

# Table des matières

Introduction .....	5
--------------------	---

## I Transport en milieu désordonné : phénomène de localisation

<b>1</b>	<b>Phénomène de localisation d'Anderson .....</b>	<b>9</b>
<b>1.1</b>	<b>Diffusion et interférences</b>	<b>9</b>
1.1.1	Phénomène de diffusion .....	9
1.1.2	Localisation faible .....	9
1.1.3	Suppression du transport : Localisation d'Anderson .....	9
<b>1.2</b>	<b>Localisation des atomes froids</b>	<b>10</b>
1.2.1	Etudes expérimentales de la localisation d'Anderson .....	10
1.2.2	L'approche des atomes froids .....	10
<b>1.3</b>	<b>Vers l'étude du régime critique</b>	<b>10</b>
1.3.1	Etat de l'art de l'étude de la transition d'Anderson .....	10
1.3.2	Nécessité d'une spectroscopie pour sonder le régime critique .....	10

## II Transport d'atomes ultrafroids dans un speckle

<b>2</b>	<b>Production d'une source cohérente d'ondes de matière .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>Condensation de Bose-Einstein</b>	<b>13</b>
2.1.1	Statistique de Bose-Einstein .....	13
2.1.2	Propriétés d'un condensat de Bose-Einstein .....	16
<b>2.2</b>	<b>Processus d'interaction lumière-matière</b>	<b>18</b>
2.2.1	Le rubidium $^{87}\text{Rb}$ .....	18
2.2.2	Potentiel magnétique .....	19
2.2.3	Forces lumineuses .....	20
2.2.4	Couplage radio-fréquence .....	22
<b>2.3</b>	<b>Description d'un cycle expérimental</b>	<b>23</b>
2.3.1	Première chambre .....	23
2.3.2	Chambre de science .....	23
2.3.3	Imagerie .....	23

<b>3</b>	<b>Mises à jour de l'expérience</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Mise à jour de l'informatique de l'expérience</b>	<b>25</b>
3.1.1	Contrôle de l'expérience : passage à la suite Cicero	25
3.1.2	Développement d'une nouvelle interface d'acquisition et de traitement d'images	25
<b>3.2</b>	<b>Réparation et recalibration de la lévitation magnétique</b>	<b>25</b>
3.2.1	Réparation de la lévitation magnétique	25
3.2.2	Calibration par oscillations	25
3.2.3	Calibration par radio-fréquences	25
<b>3.3</b>	<b>Changement du laser telecom et calibration du piège optique</b>	<b>25</b>
3.3.1	Changement du laser telecom	25
3.3.2	Calibration du piège optique	25
<b>3.4</b>	<b>Optimisation de l'évaporation tout-optique</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>Propriétés d'un désordre de type speckle</b>	<b>27</b>
<b>4.1</b>	<b>Génération d'un champ de speckle</b>	<b>27</b>
4.1.1	Propriétés du diffuseur	28
4.1.2	Statistiques de l'intensité d'un speckle	30
4.1.3	Implémentation expérimentale	30
<b>4.2</b>	<b>Propriétés spatiales d'un champ de speckle</b>	<b>31</b>
4.2.1	Extension transverse du champ de speckle le long de l'axe optique	32
4.2.2	Longueur de corrélation transverse le long de l'axe optique	32
4.2.3	Corrélation longitudinale	33
<b>4.3</b>	<b>Propriétés du potentiel de type speckle</b>	<b>33</b>
4.3.1	Propriétés du potentiel	33
4.3.2	Possibilité d'un potentiel dépendant de l'état interne	33
<b>4.4</b>	<b>Potentiel composé d'un speckle bichromatique</b>	<b>33</b>
4.4.1	S'éloigner de résonance	33
4.4.2	Étude de la similitude de deux speckles	33

### III

## Temps de diffusion élastique

<b>5</b>	<b>Temps de diffusion élastique</b>	<b>37</b>
<b>5.1</b>	<b>Approximation de Born</b>	<b>37</b>
5.1.1	Règle d'or de Fermi	37
5.1.2	Régimes de diffusion	37
<b>5.2</b>	<b>Mesure du temps de diffusion élastique</b>	<b>37</b>
5.2.1	Procédure expérimentale	37
5.2.2	Extraction du temps de diffusion élastique	37
5.2.3	Calibration de l'amplitude du désordre	37
<b>5.3</b>	<b>Comportement du temps de diffusion élastique</b>	<b>37</b>
5.3.1	Régime de Born	37
5.3.2	Déviations au régime de Born	37
5.3.3	Départ quadratique	37

<b>6</b>	<b>Approche spectrale</b>	<b>39</b>
<b>6.1</b>	<b>Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales</b>	<b>39</b>
6.1.1	Généralités sur la fonction spectrale	39
6.1.2	Approximation de Born : premier ordre	39
6.1.3	Approximation de Born : second ordre	39
6.1.4	Approximation de Born auto-consistante	39
<b>6.2</b>	<b>Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales mesurées pour un désordre de type speckle</b>	<b>39</b>
6.2.1	Limite de l'approche auto-consistante pour un désordre de type speckle	39
6.2.2	Mesure des fonctions spectrales	39
6.2.3	Comparaison du temps de diffusion élastique avec les fonctions spectrales mesurées	39
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>41</b>

**IV****Annexes**

<b>A</b>	<b>Calculs de champs de tavelures</b>	<b>45</b>
<b>A.1</b>	<b>Amplitude rayonnée</b>	<b>45</b>
<b>A.2</b>	<b>Fonction de corrélation</b>	<b>46</b>
A.2.1	Calcul général	46
A.2.2	Expression de l'extension transverse du champ de tavelures le long de l'axe optique	46
<b>A.3</b>	<b>Corrélations pour des speckles monochromatiques et bichromatiques</b>	<b>46</b>
A.3.1	Corrélation transverse d'un unique speckle le long de l'axe optique	46
A.3.2	Corrélation longitudinale d'un unique speckle autour du plan de Fourier	47
A.3.3	Corrélation transverse d'un speckle bichromatique dans le plan de Fourier	47
A.3.4	Corrélation longitudinale d'un speckle bichromatique autour du plan de Fourier	48
<b>B</b>	<b>Calcul du temps de diffusion élastique par le développement de Born</b>	<b>49</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>51</b>



# Introduction

Intro générale sur la physique, le contexte et présentation du plan.





# Transport en milieu désordonné : phénomène de localisation

<b>1</b>	<b>Phénomène de localisation d'Anderson . .</b>	<b>9</b>
1.1	Diffusion et interférences	
1.2	Localisation des atomes froids	
1.3	Vers l'étude du régime critique	





## Chapitre 1

# Phénomène de localisation d'Anderson

présentation des effets d'interférences dans le désordre. scaling theory à la delande uniquement sur la conductance pour présenter la localisation 1D et 2D puis la 3D avec la transition. Terminer sur la quête du régime critique avec le graphe de delande2017, et introduction aux manip récentes et futures.

### 1.1. Diffusion et interférences

#### 1.1.1 Phénomène de diffusion

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

#### 1.1.2 Localisation faible

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

#### 1.1.3 Suppression du transport : Localisation d'Anderson

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend

at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

## 1.2. Localisation des atomes froids

### 1.2.1 Etudes expérimentales de la localisation d'Anderson

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

### 1.2.2 L'approche des atomes froids

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

## 1.3. Vers l'étude du régime critique

### 1.3.1 Etat de l'art de l'étude de la transition d'Anderson

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

### 1.3.2 Nécessité d'une spectroscopie pour sonder le régime critique

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.



# Transport d'atomes ultrafroids dans un speckle

<b>2</b>	<b>Production d'une source cohérente d'ondes de matière</b>	<b>13</b>
2.1	Condensation de Bose-Einstein	
2.2	Processus d'interaction lumière-matière	
2.3	Description d'un cycle expérimental	
<b>3</b>	<b>Mises à jour de l'expérience</b>	<b>25</b>
3.1	Mise à jour de l'informatique de l'expérience	
3.2	Réparation et recalibration de la lévitation magnétique	
3.3	Changement du laser telecom et calibration du piège optique	
3.4	Optimisation de l'évaporation tout-optique	
<b>4</b>	<b>Propriétés d'un désordre de type speckle</b>	<b>27</b>
4.1	Génération d'un champ de speckle	
4.2	Propriétés spatiales d'un champ de speckle	
4.3	Propriétés du potentiel de type speckle	
4.4	Potentiel composé d'un speckle bichromatique	



## Chapitre 2

# Production d'une source cohérente d'ondes de matière

Dans la partie précédente, nous nous sommes concentrés sur la physique que nous souhaitons étudier. En particulier, nous avons mis en évidence le fait que l'approche des atomes ultrafroids constitue une plateforme idéale pour l'étude de la propagation d'ondes dans un milieu désordonné, plateforme déjà éprouvée par l'observation de la localisation d'Anderson d'ondes de matières dans un désordre optique.

À présent, concentrons-nous sur la description de l'un des deux éléments-clé de la propagation d'ondes dans le désordre : notre source d'ondes de matière. Le second élément, notre désordre optique, sera quant à lui présenté dans le chapitre 4.

Dans ce chapitre, nous nous attacherons donc à définir ce qu'est un condensat de Bose-Einstein puis nous décrirons ses principales propriétés. Dans un second temps, nous nous intéresserons aux outils dont nous disposons pour manipuler les atomes, puis nous terminerons en présentant la manière dont ces outils sont implémentés sur notre dispositif expérimental.

### 2.1. Condensation de Bose-Einstein

Commençons par décrire ce qu'est un condensat de Bose-Einstein. Le phénomène de condensation a été prédit par Albert Einstein dans les années 1920 en s'appuyant sur les travaux de Satyendranath Bose traitant des statistiques quantiques pour des particules plus tard appelées *bosons*. Il a cependant fallu attendre les années 1960 et le développement des premiers lasers pour voir émerger les premières techniques de manipulation d'atomes. La mise au point de telles technologies a d'ailleurs valu le prix Nobel à ses principaux architectes Claude Cohen-Tannoudji, Steven Chu et William D. Phillips en 1997. Enfin, le premier condensat de Bose-Einstein gazeux de  $^{87}\text{Rb}$  a été obtenu par l'équipe de Eric Cornell et Carl Wieman [Anderson et al., 1995], rapidement suivi par un condensat de  $^{23}\text{Na}$  obtenu par Wolfgang Ketterle [Davis et al., 1995]. Ces travaux ont été récompensés par le prix Nobel de 2001.

#### 2.1.1 Statistique de Bose-Einstein

Le phénomène de condensation de Bose-Einstein trouve son origine dans la statistique de Bose-Einstein. Celle-ci se différencie de la statistique classique de Boltzmann dans le formalisme grand-canonique donnée par :

$$N_{\mathbf{n}} = g_{\mathbf{n}} \exp(-(E_{\mathbf{n}} - \mu)/k_{\text{B}}T) \quad (2.1)$$



FIGURE 2.1 – **a** : Répartition de deux particules discernables numérotées 1 et 2 sur deux niveaux d'énergie. Quatre configurations sont possibles. **b** : Répartition de deux particules indiscernables sur deux niveaux d'énergie. Dans le cas où ces particules peuvent se trouver dans le même état (bosons), trois configurations sont alors possibles.

pour un gaz de  $N$  particules à l'équilibre thermique, avec  $N_n$  le nombre moyen d'atomes présents dans l'état d'énergie  $E_n$  et de dégénérescence  $g_n$ ,  $\mu$  le potentiel chimique,  $T$  la température et  $k_B$  la constante de Boltzmann. L'origine de cette différence provient de l'indiscernabilité des particules : dans le cadre de la physique classique, les particules identiques sont discernables, c'est à dire qu'il est possible "d'étiqueter" les particules et de suivre leurs mouvements individuels. Dans le cadre de la mécanique quantique, une telle approche n'est pas possible car les particules sont décrites par des fonctions d'onde, étalées dans l'espace. Lors de collisions de particules identiques, le recouvrement de leur fonction d'onde fait qu'il est impossible de déterminer les trajectoires suivies par les particules. L'indiscernabilité des particules dans le cadre de la mécanique quantique est donc essentielle.

Considérons alors le cas simple de la répartition de deux particules sur deux niveaux d'énergie. Dans le cadre de la physique classique, il est possible d'attribuer un numéro à chaque particule, et il on peut placer chaque particule dans n'importe quel niveau d'énergie. Il existe alors quatre configurations que l'on supposera équiprobables, chacune de probabilité  $p = 1/4$  (voir figure 2.1a). L'approche quantique, dans laquelle il n'est pas possible de discerner les particules, restreint le nombre de possibilités à trois et donc la probabilité de chacune des configurations est alors de  $p = 1/3$  (voir figure 2.1b). Calculons maintenant la probabilité que deux particules soient dans le même état. En physique classique, cette probabilité est de  $p = 2/4 = 1/2$ , tandis qu'en mécanique quantique, celle-ci est de  $p = 2/3$ . On s'attend alors à ce que l'indiscernabilité des particules en mécanique quantique modifie la statistique de Boltzmann en favorisant l'agrégation de particules dans le même état <sup>1</sup>.

### Condensation de Bose-Einstein

Considérons alors le cas d'un gaz de  $N$  bosons identiques dans un piège harmonique :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \quad (2.2)$$

1. Ce raisonnement est valable pour des particules bosoniques, qui peuvent se retrouver dans le même état quantique. Pour des particules fermioniques, qui ne peuvent pas se retrouver dans le même état quantique, les statistiques en sont donc profondément changées. En guise d'illustration, la seule configuration possible de la figure 2.1b pour des fermions est la seconde configuration.

où  $m$  correspond à la masse des particules, et les  $\omega_i$  correspondent aux fréquences de piégeage dans chaque direction de l'espace. Les énergies  $E_{\mathbf{n}}$  sont donc celles des états liés

$$E_{\mathbf{n}} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_z \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\} \quad (2.3)$$

On peut alors montrer que le nombre moyen de particules est donné par la distribution de Bose-Einstein <sup>2</sup> : [Diu et al., 1989]

$$N_{\mathbf{n}} = \frac{g_{\mathbf{n}}}{\exp((E_{\mathbf{n}} - \mu)/k_B T) - 1} \quad (2.4)$$

Une condition de validité de cette équation est que le potentiel chimique  $\mu$  soit plus petit que l'énergie  $E_0$  du niveau de plus basse énergie, appelé niveau fondamental. Autrement, le nombre moyen de particules du niveau fondamental serait négatif (et cela impliquerait que la totalité du réservoir de particules vienne se déverser dans le niveau fondamental). Il est donc nécessaire que  $\mu < E_0$ . Une conséquence remarquable cette condition est que la population totale des états excités est bornée par :

$$N_e(\mu, T) = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} N_{\mathbf{n}} \leq \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \frac{g_{\mathbf{n}}}{\exp((E_{\mathbf{n}} - E_0)/k_B T) - 1} \quad (2.5)$$

Ainsi, chaque particule supplémentaire peuplera forcément l'état fondamental. On a donc ici le moyen d'accumuler un grand nombre de particules dans le même état quantique. La condensation de Bose-Einstein correspond, par définition, à cette accumulation d'un nombre macroscopique de particules dans l'état fondamental. Toutes ces particules peuplant cet état partagent alors le même état quantique. Afin d'atteindre un tel régime, il est nécessaire que les paquets d'onde des particules individuelles se recouvrent, c'est à dire que l'extension typique d'un paquet d'onde soit plus grande que la distance moyenne entre particules. L'extension typique de la fonction d'onde d'une particule peut être estimée à l'aide du principe d'incertitude de Heisenberg :  $\Delta x \sim \hbar/\Delta p$  avec  $\Delta p \sim \hbar/\lambda_{dB}$ . La grandeur  $\lambda_{dB}$  est homogène à une longueur et s'appelle la longueur d'onde thermique de de Broglie. Elle correspond à la taille typique d'un paquet d'onde quantique dont la largeur de la distribution en impulsion est donnée par la température. Celle-ci est donnée par [Diu et al., 1989]

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (2.6)$$

avec  $m$  la masse de la particule, un atome de  $^{87}\text{Rb}$  dans le cas de notre expérience. La distance inter-particules dans un piège est estimée à partir de la densité de particules  $d \sim n^{-1/3}$ . On peut alors formuler le critère phénoménologique suivant :

$$n\lambda_{dB}^3 \gtrsim 1 \quad (2.7)$$

La quantité  $n\lambda_{dB}^3$  est appelée *densité dans l'espace des phases*. Tout l'enjeu des expériences d'atomes ultrafroids est d'arriver à augmenter la densité dans l'espace des phases afin de franchir le seuil donné par l'équation 2.7. Cette condition peut se réécrire en terme de *température critique* :

$$T_C \sim \frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B} N^{1/3} \quad (2.8)$$

où  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$  est la fréquence moyenne du piège. Cette température critique est de l'ordre de quelques centaines de nano-kelvin pour les expériences typiques d'atomes ultra-froids.

---

2. Pour un gaz de  $N$  fermions identiques, le nombre moyen de particules est donné par la distribution de Fermi-Dirac  $N_{\mathbf{n}} = \frac{g_{\mathbf{n}}}{\exp((E_{\mathbf{n}} - \mu)/k_B T) + 1}$ .

### 2.1.2 Propriétés d'un condensat de Bose-Einstein

En dessous de la température critique 2.8, les atomes s'accumulent dans l'état fondamental du piège. Il en résulte une forte augmentation de la densité, si bien qu'on ne peut plus négliger les interactions entre particules. Dans le cas d'un gaz suffisamment dilué, ce que l'on considèrera dans la suite, les interactions entre atomes peuvent être traitées comme des collisions à basse énergie, c'est à dire des collisions uniquement dans l'onde  $s$ . Le potentiel d'interaction est alors celui de contact, donné par  $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = g\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ . Le paramètre  $g$ , qui caractérise la force des interactions, est donné par  $g = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s$ , avec  $a_s$  la longueur de diffusion, et ne dépend que de ce paramètre. Ce régime dilué est atteint lorsque  $na_s^3 \ll 1$ <sup>3</sup>. Pour le  $^{87}\text{Rb}$ , cette longueur de diffusion vaut  $100a_0 > 0$ , avec  $a_0$  le rayon de Bohr. La longueur de diffusion étant positive, les interactions sont donc répulsives pour notre atome.

On peut écrire l'équation de Schrödinger pour l'état fondamental en tenant compte de ce terme d'interaction entre particules. La description en champ moyen du condensat est alors donnée par l'équation de Gross-Pitaevskii (aussi connue sous le nom d'*équation de Schrödinger non-linéaire*) :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

où  $\psi(\mathbf{r}, t)$  est la fonction d'onde macroscopique du condensat. La densité d'atomes est donnée par  $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ . Ainsi, la fonction d'onde du condensat  $\psi(\mathbf{r}, t)$  est normalisée pour donner le nombre de particules dans le condensat :

$$\int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = N_0 \quad (2.10)$$

Dans le régime stationnaire, on peut écrire  $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r})e^{i\mu t/\hbar}$  avec  $\mu$  le potentiel chimique du condensat, et l'injecter dans l'équation 2.9. On obtient l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) + g|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{r}) = \mu\phi_0(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

Le premier terme de gauche décrit l'énergie cinétique, le second le terme d'énergie potentielle provenant du piège, et le dernier décrit l'énergie d'interaction entre particules, proportionnelle à la densité locale  $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = |\phi_0(\mathbf{r})|^2$ . La somme de ces énergies donne le potentiel chimique  $\mu$ , qui correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour rajouter une particule supplémentaire au système de  $N$  particules.

#### Régime de Thomas-Fermi

Considérons le cas d'un condensat comportant un grand nombre de particules  $N_0$ . L'énergie cinétique totale du condensat varie avec  $N_0$  de manière linéaire :  $\langle E_k \rangle \propto N_0$ . L'énergie totale d'interaction varie quant à elle en  $E_{\text{int}} \propto N_0^2$ . Pour un nombre suffisamment grand de particules, il devient possible de négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire : il s'agit du régime de Thomas-Fermi. Dans ce cas, le profil de densité s'écrit

$$n(\mathbf{r}) = \begin{cases} (\mu - V(\mathbf{r}))/g & \text{lorsque } \mu > V(\mathbf{r}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.12)$$

3. Dans ce régime, la distance inter-atomique est plus grande que la portée des interactions. Ainsi, les atomes ne voient pas le détail du potentiel d'interaction avec leur voisin, et donc il est possible d'approximer ce potentiel par un potentiel de contact.



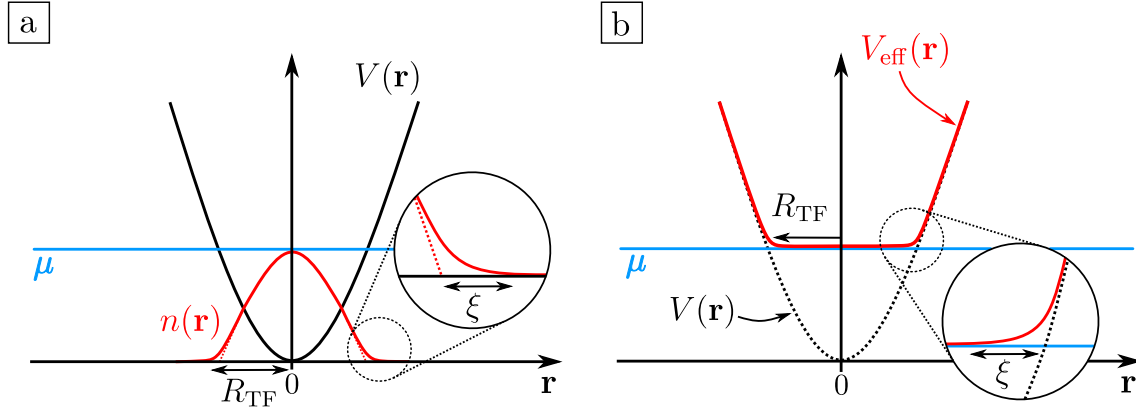


FIGURE 2.2 – **a** : Profil de densité dans le régime de Thomas-Fermi. La densité est une parabole inversée, liée à la forme parabolique du potentiel. Sur les bords du condensat, la densité s'écarte de la parabole sur une longueur typique appelée longueur de cicatrisation. **b** : Potentiel effectif ressenti pour des particules individuelles. Ce potentiel effectif suit la forme du potentiel externe, et l'effet des interactions à l'intérieur du condensat écrante le potentiel externe par le potentiel chimique.

et en considérant le piège harmonique de l'équation 2.2,

$$n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu/g - \sum_{i=x,y,z} \frac{m\omega_i^2}{2g} r_i^2 & \text{lorsque } \mu > V(\mathbf{r}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13)$$

Le profil de densité est donc une parabole inversée de rayons

$$R_{\text{TF},i} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}} \quad (2.14)$$

Ces rayons de Thomas-Fermi ont été déterminés par la condition  $n(\mathbf{r}) = 0$ . Il est intéressant de noter que le potentiel effectif vu par une particule  $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + gn(\mathbf{r})$  est constant sur l'ensemble du condensat :

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu & \text{lorsque } \mu > V(\mathbf{r}) \\ V(\mathbf{r}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.15)$$

Enfin, il est possible d'obtenir une expression pour le potentiel chimique [Pethick and Smith, 2008] :

$$\mu = \frac{1}{2} \left( 15a N_0 \hbar^2 \bar{\omega}^3 \right)^{2/5} m^{1/5} \quad (2.16)$$

et vaut environ  $\mu/h \approx 40\text{Hz}$  pour notre expérience.

En réalité, l'approximation de Thomas-Fermi décrit bien les zones à l'intérieur des condensats, cependant, il existe une petite région sur les bords du condensat où la densité est faible, et donc l'énergie cinétique ne peut plus être négligée devant l'énergie d'interaction. Cette échelle de longueur s'appelle la longueur de cicatrisation, et est donnée par

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{n_0 m g}} \quad (2.17)$$

avec  $n_0$  la densité moyenne du condensat.  $\xi$  représente donc la longueur sur laquelle le potentiel chimique n'écrante pas le potentiel externe.

## 2.2. Processus d'interaction lumière-matière

Précédemment, nous avons brièvement présenté le phénomène de condensation de Bose-Einstein ainsi que les principales propriétés d'un condensat. En particulier, nous avons identifié un critère de condensation, qui sert de ligne à atteindre sur notre dispositif. À présent, nous allons présenter les différents outils de manipulation d'atomes dont nous disposons pour obtenir la condensation d'un nuage de rubidium  $^{87}\text{Rb}$ .

### 2.2.1 Le rubidium $^{87}\text{Rb}$

Comme déjà mentionné plusieurs fois, l'espèce atomique utilisée sur notre expérience est le rubidium  $^{87}\text{Rb}$ , le second isotope le plus abondant après le rubidium  $^{85}\text{Rb}$  (l'abondance naturelle du  $^{87}\text{Rb}$  est de 27.8%). Il s'agit d'un alcalin (il possède donc un seul électron de valence) avec un spin nucléaire  $\mathbf{I} = 3/2$ . Le choix de cet isotope repose sur l'existence d'une transition optique cyclante dans sa raie  $D$ . De plus, sa longueur de diffusion  $a_s = 5.3\text{nm}$  résulte en des taux de collisions relativement élevés, permettant une thermalisation rapide du nuage. À ce propos, il s'agit de l'atome ayant été condensé en premier. [Anderson et al., 1995]

La raie  $D$  est en réalité composée de deux transitions : la raie  $D_1$  correspondant à la transition  $4^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{1/2}$  à 895nm, et la raie  $D_2$  correspondant à la transition  $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$  à 780nm. Sauf mention contraire, nous n'utiliserons que la raie  $D_2$  dans la suite de ce manuscrit, la plupart de nos fréquences optiques se trouvant à 780nm. La structure hyperfine de l'état fondamental  $5^2S_{1/2}$  consiste en deux niveaux hyperfins dégénérés  $|F = 1\rangle$  et  $|F = 2\rangle$  séparés de  $\Delta_{\text{hf}} = 6.835\text{GHz}$ . Chacun de ces états est composé de  $2F + 1$  sous-états Zeeman. Une vue simplifiée de cette structure est donnée figure 2.3, et un tableau récapitulatif des principales grandeurs du  $^{87}\text{Rb}$  peut être trouvé table 2.1.

Quantité physique	Symbole	Valeur
Masse	$m$	$1.44 \times 10^{-25}\text{kg}$
Fréquence de transition $D_2$	$\omega_0$	$2\pi \times 384.230\text{THz}$
Longueur d'onde dans le vide ( $D_2$ )	$\lambda_0$	780.241nm
Largeur naturelle de la transition $D_2$	$\Gamma$	$2\pi \times 6.07\text{MHz}$
Fréquence de transition $D_1$	$\omega_{D_1}$	$2\pi \times 377.107\text{THz}$
Longueur d'onde dans le vide ( $D_1$ )	$\lambda_{D_1}$	794.979nm
Largeur naturelle de la transition $D_1$	$\Gamma_{D_1}$	$2\pi \times 5.75\text{MHz}$
Séparation hyperfine	$\Delta_{\text{hf}}$	6.834682611GHz
Moment cinétique nucléaire	$\mathbf{I}$	3/2
Facteur de Landé électronique	$g_S$	2.002319
Facteur de Landé orbital	$g_L$	0.999993
Facteur de Landé nucléaire	$g_I$	$-0.9951414 \times 10^{-3}$
Intensité de saturation	$I_{\text{sat}}$	$1.67\text{mW.cm}^{-2}$
Longueur de diffusion	$a_s$	5.3nm

TABLE 2.1 – Tableau récapitulatif des grandeurs physiques du rubidium  $^{87}\text{Rb}$  que nous utiliserons dans la suite. Ces valeurs sont tirées de [Steck, 2001].

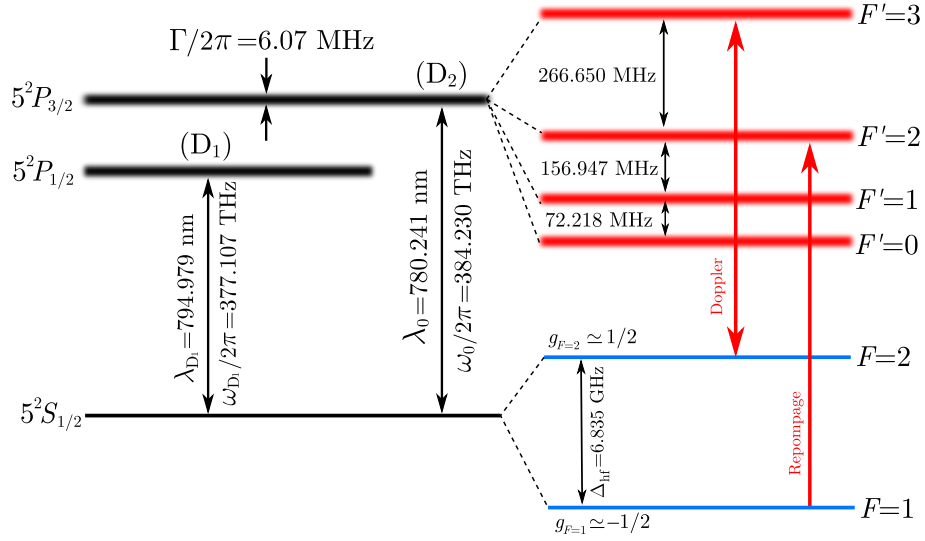


FIGURE 2.3 – Structure de la raie  $D$  du rubidium  $^{87}\text{Rb}$ . Celle-ci est composée de deux transitions, la  $D_1$  à 795nm, et la transition  $D_2$  à 780nm que nous utilisons sur l'expérience. L'état fondamental  $5^2S_{1/2}$  est dégénéré en deux sous-niveaux hyperfins séparés d'une énergie  $h\Delta_{\text{hf}}$  avec  $\Delta_{\text{hf}} = 6.835\text{GHz}$ .

### 2.2.2 Potentiel magnétique

Commençons par décrire l'interaction d'un atome de rubidium avec un champ magnétique statique. Ces champs magnétiques sont couramment utilisés dans les expériences d'atomes ultra-froids pour réaliser des pièges conservatifs à l'aide champs inhomogènes (après un refroidissement laser par exemple). En particulier, l'expérience de Stern & Gerlach montre que la force appliquée aux atomes par un gradient de champ magnétique dépend de l'état interne de l'atome. Explicitons cela.

Le moment cinétique total  $\hat{\mathbf{F}}$  est donné par la somme des moments cinétiques des composants de l'atome :

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \quad (2.18)$$

avec  $\hat{\mathbf{I}}$  le spin total nucléaire,  $\hat{\mathbf{L}}$  le moment cinétique orbital et  $\hat{\mathbf{S}}$  le moment cinétique de spin électronique. On a alors un moment magnétique total  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mu_B(g_I\hat{\mathbf{I}} + g_L\hat{\mathbf{L}} + g_S\hat{\mathbf{S}})$  où les  $g_{I,L,S}$  sont les facteurs de Landé et  $\mu_B$  est le magnéton de Bohr. L'énergie d'interaction de ce moment magnétique avec un champ magnétique  $\mathbf{B}$  est donnée par  $\hat{V} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}$ . On obtient les énergies propres par la formule de Breit-Rabi, dont l'application aux états  $|F=1\rangle$  et  $|F=2\rangle$  fournit :

$$\begin{aligned} E_{F=2} &\simeq +\frac{h\Delta_{\text{hf}}}{2}\sqrt{1+m_F\beta+\beta^2} \\ E_{F=1} &\simeq -\frac{h\Delta_{\text{hf}}}{2}\sqrt{1+m_F\beta+\beta^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec  $\beta \simeq 2\mu_B|B|/h\Delta_{\text{hf}}$ . À faible champ magnétique  $|B| \ll h\Delta_{\text{hf}}/\mu_B$  (régime où  $\beta \ll 1$ ), on retrouve l'effet Zeeman linéaire avec

$$U_{\text{mag}} = m_F g_F \mu_B |B| \quad (2.20)$$

et  $g_{F=2} = 1/2$  et  $g_{F=1} = -1/2$ . L'utilisation d'un champ magnétique non homogène génère donc un potentiel dépendant de la position, tel que dans l'expérience de Stern & Gerlach.

$$U_{\text{mag}}(\mathbf{r}) = m_F g_F \mu_B |B(\mathbf{r})| \quad (2.21)$$

L'utilisation de tels champs inhomogènes est très répandue dans le domaine des atomes ultra-froids, en particulier pour la génération de pièges magnétiques.

### 2.2.3 Forces lumineuses

On se concentre à présent sur l'interaction entre un atome et un champ laser incident. Ce champ laser comporte un grand nombre de photons émis par seconde (typiquement  $10^{12}$  pour une puissance de 1μW), on peut donc décrire ce champ laser par une onde classique

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left( \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t - i\phi(\mathbf{r})} \right) \quad (2.22)$$

dont l'effet sur un atome est donné par le hamiltonien  $H_{\text{AL}} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Dans la cadre de la théorie de la réponse linéaire, on introduit la polarisabilité atomique  $\alpha(\omega)$  et on montre alors que la force moyenne exercée sur un atome est la somme de deux termes :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \text{Re}(\alpha(\omega)) E(\mathbf{r}) \nabla E(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \text{Im}(\alpha(\omega)) E^2(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) \quad (2.23)$$

#### Potentiel dipolaire

Le premier terme est proportionnel à la partie réelle de la polarisabilité atomique. Ce terme décrit donc comment un moment dipolaire électrique induit interagit avec le gradient d'intensité lumineuse. On peut considérer cette force comme étant conservative et dérivant d'un potentiel qui est proportionnel à l'intensité lumineuse : on parle de *potentiel dipolaire*. Dans le cas d'un faisceau très désaccordé, ce potentiel s'écrit :

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2 I(\mathbf{r})}{2\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\omega - \omega_0} - \frac{\Gamma}{\omega + \omega_0} \right) \quad (2.24)$$

avec  $I(\mathbf{r})$  l'intensité lumineuse à la position  $\mathbf{r}$ . Cette expression est valable très loin de résonance : cela signifie que le laser ne voit pas le détail de la raie  $D$  du  $^{87}\text{Rb}$ , c'est à dire que le désaccord  $\omega - \omega_0$  doit être très grand devant la structure fine séparant les transitions  $D_1$  et  $D_2$ . De plus, on a  $\omega - \omega_0 \gg \Gamma$ , avec  $\Gamma$  la largeur de la transition.

Un tel potentiel présente de nombreux avantages pour les expériences d'atomes ultra-froids. Suivant le signe de la quantité  $1/\bar{\Delta} = 1/(\omega - \omega_0) - 1/(\omega + \omega_0)$ , ce potentiel peut être soit attractif ( $\bar{\Delta} < 0$ , on parlera alors de potentiel désaccordé vers le *rouge*), soit répulsif ( $\bar{\Delta} > 0$ , potentiel désaccordé vers le *bleu*). Les atomes seront alors attirés par les maxima d'intensité lumineuse (pour un faisceau désaccordé vers le rouge) ou bien vers les zones d'ombre (pour les faisceaux désaccordés vers le bleu). Un faisceau gaussien focalisé désaccordé vers le rouge permet ainsi de piéger les atomes en son foyer : la forme gaussienne du faisceau attire les atomes vers le centre du faisceau. De plus dans cette limite, le potentiel est indépendant de l'état interne. Contrairement à un piège magnétique, un piège dipolaire n'est pas sélectif en état de spin et donc offre de nombreuses possibilités grâce à la disponibilité de degrés de liberté internes.

Cependant, l'utilisation de tels désaccords (plusieurs centaines de nano-mètres) contraint l'utilisation de grosses puissances optiques afin d'obtenir des potentiels suffisamment importants. Ainsi, il est courant que les expériences d'atomes ultrafroids utilisent des lasers de puissances de plusieurs Watts<sup>4</sup> focalisés sur de petites tailles, typiquement quelques 10-100μm. Il se pose alors la question de la dissipation, liée à l'émission spontanée. Le taux d'émission spontanée peut être estimé par :

$$\Gamma_{\text{sp}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2 I(\mathbf{r})}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left( \frac{\Gamma}{\omega - \omega_0} - \frac{\Gamma}{\omega + \omega_0} \right)^2 \quad (2.25)$$

4. À titre de comparaison, il ne suffit que de quelques milli-Watts pour endommager l'œil humain.

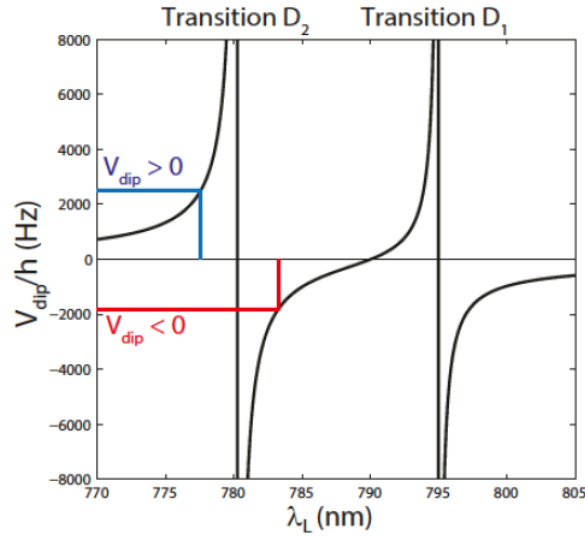


FIGURE 2.4 – Potentiel dipolaire en fonction de la longueur d'onde du laser. La présence des deux transitions est remarquable par les deux divergences. Elles sont séparées par une zone de potentiel tantôt attractif, plus répulsif. Entre ces deux régimes se trouve une longueur d'onde *magique* à environ 790nm pour laquelle le potentiel s'annule, quelque soit la puissance du laser.

et dans le cas dans d'un faisceau très désaccordé on peut souvent négliger ce taux et la dissipation qui lui est associée.

L'utilisation de désaccords plus modérés, typiquement de quelques nano-mètres, permet de fortement diminuer la puissance optique utilisée. En revanche, un tel rapprochement de la transition atomique implique qu'on ne peut plus négliger l'effet de la structure fine de la raie  $D$ . On peut alors considérer l'atome comme un système à non plus deux mais trois niveaux en négligeant la structure hyperfine de l'atome pour des désaccords gardés suffisamment grands  $\omega - \omega_0 \gg \Delta_{\text{hf}}$  et  $\omega - \omega_{D_1} \gg \Delta_{\text{hf}}$  (les séparations hyperfines des états excités sont plus petites que la séparation hyperfine des états fondamentaux).

Pour de tels désaccords et pour un faisceau polarisé linéairement, le potentiel dipolaire est alors donné par

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\pi c^2 I(\mathbf{r})}{2\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma_{D_1}}{\omega - \omega_{D_1}} - \frac{\Gamma_{D_1}}{\omega + \omega_{D_1}} + \frac{2\Gamma}{\omega - \omega_0} - \frac{2\Gamma}{\omega + \omega_0} \right) \quad (2.26)$$

Une conséquence de la structure fine est l'existence d'une zone entre les deux transitions où le potentiel est tantôt répulsif, tantôt attractif suivant que la fréquence du laser se rapproche de la fréquence de transition  $D_1$  (répulsif) ou de la transition  $D_2$  (attractif). Il existe donc une région dans laquelle il est possible de passer d'un potentiel désaccordé vers le bleu à un potentiel décalé vers le rouge sans croiser une transition atomique, comme illustré figure 2.4. De plus, entre ces domaines de potentiel attractif et répulsif, il existe une longueur d'onde dite *magique* pour laquelle le potentiel s'annule (les contributions des transitions  $D_1$  et  $D_2$  se compensent). Cette longueur d'onde est d'environ 790nm et peut être un véritable outil des expériences d'atomes ultrafroids, pour la réalisation d'un potentiel dépendant de l'état interne par exemple.

Naturellement, le rapprochement des transitions atomiques entraîne une augmentation

du taux d'émission spontanée. Pour les désaccords considérés, il s'exprime

$$\Gamma_{\text{sp}} = \frac{\pi c^2 I(\mathbf{r})}{2\hbar\omega_0^3} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_{D_1}} \right)^3 \left( \frac{\Gamma_{D_1}}{\omega - \omega_{D_1}} - \frac{\Gamma_{D_1}}{\omega + \omega_{D_1}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left( \frac{\Gamma}{\omega - \omega_0} - \frac{\Gamma}{\omega + \omega_0} \right)^2 \right] \quad (2.27)$$

et l'ordre de grandeur du temps de vie associé est de l'ordre de quelques secondes.

Notons enfin qu'il est possible de se rapprocher encore plus de résonance et de devenir sensible à la structure hyperfine de la transition  $D_2$  (dans ces conditions on peut négliger la contribution de la raie  $D_1$ ). En revanche, le taux d'émission spontanée croît fortement et devient très contraignant.

### Force de pression de radiation

Le second terme s'appelle *force de pression de radiation*. Il provient de la partie imaginaire de la polarisabilité atomique, qui caractérise l'absorption de photons par l'atome. Il s'agit donc d'une force inélastique qui résulte d'un grand nombre de cycles d'absorption de photons du faisceau laser et d'émission spontanée dans des directions aléatoires de l'espace<sup>5</sup>. L'impulsion totale cédée par émission spontanée s'annule donc, et en moyenne le transfert d'impulsion ne provient que de l'absorption de photons du faisceau laser. Cette force est donnée par

$$\mathbf{F}_{\text{PR}} = \hbar \mathbf{k} \Gamma_{\text{sp}} \quad (2.28)$$

avec  $\Gamma_{\text{sp}}$  le taux d'émission spontanée en présence du champ laser, et  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde associé à l'onde laser. L'interprétation est directe : en moyenne, l'atome acquiert une impulsion  $\hbar \mathbf{k}$  à un taux  $\Gamma_{\text{sp}}$ . Ce taux vaut :

$$\Gamma_{\text{sp}} = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad (2.29)$$

et  $s$  s'appelle le paramètre de saturation. Celui-ci dépend de l'intensité lumineuse incidente (et donc du nombre de photons incidents) ainsi que du désaccord du laser par rapport à la résonance atomique  $\delta = \omega - \omega_0$ . Il s'exprime

$$s = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (2.30)$$

où l'intensité de saturation  $I_{\text{sat}} = \frac{\pi \hbar c \Gamma}{3\lambda_0^3} = 1.67 \text{ mW.cm}^{-2}$  est une constante de l'atome de  $^{87}\text{Rb}$ . Le paramètre de saturation est maximal en  $\delta = 0$ , c'est à dire lorsque le laser est à résonance. Dans le cas d'un laser très saturant  $s \gg 1$ , la force de pression de radiation s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{PR}} = \frac{\hbar \mathbf{k} \Gamma}{2} \quad (2.31)$$

où le facteur 2 indique que à forte saturation, un atome autant de chance d'être dans l'état excité que dans l'état fondamental. Enfin, mentionnons que pour un atome se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{v}$  dans le référentiel du laboratoire, le désaccord devient  $\delta = \omega - \omega_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  par effet Doppler.

#### 2.2.4 Couplage radio-fréquence

Les outils de manipulation des atomes présentés précédemment offrent la possibilité de créer des potentiels conservatifs (comme le potentiel dipolaire ou le potentiel magnétique) ou encore des forces dissipatives à l'aide la force de pression de radiation. Néanmoins,

5. Pour réaliser de tels cycles, il est nécessaire d'avoir une transition cyclante, c'est à dire de disposer d'un état excité dont la désexcitation renvoie forcément sur l'état d'origine

la plupart d'entre elles dépend de l'état interne de l'atome. Un bon contrôle de cet état interne permet non seulement d'assurer une bonne répétabilité de l'expérience, mais aussi de proposer des solutions technologiques originales.

Comme présenté section 2.2.1, la séparation entre les états fondamentaux  $|F=1\rangle$  et  $|F=2\rangle$  correspond à une fréquence  $\Delta_{\text{hf}}$  de l'ordre du GHz, donc à une fréquence qui se trouve accessible électroniquement. De plus, ces états étant fondamentaux, ils ne peuvent pas se désexciter. Un couplage radio-fréquence entre ces états apparaît alors comme un formidable outil de contrôle de l'état interne des atomes.

Dans ces conditions, les états fondamentaux hyperfins du  $^{87}\text{Rb}$  s'avèrent réaliser un système à deux niveaux dont le hamiltonien propre est donné dans la base  $\{|F=1\rangle, |F=2\rangle\}$  par

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta_{\text{hf}} & 0 \\ 0 & \Delta_{\text{hf}} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Le couplage par radio-fréquences est quant à lui décrit par le hamiltonien

$$\hat{W}(t) = \hbar\Omega e^{i\omega t - i\phi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Présenter oscillations de Rabi rapidement Approximation de l'onde tournante :  $\delta \ll \omega$  et donc on néglige les termes en  $\omega + \omega_0$  devant les termes en  $\omega - \omega_0 = \delta$  et ici  $\omega_0 = \Delta_{\text{hf}}$ . En fait, ça consiste à assimiler les termes tournant rapidement à leur valeur moyenne temporelle, qui est nulle.

$$|\langle F=2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{\Omega^2}{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}} \sin^2\left(\pi\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}t\right) \quad (2.34)$$

## 2.3. Description d'un cycle expérimental

### 2.3.1 Première chambre

### 2.3.2 Chambre de science

### 2.3.3 Imagerie





## Chapitre 3

# Mises à jour de l'expérience

parler des modifications apportées à la manip : cicero, ODT + evap, calibration levitation par oscillations + spin-flip, réparation lévitation...

### 3.1. Mise à jour de l'informatique de l'expérience

**3.1.1** Contrôle de l'expérience : passage à la suite Cicero

**3.1.2** Développement d'une nouvelle interface d'acquisition et de traitement d'images

### 3.2. Réparation et recalibration de la lévitation magnétique

**3.2.1** Réparation de la lévitation magnétique

**3.2.2** Calibration par oscillations

**3.2.3** Calibration par radio-fréquences

### 3.3. Changement du laser telecom et calibration du piège optique

**3.3.1** Changement du laser telecom

**3.3.2** Calibration du piège optique

### 3.4. Optimisation de l'évaporation tout-optique



## Chapitre 4

# Propriétés d'un désordre de type speckle

Le chapitre 2 nous a renseigné quant aux propriétés de notre onde de matière ainsi que sa production. En particulier, on a vu qu'il était possible d'appliquer des potentiels externes conservatifs aux atomes par le biais du potentiel dipolaire. Ce potentiel étant proportionnel à l'intensité lumineuse  $I$ , on peut alors appliquer un désordre à nos atomes, pourvu que l'on soit capable de créer un désordre optique. En effet, une originalité de notre expérience est "d'inverser" les rôles habituels de la matière et de la lumière.

Ainsi, dans ce chapitre, nous allons nous attacher à décrire le second élément clé à la localisation d'Anderson : le désordre. Nous montrerons que la génération d'un tel désordre est aisée : la diffraction d'un faisceau laser au travers d'une lame de verre rugueuse produit un motif d'intensité lumineuse aléatoire et à fort contraste, appelé champs de tavelures optiques, ou encore *Speckle* (anglicisme communément admis). Citons deux énormes avantages d'un tel désordre : on en connaît toutes les propriétés, régies par la diffraction, et on contrôle ce désordre.

La première partie se concentrera sur la statistique d'un champ de speckle, c'est à dire comment l'intensité lumineuse se répartit de manière statistique. Dans un second temps, nous décrirons les propriétés spatiales d'un speckle, en particulier la taille des grains de lumière dans les directions transverses et longitudinale. Dans une troisième partie nous parlerons du potentiel ressenti par les atomes ainsi que des possibilités offertes par la structure multi-niveaux du  $^{87}\text{Rb}$  et l'excellent contrôle du désordre dont nous disposons, puis dans une ultime partie nous étudierons une approche à deux longueurs d'onde pour dépasser les limitations d'un speckle monochromatique pour l'étude de la transition d'Anderson à énergie résolue.

### 4.1. Génération d'un champ de speckle

C'est avec le développement des premiers lasers qu'a été observée la structure granulaire de la lumière réfléchiée par certaines surfaces rugueuses. Rapidement, il a été compris que ce motif provenait de la diffraction aléatoire et cohérente par une surface rugueuse. Cette surface rugueuse peut-être considérée comme un ensemble d'émetteurs cohérents de déphasages aléatoires, et le profil d'intensité obtenu est le résultat de l'interférence multiple de l'ensemble de la surface. Un profil typique est montré figure 4.1. Celui-ci comporte un ensemble de grains lumineux séparés par des zones d'obscurité. Souvent considéré néfaste dans le domaine de l'imagerie, le speckle est pour nous une formidable source de désordre optique.

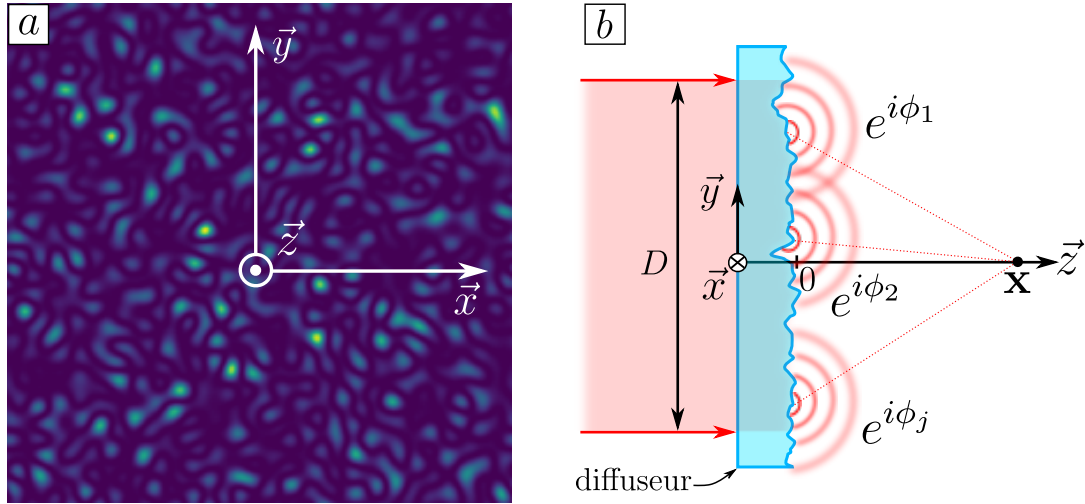


FIGURE 4.1 – **a** : Motif de speckle. Un tel motif est composé de grains lumineux entourés de zones d'ombre, où l'intensité est quasiment nulle. **b** : Génération d'une figure de speckle. La diffraction d'une onde cohérente par une surface rugueuse appelée diffuseur résulte en l'interférence multiple d'un grand nombre d'ondes à déphasage aléatoire. La phase de chacune de ces ondes est déterminée par l'épaisseur de verre traversée en chaque point.

#### 4.1.1 Propriétés du diffuseur

Avant de nous intéresser aux propriétés du désordre à proprement parler, commençons par nous concentrer sur les propriétés de l'élément générant le speckle : le diffuseur. Il s'agit d'une lame de verre dépolie, d'épaisseur locale  $e(\mathbf{x}_0)$  aléatoire. On supposera que cette lame a été dépolie de manière homogène. Ainsi, la statistique de l'épaisseur ne dépend pas de la position considérée sur la surface du diffuseur, et l'on considèrera que l'on a affaire à un processus stationnaire.

La phase accumulée par le faisceau laser incident lors de la traversée du diffuseur étant proportionnelle à l'épaisseur traversée, cette phase  $\phi(\mathbf{x}_0)$  est elle aussi une variable aléatoire donnée localement par :

$$\phi(\mathbf{x}_0) = 2\pi(n-1)\frac{e(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \quad (4.1)$$

avec  $n$  l'indice du verre et  $\lambda \approx 780\text{nm}$  la longueur d'onde de l'onde laser. L'effet de cette phase aléatoire locale se traduit en terme d'amplitude via la transmittance du diffuseur. De même que l'épaisseur et la phase, il s'agit d'une grandeur locale définie par :

$$t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) = e^{i\phi(\mathbf{x}_0)} \quad (4.2)$$

$$\overline{t_{\text{diff}}} = \overline{e^{i\phi}} = \int d\phi e^{i\phi} \mathcal{P}(\phi) \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}(\phi) = \frac{1}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\phi - \bar{\phi})^2}{2\sigma_\phi^2}} \quad (4.3)$$

En considérant que  $\phi$  est une variable aléatoire gaussienne, ça donne

$$\overline{t_{\text{diff}}} = e^{-\frac{\sigma_\phi^2}{2}} \quad (4.4)$$

et en choisissant correctement l'origine temporelle telle que  $\bar{\phi} = 0$ .

On peut aussi écrire  $t_{\text{diff}}$  sous la forme

$$t_{\text{diff}} = \overline{t_{\text{diff}}} + \delta t_{\text{diff}} \quad (4.5)$$

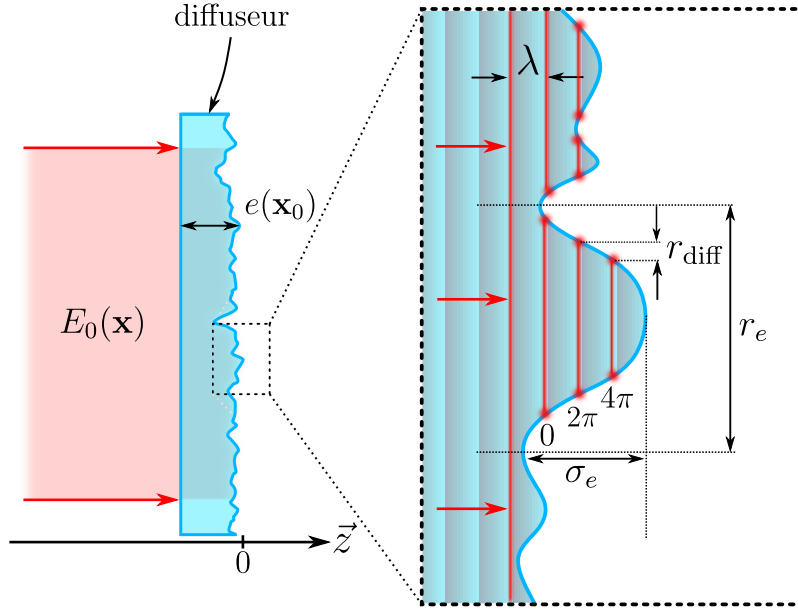


FIGURE 4.2 – Caractéristiques du diffuseur. L'épaisseur aléatoire est caractérisée par une hauteur typique  $\sigma_e$  et une granularité de taille  $r_e$ . Pour  $\sigma_e \gg \lambda$ , on a plusieurs oscillations de l'onde incidente dans le même grain, et donc  $t_{\text{diff}}$  qui est une fonction  $2\pi$ -périodique, voit sa corrélation réduite.

ce qui se traduit en terme de champ

$$E = \bar{E} + E_{\text{speckle}} \quad (4.6)$$

La conséquence est alors immédiate : si  $\sigma_\phi \gg 2\pi$  ou de manière équivalente  $\sigma_e \gg \lambda$ , alors  $\overline{t_{\text{diff}}} = 0$  et donc le champ rayonné ne sera composé que du champ de speckle : on parle alors de speckle entièrement développé. La valeur déterministe  $\bar{E}$  liée à  $\overline{t_{\text{diff}}}$  est supprimée. C'est ce que l'on considèrera dans la suite.

Fonction de corrélation : on définit

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) = \overline{t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) t_{\text{diff}}^*(\mathbf{x}'_0)} = \overline{e^{i(\phi(\mathbf{x}_0) - \phi(\mathbf{x}'_0))}} \quad (4.7)$$

Si l'on suppose que  $\phi(\mathbf{x}_0) - \phi(\mathbf{x}'_0)$  est aussi une variable gaussienne, ça donne

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) = e^{-\sigma_\phi^2(1 - \overline{\phi(\mathbf{x}_0)\phi(\mathbf{x}'_0)})/\sigma_\phi^2} \quad (4.8)$$

Corrélations de l'épaisseur du diffuseur :

$$\frac{\overline{\phi(\mathbf{x}_0)\phi(\mathbf{x}'_0)}}{\sigma_\phi^2} = \frac{\overline{e(\mathbf{x}_0)e(\mathbf{x}'_0)}}{\sigma_e^2} \approx 1 - \frac{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0|^2}{2r_e^2} \quad (4.9)$$

courbe en cloche assez générale valable pour  $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0| \ll r_e$ .

Au final, ça donne une corrélation de la transmittance

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) \approx e^{-\frac{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0|^2}{2r_{\text{diff}}^2}} \quad (4.10)$$

avec  $r_{\text{diff}} = r_e/\sigma_\phi$  la taille effective des grains du diffuseur. Cette taille diminuée s'explique par le fait que si  $\sigma_\phi \gg 2\pi$ , la phase ne sera pas homogène sur la totalité de la largeur d'un grain (de taille typique  $r_e$ ), mais seulement sur une zone réduite.

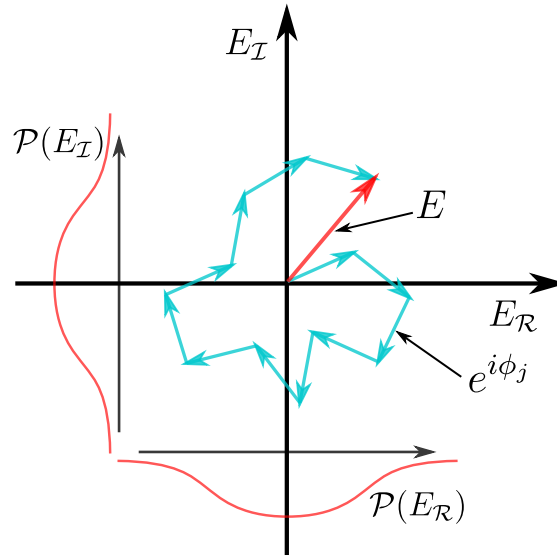


FIGURE 4.3 – Marche aléatoire dans le plan complexe  $E_R, E_I$  dans le cas où  $\sigma_\phi \gg 2\pi$

#### 4.1.2 Statistiques de l'intensité d'un speckle

Marche aléatoire dans le plan complexe pour  $\vec{E}$  car  $\sigma_\phi \gg 2\pi$  ce qui valide l'approche de marche aléatoire (faire une figure de marche aléatoire avec beaucoup d'angles différents pour montrer que  $\langle t \rangle \approx 0$ , et que sinon  $\langle t \rangle \neq 0$ ).

Dans la partie d'avant, c'était au niveau du diffuseur. Maintenant on va s'attacher à décrire ce qu'il se passe après propagation. En première approximation, on peut supposer que le champ rayonné est la somme des  $N$  champs émis par les diffuseurs avec des phases aléatoires :

$$E(\mathbf{x}) = \sum_j^N E_0 e^{i\phi_j} \quad (4.11)$$

Théorème central limite car  $r_{diff} \ll D$ ,  $D$  étant la taille typique de l'éclairement incident.

$$\mathcal{P}(E_R, E_I) = \frac{1}{\sigma_E \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{E_R^2 + E_I^2}{2\sigma_E^2}} \quad (4.12)$$

avec  $E_R$  et  $E_I$  les parties réelle et imaginaire du champ complexe  $E$  respectivement. En faisant l'intégration angulaire, on trouve

$$\mathcal{P}(I) = \frac{1}{2\sigma_E^2} e^{-\frac{I}{2\sigma_E^2}} \quad (4.13)$$

Cette loi de probabilité permet alors d'obtenir l'intensité moyenne  $\bar{I} = 2\sigma_E^2$  et l'écart-type en intensité  $\sigma_I = \bar{I}$ . Le contraste d'une telle figure de speckle est alors de 1, ce qui se traduit par des pics très brillants entourés de régions sombres d'intensité quasiment nulle.

#### 4.1.3 Implémentation expérimentale

À présent, étudions la géométrie de notre dispositif de génération du speckle. Le faisceau est émis par un laser Toptica TA-Pro 2W accordable autour de 780nm (Raie  $D_2$  du  $^{87}\text{Rb}$ ). Cette accordabilité nous offre la possibilité de réaliser un potentiel désaccordé vers le rouge et donc attractif ( $\delta < 0$ ) ou bien désaccordé vers le bleu, et donc avoir un potentiel répulsif ( $\delta > 0$ ). Historiquement, le laser auparavant utilisé pour générer le speckle était un laser

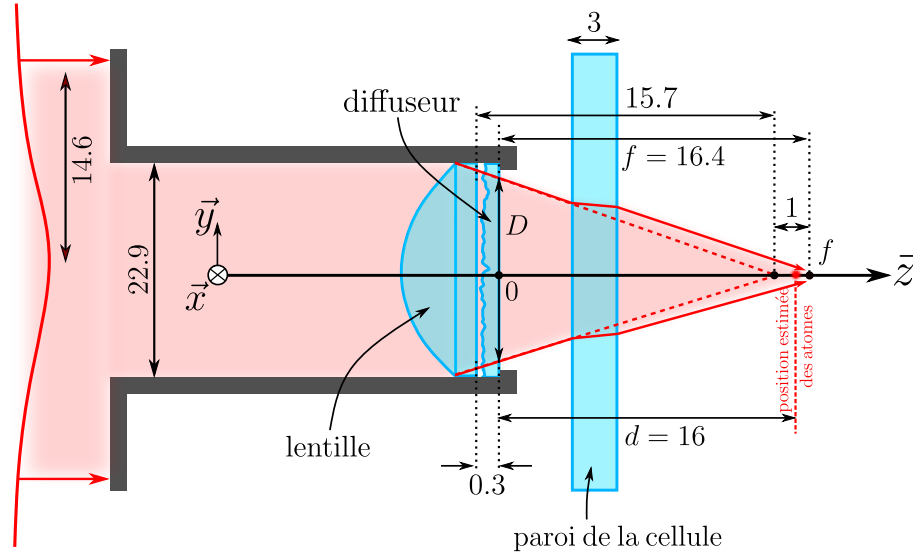


FIGURE 4.4 – Géométrie du montage de génération du speckle. Un faisceau gaussien incident est tronqué dans un diaphragme qui supporte le diffuseur. Le plan de focalisation est déplacé d'environ 1mm à cause de la paroi de la cellule à vide.

Verdi à 532nm très désaccordé vers le bleu afin de s'affranchir de l'émission spontanée, nécessaire sur des très longs temps pour l'étude de la localisation d'Anderson. Étant donnée la proximité de la résonance avec ce nouveau système autour de 780nm, nous travaillons à bien plus basse puissance (typiquement quelques  $\mu\text{W}$ ). Le mode du laser est filtré à l'aide d'une fibre optique, sa polarisation est fixée linéaire à l'aide de cubes séparateurs de polarisations, et l'ensemble est asservi en puissance (l'essentiel de la puissance du laser sert d'ailleurs à cette boucle d'asservissement). Les détails de ce montage peuvent être retrouvés dans la thèse de Vincent Denechaud.

La génération du speckle se fait donc selon le montage représenté figure 4.4. Un faisceau gaussien collimaté de taille 14.6mm est tronqué par un diaphragme de diamètre 22.9mm. Ce faisceau passe ensuite au travers d'une lentille asphérique (*Thorlabs ACL2520-B*) de focale 16mm (et de frontale 15.7mm). Le diffuseur *Newport FSD10-3* possède une épaisseur de 0.3mm (initialement 3mm avant d'être aminci par l'atelier d'optique de l'IOGS) et diffuse selon un angle  $\theta_{\text{diff}} \approx 5^\circ$  (données constructeur). Le faisceau traverse ensuite la paroi de la cellule en vycor (d'indice optique  $n = 1.46$ ) d'épaisseur  $e = 3\text{mm}$ . La présence de la paroi entraîne un déplacement du plan de focalisation de  $\Delta d = e(1 - 1/n) \approx 1\text{mm}$ . En positionnant l'origine sur la surface du diffuseur, le plan de focalisation se trouve à  $f = 16.4\text{mm}$ . La position des atomes est estimée quant à elle à  $d = 16 \pm 0.5\text{mm}$ . L'incertitude liée à cette dernière position est primordiale : nous devons connaître les propriétés du speckle autour du plan de focalisation. **TODO** : Faire un calcul rapide d'ODG pour justifier la lentille : besoin de focaliser la lumière pour avoir un potentiel raisonnable sur les atomes à puissance raisonnable.

## 4.2. Propriétés spatiales d'un champ de speckle

Bien que les figures de speckle soient déterministes car régies par la diffraction, on peut considérer leurs réalisations comme étant aléatoires. Néanmoins, les propriétés spatiales d'un champ de speckle ne dépendent pas de la réalisation, mais seulement de la géométrie du problème. Dans cette section, nous allons nous attacher à décrire les grandeurs spatiales

caractéristiques d'un speckle : son extension et la taille des grains, donnée par la fonction d'autocorrélation en intensité. Ces quantités ont été mesurées expérimentalement sur un montage reproduisant exactement les conditions réelles de la cellule à vide, celle-ci empêchant de faire des mesures in-situ. La description de ces mesures et de leur traitement sont référencées dans la thèse de Jérémie Richard.

#### 4.2.1 Extension transverse du champ de speckle le long le l'axe optique

Afin de connaître l'extension spatiale du champ de speckle, il nous faut dans un premier temps calculer l'amplitude rayonnée. Appliquons l'approximation paraxiale au principe de Huygens-Fresnel :

$$E(x, y, d) \propto \int dx_0 dy_0 E_0(x_0, y_0) t_{\text{diff}}(x_0, y_0) \exp\left(-ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2f}\right) \exp\left(ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2d}\right) \quad (4.14)$$

$$\propto \int dx_0 dy_0 E_0(x_0, y_0) t_{\text{diff}}(x_0, y_0) \exp\left(ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d_{\text{eff}}}\right) \exp\left(-ik \frac{xx_0 + yy_0}{d}\right) \quad (4.15)$$

avec  $1/d_{\text{eff}} = 1/d - 1/f$ . Le profil d'intensité moyenne est donné par la fonction de corrélation en amplitude, évaluée aux deux mêmes points :

$$\bar{I}(x, y, d) = \overline{E(x, y, d) E^*(x, y, d)} \quad (4.16)$$

On peut alors montrer que l'intensité moyenne est issue de la convolution de deux termes :

$$\bar{I}(x, y, d) \propto \left[ I_0\left(\frac{d_{\text{eff}}}{d} x_0, \frac{d_{\text{eff}}}{d} y_0\right) * \widetilde{C_{\text{diff}}}(kx_0/d, ky_0/d) \right] (x, y) \quad (4.17)$$

Explicitons la physique qui se trouve derrière cette formule. Pour cela, discutons des deux termes de la convolution.

Le premier terme n'est autre que l'intensité incidente sur le diffuseur, redimensionnée par l'effet de la lentille. En effet, le changement d'échelle par  $d/d_{\text{eff}} = |d - f|/f$  montre qu'au cours de la propagation, la taille du faisceau en l'absence du diffuseur diminue jusqu'au plan de focalisation ( $d = f$ ), puis augmente indéfiniment. Le caractère linéaire de cette loi d'échelle se comprend aisément dans le cadre de l'optique géométrique : le faisceau se focalise dans le plan  $z = f$ , où tous les rayons lumineux se croisent puis s'écartent. Il s'agit du terme prépondérant dans les régions éloignées du plan focal.

Le second terme traduit la diffraction des différents grains du diffuseur. Ces grains ont une taille typique  $r_{\text{diff}}$  et vont donc diffracter selon un angle  $\theta_{\text{diff}} = \lambda/r_{\text{diff}}$ . Cela va donc se traduire par une taille transverse  $w_{\text{diff}} = \theta_{\text{diff}} d$ , qui augmente linéaire avec la distance  $d$ . Il s'agit du terme prépondérant aux alentours du plan de Fourier.

On a vu en section 4.1.1 que la fonction de corrélation  $C_{\text{diff}}$  est en bonne approximation une gaussienne. En supposant un éclaircissement incident gaussien (on néglige l'effet du diaphragme),

#### 4.2.2 Longueur de corrélation transverse le long de l'axe optique

Calcul de la corrélation transverse aux alentours du plan de Fourier, forme gaussienne bien reproduite car la pupille ne coupe que quelques % de la lumière du faisceau laser gaussien incident : la TF d'une gaussienne faiblement tronquée est une gaussienne correcte.



### 4.2.3 Corrélation longitudinale

Calculs de la corrélation longitudinale. Formule de la thèse de Fred redémontrée en annexe. Application à un éclairage gaussien, et un éclairage homogène tronqué. Réalité entre les deux, donc la fonction de corrélation réelle est quelque part entre une lorentzienne et un sinus cardinal. C'est pas parfait partout, alors modélisation en tenant compte des effets non-paraxiaux pour vraiment reproduire la corrélation longitudinale. Calculs lourds numériquement et théoriquement, donc on met en place un modèle paraxial à ON effective. Avec un facteur de scaling sur la taille du faisceau incident et sur la pupille, on arrive à reproduire de manière convenable la corrélation longitudinale. Avantage : ça reste paraxial donc on peut en tirer des grandeurs.

## 4.3. Propriétés du potentiel de type speckle

### 4.3.1 Propriétés du potentiel

Traduction de  $P_I(I)$  pour le potentiel dipolaire  $V$ , Taille des grains de potentiel  $\sigma$ , potentiel moyen  $V_R$ , possibilité de faire un potentiel attractif  $\delta < 0$  ou répulsif  $\delta > 0$

### 4.3.2 Possibilité d'un potentiel dépendant de l'état interne

En choisissant un désaccord très petit vis à vis d'un état hyperfin, on peut réaliser un potentiel très grand sur cet état tandis qu'on peut le négliger pour le second état. Pour cela, il faut que le désaccord soit très petit devant la séparation hyperfine de ces états. Par contre, il faut garder un désaccord suffisamment grand pour continuer de pouvoir considérer ce champ comme un potentiel conservatif, sinon on va avoir des processus inélastiques. Exemple de mesure des fonctions spectrales, où le temps de vie à cause des processus inélastiques n'était que 100ms, très insuffisant pour l'étude de la localisation d'Anderson, qui nécessite des temps d'évolution dans le désordre de plusieurs secondes.

## 4.4. Potentiel composé d'un speckle bichromatique

### 4.4.1 S'éloigner de résonance

Grosse limitation de l'approche précédente utilisée pour les fonctions spectrales : implique qu'on est proche de résonance pour l'état  $|F=2\rangle$ , donc taux d'absorption et d'émission spontanée important : grosse décohérence dans le désordre et donc impossible d'observer la localisation. Donc on s'éloigne de résonance, donc le potentiel sur  $|F=1\rangle$  n'est plus négligeable, il faut le compenser : second speckle !

### 4.4.2 Étude de la similitude de deux speckles

Physique avec les mains de la similitude entre 2 speckles de longueurs d'onde faiblement différentes. introduction de la finesse  $\lambda/\delta\lambda$  ou de la longueur de cohérence  $l_{coh} = \lambda^2/\delta\lambda$ . Décorrélacion initiale et globale due à la propagation dans le diffuseur, puis décorrélacion par la différence dans la taille des grains en s'éloignant de l'axe optique.





# Temps de diffusion élastique

<b>5</b>	<b>Temps de diffusion élastique</b>	<b>37</b>
5.1	Approximation de Born	
5.2	Mesure du temps de diffusion élastique	
5.3	Comportement du temps de diffusion élastique	
<b>6</b>	<b>Approche spectrale</b>	<b>39</b>
6.1	Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales	
6.2	Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales mesurées pour un désordre de type speckle	



## Chapitre 5

# Temps de diffusion élastique

description temps de diffusion élastique, description rapide de la mesure. comparaison born ordre 1 (donné par Fermi Golden Rule), discussion kls, comparaison gaussien rouge bleu...

reprendre le PRL

### 5.1. Approximation de Born

5.1.1 Règle d'or de Fermi

5.1.2 Régimes de diffusion

### 5.2. Mesure du temps de diffusion élastique

5.2.1 Procédure expérimentale

5.2.2 Extraction du temps de diffusion élastique

5.2.3 Calibration de l'amplitude du désordre

### 5.3. Comportement du temps de diffusion élastique

5.3.1 Régime de Born

5.3.2 Déviations au régime de Born

5.3.3 Départ quadratique



## Chapitre 6

# Approche spectrale

Approche fonctions de green, ordre 1, ordre 2, SCBA... départ quadratique ? mesure fonctions spectrales ?

reprenre le NJP, et tenter une explication du départ quadratique. Faire gaffe avec les décroissances !

### 6.1. Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales

- 6.1.1 Généralités sur la fonction spectrale
- 6.1.2 Approximation de Born : premier ordre
- 6.1.3 Approximation de Born : second ordre
- 6.1.4 Approximation de Born auto-consistante

### 6.2. Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales mesurées pour un désordre de type speckle

- 6.2.1 Limite de l'approche auto-consistante pour un désordre de type speckle
- 6.2.2 Mesure des fonctions spectrales
- 6.2.3 Comparaison du temps de diffusion élastique avec les fonctions spectrales mesurées





# Conclusion et perspectives

Conclusion générique, ouverture sur la mesure du régime critique, mesures de fonctions spectrales à vitesse non nulle, CFS, localization landscape, DMD pour autres types de désordre et classes d'universalité...





# Annexes

<b>A</b>	<b>Calculs de champs de tavelures . . . . .</b>	<b>45</b>
A.1	Amplitude rayonnée	
A.2	Fonction de corrélation	
A.3	Corrélations pour des speckles monochromatiques et bichromatiques	
<b>B</b>	<b>Calcul du temps de diffusion élastique par le développement de Born . . . . .</b>	<b>49</b>



## Annexe A

# Calculs de champs de tavelures

### 1.1. Amplitude rayonnée

Notons  $\mathbf{x} \equiv \{x, y, d\}$  et  $\mathbf{x}_0 \equiv \{x_0, y_0, 0\}$  Pour calculer le champ rayonné au point  $\mathbf{x}$ , on utilise le principe de Huygens-Fresnel :

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\lambda} \int d\mathbf{x}_0 t(\mathbf{x}_0) E_0(\mathbf{x}_0) \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \quad (\text{A.1})$$

avec  $t(\mathbf{x}_0)$  la transmittance complexe du diffuseur au point  $\mathbf{x}_0$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , et  $t(\mathbf{x}_0)$  est une transmittance comportant l'effet du diffuseur et de la lentille. Appliquons alors l'approximation paraxiale :

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + d^2} \\ &= d \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{d^2}} \\ &\approx d + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2d} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

et reportons A.2 dans A.1 :

$$E(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} \int d\mathbf{x}_0 t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) E_0(\mathbf{x}_0) e^{-ik\frac{x_0^2 + y_0^2}{2f}} e^{ik\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2d}} \quad (\text{A.3})$$

avec  $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$  la transmittance du diffuseur. Développons alors cette dernière expression :

$$E(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik\left(d + \frac{x^2 + y^2}{2d}\right)}}{i\lambda d} \int d\mathbf{x}_0 t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) E_0(\mathbf{x}_0) e^{ik\frac{x_0^2}{2d_{\text{eff}}}} e^{-ik\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}{d}} \quad (\text{A.4})$$

avec  $1/d_{\text{eff}} = 1/d - 1/f$ .

## 1.2. Fonction de corrélation

### A.2.1 Calcul général

La fonction de corrélation en amplitude s'écrit

$$C_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \lambda, \lambda') = \overline{E(\mathbf{x}, \lambda) E^*(\mathbf{x}', \lambda')} \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{e^{i\left(k(d+\frac{x^2+y^2}{2d}) - k'(d'+\frac{x'^2+y'^2}{2d'})\right)}}{\lambda \lambda' d d'} \int d\mathbf{x}_0 d\mathbf{x}'_0 \overline{t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) t_{\text{diff}}^*(\mathbf{x}'_0)} E_0(\mathbf{x}_0) E_0^*(\mathbf{x}'_0) e^{i\frac{k\mathbf{x}_0^2}{2d_{\text{eff}}}} e^{-i\frac{k'\mathbf{x}'_0{}^2}{2d'_{\text{eff}}}} e^{-i\frac{k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{d}} e^{i\frac{k'(\mathbf{x}', \mathbf{x}'_0)}{d'}} \quad (\text{A.6})$$

Appliquons alors le changement de variables  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0\} \rightarrow \{\mathbf{x}_0, \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\}$  (par commodité on omettra le facteur devant l'intégrale) :

$$C_E \propto \int d\mathbf{x}_0 d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) E_0(\mathbf{x}_0) E_0^*(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) e^{i\frac{\mathbf{x}_0^2}{2}\left(\frac{k}{d_{\text{eff}}} - \frac{k'}{d'_{\text{eff}}}\right)} e^{-i\frac{k'\Delta\mathbf{x}'^2}{2d'_{\text{eff}}}} e^{-i\frac{k'\mathbf{x}_0\Delta\mathbf{x}}{d'_{\text{eff}}}} e^{i\frac{k'\mathbf{x}\Delta\mathbf{x}}{d'}} e^{i\mathbf{x}_0 \cdot \left(\frac{k'\mathbf{x}'}{d'} - \frac{k\mathbf{x}}{d}\right)} \quad (\text{A.7})$$

Supposons à présent que la taille des grains du diffuseur sont très petits devant la taille typique de l'éclairement incident, c'est à dire qu'à l'échelle de variation de  $C_{\text{diff}}$ , l'éclairement incident sera constant.  $E_0(\mathbf{x}_0) E_0^*(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) \approx E_0(\mathbf{x}_0) E_0^*(\mathbf{x}_0) = I_0(\mathbf{x}_0)$ . En supprimant le terme en  $\Delta\mathbf{x}^2$ , on a :

$$C_E \propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{i\frac{\mathbf{x}_0^2}{2}\left(\frac{k}{d_{\text{eff}}} - \frac{k'}{d'_{\text{eff}}}\right)} e^{i\mathbf{x}_0 \cdot \left(\frac{k'\mathbf{x}'}{d'} - \frac{k\mathbf{x}}{d}\right)} \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{i\Delta\mathbf{x} \cdot \left(\frac{k'\mathbf{x}'}{d'} - \frac{k'\mathbf{x}_0}{d'_{\text{eff}}}\right)} \quad (\text{A.8})$$

### A.2.2 Expression de l'extension transverse du champ de tavelures le long de l'axe optique

L'intensité moyenne pour un speckle simple est donnée par

$$\overline{I(\mathbf{x})} = \overline{E(\mathbf{x}, \lambda) E^*(\mathbf{x}, \lambda)} \quad (\text{A.9})$$

$$\propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{i\Delta\mathbf{x} \cdot \left(\frac{k\mathbf{x}}{d} - \frac{k\mathbf{x}_0}{d_{\text{eff}}}\right)} \quad (\text{A.10})$$

$$\propto \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{i\Delta\mathbf{x} \cdot \frac{k\mathbf{x}}{d}} \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{-i\mathbf{x}_0 \cdot \frac{k\Delta\mathbf{x}}{d_{\text{eff}}}} \quad (\text{A.11})$$

$$\propto \widetilde{C_{\text{diff}}}\left(\frac{k\mathbf{x}}{d}\right) * I_0\left(\frac{\mathbf{x}d_{\text{eff}}}{d}\right) \quad (\text{A.12})$$

On retrouve bien le résultat de la thèse de Jérémie.

## 1.3. Corrélations pour des speckles monochromatiques et bichromatiques

### A.3.1 Corrélation transverse d'un unique speckle le long de l'axe optique

Considérons le cas d'un unique speckle, que l'on étudie dans un plan orthogonal à l'axe optique. Posons  $\lambda = \lambda'$ ,  $d = d'$  et  $\mathbf{x}' = 0$  :

$$C_E(\mathbf{x}) = \overline{E(\mathbf{x}, y, d) E^*(0, 0, d)} \quad (\text{A.13})$$

$$\propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{-ik\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}{d}} \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{-ik\frac{\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0}{d_{\text{eff}}}} \quad (\text{A.14})$$

On retrouve bien le résultat de la thèse de Jérémie, équation C.26.

### A.3.2 Corrélation longitudinale d'un unique speckle autour du plan de Fourier

Plaçons nous sur l'axe optique, autour du plan de Fourier, pour une seule longueur d'onde. Pour  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 = 0$ ,  $\lambda' = \lambda$  et  $d' = f$  :

$$C_E = \overline{E(0,0,d)E^*(0,0,f)} \quad (\text{A.15})$$

$$\propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{i\frac{\mathbf{x}_0^2 k}{2d_{\text{eff}}}} \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) \quad (\text{A.16})$$

Proche du plan de Fourier, on pose  $d = f + \delta z$ , donc  $1/d_{\text{eff}} = 1/d - 1/f \approx -\delta z/f^2$ . Finalement, on obtient :

$$C_E \propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{-i\frac{\delta z k \mathbf{x}_0^2}{2f^2}} \quad (\text{A.17})$$

On retrouve l'expression 4.10 de la thèse de Fred. Supposons à présent un éclaircissement incident gaussien de taille  $w_0$  :

$$C_E \propto \int d\mathbf{x}_0 e^{-\mathbf{x}_0^2 \left(2/w_0^2 - i\frac{k}{2d_{\text{eff}}}\right)} \quad (\text{A.18})$$

$$\propto \frac{1}{2/w_0^2 - i\frac{k}{2d_{\text{eff}}}} \quad (\text{A.19})$$

Et donc pour le degré en cohérence  $|\mu|^2 = |C_E|^2$  :

$$|C_E|^2 \propto \frac{1}{\frac{4}{w_0^4} + \frac{k^2}{4d_{\text{eff}}^2}} \quad (\text{A.20})$$

$$\propto \frac{1}{\frac{4}{w_0^4} + \frac{k^2 \delta z^2}{4f^4}} \quad (\text{A.21})$$

$$\propto \frac{1}{1 + \delta z^2 \frac{k^2 w_0^4}{16f^4}} \quad (\text{A.22})$$

$$\propto \frac{1}{1 + \delta z^2 / \sigma_{\parallel}^2} \quad (\text{A.23})$$

On retrouve bien la lorentzienne avec  $\sigma_{\parallel} = 4\sigma_{\perp}/\text{ON}$ , c'est à dire la distance de rayleigh. Interprétation : Magati2008 et Magati2009 montrent que dans une géométrie sans lentille, et à grande distance (régime de Fraunhofer), les grains de speckle s'apparentent à des tubes de lumière de corrélation longitudinale tendant vers l'infini (ils font de la physique avec les mains pour expliquer pourquoi). Avec une lentille, ce régime se retrouve autour du plan focal, sur une distance donnée par la longueur de Rayleigh. La forme lorentzienne est aussi typique d'effets longitudinaux en optique gaussienne autour du plan de focalisation.

### A.3.3 Corrélation transverse d'un speckle bichromatique dans le plan de Fourier

Considérons le cas de deux longueurs d'ondes, étudiées à la même position dans le plan de Fourier. Posons  $d = d' = f$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  :

$$C_E(\mathbf{x}, \lambda, \lambda') = \overline{E(\mathbf{x}, \lambda)E^*(\mathbf{x}, \lambda')} \quad (\text{A.24})$$

$$\propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{i\frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}}{f}(k' - k)} \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{i\frac{\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{f}k'} \quad (\text{A.25})$$

On retrouve le résultat de mon rapport de stage. Warning :  $C_{\text{diff}}$  est plus compliqué dans cette expression, il faut tenir compte des deux longueurs d'onde dedans. Idem avec  $I_0$ , il s'agit en réalité du produit des amplitudes à chaque longueur d'onde. Aller un peu plus loin pour donner l'expression de la longueur de corrélation.

### A.3.4 Corrélation longitudinale d'un speckle bichromatique autour du plan de Fourier

Prenons un speckle composé de deux longueurs d'onde, étudié selon l'axe optique. Fixons :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = 0$  et  $d = d'$  :

$$C_E = \overline{E(0, 0, d, \lambda) E^*(0, 0, d, \lambda')} \quad (\text{A.26})$$

$$\propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{i \frac{\mathbf{x}_0^2}{2d_{\text{eff}}}(k-k')} \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{-i\Delta\mathbf{x} \frac{k'\mathbf{x}_0}{d_{\text{eff}}}} \quad (\text{A.27})$$

Supposons à présent que l'on s'éloigne peu du plan de Fourier tel que  $r_{\text{diff}} w_0 k' / d_{\text{eff}} \ll 1$ , c'est à dire  $\delta z \ll W_{\text{speckle}} / \text{ON}$  avec  $\delta z$  tel que définit avant,  $W_{\text{speckle}}$  l'extension du faisceau de speckle dans le plan de Fourier et  $w_0$  la taille du faisceau incident. Dans ce cas, on peut négliger la dernière exponentielle et on a pour un faisceau gaussien :

$$C_E \propto \int d\mathbf{x}_0 e^{-\frac{2\mathbf{x}_0^2}{w_0^2}} e^{i \frac{\mathbf{x}_0^2}{2d_{\text{eff}}}(k-k')} \quad (\text{A.28})$$

$$\propto \int d\mathbf{x}_0 e^{-\mathbf{x}_0^2(2/w_0^2 - i \frac{k-k'}{2d_{\text{eff}}})} \quad (\text{A.29})$$

$$\propto \frac{1}{2/w_0^2 - i \frac{k-k'}{2d_{\text{eff}}}} \quad (\text{A.30})$$

Alors,

$$|C_E|^2 \propto \left| \frac{1}{2/w_0^2 - i \frac{k-k'}{2d_{\text{eff}}}} \right|^2 \quad (\text{A.31})$$

$$\propto \frac{1}{4/w_0^2 + \delta z^2 \frac{(k-k')^2}{4f^4}} \quad (\text{A.32})$$

$$\propto \frac{1}{1 + \delta z^2 \left( \frac{\delta\lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{k^2 w_0^4}{16f^4}} \quad (\text{A.33})$$

$$\propto \frac{1}{1 + \frac{\delta z^2}{\sigma_{\parallel}^2} \left( \frac{\delta\lambda}{\lambda} \right)^2} \quad (\text{A.34})$$



## **Annexe B**

# **Calcul du temps de diffusion élastique par le développement de Born**



# Bibliographie

- M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *science*, pages 198–201, 1995.
- K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle. Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical review letters*, 75(22) :3969, 1995.
- B. Diu, B. Roulet, C. Guthmann, and D. Lederer. *Éléments de physique statistique*. Hermann, 1989.
- C. J. Pethick and H. Smith. *Bose–Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press, 2008.
- D. A. Steck. Rubidium 87 d line data, 2001.