car  $(\langle x, b_k \rangle)_{k \in B}$  est une suite dans  $l^2(B)$ .  $\square$

## Part II

# Mesures et intégrales

### III. SÉPARATION ET PARTITION

Pour  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , poser  $d : \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+$  :

$$(x, A) \mapsto \inf\{|x - y| : y \in A\} \quad (26)$$

**Théorème 6.** Soit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Alors la fonction  $d_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  :

$$x \mapsto d(x, A) \quad (27)$$

est continue.

**Preuve.** Soit  $A \neq \emptyset$ . Soit  $\epsilon > 0$  et  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tels que  $|x - y| < \delta$ . Supposer (autrement inverser les rôles) que  $d_A(y) \leq d_A(x)$ . Utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|d_A(x) - d_A(y)| = \inf_{z \in A} d(x, z) - \inf_{z \in A} d(y, z) \leq d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) - \inf_{z \in A} d(y, z) < \delta \quad (28)$$

Prendre  $\delta = \epsilon$ . □

**Définition 5.** Un ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est dit relativement compact si sa fermeture est compact.

**Lemme 6.** Soit un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Il existe alors un ouvert  $U$  relativement compact tel que  $K \subset U$ .

**Preuve.** Si  $K = \emptyset$ , prendre  $U = B_1(x), x \in \mathbb{R}^n$ . Sinon, considérer la famille d'ouverts  $\{B_1(x)\}_{x \in K}$  qui recouvre  $K$ . Extraire une sous-famille finie  $F \subset K$  qui recouvre  $K$ . L'ouvert :

$$U = \bigcup_{x \in F} B_1(x) \quad (29)$$

satisfait aux exigences du lemme. □

**Définition 6.** Soient  $K \subset V \subseteq \mathbb{R}^n$ , avec  $K$  compact et  $V$  ouvert. On dit qu'une fonction  $f \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  sépare  $K$  de  $\mathbb{R}^n \setminus V$  et note  $K \prec f \prec V$ , si  $f^{-1}\{1\}$  est un voisinage de  $K$  et si  $\text{supp}(f) \subset V$ .

**Lemme 7. Lemme d'Urysohn** Soient  $K \subset V \subseteq \mathbb{R}^n$ , avec  $K$  compact et  $V$  ouvert. Il existe alors une fonction  $f$  telle que  $K \prec f \prec V$ .

**Preuve.** Par le lemme 6, il existe un ouvert  $U$  contenant  $K$  relativement compact. Remplaçant si nécessaire  $V$  par  $V \cap U$ , on peut supposer que  $V$  est relativement compact. La fonction :

$$g(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus V)}{d(x, \mathbb{R}^n \setminus V) + d(x, K)} \quad (30)$$

est manifestement définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et continue comme combinaison de fonctions continues. De plus,  $g|_K = 1$  et  $g|_{\mathbb{R}^n \setminus V} = 0$ . Soient alors les ouverts  $W = g^{-1}]2/3, 1]$  et  $U = g^{-1}]1/3, 1]$ . Clairement,  $K \subset W \subset \bar{U} \subset V$  et la fonction :

$$f(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)}{d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) + d(x, W)} \quad (31)$$

satisfait aux critères du lemme. □

**Définition 7.** Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $\{V_n\}_{1 \leq n \leq m}$  une collection finie d'ensembles ouverts qui recouvrent  $K$ . Une famille de  $m$  fonctions  $f_n \prec V_n$  telles que :

$$\sum_{n=1}^m f_n(x) = 1, \forall x \in K \quad (32)$$

est appelée une partition de  $K$  subordonnée au recouvrement  $\{V_n\}_{1 \leq n \leq m}$ .

**Corollaire 4.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact et  $\{V_n\}_{1 \leq n \leq m}$  une collection finie d'ensembles ouverts qui recouvrent  $K$ . Il existe alors une partition de  $K$  subordonnée à  $\{V_n\}_{1 \leq n \leq m}$ .

**Preuve.** Soit  $x \in K$ . Il existe  $V_{n_x}$  du recouvrement tel que  $x \in V_{n_x}$ . Par le lemme d'Urysohn 7, il existe une fonction  $g_x$  telle que  $\{x\} \prec g_x \prec V_{n_x}$ . L'ensemble  $K_x = g_x^{-1}\{1\}$  est alors un voisinage compact de  $\{x\}$ . Comme  $K$  est compact et puisque  $\{\overset{\circ}{K}_x\}_{x \in K}$  recouvre  $K$ , il existe une sous-collection finie  $\{K_{x_j}\}_{j=1, \dots, p}$  qui recouvre  $K$ . Pour chaque  $V_n$  du recouvrement initiale, poser :

$$C_n = \bigcup_{K_{x_j} \subset V_n, 1 \leq j \leq p} K_{x_j} \quad (33)$$

Tous les  $C_n$  sont compacts et leur collection recouvre  $K$ . De plus,  $C_n \subset V_n$ ,  $n = 1, \dots, m$ . Une nouvelle application du lemme d'Urysohn livre alors  $m$  fonctions  $h_n$  telles que  $C_n \prec h_n \prec V_n$ . Poser alors  $f_1 = h_1$  et  $f_n = h_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - h_k)$ , pour  $n \geq 2$ . Clairement,  $f_n \prec V_n$  pour  $n = 1, \dots, m$  et :

$$\sum_{n=1}^m f_n = 1 - \prod_{n=1}^m (1 - h_n) \quad (34)$$

De plus, si  $x \in K$ ,  $x \in C_n$  pour au moins un  $n$ , de sorte que  $h_n(x) = 1$ , c'est-à-dire la propriété espérée.  $\square$

#### IV. MESURES ET FONCTIONNELLES POSITIVES

**Définition 8.** Une fonctionnelle  $\Phi : C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est dite positive si  $f \geq 0$  implique  $\Phi(f) \geq 0$ .

**Définition 9.** Soit  $\Phi : C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  une fonctionnelle positive. Soient  $K, V \subset \mathbb{R}^n$  avec  $K$  compact,  $V$  ouvert. Définir :

$$\mu(K) = \inf\{\Phi(f) : K \prec f\} \in \mathbb{R}^+ \quad (35)$$

$$\mu(V) = \sup\{\Phi(f) : f \prec V\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \quad (36)$$

**Lemme 8.** Soient  $K, V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compact,  $V$  ouvert. Alors :

$$\mu(K) = \inf\{\mu(W) : K \subset W, W \text{ ouvert}\} \quad (37)$$

$$\mu(V) = \sup\{\mu(C) : C \subset V, C \text{ compact}\} \quad (38)$$

**Preuve.** Si  $K \subset W \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compact,  $W$  ouvert, alors par le lemme d'Urysohn 7, il existe une fonction  $K \prec f \prec W$ . Puisque  $f^{-1}\{1\}$  est un voisinage de  $K$ , on a :

$$\mu(K) = \inf\{\Phi(f) : K \prec f\} \geq \inf\{\mu(U) : K \subset U, U \text{ ouvert}\} \geq \mu(K) \quad (39)$$

Similairement, puisque pour une fonction  $f \prec V$ , on a  $\text{supp}(f) \subset V$  et que  $\text{supp}(f)$  est compact, on :

$$\mu(V) = \sup\{\Phi(f) : f \prec V\} \leq \sup\{\mu(C) : C \subset V, C \text{ compact}\} \leq \mu(V) \quad (40)$$

$\square$

**Définition 10.** On définit une mesure intérieure  $\mu_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  et une mesure extérieure  $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  par :

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ compact}\} \text{ et } \mu^*(E) = \inf\{\mu(V) : E \subseteq V, V \text{ ouvert}\} \quad (41)$$

**Lemme 9.** Si  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de sous-ensembles de nombres réels positifs, alors :

$$\inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mid \forall k : a_k \in F_k \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \inf F_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \quad (42)$$

**Preuve.** Noter  $A$  le terme de gauche,  $B$  le terme de droite. D'abord, remarquer que  $B$  minore l'ensemble  $\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mid \forall k : a_k \in F_k\}$  donc  $B \leq A$ . Si  $B = \infty$ , alors  $A = B$ . Supposer donc  $B < \infty$ . Alors,  $\forall n \geq 0$ ,  $\inf F_n < \infty$ . Soit  $x > B$  et poser  $\epsilon = x - B$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in F_n : a_n < \inf F_n + \epsilon/2^{n+1} \quad (43)$$

Alors,  $A \leq \sum_{n \geq 0} a_n \leq B + \epsilon = x$ . Puisque  $x$  est arbitraire,  $A \leq B$ .  $\square$

**Lemme 10.** La mesure intérieure  $\mu_*$  est sur-additive alors que la mesure extérieure est sous-additive. C'est-à-dire que si  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^N$  deux à deux disjoints, on a :

$$\mu_* \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_*(E_n) \quad (44)$$

et

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n) \quad (45)$$

**Preuve.** Pour montrer la première inégalité, il suffit de montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  :

$$\mu_* \left( \bigcup_{n=0}^m E_n \right) \geq \sum_{n=0}^m \mu_*(E_n) \quad (46)$$

Par définition de la mesure extérieure,

$$\sum_{n=0}^m \mu_*(E_n) = \sup \left\{ \sum_{n=0}^m \mu(K_n) : K_n \subseteq E_n, K_n \text{ compact} \right\} \quad (47)$$

Puisque l'union finie de compact est contenue dans l'union finie des  $(E_n)_{n=0}^m$ , il suffit de montrer que :

$$\mu \left( \bigcup_{n=0}^m K_n \right) \geq \sum_{n=0}^m \mu(K_n) \quad (48)$$

Plus simplement, il suffit de montrer que pour deux compacts disjoints  $K_1$  et  $K_2$ ,  $\mu(K_1 \cup K_2) \geq \mu(K_1) + \mu(K_2)$ . Soit alors  $K_1 \cup K_2 \prec f$ . Comme  $K_1$  est disjoint de  $K_2$ , le lemme d'Urysohn 7 assure qu'il existe  $f_1$  telle que  $K_1 \prec f_1 \prec \mathbb{R}^N \setminus K_2$ . Par le même argument, il existe  $f_2$  telle que  $K_2 \prec f_2 \prec \mathbb{R}^N \setminus \text{supp}(f_1)$ . Alors  $K_1 \cup K_2 \prec f(f_1 + f_2) \leq f$ ,  $K_1 \prec f f_1$  et  $K_2 \prec f f_2$ , de sorte que :

$$\Phi(f) \geq \Phi(f f_1) + \Phi(f f_2) \geq \mu(K_1) + \mu(K_2) \quad (49)$$

En prenant l'infimum sur toutes les fonctions  $f$ , on trouve  $\mu(K_1 \cup K_2) \geq \mu(K_1) + \mu(K_2)$ .

Soit maintenant une suite d'ouverts  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $E_n \subseteq V_n$ . Clairement,  $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ . Soit  $f \prec \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ . Puisque  $f$  est à support compact, le corollaire 4 implique qu'il existe une partition  $(f_n)_{n=0}^m$  de  $\text{supp}(f)$  subordonnée au recouvrement fini  $\{V_n\}_{n=0}^m$ . Alors :

$$\Phi(f) = \Phi \left( f \sum_{n=0}^m f_n \right) = \sum_{n=0}^m \Phi(f f_n) \leq \sum_{n=0}^m \mu(V_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(V_n) \quad (50)$$

Il suit en prenant l'infimum à gauche :

$$\mu \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(V_n) \quad (51)$$

Par le lemme 9 :

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) \leq \inf \left\{ \mu \left( \bigcup_{n=0}^m V_n \right) : \forall k, E_k \subseteq V_k \right\} \leq \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(V_n) : \forall k, E_k \subseteq V_k \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n) \quad (52)$$

□

**Définition 11.** Soit  $\Phi : C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle positive ainsi que ses mesures intérieures et extérieures  $\mu_*$  et  $\mu^*$ . Un ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  est dit mesurable si et seulement si pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^N$  :

$$\mu_*(K \cap E) = \mu^*(K \cap E) \quad (53)$$

La collection des ensembles mesurables est dénotée  $\Sigma$ .

**Lemme 11.** Soit  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$  une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Alors  $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \in \Sigma$  et :

$$\mu_* \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_*(E_n) \quad (54)$$



**Preuve.** Commencer par montrer que l'union des  $\{E_n\}$  est dans  $\Sigma$ . Prendre  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact. Alors :

$$\begin{aligned}
 \mu_* \left( K \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) &= \mu_* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K \cap E_n \right) \\
 &\leq \mu^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K \cap E_n \right), \text{ car } \mu_* \leq \mu^* \\
 &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(K \cap E_n), \text{ par sous-additivité 10} \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_*(K \cap E_n), \text{ car } E_n \in \Sigma \\
 &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_*(E_n), \text{ par monotonie} \\
 &\leq \mu_* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right), \text{ par sur-additivité 10}
 \end{aligned} \tag{55}$$

Ainsi, d'une part :

$$\mu_* \left( K \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \mu^* \left( K \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_*(K \cap E_n) \leq \mu_* \left( K \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \tag{56}$$

donc  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$ . D'autre part, en prenant le supremum sur tous les compacts  $K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  :

$$\mu_* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_*(E_n) \leq \mu_* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \tag{57}$$

□

**Lemme 12.** Soient  $E, F \in \Sigma$ , alors  $E \setminus F \in \Sigma$ .

**Preuve.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^N$  compact. Il reste à montrer que  $\mu_*(K \cap (E \setminus F)) \geq \mu^*(K \cap (E \setminus F))$ . Comme  $K \cap (E \setminus F) \subseteq K$ ,  $K \cap E \subseteq K$  et  $K \cap F \subseteq K$ , il existe des ouverts  $V_E$  et  $V_F$  de mesures extérieures finies tels que  $K \cap E \subseteq V_E$  et  $K \cap F \subseteq V_F$ . Soient des compacts  $K \subseteq K \cap E$  et  $K_F \subseteq K \cap F$ . On a alors :

$$K_E \setminus V_F \subseteq K \cap E \setminus K \cap F = K \cap (E \setminus F) \subseteq V_E \setminus K_F \tag{58}$$

Remarquer alors que  $K_E \setminus V_F$  est compact,  $V_E \setminus K_F$  est ouvert et que :

$$V_E \setminus K_F = (V_E \setminus K_E) \cup (K_E \setminus V_F) \cup (V_F \setminus K_F) \tag{59}$$

Par monotonie et sous-additivité de la mesure extérieure, on a :

$$\begin{aligned}
 \mu^*(K \cap (E \setminus F)) &\leq \mu^*(V_E \setminus K_F) \\
 &\leq \mu^*(V_E \setminus K_E) + \mu^*(K_E \setminus V_F) + \mu^*(V_F \setminus K_F) \\
 &\leq \mu^*(V_E) - \mu^*(K_E) + \mu_*(K \cap (E \setminus F)) + \mu^*(V_F) - \mu^*(K_F)
 \end{aligned} \tag{60}$$

en utilisant la mesurabilité des compacts. Avec la mesurabilité de  $K \cap E$  et  $K \cap F$ , on obtient de plus :

$$\inf \{ \mu^*(V_E) - \mu^*(K_E) + \mu^*(V_F) - \mu^*(K_F) : K_E \subseteq K \cap E \subseteq V_E, K_F \subseteq K \cap F \subseteq V_F \} = 0 \tag{61}$$

□

**Théorème 7.** Soit  $\Phi : C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle positive, sa mesure intérieure  $\mu_*$  et extérieure  $\mu^*$  ainsi sur les ensembles mesurables  $\Sigma$ . Alors  $\Sigma$  est une  $\sigma$ -algèbre borelienne. De plus  $\mu$  définit alors une mesure régulière et complète sur  $\Sigma$ .

**Preuve.** Clairement,  $\emptyset \in \Sigma$ . Le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable par le lemme 12. Soit maintenant  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ . Poser  $F_0 = E_0$  et pour  $n \geq 1$ ,  $F_n = E_n \setminus (\bigcup_{0 \leq m < n} F_m)$ .  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  par le lemme 11 et  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Ainsi,  $\Sigma$  est une  $\sigma$ -algèbre. Ensuite, puisque les fermés sont mesurables, les ouverts le sont aussi par le lemme 12,

c'est-à-dire  $\Sigma$  est borelienne. Montrer maintenant que  $\mu$  définit bien une mesure sur  $\Sigma$ . Soit  $E \in \Sigma$ . Par sous-additivité de la mesure intérieure, la mesurabilité de  $E$  et des  $B_n(0)$  ainsi que la sur-additivité de  $\mu_*$ , on a :

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^* \left( \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(0) \right) \cap E \right) \\
&= \mu^* \left( \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(0) \setminus B_{n-1}(0) \right) \cap E \right) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu^*(B_n(0) \setminus B_{n-1}(0) \cap E) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu^*((B_n(0) \cap (B_n(0) \setminus B_{n-1}(0) \cap E))) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu_*((B_n(0) \cap (B_n(0) \setminus B_{n-1}(0) \cap E))) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu_*(B_n(0) \setminus B_{n-1}(0) \cap E) \\
&= \mu_* \left( \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(0) \setminus B_{n-1}(0) \right) \cap E \right) \\
&= \mu_*(E)
\end{aligned} \tag{62}$$

En utilisant le lemme 11, il est clair que  $\mu$  définit bien une mesure. La régularité de  $\mu$  est claire par les dernières équations, et la complétude découle de la définition de  $\mu$ .  $\square$

**Définition 12.** Si  $\Phi$  est l'intégrale de Riemann, alors  $\mu$  est la mesure de Lebesgue.

**Théorème 8. Théorème de Riesz-Kakutani** Soit  $\Phi : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle positive. Il existe alors une mesure  $\mu$  régulière et complète, définie sur une  $\sigma$ -algèbre  $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  borelienne, telle que :

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^n) : \Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \tag{63}$$

**Preuve.** Il est suffisant de prouver le théorème dans le cas où  $f$  prend des valeurs réelles. En fait, il suffit de prouver que :

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) : \Phi f \leq \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \tag{64}$$

En effet, dès lors :

$$-\Phi f = \Phi(-f) \leq \int_{\mathbb{R}^N} (-f) d\mu = - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \tag{65}$$

Soit  $K = \text{supp}(f)$  et  $[a, b]$  son image. Soit  $\epsilon > 0$  et pour chaque  $i = 0, \dots, n$  avec  $y_i - y_{i-1} < \epsilon$  :

$$y_0 < a < y_1 < \dots < y_n = b \tag{66}$$

Définir pour chaque  $i = 1, \dots, n$  :

$$E_i = \{x \in \mathbb{R}^N : y_{i-1} < f(x) < y_i\} \cap K \tag{67}$$

Car  $f$  est continue,  $f$  est Borel-mesurable et les ensembles  $E_i$  sont des ensembles de Borel disjoints d'union  $K$ . Aussi, il existe des ouverts  $V_i$  tels que  $E_i \subseteq V_i$  et  $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \epsilon/n$ . De plus :

$$\forall x \in V_i : f(x) < y_i + \epsilon \tag{68}$$

Par le corollaire 4, il existe, pour chaque  $i$ ,  $h_i \prec V_i$  une partition de  $K$  extraite de la famille finie des  $\{V_i\}_{i=1}^n$ . En particulier,  $f = \sum h_i f$  d'où :

$$\mu(K) \leq \Phi \left( \sum_{i=1}^n h_i \right) = \sum_{i=1}^n \Phi h_i \tag{69}$$

D'autre part, puisque  $h_i f \leq (y_i + \epsilon)h_i$  et  $y_i < f(x) + \epsilon$  sur  $E_i$  :

$$\begin{aligned}
\Phi f &= \sum_{i=1}^n \Phi(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \epsilon) \Phi h_i = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \epsilon) \Phi h_i - |a| \sum_{i=1}^n \Phi h_i \leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \epsilon) (\mu(E_i) + \epsilon/n) - |a| \mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i - \epsilon) \mu(E_i) + 2\epsilon \mu(K) + \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \epsilon) \leq \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu + \epsilon(2\mu(K) + |a| + b + \epsilon)
\end{aligned} \tag{70}$$

$\square$

## V. RÉSULTATS DE DENSITÉ

**Définition 13.** Une mesure  $\mu$  définie sur une  $\sigma$ -algèbre  $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  borélienne est dite intérieurement régulière si :

$$\forall E \in \Sigma, \mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact et } K \subset E\} \quad (71)$$

Elle est dite extérieurement-régulière si

$$\forall E \in \Sigma, \mu(E) = \inf\{\mu(V) : V \text{ ouvert et } E \subset V\} \quad (72)$$

Elle est enfin régulière si elle est simultanément extérieurement et intérieurement régulière, et localement finie si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \text{ un ouvert } U \in \Sigma : x \in U \text{ et } \mu(U) < \infty \quad (73)$$

**Lemme 13.** Une mesure régulière et localement finie  $\mu$  dans  $\mathbb{R}^n$  assigne à tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  une mesure finie.

**Preuve.** Pour chaque  $x \in K$  il existe un ouvert  $V_x$  contenant  $x$  et de mesure finie. L'ensemble des tels  $V_x$  recouvre  $K$ , on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini  $(V_i)_{i=1,\dots,p}$ , associé aux  $(x_i)_{i=1,\dots,p}$ . Poser :

$$E_i = K \cap \left( V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \right) \quad (74)$$

La régularité de  $\mu$  implique la mesurabilité de ces ensembles. De plus,  $K = \bigcup_{i=1}^p E_i$  et cette union est disjointe. Ainsi :

$$\mu(K) = \sum_{i=1}^p \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^p \mu(V_i) < \infty \quad (75)$$

□

**Lemme 14.** L'espace des fonctions simples Lebesgue intégrables est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ , pour une mesure régulière et localement finie  $\mu$ .

**Preuve.** Trouvons  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$  pour une fonction  $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$  positive. Poser pour  $m \in \mathbb{N}$  :

$$f_m : x \mapsto \chi_{B_m(0)}(x) \min\{f(x), m\} \quad (76)$$

Alors, pour chaque  $m \geq 0$ ,  $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ . Puisque  $|f - f_m|^p \leq |f|^p$ , le théorème de la convergence dominée implique que  $(f_m)$  converge vers  $f$  dans la norme  $\|\cdot\|_p$ . Il existe donc  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $m \geq k$  implique  $\|f_k - f\|_p < \epsilon/2$ . Par définition de l'intégrale de Lebesgue, et puisque  $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ , on peut approcher  $f_m$  par une fonction étagée simple positive, celle-ci se laissant approcher par une fonction  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ , telle que  $\|f_m - \varphi\|_1 < \frac{\epsilon^p}{2^p m^{p-1}}$ . Puisque  $f_m$  est majorée par  $m$ , on peut le supposer aussi pour  $\varphi$ . On a alors  $|f_m(x) - \varphi(x)| \leq m$ , et  $|f_m - \varphi|^p \leq m^{p-1}|f_m - \varphi|$ . Par conséquent,

$$\|f_m - \varphi\|_p^p \leq m^{p-1} \|f_m - \varphi\|_1 \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \quad (77)$$

C'est-à-dire  $\|f - \varphi\|_p < \epsilon$ . □

**Lemme 15.** L'espace des combinaisons linéaires de fonctions indicatrices sur des ouverts de mesures finies ou sur des compacts est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ , pour une mesure régulière et localement finie  $\mu$ .

**Preuve.** Soient  $\epsilon > 0$  et  $E$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$  et de mesure finie. Puisque  $\mu$  est régulière, il existe un compact  $K_E$  et un ouvert  $V_E$  tel que  $K_E \subseteq E \subseteq V_E$  et :

$$\mu(V_E) - \epsilon^p \leq \mu(E) \leq \mu(K_E) + \epsilon^p$$

. Il suit :

$$\|\chi_{V_E} - \chi_E\|_p, \|\chi_{K_E} - \chi_E\|_p < \epsilon \quad (78)$$

Utiliser le lemme 14 pour conclure. □

**Lemme 16.** Pour une mesure régulière et localement finie  $\mu$ , l'espace des fonctions continues à support compact est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$  :

$$\overline{C_c(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \mu)}} = L^p(\mathbb{R}^n, \mu) \quad (79)$$

**Preuve.** Grâce au lemme 15, on peut se concentrer sur les indicatrices d'ouverts de mesure finie ou de compact. Par le lemme d'Urysohn 7, il existe  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  tel que  $K \prec f \prec V$ . Par monotonie de l'intégrale de Lebesgue, on a dans le cas où  $\mu^K + \epsilon^p \geq \mu(V)$  :

$$\|\chi_K - f\|_1, \|\chi_V - f\|_1 \leq \epsilon^p \quad (80)$$

ce qui implique :

$$\|\chi_K - f\|_p, \|\chi_V - f\|_1 \leq \epsilon \quad (81)$$

□

**Théorème 9.** Pour une mesure régulière et localement finie  $\mu$ , l'espace des fonctions continues à support compact et infiniment continument dérivable est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$  :

$$\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \mu)}} = L^p(\mathbb{R}^n, \mu) \quad (82)$$

**Preuve.** Partir du lemme 16. Un compact dans  $\mathbb{R}^n$  étant fermé et borné, il doit pour une fonction  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  y avoir  $L > 0$  tel que  $\text{supp}(f) \subseteq [-L, L]^n$ . La fonction étant uniformément continue sur ce dernier ensemble, il doit exister une fonction simple du type :

$$s = \sum_{l=1}^m s_l \chi_{d_n + [0, p]^n} \quad (83)$$

telle que :

$$|f - s| < \frac{\epsilon}{\mu([-L, L]^n)^{1/p}} \implies \|f - s\|_p < \epsilon \quad (84)$$

Finalement, pour un intervalle  $[a, b]^n$ , considérons les fonctions lisses du type  $(f_n) = (\prod_{k=1}^n f_{m,k})$  où  $m \in \mathbb{N}^*$  et

$$f_{m,k}(x_k) = \chi_{[a-1/m, b]}(x_k) e^{\frac{1}{m^2(x_k+1/m-a)(x_k-b)}} \quad (85)$$

Alors,  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = \chi_{[a,b]^n}(x)$  simplement et chaque élément de la suite est intégrable. Par le théorème de la convergence dominée, la suite tend dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  vers  $\chi_{[a,b]^n}$ . □

**Corollaire 5.** Si  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue, alors l'espace de Schwartz est dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  :

$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)}} = L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \quad (86)$$

## Part III

# Opérateurs bornés

**Définition 14.** Soient  $X, Y$  des espaces vectoriels normés et soit  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . La transposée  $A^T \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$  de  $A$  est définie par :

$$A^T(\eta) = \eta \circ A \quad (87)$$

Noter  $\Gamma$  l'application du théorème de Riesz-Fréchet l'isomorphisme anti-linéaire isométrique associant à chaque élément  $x \in \mathcal{H}$  la fonctionnelle linéaire et continue de  $\mathcal{H}'$  définie par  $x^*(y) = \langle y, x \rangle$ .

**Définition 15.** Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . L'adjoint de  $A$  est défini par :

$$A^* = \Gamma^{-1} \circ A^T \circ \Gamma \quad (88)$$

## VI. SPECTRE DES OPÉRATEURS BORNÉS

L'ensemble des opérateurs de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , dits Hilbertiens, qui sont inversibles est noté  $\text{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$  ou  $\text{Inv}(\mathcal{H})$ .

**Théorème 10.**  $\text{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

**Preuve.** Soient  $A \in \text{Inv}(\mathcal{H})$ ,  $B \in B_{\|A^{-1}\|}(A)$ . Alors  $\|BA^{-1} - 1\| \leq \|B - 1\| \|A^{-1}\| < 1$ , c'est-à-dire  $BA^{-1} \in \text{Inv}(\mathcal{H})$  et à fortiori  $B$  inversible.  $\square$

**Lemme 17.** Si  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , alors  $\sigma(A)$  est fermé et sous-ensemble du disque centré à l'origine de  $\mathbb{C}$  de rayon  $\|A\|$ .

**Preuve.** Supposer que  $|\lambda| > \|A\|$ , alors  $\|A\lambda^{-1}\| < 1$  et  $1 - \lambda^{-1}A \in \text{Inv}(\mathcal{H})$ . Par conséquent,  $\lambda - A \in \text{Inv}(\mathcal{H})$  et  $\lambda \notin \sigma(A)$ . Si  $\lambda \notin \sigma(A)$  et  $|\mu - \lambda| < \|(A - \lambda)^{-1}\|$ , alors par le théorème 10,  $A - \mu \in \text{Inv}(\mathcal{H})$ . C'est-à-dire le complément spectre d'un opérateur est ouvert.  $\square$

**Définition 16.** Le rayon spectral d'un opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est défini par

$$r(A) = \sup\{\|z\| : z \in \sigma(A)\} \quad (89)$$

**Théorème 11.** Le spectre d'opérateurs bornés vérifie :

1. Si  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est unitaire, alors  $\sigma(U) \subseteq \partial B_1(0)$ .
2. Si  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est auto-adjoint, alors  $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$  et  $r(A) = \|A\|$ .
3. Si  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $p$  est un polynôme à coefficients  $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$  complexes, alors :

$$\sigma(p(B)) = p(\sigma(B)) \quad (90)$$

**Preuve.** 1. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\lambda| > 1$ . Alors  $U - \lambda = \lambda(\frac{U}{\lambda} - 1)$  et  $\|\frac{U}{\lambda}\| < 1$ . Donc l'inverse de  $(\frac{U}{\lambda} - 1)$  existe. Si  $\lambda \in B_1(0) \setminus \{0\}$ , on a en utilisant que  $U^*$  est unitaire que  $\lambda U^* < 1$ , que  $U - \lambda = U(1 - \lambda U^*)$  inversible. Si  $\lambda = 0$ ,  $U - \lambda = U^*$ .

2. Le lemme 17 assure  $r(A) \leq \|A\|$ . Montrer désormais que le spectre est réel. En effet, l'opérateur  $\exp(iA)$  est unitaire. En utilisant le premier résultat, on conclut que le spectre est réel. Ensuite, supposer par l'absurde que ni  $\|A\|$  ni  $-\|A\|$  ne fasse partie du spectre. Dans ce cas,  $(A + \|A\|)(A - \|A\|) = A^2 - \|A\|^2 \in \text{Inv}\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Il existe donc  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  inverse de cet opérateur. De plus,

$$(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \langle x, (\|A\|^2 - A^2)y \rangle \quad (91)$$

est une application sesqui-linéaire positive donc vérifie Cauchy-Schwartz. Par définition de la norme, il existe une suite  $(x_n) \in \mathcal{H}$  de vecteurs unitaires telle que  $\|A\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\|$ . Alors, en utilisant que  $A$  est auto-adjoint :

$$\begin{aligned} 1 &= \|x_n\|^2 = \langle (A^2 - \|A\|^2)Bx_n, x_n \rangle = |\langle Bx_n, (\|A\|^2 - A^2)x_n \rangle| \\ &\leq \langle Bx_n, (\|A\|^2 - A^2)Bx_n \rangle^{1/2} \langle x_n, (\|A\|^2 - A^2)x_n \rangle^{1/2} \leq \|B\|^{1/2} (\|A\|^2 - \|Ax_n\|^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (92)$$

Ce qui est absurde. Ainsi,  $\|A\| \in \sigma(A)$  ou  $-\|A\| \in \sigma(A)$ .

3. Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $p(Z) - \lambda \in \mathbb{C}[Z]$ . Par le théorème fondamental de l'algèbre, il existe  $n$  nombres complexes tels que  $p(Z) - \lambda = a \prod_{j=1}^n (Z - \lambda_j)$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Il suit :

$$\lambda \in \sigma(p(B)) \Leftrightarrow \exists k : \lambda_k \in \sigma(B) \Leftrightarrow \exists \lambda_k \in \sigma(B) : p(\lambda_k) - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in p(\sigma(B)) \quad (93)$$

$\square$

## VII. LE CALCUL FONCTIONNEL

**Définition 17.** Soit  $A$  un opérateur borné auto-adjoint sur un espace de Hilbert et  $f \in C(\sigma(A), \mathbb{R})$ . Définir :

$$f(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(A) \quad (94)$$

pour  $(p_n)$  une suite de polynôme convergeant uniformément sur  $\sigma(A)$  vers  $f$ .

**Proposition 1.** La définition 17 définit uniquement toutes les fonctions continues du spectre de  $A$ , borné et auto-adjoint, vers  $\mathbb{R}$ .

**Preuve.** D'après le théorème de Stone-Weierstrass 2, il existe une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes à coefficients réels qui converge uniformément sur  $\sigma(A)$  vers  $f$ . Poser la suite  $(p_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs auto-adjoints dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Puisque  $\sigma(p_n(A)) = p_n(\sigma(A))$  :

$$\|p_n(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = r(p_n(A)) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p_n(A))\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in p_n(\sigma(A))\} = \|p_n\|_{L^\infty(\sigma(A))} \quad (95)$$

Par conséquence, puisque  $(p_n)$  est de Cauchy pour  $\|\cdot\|_{L^\infty(\sigma(A))}$ ,  $(p_n(A))$  est de Cauchy pour  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$  et converge donc vers un élément dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , qui est par définition  $f(A)$ . Montrer que cette définition ne dépend pas de la suite de polynômes. Soit  $(q_n)$  une autre suite de polynômes convergeant uniformément sur  $\sigma(A)$  vers  $f$ . Alors :

$$\|f(A) - q_n(A)\| \leq \|f(A) - p_n(A)\| + \|p_n(A) - q_n(A)\| \leq \|f(A) - p_n(A)\| + \|p_n - f\|_{L^\infty(\sigma(A))} + \|q_n - f\|_{L^\infty(\sigma(A))} \quad (96)$$

d'où l'unicité de la définition.  $\square$

**Théorème 12.** Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur auto-adjoint. Il existe alors un unique  $*$ -morphisme unitaire et isométrique  $\Phi : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  avec les propriétés suivantes :

$$1. \Phi(x \mapsto 1) = 1 \text{ et } \Phi(x \mapsto x) = A$$

$$2. \forall f, g \in C(\sigma(A)), \lambda \in \mathbb{C} :$$

$$\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda \Phi(g), \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g), \Phi(f)^* = \Phi(\bar{f}) \quad (97)$$

$$3. \forall f \in C(\sigma(A), \mathbb{C}), \|\Phi(f)\| = \|f\|_{L^\infty(\sigma(A))}$$

**Preuve.** Prendre  $\Phi(f) = f(A)$ . Seul l'unicité demande une preuve explicite. Soit  $\Psi$  un tel morphisme. Pour tout polynôme  $p \in \mathbb{C}[\sigma(A)]$ ,  $\Psi(p) = p(A)$ . Comme ce morphisme est supposé isométrique et que l'ensemble des polynômes est dense dans  $\{f(A) : f \in C(\sigma(A))\}$  pour la norme opérateur, on peut conclure  $\Psi(f) = f(A)$ ,  $\forall f \in C(\sigma(A))$ .  $\square$

## VIII. DÉCOMPOSITION SPECTRALE

**Théorème 13.** Soient  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable et  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur auto-adjoint. Il existe alors une famille de vecteurs orthonormés  $\{e_k : k \in K\}$ ,  $|K| \leq |\mathbb{N}|$ , telle que :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in K} \overline{\{f(A)e_k : f \in C(\sigma(A))\}} \quad (98)$$

**Preuve.** Soit  $(b_n)$  une famille orthonormée, complète et dénombrable de  $\mathcal{H}$ . Considérer :

$$H_0 = \overline{\{f(A)b_0 : f \in C(\sigma(A))\}} \quad (99)$$

Il est invariant par calcul fonctionnel et fermé. Définir  $j_1 = \min\{n \in \mathbb{N}^* : b_n \notin H_0\}$ . Les  $b_i$  d'indice plus petits sont clairement toujours dans  $H_0$  et  $(1 - P_{H_0})b_{j_1} \neq 0$ . Normaliser cette composante orthogonale et lui appliquer le calcul fonctionnel pour définir :

$$H_1 = \left\{ f(A) \frac{(1 - P_{H_0})b_{j_1}}{\|(1 - P_{H_0})b_{j_1}\|} : f \in C(\sigma(A)) \right\}^{\perp\perp} \quad (100)$$

Les deux espaces sont alors en somme direct et leur somme directe est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert. Ils sont de plus invariants par calcul fonctionnel. Définir par récurrence  $j_{n+1} = \min\{m \in \mathbb{N}^*, m \geq 1 + j_n : b_m \notin \bigoplus_{k=0}^n H_k\}$  et

$$H_{n+1} = \left\{ f(A) \frac{(1 - P_{\bigoplus_{k=0}^n H_k})b_{j_{n+1}}}{\|(1 - P_{\bigoplus_{k=0}^n H_k})b_{j_{n+1}}\|} : f \in C(\sigma(A)) \right\}^{\perp\perp} \quad (101)$$

C'est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$  contenant par construction tous ses éléments. Conclusion établie.  $\square$

**Théorème 14. Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints bornés** Soient  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable et  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur auto-adjoint. Il existe alors une famille d'indice  $K$  de cardinalité au plus dénombrable, une famille de mesures boréliennes et régulières  $\{\mu_k\}_{k \in K}$  sur  $\sigma(A)$  et un isomorphisme unitaire  $V : \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_{k \in K} L^2(\sigma(A), \mu_k)$  tels que

$$VAV^{-1} = M_x \quad (102)$$

où  $M_x$  est l'opérateur de multiplication par  $x$  sur  $\bigoplus_{k \in K} L^2(\sigma(A), \mu_k)$ .

**Preuve.** Poursuivre avec les notations de la preuve du théorème 13. Remarquer que la fonctionnelle  $\Phi_k : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \mapsto \langle e_k, f(A)e_k \rangle \quad (103)$$

est, pour  $f$  positive, une fonctionnelle positive. D'après le théorème 8 et un résultat des exercices, il existe donc une mesure  $\mu_k$  sur  $\sigma(A)$  telle que

$$\forall f \in C(\sigma(A)), \Phi_k(f) = \int_{\sigma(A)} f d\mu_k \quad (104)$$

Si  $f(A)e_k, g(A)e_k$  sont dans  $H_k$ , alors par le calcul fonctionnel et le théorème 8, on a :

$$\langle f(A)e_k, g(A)e_k \rangle = \langle e_k, \overline{f(A)}g(A)e_k \rangle = \langle e_k, \overline{f}g(A)e_k \rangle = \int_{\sigma(A)} \overline{f}g d\mu_k \quad (105)$$

Par construction de  $H_k$ ,  $x \in H_k$  si et seulement si il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\sigma(A))$  telle que  $\lim_n \|x - f_n(A)e_k\| = 0$ . La suite  $(f_n(A))$  est donc une suite de Cauchy dans  $H_k$  et on a

$$\|f_m(A)e_k - f_n(A)e_k\|^2 = \langle e_k, (\overline{f_m(A)} - \overline{f_n(A)})(f_m(A) - f_n(A))e_k \rangle = \|f_m - f_n\|_{L^2(\sigma(A), \mu_k)}^2 \quad (106)$$

La suite converge donc également dans  $L^2(\sigma(A), \mu_k)$  vers un élément  $f_x \in L^2(\sigma(A), \mu_k)$ . Manifestement, par continuité des normes  $\|f_x\|_{L^2(\sigma(A), \mu_k)}^2 = \|x\|_{H_k}^2$ . L'application  $H_k \rightarrow L^2(\sigma(A), \mu_k), x \mapsto f_x$  est donc un isomorphisme unitaire. Puisque  $H = \bigoplus H_k$ ,  $x$  s'écrit de manière unique comme somme d'éléments  $x_k$  de  $H_k$ . Par la discussion précédente, il existe pour chaque  $k \in K$  un isomorphisme unitaire  $V_k$  qui associe à  $x_k$  une fonction  $f_{x,k} \in L^2(\sigma(A), \mu_k)$ . Poser :

$$V : H \rightarrow \bigoplus_{k \in K} L^2(\sigma(A), \mu_k) \quad x \mapsto \bigoplus_{k \in K} f_{x,k} \quad (107)$$

Montrer finalement que  $VA = VM_x$ . Par décomposition de  $\mathcal{H}$  :

$$VAx = VA \bigoplus_{k \in K} x_k \quad (108)$$

Par continuité de  $A$  et de  $V$  :

$$VAx = \bigoplus_{k \in K} VAx_k \quad (109)$$

Par définition des  $x_k$  et calcul fonctionnel :

$$VAx = \bigoplus_{k \in K} VA \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,k}(A)e_k \quad (110)$$

Par continuité de  $A$  :

$$VAx = \bigoplus_{k \in K} V \lim_{n \rightarrow \infty} M_x f_{n,k}(A)e_k \quad (111)$$

Par continuité de  $V$  :

$$VAx = \bigoplus_{k \in K} \lim_{n \rightarrow \infty} VM_x f_{n,k}(A)e_k \quad (112)$$

Par définition de  $V$  :

$$VAx = \bigoplus_{k \in K} \lim_{n \rightarrow \infty} M_x f_{n,k} \quad (113)$$

Et finalement par continuité de  $M_x$  et définitions de  $V$  et  $x$  :

$$VAx = \bigoplus_{k \in K} M_x \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,k} = M_x Vx \quad (114)$$

□

## Part IV

# Opérateurs Non-bornés

### IX. NOTIONS FONDAMENTALES DES OPÉRATEURS NON-BORNÉS

**Définition 18.** Soit  $(D(A), A)$  un opérateur. Le graphe  $G(A)$  est défini par

$$G(A) = \{(x, y) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} : x \in D(A), y = Ax\} \quad (115)$$

**Définition 19.** Si la fermeture du graphe d'un opérateur est le graphe d'un opérateur, on dit que cet opérateur est fermable.

**Définition 20.** L'opérateur  $(D(B), B)$  est une extension de  $(D(A), A)$  si et seulement si  $G(A) \subset G(B)$ . Noter  $A \subset B$ .

**Définition 21.** Soient  $(D(A_1), A_1)$  et  $(D(A_2), A_2)$  deux opérateurs. Alors  $D(A_1 + A_2) = D(A_1) \cap D(A_2)$  et  $D(A_2 A_1) = \{x \in D(A_1) : A_1 x \in D(A_2)\}$  et on définit sur ces ensembles :

$$(A_1 + A_2)x = A_1 x + A_2 x \quad (A_2 A_1)x = A_2(A_1 x) \quad (116)$$

**Définition 22.** Soit  $(D(A), A)$  un opérateur avec  $D(A)$  dense dans  $\mathcal{H}$ . Le domaine de l'adjoint est défini par  $D(A^*)$  est défini par :

$$D(A^*) = \{y \in \mathcal{H} : \exists ! z_y \in \mathcal{H} : \forall x \in D(A), \langle y, Ax \rangle = \langle z_y, x \rangle\} \quad (117)$$

Définir l'action de l'adjoint par  $y \mapsto z_y$ .

**Définition 23.** Un opérateur densément défini est dit auto-adjoint si son graphe est égal à celui de son opérateur.

**Définition 24.** Un opérateur  $A$  densément défini est dit normal si son domaine de définition est égal à celui de son adjoint et si pour chaque élément  $x \in D(A)$ ,  $\|A^* x\| = \|Ax\|$ .

**Théorème 15.** Soit  $(D(A), A)$  un opérateur sur  $\mathcal{H}$ . Alors :

$$G(A^*) = (G(-A)^t)^\perp \quad (118)$$

Avec le produit scalaire sur  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  défini comme la somme des produits scalaires des premières composantes avec les premières et des deuxièmes avec les deuxièmes. En particulier, l'adjoint d'un opérateur est toujours fermé.

**Preuve.** Soit  $X = (x_1, x_2) \in (G(A)^t)^\perp$ . De manière équivalente :

$$\begin{aligned} \forall Y = (y_1, y_2) \in G(A)^{-t} : \langle x_1, y_2 \rangle &= \langle x_2, y_1 \rangle \\ \Leftrightarrow \forall Y = (y_1, y_2) \in G(A)^{-t} : \langle x_1, Ay_1 \rangle &= \langle x_2, y_1 \rangle \\ \Leftrightarrow x_2 &= A^* x_1 \end{aligned} \quad (119)$$

□

### X. LES THÉORÈMES DE BANACH-STEINHAUS ET DU GRAPHE FERMÉ

**Lemme 18.** Soit  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  pour deux espaces normés  $X$  et  $Y$ . Pour tout  $x \in X$  et  $r > 0$ , on a :

$$\sup\{\|Ax'\| : x' \in B_r(x)\} \geq \|A\|r \quad (120)$$

**Preuve.** Pour  $\xi \in X$ ,

$$\max\{\|A(x - \xi)\|, \|A(x + \xi)\|\} \geq \frac{1}{2} (\|A(x - \xi)\| + \|A(x + \xi)\|) \geq \|A\xi\| \quad (121)$$

Conclure en passant au supremum pour  $\xi \in B_r(0)$ .

□

**Définition 25.** Une famille  $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X, Y)$  est simplement bornée si pour tout  $x \in X$ ,  $\sup\{\|Ax\| : A \in \mathcal{F}\} < \infty$  ou uniformément bornée si  $\sup\{\|A\| : A \in \mathcal{F}\} < \infty$ .

**Théorème 16. Théorème de Banach-Steinhaus** Soient  $X$  un espace de Banach,  $Y$  un espace normé et  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$  une famille simplement bornée, alors  $\mathcal{F}$  est uniformément bornée.



**Preuve.** Supposer que la famille ne soit pas uniformément bornée. On peut alors choisir une suite d'opérateur  $(A_n) \subseteq F$  telle que  $\|A_n\| \geq 4^n$ . Poser  $x_0 = 0$  et  $x_n \in B_{3^{-n}}(x_{n-1})$  et  $\|A_n x_n\| \geq \frac{2}{3} \|A_n\| 3^{-n}$ , qui existe par le lemme précédent 18. La suite  $(x_n)$  étant de Cauchy, elle converge vers  $x \in X$ . De plus,  $\|x - x_n\| \leq \frac{3^{-n}}{2}$ . Mais, par construction des  $x_n$  et l'inégalité triangulaire inverse, on trouve :

$$\|A_n x\| \geq \frac{3^{-n}}{6} \|A_n\| \geq \frac{4^n}{6 \times 3^n} \quad (122)$$

ce qui contredit la majoration simple.  $\square$

**Définition 26.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. On dit qu'un sous-ensemble  $D$  est faiblement séquentiellement compact si pour toute suite  $(x_n)$  dans  $D$ , il existe  $x \in D$  et une sous-suite  $(y_m) \subseteq (x_n)$ , telle que pour tout  $v \in \mathcal{H}$  :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle y_m, v \rangle = \langle x, v \rangle \quad (123)$$

**Théorème 17. Théorème de Bolzano-Weierstrass** Le disque unité  $\overline{B_1(0)}$ , dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  séparable, est séquentiellement compact.

**Preuve.** Soient  $(x_n) \subset \overline{B_1(0)}$  et  $(e_n)$  un système ortho-normé et complet de  $\mathcal{H}$ . Alors, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la suite  $(\langle x_n, e_m \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée de  $\mathbb{C}$ . Pour  $m = 1$ , on peut choisir une sous-suite  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers un élément de l'espace de Hilbert dénoté par  $z_1$ . Poser  $y_1$ , d'indice  $N_1$ , la premier élément de la sous-suite tel que pour tous les  $k \geq N_1$ ,  $|\langle x_{n_k}, e_1 \rangle| < 1$ . Répéter le processus pour chaque  $m$  de manière à avoir une distance plus petite que  $1/2^{m-1}$ . Par itération, on construit une sous-suite  $(y_m)$  de  $(x_n)$  et une suite  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{m \rightarrow \infty} \langle y_m, e_k \rangle = z_k \quad (124)$$

Pour tout  $v \in \text{Vect}(e_i)$ , on a alors  $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle y_m, v \rangle$  existe et :

$$\left| \lim_{m \rightarrow \infty} \langle y_m, v \rangle \right| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} |\langle y_m, v \rangle| \leq \|v\| \quad (125)$$

L'application  $\text{Vect}(e_i) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $v \mapsto \lim_{m \rightarrow \infty} \langle y_m, v \rangle$  est alors une fonctionnelle linéaire bornée. Puisque  $(e_i)$  est une famille dense de l'espace de Hilbert, on peut étendre l'opérateur à tout l'espace. Le théorème de Riesz-Fréchet permet alors de conclure.  $\square$

**Lemme 19.** Soit  $(D(T), T)$  un opérateur fermé et densément défini. Alors  $D(T^*)$  est dense.

**Preuve.** Il suffit de montrer que  $x \perp D(T^*)$  implique  $x = 0$ .  $x$  est orthogonal au domaine de l'adjoint si et seulement si  $(x, 0)$  est orthogonal au graphe de l'adjoint, si et seulement si il est orthogonal à  $G(-A)^{t\perp}$  c'est-à-dire  $x \in G(-A)^{t\perp\perp} = G(-A)^t$  car le graphe est fermé donc  $(0, x) \in G(-A) : x = -A0 = 0$ .  $\square$

**Lemme 20.** Soit  $(D(T), T)$  un opérateur fermé sur un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$  avec  $D(T) = \mathcal{H}$ . Alors  $D(T^*) = \mathcal{H}$ .

**Preuve.** Comme  $D(T)$  est dense,  $T^*$  existe. Par le lemme 19,  $D(T^*)$  est dense. Soit  $v \in \mathcal{H}$  et choisir une suite  $(v_n) \subset D(T^*)$ , bornée, telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ . Pour  $w \in \mathcal{H}$ , on a  $\langle v_n, Tw \rangle = \langle T^* v_n, w \rangle$  et

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle T^* v_n, w \rangle| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Tw\| \|v_n\| < \infty \quad (126)$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus 16,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\| < \infty$ . Par Bolzano-Weierstrass 17, il existe une sous-suite  $(T^* v_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(T^* v_n)$  et un  $y \in \mathcal{H}$ , tels que

$$\forall x \in \mathcal{H} : \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^* v_{\sigma(n)}, x \rangle = \langle y, x \rangle = \langle v, Tx \rangle \quad (127)$$

$\square$

**Théorème 18. Théorème du graphe fermé** Soit  $(D(T), T)$  un opérateur fermé sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  séparable avec  $D(T) = \mathcal{H}$ . Alors  $T$  est borné.

**Preuve.** Supposer  $T$  non-borné. Il existe une suite  $(u_n) \subset B_1(0)$ , telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu_n\| = \infty$ . D'un autre côté, pour  $x \in \mathcal{H} = D(T^*)$ ,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle Tu_n, x \rangle| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle u_n, T^* x \rangle| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| \|T^* x\| = \|T^* x\| \quad (128)$$

$\square$

## XI. LE COEUR ET L'ADJOINT ESSENTIEL

**Définition 27.** Pour un opérateur  $(D(T), T)$  fermé, définir l'ensemble résolvant  $\rho(T)$  par :

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : \ker(T - z) = 0 \text{ et } \mathcal{H} = \text{ran}(T - z)\} \quad (129)$$

et le spectre  $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ . Pour  $z \in \rho(T)$ ,  $R(z, T) = (T - z)^{-1}$  est appelé la résolvante.

**Proposition 2.** Une définition équivalente de l'ensemble résolvant est la suivante :

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : A(T - \lambda) = 1_{D(T)} \text{ et } (T - \lambda)A = 1\} \quad (130)$$

**Preuve.** Montrer que la résolvante est bornée. Puisque  $(D(T), T)$  est fermé, le graphe de  $T$  l'est. Sa transposée l'est donc aussi, tout comme  $G(T - \lambda)$ , pour  $\lambda \in \rho(T)$ , ou encore  $G(T - \lambda)^t = G(R(\lambda, T))$ . L'opérateur  $R(\lambda, T)$  est donc fermé, défini sur tout l'espace de Hilbert et le théorème du graphe fermé X implique alors que  $R(\lambda, T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .  $\square$

**Proposition 3.** Soit  $(D(T), T)$  un opérateur fermé. Alors  $z \in \rho(T)$  si et seulement si  $\bar{z} \in \rho(T^*)$  et

$$R(z, T)^* = R(\bar{z}, T^*) \quad (131)$$

**Preuve.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Pour que  $(T - z)x$  soit bien défini, il faut et suffit que  $Tx$  le soit, donc  $x \in D(T)$ . Donc  $D(T - z) = D(T)$ . Puis, pour chaque  $x \in D(T)$ , et  $y \in \mathcal{H}$ , dire que  $x \mapsto \langle y, (T - z)x \rangle$  est continu revient à dire que  $x \mapsto \langle y, Tx \rangle - \langle \bar{z}y, x \rangle$  est continu, c'est-à-dire  $x \in D(T^*)$ . Ainsi,  $D(T - z)^* = D(T^*)$  et  $(T - z)^* = T^* - \bar{z}$ . Soit  $z \in \rho(T)$ . Cela implique donc que  $R(z, T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  avec

$$(T - \lambda)R(z, T) = 1_{\mathcal{H}} \quad (132)$$

et

$$R(z, T)(T - z) = 1_{D(T)} \quad (133)$$

Ainsi,  $R(z, T)^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et

$$\begin{aligned} G(R(z, T)^*) &= G(-R(z, T))^{t\perp} = G(-(T - z))^\perp = G(-(T - z))^{t\perp} \\ &= G(-(T - z))^{t\perp t} = G((T - z)^*)^t = G(T^* - \bar{z})^t \end{aligned} \quad (134)$$

Ceci montre donc que  $R(z, T)^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est l'inverse borné de  $T^* - \bar{z}$  et que par conséquence,  $\bar{z} \in \rho(T^*)$ , ainsi que  $R(z, T)^* = R(\bar{z}, T^*)$ . La réciproque est une conséquence de cet argument, puisque  $T$  étant fermé, on a  $T = T^{**}$ .  $\square$

**Définition 28.** Un opérateur  $(D(T), T)$  est dit symétrique si  $T \subset T^*$  et  $D(T)$  est dense.

**Lemme 21.** Un opérateur  $(D(T), T)$  symétrique est fermable. De plus,  $\ker(T \pm i) = \{0\}$  et

$$\overline{\text{Ran}(T \pm i)} = \text{Ran}(\bar{T} \pm i) \quad (135)$$

où  $\bar{T} = T^{**}$  est la fermeture de  $T$ .

**Preuve.** Comme l'adjoint d'un opérateur densément défini existe toujours et qu'il est fermé, on a pour un opérateur symétrique que  $G(T)$  est contenu dans le graphe  $G(T^*)$ , qui lui est fermé. On a alors que  $T$  est fermable et que  $\bar{G}(T) = G(T)^{\perp\perp} = G(-T^*)^{t\perp} = G(T^{**})$ .

Puisque  $T \subset T^*$ , on a pour  $x \in D(T)$ ,  $\langle x, Tx \rangle = \langle T^*x, x \rangle = \langle Tx, T \rangle = \overline{\langle x, Tx \rangle}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \|(T \pm i)x\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle \mp i\langle x, Tx \rangle \pm i\langle Tx, x \rangle + \langle x, x \rangle \\ &= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2, \|Tx\|^2 \end{aligned} \quad (136)$$

Ceci implique que  $\text{Ker}(T \pm i) = \{0\}$ . De plus, ceci montre que  $(y_n) = ((T \pm i)x_n)$  est une suite de Cauchy dans l'image de  $T \pm i$  si et seulement  $(x_n)$  est de Cauchy dans  $D(T)$  et  $(Tx_n)$  est de Cauchy dans l'image de  $T$ , c'est-à-dire si et seulement si  $(\lim x_n, \lim y_n) \in \bar{G}(T)$ . Donc,  $\overline{\text{Ran}(T \pm i)} = \text{Ran}(\bar{T} \pm i)$ .  $\square$

**Théorème 19. Théorème de von Neumann** Soit  $(D(T), T)$  un opérateur symétrique et fermé sur un espace de Hilbert séparable  $(\mathcal{H})$ . Alors  $T$  est auto-adjoint si et seulement si  $i \in \rho(T)$ . Dans un tel cas  $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Preuve.** Supposons d'abord que  $\pm i \in \rho(T)$ . Alors,  $R(\pm i, T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  existent et  $\text{Ran}(T \pm i) = \mathcal{H}$ . Pour  $x \in D(T^*)$ , il existe alors un  $y \in D(T)$ , tel que  $(T^* \pm i)x = (T \pm i)y$ . Puisque  $T$  est symétrique,  $T \subset T^*$ . Mais par la proposition précédente,  $\pm i \in \rho(T^*)$  aussi, et  $x = y$ . Ainsi,  $D(T) = D(T^*)$  et  $T = T^*$ .

Supposons maintenant que  $T = T^*$ . Alors,  $T$  est à fortiori symétrique,  $T = \bar{T}$  et par le lemme précédent 21,  $\text{Ker}(T \pm i) = \{0\}$  et l'image de  $t \pm i$  est fermée. Si  $x$  est orthogonal à l'image de  $T \pm i$ , alors  $\forall y \in D(T) : \langle x, (T \pm i)y \rangle = 0$ , de sorte que  $D(T^*) = D(T)$  et  $\langle (T \mp i)x, y \rangle = 0$ . Comme  $D(T)$  est dense dans  $\mathcal{H}$ , ceci implique que  $(T \mp i)x = 0$ , donc  $x \in \text{Ker}(T \pm i)$ , donc  $x = 0$ . Ainsi, l'image de  $T \pm i$  est l'espace de Hilbert entier. Comme  $T \pm i$  sont des opérateurs fermés sur  $D(T)$ , on a que  $(T \pm i)^{-1}$  sont fermés aussi et définis sur tout  $\mathcal{H}$ . Par le théorème du graphe fermé,  $(T \pm i)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $\pm i \in \rho(T)$ .

Supposons enfin que  $T = T^*$  et que  $z = a + ib$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus 0$ . Alors  $b^{-1}(T - a)$  est auto-adjoint aussi et  $\pm i \in \rho(b^{-1}(T - a))$ , d'où on conclut que  $\pm ib \in \rho(T - a)$ , où encore, que  $a \pm ib \in \rho(T)$ . Conclure que  $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ .  $\square$

**Définition 29.** Un opérateur  $(D(T), T)$  symétrique est dit essentiellement auto-adjoint si sa fermeture  $\overline{T} = T^{**}$  est auto-adjointe. Dans ce cas,  $D(T)$  est un coeur pour  $T^{**}$ .

**Corollaire 6.** Un opérateur  $(D(T), T)$  symétrique est essentiellement auto-adjoint si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\overline{\text{Ran}(T \pm i)} = \mathcal{H}$
- $\text{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$

**Preuve.** Commençons par noter que ces deux conditions sont équivalentes. En effet :

$$\overline{\text{Ran}(T \pm i)} = \mathcal{H} \Leftrightarrow \text{Ran}(T \pm i)^\perp = \{0\} \quad (137)$$

Mais l'orthogonal de l'image d'un opérateur n'est rien d'autre que le noyau de son adjoint et  $(T \pm i)^* = T^* \mp i$ .

Par le lemme précédent,  $\overline{\text{Ran}(T \pm i)} = \text{Ran}(\overline{T} \pm i)$ , donc  $\overline{\text{Ran}(T \pm i)} = \mathcal{H}$  est équivalent à dire que  $\overline{T} \pm i$  est une bijection entre  $D(\overline{T})$  et  $\mathcal{H}$ .

Puisque  $\overline{T} \pm i$  est fermé,  $(\overline{T} \pm i)^{-1}$  l'est aussi et, d'après le théorème du graphe fermé X, on a que  $(\overline{T} \pm i)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On a alors  $\pm i \in \rho(\overline{T})$ , ce qui, par le théorème de von Neumann 19, est équivalent à dire que  $\overline{T}$  est auto-adjoint.  $\square$

## XII. DÉCOMPOSITION SPECTRALE D'OPÉRATEURS NON-BORNÉS

**Proposition 4.** Pour un opérateur  $A$  densément défini et fermé, on a la décomposition :

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = G(A^*) \oplus G(-A)^t \quad (138)$$

**Preuve.** Clair puisque  $G(A^*)$  est fermé, puisque qu'écrit comme le complément orthogonal d'un sous-espace fermé et convexe.  $\square$

**Lemme 22.** Soient  $(D(A), A)$  un opérateur densément défini et fermé, et  $u, v \in \mathcal{H}$ . Il existe alors un unique couple  $(x, y) \in D(A) \times D(A^*)$  tel que  $y - Ax = u$  et  $x + A^*y = w$ . De plus :

$$\|u\|^2 + \|w\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|Ax\|^2 + \|A^*y\|^2 \quad (139)$$

**Preuve.** Puisque  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = G(A^*) \oplus G(A)^{-t}$ , voir proposition 4, et que  $(u, v) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ , il existe une unique décomposition :

$$(u, v) = (y, A^*y) + (-Ax, x) \quad (140)$$

avec  $(x, y) \in D(A) \times D(A^*)$ . Par le théorème de Pythagore :

$$\|u\|^2 + \|w\|^2 = \|(y, A^*y) + (-Ax, x)\|_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}^2 = \|y\|^2 + \|A^*y\|^2 + \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \quad (141)$$

$\square$

**Théorème 20.** Soit  $(D(A), A)$  un opérateur densément défini et fermé. Alors :

1.  $(D(A^*A), 1 + A^*A)$  est un opérateur auto-adjoint
2.  $1 + A^*A$  est une bijection entre  $D(A^*A)$  et  $\mathcal{H}$
3.  $(1 + A^*A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est auto-adjoint et  $\|(1 + A^*A)^{-1}\| \leq 1$
4.  $D(A^*A)$  est un coeur pour  $A$

**Preuve.** Commençons par prouver que  $1 + A^*A$  est une bijection entre  $D(A^*A)$  et  $\mathcal{H}$ . En appliquant le lemme 22 aux cas  $v = 0$  et  $w \in \mathcal{H}$ , on trouve des couples  $(x, y) \in D(A) \times D(A^*)$  tels que  $0 = y - Ax$  et  $w = x + A^*y$ . Ceci implique que pour tout  $w \in \mathcal{H}$ , il existe un unique  $x \in D(A)$ , tel que  $Ax \in D(A^*)$  et  $(1 + A^*A)x = w$ . L'opérateur établit alors bien une bijection entre  $D(A^*A)$  et  $\mathcal{H}$ .

$(1 + A^*A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $\|(1 + A^*A)^{-1}\| \leq 1$  suivent de  $\|w\|^2 = \|x\|^2 + 2\|Ax\|^2 + \|A^*Ax\|^2 \geq \|x\|^2$ .

Montrons maintenant que  $(D(A^*A), 1 + A^*A)$  est auto-adjoint. Tout d'abord, cet opérateur est fermé car le graphe d'un opérateur borné est toujours fermé, que  $G(B^{-1}) = G(B)^t$  et que le graphe d'un opérateur est fermé si et seulement si le graphe transposé l'est. Remarquer que  $D(A^*A)$ , et donc  $D(1 + A^*A)$ , est dense dans  $\mathcal{H}$ . Soit  $y \in D(A^*A)^\perp$  et montrons que  $y = 0$ . Il doit exister un unique  $x \in D(1 + A^*A)$  tel que  $y = x + A^*Ax$ . Alors :

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle x, x + A^*Ax \rangle = \|x\|^2 + \|Ax\|^2 \quad (142)$$

donc  $x = 0 = Ax = y$ . Soit désormais  $y \in D(1 + A^*A)$ . Il existe alors un unique  $z \in \mathcal{H}$  tel que :

$$\langle y, x + A^*Ax \rangle = \langle z, x \rangle \quad (143)$$

Mais  $1 + A^*A$  étant une bijection, il doit exister un unique  $y' \in D(1 + A^*A)$  tel que  $z = y' + A^*Ay'$ . Mais alors pour tout  $x \in D(1 + A^*A)$  :

$$\langle y, x + A^*Ax \rangle = \langle z, x \rangle = \langle y', x + A^*Ax \rangle \quad (144)$$

de sorte que  $y = y'$  et  $z = y + A^*Ay$ . Prenons maintenant  $x, y \in \mathcal{H}$  arbitraires. Par bijectivité et le fait que  $1 + A^*A$  est auto-adjoint sur  $D(A^*A)$  :

$$\langle y, (1 + A^*A)^{-1}x \rangle = \langle (1 + A^*A)^{-1}y, x \rangle \quad (145)$$

Montrer enfin le dernier point. Supposer  $(x, Ax) \in G(A)$  est orthogonal dans  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  au graphe de  $A$  restreint à  $D(A^*A)$  et montrons que  $x = 0$ . Cela provient du fait que pour tout  $y \in D(A^*A)$ , on a que :

$$0 = \langle (x, Ax), (y, Ay) \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, (1 + A^*A)y \rangle \quad (146)$$

□

**Théorème 21.** Soit  $(D(A), A)$  un opérateur normal. Alors

1.  $x \in D(A^2) \implies (1 + A^*A)^{-1/2}x \in D(A^2)$
2. Pour  $x \in D(A)$ ,  $A(1 + A^*A)^{-1}x = (1 + A^*A)^{-1}Ax$  et  $A^*(1 + A^*A)^{-1}x = (1 + A^*A)^{-1}A^*x$
3. Pour  $x \in D(A^2)$ ,  $A(1 + A^*A)^{-1/2}x = (1 + A^*A)^{-1/2}Ax$  et  $A^*(1 + A^*A)^{-1/2}x = (1 + A^*A)^{-1/2}A^*x$
4.  $(1 + A^*A)^{-1/2}A$  et  $(1 + A^*A)^{-1/2}A^*$  sont bornés sur  $D(A^2)$ , de norme inférieure à 1, de sorte qu'il existe des extensions bornées uniques  $T_A$  et  $T_{A^*}$ . De plus,  $T_A^* = T_{A^*}$
5.  $1 - T_{A^*}T_A = (1 + A^*A)^{-1}$

**Preuve.** Commencer par la discussion suivante. On a  $D(A^2) = D(A^*A) = D(AA^*) = D(A^{*2})$ . Par exemple :

$$\begin{aligned} x \in D(A^*A) &\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \langle y, A^*Ax \rangle \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \langle Ay, Ax \rangle \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \sum_{k=0}^3 i^k \langle A(y + i^k x), A(y + i^k x) \rangle \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \sum_{k=0}^3 i^k \|A(y + i^k x)\|^2 \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \sum_{k=0}^3 i^k \|A^*(y + i^k x)\|^2 \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in D(A) : y \mapsto \langle A^*y, A^*x \rangle \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow A^*x \in D(A) \\ &\Leftrightarrow x \in D(AA^*) \end{aligned} \quad (147)$$

De plus, si  $x \in D(A^2)$ , alors :

$$\langle x, A^*Ax \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, AA^*x \rangle \quad (148)$$

et en appliquant encore une fois l'identité de polarisation, on a que pour un tel opérateur normal  $(D(A), A)$  :

$$\forall x \in D(A^*A) = D(AA^*) : AA^*x = A^*Ax \quad (149)$$

Puisque  $(1 + A^*A)^{-1}$  est borné, on peut par le calcul fonctionnel sur les opérateurs bornés définir l'opérateur  $(1 + A^*A)^{-1/2}$ . Celui-ci sera aussi borné, auto-adjoint et de norme inférieure à 1. Manifestement :

$$(1 + A^*A)^{-1/2}(1 + A^*A)^{-1/2} = (1 + A^*A)^{-1} \quad (150)$$

Prouvons désormais chaque point explicitement.

1. Si  $x \in D(A^2)$ , il doit exister  $y \in \mathcal{H}$  tel que  $x = (1 + A^*A)y$ . Mais alors, par le calcul fonctionnel, on a  $(1 + A^*A)^{-1/2}x = (1 + A^*A)^{-3/2}y = (1 + A^*A)^{-1}(1 + A^*A)^{-1/2}y \in D(A^2)$ .
2. Si  $x \in D(A)$ , il existe  $y \in D(A^2)$  tel que  $(1 + A^*A)y = x$ . Ceci montre que  $A^*Ay = x - y \in D(A)$ , d'où  $y \in D(AA^*A)$ , ou encore,  $Ay \in D(AA^*) = D(A^*A)$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} A(1 + A^*A)^{-1}x &= Ay = (1 + A^*A)^{-1}(1 + A^*A)Ay = (1 + A^*A)^{-1}(Ay + A^*AAy) \\ &= (1 + A^*A)^{-1}(Ay + AA^*Ay) = (1 + A^*A)^{-1}A(1 + A^*A)y = (1 + A^*A)^{-1}Ax \end{aligned} \quad (151)$$

Le raisonnement pour l'autre égalité est analogue.

3. Par définition du calcul fonctionnel, il doit exister une suite  $(p_n)$  convergeant uniformément sur  $\sigma(((1 + A^*A)^{-1}))$  vers la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  de telle sorte que  $\|(1 + A^*A)^{-1/2} - p_n((1 + A^*A)^{-1})\| \rightarrow 0$ . Pour  $x, y \in D(A^2)$  :

$$\begin{aligned} \langle x, A(1 + A^*A)^{-1/2}y \rangle &= \langle A^*x, (1 + A^*A)^{-1/2}y \rangle = \langle A^*x, \lim_{n \rightarrow \infty} p_n((1 + A^*A)^{-1})y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^*x, p_n((1 + A^*A)^{-1})y \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, Ap_n((1 + A^*A)^{-1})y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, p_n((1 + A^*A)^{-1})Ay \rangle \\ &= \langle x, \lim_{n \rightarrow \infty} p_n((1 + A^*A)^{-1})Ay \rangle = \langle x, (1 + A^*A)^{-1/2}Ay \rangle \end{aligned} \quad (152)$$

Les éléments de matrices de  $(1 + A^*A)^{-1/2}A$  et de  $A(1 + A^*A)^{-1/2}$  étant égaux sur  $D(A^2)$  qui est dense dans  $\mathcal{H}$ , on peut conclure.

4. Il existe des extensions bornées de  $T_A$  et  $T_{A^*}$  de  $A(1 + A^*A)^{-1/2}$  et  $A^*(1 + A^*A)^{-1/2}$  respectivement. De plus,  $T_A^* = T_{A^*}$  et  $\|T_A\| \leq 1$ . Pour  $x \in D(A^2)$ , on a que :

$$\begin{aligned} \|(1 + A^*A)^{-1/2}Ax\|^2 &= \langle Ax, (1 + A^*A)^{-1/2}(1 + A^*A)^{-1/2}Ax \rangle = \langle Ax, (1 + A^*A)^{-1}Ax \rangle = \langle x, A^*(1 + A^*A)^{-1}Ax \rangle \\ &= \langle x, A^*A(1 + A^*A)^{-1}x \rangle \leq \langle x, A^*A(1 + A^*A)^{-1}x \rangle + \langle x, (1 + A^*A)^{-1}x \rangle = \langle x, (1 + A^*A)(1 + A^*A)^{-1} \rangle = \|x\|^2 \end{aligned} \quad (153)$$

L'opérateur  $(1 + A^*A)^{-1/2}A$  est donc bien borné sur  $D(A^2)$ , de norme inférieure à 1, et possède donc une unique extension sur tout  $\mathcal{H}$ . Il en va de manière similaire pour  $(1 + A^*A)^{-1/2}A^*$ . Finalement, pour  $x, y \in D(A^2)$ , on a :

$$\langle x, A(1 + A^*A)^{-1/2}y \rangle = \langle A^*x, (1 + A^*A)^{-1/2}y \rangle = \langle (1 + A^*A)^{-1/2}A^*x, y \rangle \quad (154)$$

ce qui montre bien que  $(A(1 + A^*A)^{-1/2})^* = (1 + A^*A)^{-1/2}A^*$ . L'extension de l'adjoint étant l'adjoint de l'extension,  $T_A^* = T_{A^*}$ .

5. Prendre à nouveau  $x, y \in D(A)$  :

$$\begin{aligned} \langle x, (1 - T_{A^*}T_A)y \rangle &= \langle x, y \rangle - \langle T_Ax, T_Ay \rangle = \langle x, y \rangle - \langle (1 + A^*A)^{-1/2}Ax, (1 + A^*A)^{-1/2}Ay \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \langle Ax, (1 + A^*A)^{-1/2}(1 + A^*A)^{-1/2}Ay \rangle = \langle x, y \rangle - \langle Ax, (1 + A^*A)^{-1}Ay \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \langle x, A^*A(1 + A^*A)^{-1}y \rangle = \langle x, (1 + A^*A)(1 + A^*A)^{-1}y \rangle - \langle x, A^*A(1 + A^*A)^{-1}y \rangle \\ &= \langle x, (1 + A^*A)^{-1}y \rangle \end{aligned} \quad (155)$$

Ces deux opérateurs bornés ont donc les mêmes éléments de matrice sur un ensemble dense de  $\mathcal{H}$  et sont donc identiques.  $\square$

**Théorème 22.** Soit  $(D(A), A)$  un opérateur auto-adjoint. Alors, il existe une famille dénombrable  $(\nu_n)_{n \in B}$  de mesures boreliennes, régulières et finies sur  $\sigma(A)$  et un unique opérateur unitaire  $U : \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_{n \in B} L^2(\sigma(A), \nu_n)$  tels que

1.  $UD(A) = \{(f_n)_{n \in B} \in \bigoplus_{n \in B} L^2(\sigma(A), \nu_n) : (xf_n(x))_{n \in B} \in \bigoplus_{n \in B} L^2(\sigma(A), \nu_n)\}$
2. Sur  $D(A)$ , on a  $A = U^{-1}M_xU$

**Preuve.** Commençons par la discussion suivante. Si  $(D(A), A)$  est auto-adjoint, il est à fortiori normal. Par le théorème précédent 21,  $T_A$  est donc un opérateur auto-adjoint borné de norme inférieure à 1. Par conséquent son spectre est dans  $[-1, 1]$  et par le théorème de la décomposition spectrale pour opérateurs auto-adjoints bornés 14, il existe une famille de mesures régulières boreliennes  $(\mu_n)_{n \in B}$  sur  $\sigma(A)$  et avec  $|B| \leq |\mathbb{N}|$  et un opérateur unitaire  $V$  :

$$V : \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_{n \in B} L^2(\sigma(A), \mu_n) : VT_AV^{-1} = M_x \quad (156)$$

Par le théorème 21, on a alors que :

$$(1 + A^*A)^{-1} = 1 - T_A^2 = V^{-1}(1 - M_x^2)V \quad (157)$$

Clairement :

$$VD(A^2) = V\text{Ran}(1 + A^*A)^{-1} = \text{Ran}(1 - M_x^2) = \left\{ ((1 - x^2)f_n(x))_{n \in B} : (f_n)_{n \in B} \in \bigoplus_{n \in B} L^2(\sigma(A), \mu_n) \right\} \quad (158)$$

Manifestement, on a aussi  $V(1 + A^*A)^{-1/2}V^{-1} = M_{\sqrt{1-x^2}}$ . Puis sur  $VD(A^2)$ , on a :

$$M_x = VA(1 + A^2)^{-1/2}V^{-1} = V(1 + A^2)^{-1/2}AV^{-1} = V(1 + A^2)^{-1/2}V^{-1}VAV^{-1} = M_{\sqrt{1-x^2}}VAV^{-1} \quad (159)$$

de sorte que sur  $VD(A^2)$ ,  $VAV^{-1} = M_{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$ . Puisque  $D(A^2)$  est un coeur pour  $A$ ,  $G(A)$  sera la fermeture dans  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  du graphe de  $A$  restreint à  $D(A^2)$ . Puisque  $V$  est unitaire, on aura que  $(D(A), A)$  sera unitairement équivalent à la fermeture du graphe  $M_{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$  restreint à  $VD(A^2)$ . De même,  $(D(A), A)$  est unitairement équivalent  $(VD(A), M_{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}})$ . Par le point 5 du théorème 21,  $(1 + A^2)^{-1} = 1 - T_A^2$  est une injection, de sorte que par unitarité de  $V$ , l'opérateur  $1 - M_x^2$  est une bijection dans  $\bigoplus_{n \in B} L^2(\sigma(A), \mu_n)$ . Il en résulte que pour tout  $n \in B$ ,  $\mu_n\{-1, 1\} = 0$  car sinon le vecteur  $\bigoplus_{k \in B} x_k$  avec  $x_k = \delta_{nk}\chi_{\{-1, 1\}}$  serait un vecteur non-nul avec  $1 - M_x^2 \bigoplus_{k \in B} x_k = 0$ . Considérons alors

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[, x \mapsto y = \varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Cette fonction est clairement une bijection continue avec inverse  $\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ . Si  $\Sigma_n \subseteq \mathcal{P}(]-1, 1[)$  est la  $\sigma$ -algèbre borélienne sur laquelle est définie  $\mu_n$ , alors :

$$\Sigma_n^\varphi = \{\varphi^{-1}\{E\} : E \in \Sigma_n\} \quad (160)$$

est une  $\sigma$ -algèbre borélienne de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ . On définit alors une mesure  $\nu_n$  :

$$\nu_n : F = \varphi^{-1}\{E\} \in \Sigma_n^\varphi \rightarrow \mathbb{R}_+, F \mapsto \mu_n(E) \quad (161)$$

Il est alors clair que  $f$  est une fonction  $\Sigma_n$ -mesurable si et seulement si  $f \circ \varphi$  est  $\Sigma_n^\varphi$ -mesurable et que  $s$  est une fonction  $\Sigma$ -simple si et seulement si  $s \circ \varphi$  est une fonction  $\Sigma_n^\varphi$ -simple. Par définition de  $\nu_n$ , il est alors clair que pour une fonction  $\Sigma_n^\varphi$ -simple :

$$\int_{\mathbb{R}} s d\nu_n = \int_{\sigma(A)} s \circ \varphi^{-1} d\mu_n \quad (162)$$

et que par conséquent, la composition des fonctions par  $\varphi$  induit un isomorphisme unitaire  $W_n : L^2(\sigma(A), \mu_n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \nu_n)$ .  $\varphi$  étant une bijection continue entre intervalles réels de sorte que des compacts de  $\mathbb{R}$  sont envoyés sur des compacts de  $]-1, 1[$ , et que la régularité de  $\mu_n$  a alors comme conséquence la régularité de  $\nu_n$ . La composition par  $\varphi$  montre alors aussi que

$$W_n M_{\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}} = M_x W_n \quad (163)$$

sur l'ensemble  $VD(A)_n$  et la composition par  $\varphi$  nous donne que

$$W_n VD(A)_n = \left\{ \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} : f \in L^2(\mathbb{R}, \nu_n) \right\} \quad (164)$$

Mais alors,

$$g \in W_n VD(A)_n \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)}(1+x^2)g(x)d\nu_n < \infty \Leftrightarrow g, xg(x) \in L^2(\mathbb{R}, \nu_n) \quad (165)$$

Ainsi :

$$W_n VD(A)_n = \{f \in L^2(\mathbb{R}, \nu_n) : M_x f \in L^2(\mathbb{R}, \nu_n)\} \quad (166)$$

En définissant  $W = \bigoplus_{n \in B} W_n$  et  $U = WV$ , on la conclusion du théorème.  $\square$