

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 5 |
| 1.1 | Localisation d'atomes ultra-froids | 5 |
| 1.2 | Déroulement de la thèse | 6 |
| 1.2.1 | Contexte scientifique | 6 |
| 1.2.2 | Contexte expérimental | 7 |
| 1.3 | Structure du manuscrit | 8 |
| 2 | Phénomène de localisation d'Anderson | 11 |
| 2.1 | Diffusion et interférences | 11 |
| 2.1.1 | Phénomène de diffusion | 11 |
| 2.1.2 | Localisation faible | 14 |
| 2.1.3 | Suppression du transport : Localisation d'Anderson | 16 |
| 2.2 | Localisation des atomes froids | 17 |
| 2.2.1 | Etudes expérimentales de la localisation d'Anderson | 18 |
| 2.2.2 | L'approche des atomes froids | 19 |
| 2.3 | Vers l'étude du régime critique | 23 |
| 2.3.1 | Etat de l'art de l'étude de la transition d'Anderson avec des atomes ultra-froids | 24 |
| 2.3.2 | Nécessité d'une spectroscopie pour sonder le régime critique | 29 |
| 3 | Production d'ondes de matière | 31 |
| 3.1 | Condensation de Bose-Einstein | 31 |
| 3.1.1 | Statistique de Bose-Einstein | 32 |
| 3.1.2 | Propriétés d'un condensat de Bose-Einstein | 34 |
| 3.2 | Processus d'interaction lumière-matière | 35 |
| 3.2.1 | Le rubidium ^{87}Rb | 36 |
| 3.2.2 | Potentiel magnétique | 37 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 3.2.3 | Forces lumineuses | 38 |
| 3.2.4 | Couplage radio-fréquence | 40 |
| 3.3 | Description d'un cycle expérimental | 41 |
| 3.3.1 | Présentation générale du dispositif | 42 |
| 3.3.2 | Première chambre | 42 |
| 3.3.3 | Chambre de science | 46 |
| 3.3.4 | Imagerie | 51 |
| 4 | Mises à jour de l'expérience | 57 |
| 4.1 | Contributions au système informatique de l'expérience | 57 |
| 4.1.1 | Contrôle de l'expérience : passage à la suite Cicero | 58 |
| 4.1.2 | Développement d'une nouvelle interface d'acquisition et de traitement d'images | 60 |
| 4.2 | Calibration de la lévitation magnétique | 60 |
| 4.2.1 | Implémentation de la lévitation magnétique | 61 |
| 4.2.2 | Calibration par radio-fréquences | 63 |
| 4.2.3 | Étude du piégeage | 65 |
| 4.3 | Changement du laser telecom et calibration du piège optique | 68 |
| 4.3.1 | Changement du laser telecom | 68 |
| 4.3.2 | Calibration du piège optique | 68 |
| 4.4 | Optimisation de l'évaporation tout-optique | 72 |
| 4.4.1 | Lois d'échelle du refroidissement évaporatif | 73 |
| 4.4.2 | Implémentation expérimentale | 77 |
| 5 | Propriétés d'un désordre de type speckle | 85 |
| 5.1 | Génération d'un champ de speckle | 85 |
| 5.1.1 | Statistiques de l'intensité d'un speckle | 86 |
| 5.1.2 | Propriétés du diffuseur | 87 |
| 5.1.3 | Implémentation expérimentale | 89 |
| 5.2 | Propriétés spatiales d'un champ de speckle | 92 |
| 5.2.1 | Extension transverse du champ de speckle le long le l'axe optique | 93 |
| 5.2.2 | Longueur de corrélation transverse le long de l'axe optique | 95 |
| 5.2.3 | Longueur de corrélation longitudinale autour du plan de Fourier | 97 |
| 5.2.4 | Effets non-paraxiaux sur les corrélations du speckle | 98 |
| 5.3 | Propriétés du potentiel de type speckle | 101 |
| 5.3.1 | Propriétés du potentiel | 101 |
| 5.3.2 | Possibilité d'un potentiel dépendant de l'état interne | 102 |
| 5.4 | Potentiel composé d'un speckle bichromatique | 107 |
| 5.4.1 | S'éloigner de résonance | 107 |
| 5.4.2 | Étude de la similitude de deux speckles | 111 |
| 6 | Temps de diffusion élastique | 117 |
| 6.1 | Approximation de Born | 117 |
| 6.1.1 | Temps de diffusion élastique dans le régime de désordre faible | 118 |
| 6.1.2 | Diffusion isotrope et diffusion vers l'avant | 119 |
| 6.1.3 | Temps de diffusion élastique dans le régime de Born | 120 |

| | |
|---|------------|
| 6.2 Mesure du temps de diffusion élastique | 122 |
| 6.2.1 Procédure expérimentale | 122 |
| 6.2.2 Extraction du temps de diffusion élastique | 123 |
| 6.2.3 Cartographie du temps de diffusion élastique | 125 |
| 6.3 Comportement du temps de diffusion élastique | 126 |
| 6.3.1 Régime de Born | 126 |
| 6.3.2 Déviations au régime de Born | 127 |
| 6.3.3 Déviation à la décroissance exponentielle | 129 |
| 7 Approche spectrale | 131 |
| 7.1 Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales | 131 |
| 7.1.1 Généralités sur la fonction spectrale | 132 |
| 7.1.2 Approximation de Born | 135 |
| 7.1.3 Approximation de Born : second ordre | 135 |
| 7.1.4 Approximation de Born auto-consistante | 137 |
| 7.2 Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales pour un speckle | 139 |
| 7.2.1 Limite de l'approche auto-consistante pour un désordre de type speckle | 139 |
| 7.2.2 Fonctions spectrales d'un désordre speckle | 140 |
| 7.2.3 Comparaison du temps de diffusion élastique avec les fonctions spectrales mesurées | 147 |
| 8 Conclusion et perspectives | 151 |
| 8.1 Vers l'étude du régime critique | 152 |
| 8.2 Signatures de la localisation d'Anderson dans l'espace des impulsions | 153 |
| 8.2.1 Rétro-diffusion cohérente | 153 |
| 8.2.2 Diffusion cohérente vers l'avant | 155 |
| 8.3 Générer un désordre sur mesure | 156 |
| A Propriétés spatiales du speckle | 159 |
| A.1 Fonction de corrélation du diffuseur | 159 |
| A.2 Amplitude rayonnée | 160 |
| A.3 Fonction de corrélation | 161 |
| A.3.1 Calcul général | 161 |
| A.3.2 Expression de l'extension transverse du champ de tavelures le long de l'axe optique | 162 |
| A.4 Corrélations transverse et longitudinales d'un speckle monochromatique | 162 |
| A.4.1 Corrélation transverse le long de l'axe optique | 162 |
| A.4.2 Corrélation longitudinale autour du plan de Fourier | 163 |
| A.4.3 Corrélation tridimensionnelle aux alentours du plan de Fourier | 163 |
| A.5 Corrélation d'un speckle bichromatique | 163 |
| B Calculs du temps de diffusion élastique | 165 |
| B.1 Éléments de calcul du temps de diffusion élastique à partir du développement de Born | 165 |
| B.2 Calcul de la Self-Energy au premier ordre | 166 |
| B.2.1 Expression du premier ordre de la self-energy | 166 |
| B.2.2 Calcul du temps de diffusion élastique | 167 |

| | | |
|------------|--|------------|
| B.3 | Calcul de la Self-Energy au second ordre | 167 |
| B.3.1 | Calcul à l'aide la représentation en impulsion | 168 |
| B.3.2 | Calcul à l'aide la représentation spatiale | 169 |
| | Bibliographie | 173 |

1. Introduction

Le désordre est omniprésent dans la nature, les systèmes parfaitement ordonnés étant extrêmement rares. Le désordre se manifeste sous de nombreuses formes, telles que des particules en suspension dans l'atmosphère, un agencement irrégulier des cellules dans les tissus biologiques, ou encore des impuretés dans des matériaux conducteurs. La problématique de la propagation d'ondes dans un milieu désordonné est donc une thématique générale de la physique, commune à de nombreux domaines parmi lesquels on peut citer l'imagerie en milieu opaque, la sismologie, la physique de l'atmosphère ou encore la conduction électrique.

Que ces ondes soient de nature classique ou quantique, la description de leur propagation repose sur la notion de marche aléatoire. Au cours de leur propagation, ces ondes se heurtent à des obstacles qui changent leur trajectoire de manière aléatoire, exhibant ainsi une dynamique diffusive. La distance typique x parcourue pendant un temps t est alors donnée par

$$x = \sqrt{Dt} , \quad (1.1)$$

avec D le coefficient de diffusion.

En s'intéressant à la diffusion cohérente d'électrons dans les solides, *P. W. Anderson* a montré en 1958 que le phénomène de diffusion pouvait être annulé, $D = 0$, sous certaines conditions [4]. Ce phénomène commun à tout type d'onde, baptisé *Localisation d'Anderson*, a depuis fait l'objet de recherches intenses, aussi bien théoriques qu'expérimentales.

1.1 Localisation d'atomes ultra-froids

Les atomes ultra-froids constituent un outil très versatile permettant de simuler des hamiltoniens personnalisés. Ceux-ci promettent de nombreuses applications telles que les lasers à atomes [89], des interféromètres atomiques [17], des horloges atomiques sur réseaux optiques [25] encore le domaine récent de l'atomtronique [27]. Ces systèmes présentent ainsi un degré de contrôle inédit des paramètres expérimentaux à l'aide de nombreux outils d'interaction matière-rayonnement [11]. Il est en effet possible de

- Générer des potentiels sur mesure. À l'aide d'ondes lasers, il est possible de réaliser des potentiels harmoniques, quartiques, sinusoïdaux, des potentiels désordonnés...
- Contrôler les interactions entre particules. De nombreuses espèces atomiques possèdent des résonances de Feshbach, qui permet de contrôler les interactions inter-atomique à l'aide de champs magnétiques. Il est ainsi possible de générer des interactions attractives, répulsives, ou bien encore de les annuler [108].
- Imager la fonction d'onde d'un état quantique macroscopique. Il s'agit alors d'imagerie *in-situ*, souvent irréalisable dans d'autres systèmes. Il est de plus possible d'obtenir une grande résolution, capable de détecter un unique atome [74].

L'observation directe de la localisation d'Anderson d'ondes de matière à une dimension en 2008 a marqué une étape importante dans l'étude de systèmes désordonnés à l'aide d'atomes ultra-froids [87][10]. Rapidement, les efforts se sont tournés vers l'observation de la localisation d'Anderson à trois dimensions, rapportée par trois expériences [52][45][95] au cours de la dernière décennie. Des signatures d'effets de localisation ont par suite été recherchées dans l'espace des vitesses, menant à la mesure des paramètres microscopiques de la diffusion [85] ainsi qu'à l'observation du pic de rétro-diffusion cohérente [46], signature d'effets de localisation faible. La preuve de la cohérence des processus de localisation faible a ensuite été observée sur notre expérience en manipulant la symétrie par renversement du temps [68].

Les efforts expérimentaux sont à présent tournés vers l'étude du régime critique de la transition de phase quantique d'Anderson, qui reste un véritable défi expérimental. Si les comportements localisés et diffusifs ont pu être observés dans les expériences pionnières de la localisation d'Anderson à trois dimensions, aucune n'a pu sonder le régime critique, ni même déterminer précisément l'énergie critique de la transition, appelée *seuil de mobilité*.

1.2 Déroulement de la thèse

1.2.1 Contexte scientifique

Les trois expériences témoignant de la localisation d'Anderson d'onde de matière à trois dimensions n'ont pas pu fournir une mesure directe du seuil de mobilité. Notamment, l'application du désordre sur l'état initial élargit significativement sa distribution d'énergie. De fait, une fraction des atomes pour lesquels $E < E_c$ reste localisée, tandis qu'une majorité d'énergie supérieure au seuil de mobilité ont un comportement diffusif. Si l'estimation de la fraction localisée est mesurable expérimentalement, la détermination du seuil de mobilité demande une connaissance fine de la distribution d'énergie des atomes dans la désordre.

Dans l'optique de sonder le régime critique de la transition d'Anderson, il s'avère nécessaire de mesurer la distribution d'énergie des atomes dans le désordre, liée à la fonction spectrale[78]. Pour cela, l'équipe a développé une approche spectroscopique pouvant adresser sélectivement les différentes énergies du désordre, et ayant mené à la mesure des fonctions spectrales [107][24]. Cependant, différentes contraintes expérimentales n'ont pas permis de procéder aux expériences d'expansion nécessaires à la mesure du seuil de mobilité.

L'objectif de cette thèse était donc de dépasser les limitations expérimentales précédentes

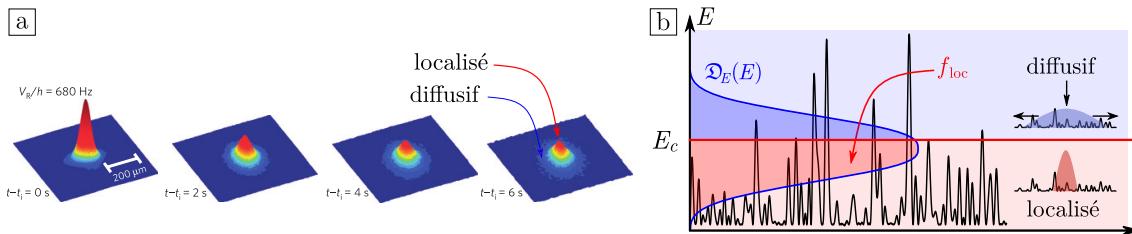


FIGURE 1.1 – Observation de la localisation d’Anderson à trois dimensions. **a :** images expérimentales de la localisation d’Anderson d’ondes de matière. Une partie des atomes reste localisée à temps long, tandis que le reste des atomes diffuse lentement. **b :** Illustration de la distribution d’énergie des atomes. La partie de basse énergie est localisée, tandis que la partie de haute énergie est diffusive. Ces comportements sont séparés par une transition de phase, d’énergie critique E_c appelée seuil de mobilité.

pour étendre le procédé de mesure des fonctions spectrales à la détermination du seuil de mobilité. Cependant, deux avaries majeures de l’expérience (détaillées dans la section suivante) n’ont pas rendu cette mesure possible dans le temps imparti. Ma contribution scientifique se focalise alors sur l’exploitation des données expérimentales relatives au temps de diffusion élastique, mesurées lors de la thèse de Jérémie Richard [84][85], et leur confrontation aux mesures des fonctions spectrales [98]. Notamment, nous avons montré que cette approche permet de décrire le comportement du temps de diffusion élastique sur la très large gamme de paramètres expérimentaux utilisée.

1.2.2 Contexte expérimental

De premiers essais de stabilité du montage de désordre bichromatique, visant à dépasser l’une des limitations identifiées lors de la mesure des fonctions spectrales, étaient en cours lors de mon arrivée à l’*Institut d’Optique* en 2017.

Une avarie du système informatique de contrôle de l’expérience, basé sur le logiciel *Matlab*, a mit un terme à ces essais. Ce système, développé par l’ingénieur électronicien du laboratoire *André Villing* parti à la retraite au cours de l’année 2017, a été remplacé par un système commercial *National Instruments* et la suite *Cicero Word Generator* développée au *MIT* dans le groupe de *Wolfgang Ketterle*. Ce remplacement, ainsi que la reconstruction de la séquence expérimentale, s’est déroulée de l’été 2017 jusqu’en mars 2018. Les changements informatiques associés ont été constants tout au long de ma thèse.

Au printemps 2018, une seconde avarie a paralysé l’expérience jusqu’au mois de novembre 2018. Une défaillance du circuit de refroidissement à eau des bobines de lévitation magnétique ont conduit au démontage d’une partie de l’expérience autour de la chambre de science. Des composants de génération du désordre, l’imagerie de la seconde chambre, des bobines de compensation de champs magnétiques et de lévitation ont ainsi été retirés du dispositif, puis remontés peu à peu. La calibration des champs magnétiques de la seconde chambre s’est déroulée entre le printemps et l’été 2019. L’étude du temps de diffusion élastique a eu lieu en parallèle de ces travaux de réparation, et ont duré jusqu’au printemps 2019.

Le printemps 2019 a aussi été marqué par le remplacement du laser fibré Ytterbium source pour notre piège dipolaire. La calibration de ce nouveau piège ainsi que l’optimisation

de l'étape d'évaporation optique menant à la condensation de Bose-Einstein s'est déroulée pendant l'automne 2019.

L'entretien d'une expérience d'atomes ultra-froids nécessitant une présence quotidienne et un renouvellement constant de matériel, une mise à jour du système laser dédié au refroidissement est actuellement en cours. Nos lasers *fait-maison* sont ainsi progressivement remplacés par des systèmes commerciaux *Sacher Lasertechnik Cheetah*.

1.3 Structure du manuscrit

Ce manuscrit se décompose selon les six chapitres suivants :

- **Chapitre 2** : Nous commencerons par présenter les grandes lignes du transport quantique en milieu désordonné pour introduire le phénomène de localisation d'Anderson, pour ensuite nous attarder sur la transition de phase d'Anderson entre états localisés et états diffusifs. Nous nous concentrerons particulièrement sur l'état de l'art de la transition d'Anderson à l'aide des expériences d'atomes ultra-froids. Nous ferons ainsi apparaître la quantité centrale de l'étude de la physique du désordre, la fonction spectrale.
- **Chapitre 3** : Dans un second temps, nous présenterons les grandes lignes de notre plateforme expérimentale. Nous rappellerons donc les principales propriétés d'un condensat de Bose-Einstein, ainsi que les différents processus d'interaction lumière-matière permettant de manipuler des atomes. Enfin, nous présenterons les différentes étapes d'un cycle expérimental nous permettant d'obtenir un gaz quantique dégénéré.
- **Chapitre 4** : Après avoir présenté les différents éléments de notre expérience, nous allons nous focaliser sur les modifications apportées à notre dispositif au cours de ma thèse. En particulier, nous discuterons des deux éléments principaux de la chambre de science, la lévitation magnétique et le piège optique. Nos travaux sur ces éléments nous ont ainsi permis d'obtenir des condensats de Bose-Einstein bien meilleurs que précédemment, et de calibrer finement notre lévitation magnétique dans le but d'exploiter pleinement la dynamique de notre système.
- **Chapitre 5** : Après avoir présenté le dispositif générant notre onde de matière, nous décrirons notre milieu désordonné. Celui-ci est issu d'un champ de tesselles laser, dont nous verrons les principales propriétés. Nous présenterons ainsi les différentes configurations de désordre que nous avons pu utiliser, et nous donnerons un aperçu de notre approche visant à dépasser les limites expérimentales auxquelles nous avons été confrontés.
- **Chapitre 6** : Ce chapitre se focalise sur la mesure du temps de diffusion élastique d'une onde de matière dans un potentiel désordonné optique. En suivant son évolution sur un large régime de paramètres, nous pourrons identifier le régime de diffusion faible pour lequel le temps de diffusion élastique est correctement décrit par l'approximation perturbative de Born. De plus, nous étudierons de manière quantitative la pertinence du critère de désordre faible $k_l!l^{\text{Born}} = 1$, et nous verrons que celui-ci

dépend fortement de la nature du désordre considéré.

- **Chapitre 7 :** Dans ce dernier chapitre, nous tacherons de décrire le comportement du temps de diffusion élastique à l'aide des fonctions spectrales. Nous verrons ainsi qu'une extension de l'approche perturbative ne permet pas de . De plus, nous verrons que l'approximation auto-consistante de Born, couramment utilisée, échoue à reproduire le comportement du temps de diffusion élastique dans un désordre de type speckle. Nous verrons donc que la connaissance fine des détails de la fonction spectrale est nécessaire pour décrire la dynamique d'une onde de matière dans un désordre speckle.



2. Phénomène de localisation d'Anderson

Dans ce chapitre, nous commencerons par décrire comment, lors de la propagation cohérente d'une onde dans un milieu désordonné, les interférences peuvent altérer la diffusion classique et engendrer le phénomène spectaculaire de *Localisation d'Anderson* dont nous donnerons les principales propriétés. Dans un second temps, nous présenterons succinctement les principaux systèmes utilisés pour l'investigation de la localisation d'Anderson, pour s'attarder plus particulièrement sur les expériences d'atomes froids. Enfin, nous terminerons ce chapitre par une discussion de nos enjeux actuels, l'étude du régime critique de la transition d'Anderson avec des atomes froids, dont nous présenterons l'état de l'art.

2.1 Diffusion et interférences

Cette première section a pour but de rappeler succinctement les mécanismes microscopiques à l'œuvre lors de l'étude de la propagation d'une onde dans un milieu désordonné, et comment le phénomène d'interférence peut modifier les grandeurs microscopiques associées. En particulier, nous nous focaliserons sur l'arrêt de la diffusion en conséquence de ces interférences, la localisation d'Anderson.

2.1.1 Phénomène de diffusion

Le phénomène de diffusion macroscopique est un des phénomènes de transport les plus connus de la physique classique. Celui-ci permet par exemple de décrire de manière simple et unifiée la propagation de la chaleur dans un matériau homogène, l'homogénéisation de la concentration de particules dans un liquide ou encore le phénomène de résistance électrique.

Le phénomène macroscopique de diffusion provient, de manière générale, de la marche aléatoire de particules au sein de leur environnement. Avec cette approche, Drude a par exemple été le premier à calculer la résistivité électrique des matériaux en introduisant

un temps de relaxation microscopique basé sur des collisions élastiques entre les électrons, vecteurs du courant électrique, et les impuretés du matériau dans lequel ceux-ci se déplacent [5].

Cet exemple historique illustre le fait que certaines propriétés macroscopiques des matériaux sont reliées aux grandeurs microscopiques de la marche aléatoire associée. Ces dernières grandeurs sont des briques élémentaires de la propagation en milieu désordonné, dont nous restreindrons l'étude au cas des collisions élastiques entre les particules et le désordre. Parmi ces briques élémentaires, que nous présenterons dans la suite, nous retrouvons le coefficient de diffusion, le temps de transport, ou encore le temps de diffusion élastique, auquel nous porterons une attention particulière.

Temps de diffusion élastique

La quantité la plus naturelle permettant de caractériser de manière microscopique le phénomène de diffusion est le *temps de diffusion élastique* τ_S , qui correspond à la durée typique entre deux événements successifs de *collision élastique* avec les impuretés du milieu. Ce temps est l'équivalent temporel du *libre parcours moyen* l_S correspondant à la distance moyenne entre deux événements de diffusion microscopiques successifs, illustrée figure 2.1.a. Dans le cas d'une particule de masse m se déplaçant à une vitesse v_i , ces deux grandeurs sont reliées par

$$\tau_S = \frac{l_S}{v_i} = \frac{m l_S}{\hbar k_i}, \quad (2.1)$$

où k_i est le nombre d'onde de l'onde quantique associée à la particule (celui-ci est inchangé après chaque événement de collision en raison de leur caractère élastique).

Comme nous le verrons plus en détails dans les chapitres 6 et 7, le temps de diffusion élastique est une quantité qui dépend des détails microscopiques du système et peut être interprété comme le temps de vie d'une onde plane dans le désordre.

Temps de transport

Si la norme du vecteur vitesse (ou de manière équivalente du vecteur d'onde) reste inchangée au cours de la propagation, sa direction est modifiée à chaque événement de collision élastique. Comme nous le verrons plus en détails dans le chapitre 6, lors de la collision avec un diffuseur de taille caractéristique σ , l'onde peut être diffusée selon un angle typique $\theta_{typ} \sim 1/k_i\sigma$. La diffusion peut donc être *anisotrope*, en analogie avec la diffusion de Mie ou la diffraction en optique.

En considérant que la trajectoire d'une particule est composée de multiples collisions successives, il apparaît alors une seconde échelle de temps caractéristique, le *temps de transport* ou temps de Boltzmann τ_B , décrivant la durée nécessaire pour que la particule perde l'information de la direction initiale de sa vitesse.

On peut ainsi montrer que le temps de transport (et son analogue spatial, la *longueur de transport*) s'exprime en fonction du temps de diffusion élastique de la manière suivante [2] :

$$\tau_B = \frac{\tau_S}{1 - \langle \cos \theta \rangle} \quad \text{et} \quad l_B = \frac{l_S}{1 - \langle \cos \theta \rangle}, \quad (2.2)$$

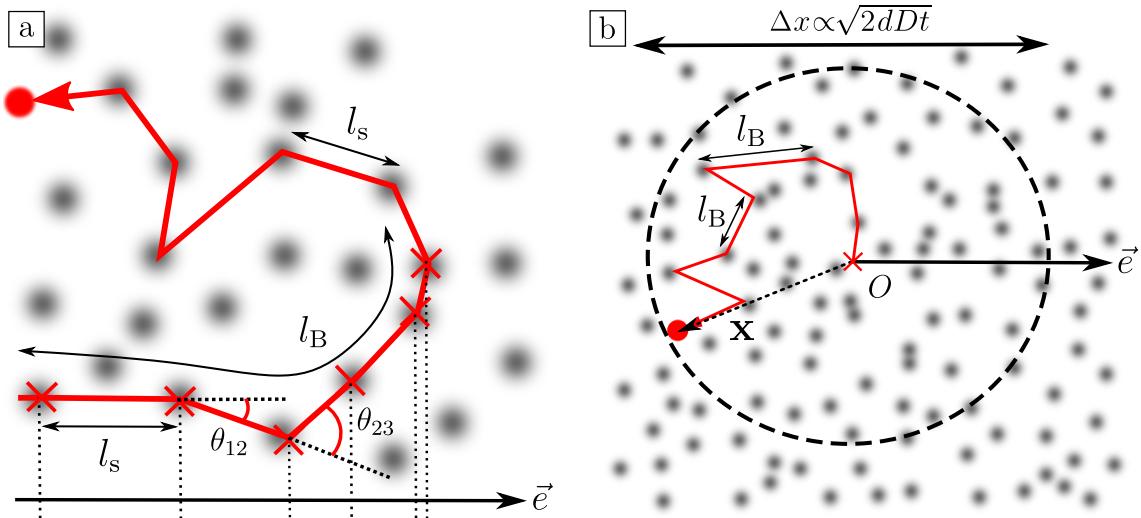


FIGURE 2.1 – a : Longueur de transport pour des collisions anisotropes. Dans le cas de diffusion fortement anisotrope vers l'avant, une unique collision élastique ne modifie que peu la direction de la vitesse d'une particule. Il faut donc un grand nombre de collisions successives pour que la direction de la vitesse d'une particule soit décorrélée de la direction initiale. En conséquence, le temps de transport est beaucoup plus grand que le temps de diffusion élastique. **b : Mécanisme microscopique de la diffusion.** Le mouvement d'une particule peut être considérée comme une marche aléatoire composée d'événements de diffusion isotropes tous les τ_B entre lesquels la particule se déplace d'une distance $l_B = v\tau_B$ dans une direction aléatoire. L'étalement typique obtenu croît avec le temps selon $\Delta x = \sqrt{2dDt}$, avec D le coefficient de diffusion.

où $\langle \dots \rangle$ représente la valeur moyenne sur les différents évènements de diffusion, et θ l'angle de diffusion comme indiqué sur la figure 2.1.

On voit donc que dans le cas de collisions élastiques isotropes, $\tau_B = \tau_S$, montrant qu'une seule collision suffit à perdre l'information sur la direction initiale de la vitesse de la particule. En revanche, un grand nombre de collisions sont nécessaires pour obtenir une isotropisation de la direction des vitesses dans le cas d'évènements de diffusion anisotrope, comme illustré figure 2.1.a.

Coefficient de diffusion

Une fois que la particule a parcouru une distance l_B , on peut considérer qu'elle subit une diffusion isotrope. On assimile alors le mouvement des particules à une marche aléatoire pour laquelle les particules de vitesse v subissent des évènements de collision isotrope à chaque intervalle de temps τ_B pendant lesquels la particule parcourt une distance $l_B = v\tau_B$, comme illustré figure 2.1.b.

Ainsi, on peut déterminer l'étalement typique de la région explorée par la particule après N collisions à l'aide du théorème central limite [26],

$$\langle \Delta \mathbf{x}^2 \rangle = 2Nl_B^2 . \quad (2.3)$$

En définissant le coefficient de diffusion par $\langle \Delta \mathbf{x}^2 \rangle = 2dDt$ et en faisant apparaître le temps

$t = N\tau_B$, on montre ainsi que [2] :

$$D = \frac{vl_B}{d} = \frac{\hbar}{md} kl_B , \quad (2.4)$$

en faisant apparaître la quantité kl_B , qui sera essentielle dans la suite. Notamment, cette quantité peut être interprétée comme une mesure de la force du désordre comme nous aurons l'occasion de le voir dans la section 2.1.3 et dans le chapitre 6.

Une conséquence de l'équation 2.4 est qu'une diminution de la longueur de transport entraîne une diminution du coefficient de diffusion. Ainsi, plus un système sera désordonné, plus le coefficient de diffusion sera petit.

2.1.2 Localisation faible

Si le mécanisme de marche aléatoire présenté permet de décrire un grand nombre de situations de diffusion classique, nous avons omis un ingrédient essentiel à la propagation d'ondes en milieu désordonné : la *cohérence*, ou encore la capacité qu'une onde a à interférer. En particulier, nous verrons que celle-ci peut avoir des conséquences dramatiques sur les propriétés de transport d'une onde en présence de désordre.

Mécanisme de localisation faible

Pour cela, intéressons-nous à la probabilité $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ qu'une onde initialement à la position \mathbf{x} se retrouve à la position \mathbf{x}' après propagation dans le milieu désordonné. Dans la limite $kl_B \gg 1$, la trajectoire de l'onde peut être vu comme une marche aléatoire, où chaque trajectoire de diffusion est associée à une amplitude complexe de probabilité $|A_j| e^{i\phi_j}$, avec ϕ_j la phase de la trajectoire. Ainsi, la probabilité $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est donnée par la somme de l'amplitude sur toutes les trajectoires possibles :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \left| \sum_j |A_j| e^{i\phi_j} \right|^2 = \sum_{j,l} |A_j| |A_l| e^{i(\phi_j - \phi_l)} \\ &= \sum_j |A_j|^2 + \sum_{j \neq l} |A_j| |A_l| e^{i(\phi_j - \phi_l)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où le premier terme décrit le phénomène de diffusion classique, où la probabilité $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est la somme des probabilités de chaque trajectoire.

Le second terme de l'équation 2.5 représente quant à lui les interférences dues aux différentes phases accumulées par les différents chemins de diffusion. Intuitivement, on peut considérer que la contribution de ce terme s'annule en moyennant sur les différentes réalisations du désordre, $e^{i(\phi_j - \phi_l)} = 0$, où $\overline{\dots}$ désigne la moyenne d'ensemble. Cependant, une étude attentive montre que certaines trajectoires résistent au moyennage sur les réalisations du désordre.

En particulier, les trajectoires pour lesquelles l'onde se retrouve à son point de départ forment des boucles qu'il est possible de parcourir dans les deux sens, comme illustré figure 2.2. Par *symétrie par renversement du temps*, il est donc possible de trouver des paires de trajectoires dont la phase accumulée sera identique. De plus, ces paires de trajectoires existent

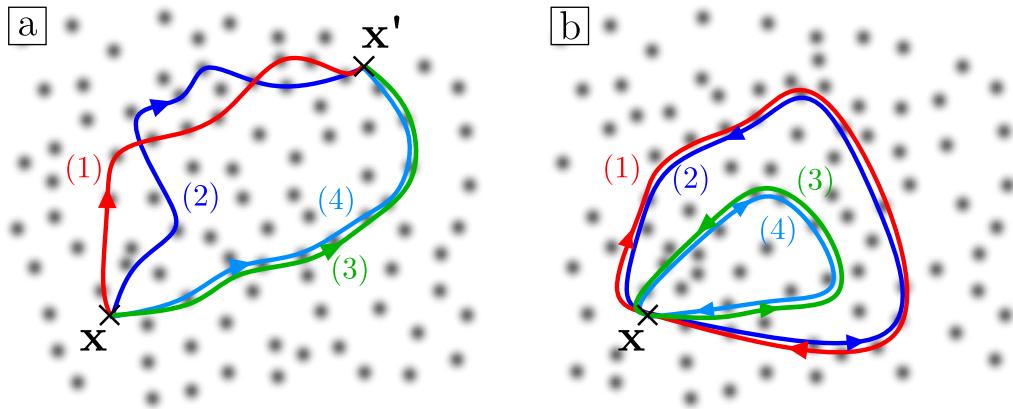


FIGURE 2.2 – a : Participation des différents chemins de diffusion à la propagation de l'onde. La probabilité d'arriver au point x' en partant du point x est donnée par l'ensemble des trajectoires les reliant. Dans le cas des chemins 1 et 2, la phase accumulée le long de ces trajectoires diffère, détruisant en moyenne le phénomène d'interférence entre ces chemins. **b : Mécanisme de localisation faible.** Les chemins de diffusion pour lesquels l'onde retourne à son point de départ se présentent sous forme de boucles qu'il est possible de parcourir dans les deux sens, comme illustré par les trajectoires 1 et 2, ou encore les trajectoires 3 et 4. Ces paires de trajectoires existent quelle que soit la réalisation du désordre.

quelque soit la réalisation du désordre, rendant ce processus d'interférences constructives robuste vis-à-vis du moyennage d'ensemble et $\overline{e^{i(\phi_j - \phi_l)}} = 1$. Ainsi, la probabilité qu'une onde retourne à son point de départ est le double de la prédiction classique :

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2 \sum_j |A_j|^2 . \quad (2.6)$$

Les interférences entre chemins de diffusion tendent alors à favoriser le retour de l'onde à son point d'origine, ralentissant ainsi la diffusion. Cet effet de *localisation faible*, commun à tout type d'onde, a été intensivement étudié dans de nombreux domaines, aussi théoriquement que expérimentalement.

Corrections de localisation faible

Comme le montre l'équation 2.6, le retour de l'onde à son point d'origine est favorisé à l'aide des interférences constructives qu'il existe entre des trajectoires symétriques par renversement du temps. Notamment, cet effet de localisation faible se traduit par la diminution du coefficient de diffusion par rapport à la prédiction classique 2.4, que l'on peut alors écrire sous la forme

$$D = D_0 - \delta D , \quad (2.7)$$

où D_0 est le coefficient de diffusion classique 2.4, et δD est la correction de localisation faible.

Ces corrections de localisation faible dépendent des détails microscopiques du système,

mais aussi de sa dimension d et de sa taille L . Celles-ci sont données par [2] :

$$\delta D/D_0 = \begin{cases} \mathcal{O}(L/l_B) & \text{en 1D ,} \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{kl_B} \ln \frac{L}{l_B}\right) & \text{en 2D ,} \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{(kl_B)^2}\right) & \text{en 3D ,} \end{cases} \quad (2.8)$$

et témoignent ainsi de la forte influence de la dimension du système comme nous le verrons plus en détails dans la section suivante.

2.1.3 Suppression du transport : Localisation d'Anderson

Les corrections de localisation faible données par l'équation 2.8 font apparaître un comportement remarquable : sous certaines conditions, il est possible que la correction δD soit égale au coefficient de diffusion classique D_0 , entraînant ainsi la suppression du transport avec $D = 0$. Cet effet dit de *Localisation forte*, ou encore de *Localisation d'Anderson*, a été découvert en 1958 par *Philip W. Anderson* s'intéressant alors à la diffusion d'une particule quantique dans un réseau désordonné dans le cadre de la physique de la matière condensée [4]. Ces travaux furent récompensés par le prix Nobel de physique en 1977, conjointement avec *Sir Nevill Francis Mott* et *John Hasbrouck van Vleck*.

Localisation d'Anderson

La signature la plus spectaculaire de l'influence de la cohérence d'une onde lors de sa propagation dans un milieu désordonné est l'inhibition du transport.

Dans le régime *isolant*¹ de localisation d'Anderson, la fonction d'onde reste localisée aux alentours du point d'origine et présente un profil exponentiel

$$|\psi(\mathbf{x})|^2 \propto e^{-\mathbf{x}/\xi_{\text{loc}}} , \quad (2.9)$$

où ξ_{loc} correspond à la longueur typique sur laquelle l'onde s'étend, et est appelée *longueur de localisation*.

Il est possible de donner une estimation de cette longueur à l'aide des corrections de localisation faible 2.8. On montre ainsi que pour un système unidimensionnel, tous les états sont très efficacement localisés et $\xi_{\text{loc}} = 2l_B$. De ce fait, la localisation d'Anderson se manifeste même pour des désordres faibles pour lesquels $kl_B \gg 1$.

De même, à deux dimensions, il a été montré que tous les états restent localisés mais sur des échelles de longueurs bien plus grandes, de l'ordre de $\xi_{\text{loc}} \sim l_B \exp(kl_B)$. Pour des désordres faibles ($kl_B \gg 1$), la longueur de localisation excède généralement la taille du système.

Remarquablement, les corrections de localisation faible à trois dimensions ne dépendent pas de la taille du système, mais seulement de la force du désordre kl_B . Dans le cas d'un désordre faible, les boucles de localisation faible ne sont pas assez nombreuses pour changer

1. Par opposition au régime *métallique* où le transport existe.

de manière significative la dynamique diffusive de l'onde. En revanche, la localisation d'Anderson persiste dans le cas d'un désordre fort où $kl_B \leq 1$, pour lequel la phase l'onde varie peu entre deux événements successifs de diffusion.

Transition d'Anderson

Il apparaît donc que le cas à trois dimensions présente un intérêt particulier. En effet, un même système peut, selon la force du désordre, présenter un comportement qui soit métallique, soit isolant. Selon l'équation 2.8, on peut estimer que ce changement de comportement se manifeste lorsque

$$kl_B \sim 1 , \quad (2.10)$$

condition connue sous le nom de *critère de Ioffe-Regel*.

Il est possible de donner une interprétation intuitive au critère de Ioffe-Regel en se focalisant sur la phase accumulée par l'onde entre deux événements successifs de diffusion. En effet, cette phase est de l'ordre de $\phi \sim kl_B$. Dans le régime de désordre fort, la phase de l'onde est donc similaire pour plusieurs événements de diffusion successifs, générant ainsi des interférences constructives entre les différentes ondes diffusées.

Plus particulièrement, il a été montré à l'aide la *théorie d'échelle de la localisation d'Anderson* qu'il existe une transition de phase du deuxième ordre entre états localisés et états diffusifs pour des systèmes à trois dimensions [1]. Le paramètre de contrôle de la transition étant l'énergie E de l'onde, la transition d'Anderson possède donc une énergie critique E_c appelée *seuil de mobilité*, comme illustré figure 2.3.a.

La transition d'Anderson est de plus caractérisée par deux exposants critiques ν et s , décrivant respectivement comment la longueur de localisation ξ_{loc} diverge pour des états localisés proches du seuil de mobilité et comment le coefficient de diffusion D s'approche de 0 pour des états diffusifs (voir figure 2.3.b) :

$$D \sim |E - E_c|^s \quad \text{et} \quad \xi_{\text{loc}} \sim |E - E_c|^{-\nu} . \quad (2.11)$$

Bien qu'aucune théorie ne puisse décrire correctement le régime critique de la transition d'Anderson à l'heure actuelle, plusieurs études numériques s'accordent sur les valeurs $s = \nu = 1.58$ des exposants critiques [101] [28] [102].

2.2 Localisation des atomes froids

La localisation d'Anderson étant due au caractère ondulatoire du système étudié, celle-ci est donc commune à tout type d'onde, qu'elle soit classique (ondes lumineuses ou acoustiques) ou quantique (ondes électroniques, ondes de matière). Ce phénomène a donc été étudié expérimentalement à l'aide d'un grand nombre de systèmes dont nous allons brièvement présenter les principaux résultats ici, en mettant l'accent sur la transition métal-isolant.

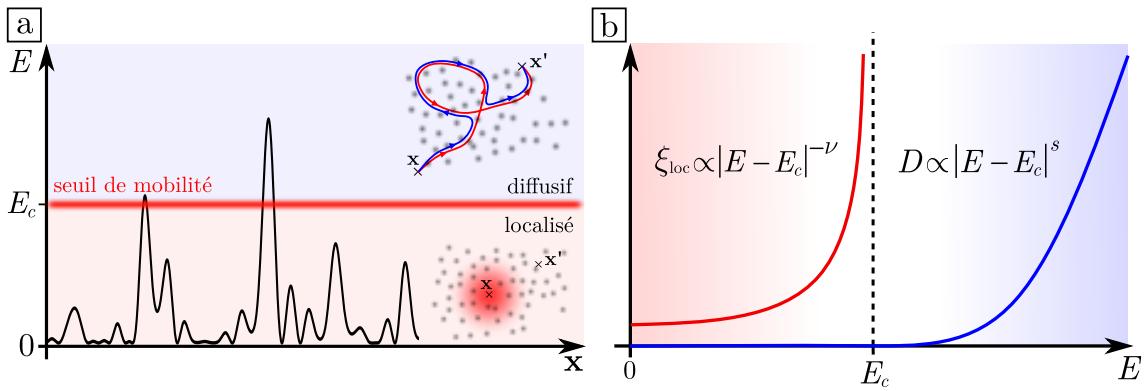


FIGURE 2.3 – **a : Transition d'Anderson.** À trois dimensions, il existe une transition de phase entre états diffusifs et états localisés. Pour une énergie supérieure à l'énergie critique de la transition, appelée seuil de mobilité, l'onde peut diffuser, tandis que pour une énergie inférieure au seuil de mobilité, l'onde est localisée. **b : Régime critique.** La transition d'Anderson est caractérisée par les exposants critiques s et ν , qui décrivent comment évoluent la longueur de localisation et la coefficient de diffusion aux alentours du seuil de mobilité. Dans le régime critique localisé, la longueur de localisation diverge en s'approchant du seuil de mobilité avec un exposant ν . Dans le régime critique diffusif, le coefficient de diffusion s'annule selon une loi de puissance d'exposant s .

2.2.1 Etudes expérimentales de la localisation d'Anderson

L'étude expérimentale de la localisation d'Anderson constitue un domaine de recherche qui s'est énormément développé, débutant dans les années 70-80 avec des systèmes électroniques et faisant aujourd'hui encore l'objet de recherches intenses.

Localisation dans les systèmes électroniques

Les premières expériences furent menées à l'aide de systèmes électroniques, et purent démontrer des effets de localisation faible ainsi que des effets de localisation forte [64][75]. Rapidement, les efforts se sont concentrés sur l'observation de la transition métal-isolant² prédictive par la théorie d'échelle de la localisation.

Cependant, une étude quantitative de la transition s'est révélée ardue en raison de la complexité de ces systèmes. En particulier, la présence d'interactions coulombiennes entre les électrons modifie profondément les propriétés de localisation, et rend délicate la distinction expérimentale entre la transition métal-isolant liée au désordre (transition d'Anderson) et la transition métal-isolant liée aux interactions (transition de Mott). Ces effets sont particulièrement marqués par la comparaison entre les exposants critiques mesurés ($\nu \sim 1$ pour [97]) et ceux estimés à l'aide de simulations numériques ($\nu \sim 1.58$).

Localisation dans les systèmes classiques

L'utilisation des ondes classiques s'est alors imposée comme étant un moyen de réaliser des systèmes mieux contrôlés que dans le cadre de la matière condensée. Les premières

2. Cette dénomination prend tout son sens dans les systèmes électroniques : les expériences menées correspondent à des mesures de conductivité.

signatures de la localisation d'Anderson ont été obtenues dans les années 90 avec des ondes ultrasonores [109], des ondes mécaniques de flexion [113], des micro-ondes [32] ainsi que des ondes lumineuses [112].

Cependant, ces expériences s'appuyaient sur la décroissance exponentielle de l'intensité de l'onde pour analyser leurs résultats. Leur interprétation fut controversée en raison de l'existence d'autres phénomènes présentant la même signature, en particulier l'absorption qui présente aussi une décroissance exponentielle de l'intensité de l'onde comme décrit par la loi de Beer-Lambert [92]. Depuis, d'autres signatures ont été exploitées telle que la dynamique de l'onde en régime pulsé [110] ou encore les fluctuations géantes de transmission [71] afin d'observer sans ambiguïté la localisation d'Anderson.

Encore aujourd'hui, la difficulté expérimentale s'accroît fortement en augmentant la dimension du système. En particulier, augmenter le pouvoir diffusant du milieu à trois dimensions afin d'atteindre le critère de Ioffe-Regel $kl_B \sim 1$ tout en s'affranchissant de l'absorption reste un tour de force expérimental. Ainsi, la seule observation de la localisation d'Anderson à trois dimensions faisant consensus à été réalisée au Canada dans le groupe de J. Page à l'aide d'ondes acoustiques se propageant dans des billes d'aluminium [40].

Notons finalement que la localisation à trois dimensions d'ondes lumineuses fait l'objet de recherches intenses très débattues. Enfin, une récente étude numérique prédit l'absence de la localisation d'Anderson à trois dimensions dans le cas d'ondes lumineuses en raison de leur caractère vectoriel [99].

2.2.2 L'approche des atomes froids

Depuis le milieu des années 2000, une nouvelle plateforme présentant un degré de contrôle du système inédit participe à l'étude de la physique du désordre : les atomes ultra-froids. Ces systèmes, utilisés en interférométrie atomique et pour de la simulation quantique, sont bien connus pour leurs propriétés de cohérence sous forme de *condensats de Bose-Einstein* et offrent des possibilités expérimentales complexes qu'il n'est pas possible de réaliser à l'aide d'autres systèmes.

En effet, les expériences d'atomes ultra-froids présentent un grand nombre d'avantages : il est possible d'imager la fonction d'onde des atomes aussi bien dans l'espace réel grâce à une imagerie *in-situ* que dans l'espace des vitesses à l'aide d'une imagerie par *temps de vol*. De plus, les atomes ultra-froids ne présentent pas d'absorption, et dépassent ainsi les difficultés des expériences pionnières d'observation de la localisation d'Anderson. Enfin, de tels systèmes offrent un contrôle absolu des paramètres microscopiques, en particulier des paramètres du désordre, mais aussi ceux de l'onde et des interactions entre particules, et la dimension du système. Les atomes ultra-froids apparaissent alors comme une plateforme idéale pour étudier la physique du désordre.

Atomes ultra-froids et désordre

Il existe différentes méthodes pour générer un désordre sur les atomes. Parmi les plus utilisées on retrouve les champs de tavelures optiques, ou *speckle*, et les réseaux bichromatiques pour lesquels un réseau de faible amplitude vient moduler de manière quasi-aléatoire le réseau principal (voir figure 2.5. Notons aussi le développement récent

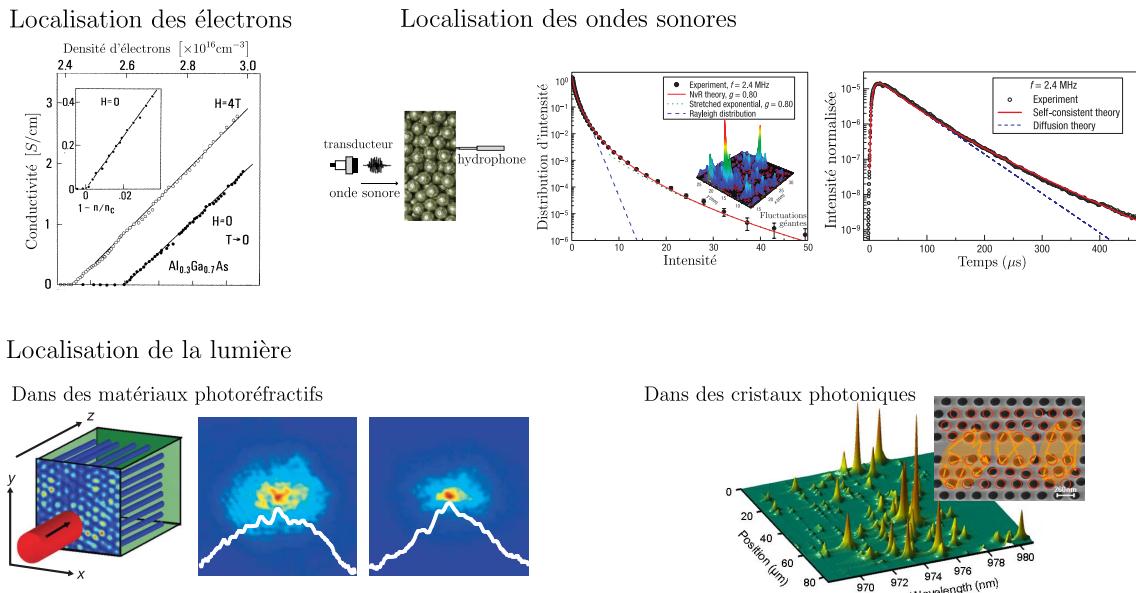


FIGURE 2.4 – Etudes expérimentales de la localisation d'Anderson. A basse température, un métal peut devenir isolant à cause du désordre, sa conductivité s'annulant alors. Cette transition peut être atteinte en diminuant la densité d'électrons. Figure tirée de [48]. La localisation d'Anderson d'ondes acoustiques dans un réseau désordonné de billes d'aluminium peut être étudiée à l'aide d'un hydrophone après sa propagation. Il est possible de relever la distribution d'intensité de l'onde ainsi que son profil temporel qui présentent des signatures de la localisation d'Anderson. Figure tirée de [40]. La localisation de la lumière peut être étudiée à l'aide de plusieurs systèmes, tels que des matériaux photoréfractifs composés d'un réseau désordonné de guides d'ondes (figure tirée de [93]) ou encore dans des cristaux photoniques (figure tirée de [90]).

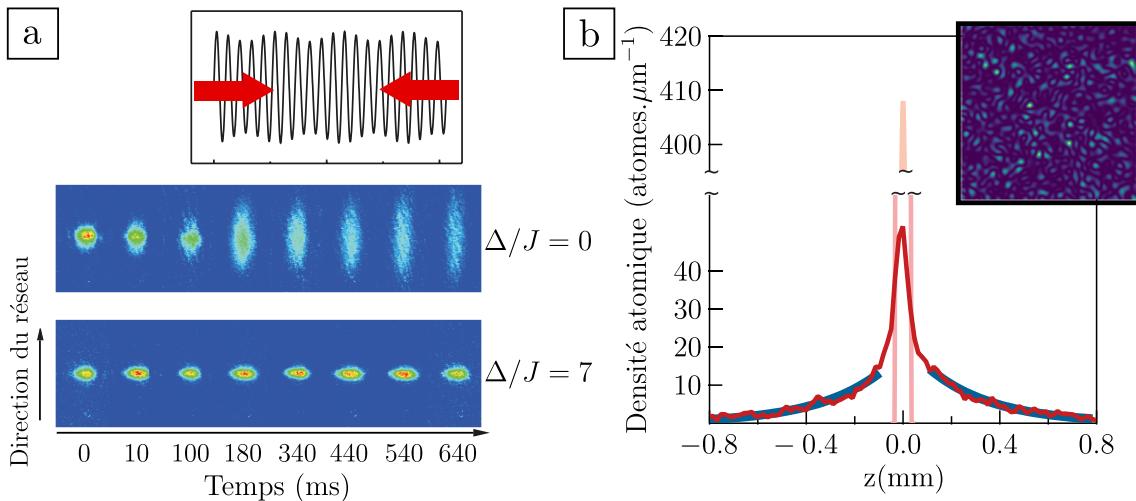


FIGURE 2.5 – Localisation d’ondes atomiques dans un réseau bichromatique. Un condensat de Bose-Einstein s’étend dans l’espace libre (image du haut), tandis que son expansion est arrêtée lorsque celui-ci est placé dans un potentiel quasi-périodique (image du bas). Figure tirée de [87] **Localisation d’Anderson d’ondes de matière dans un speckle**. Mesure de densité atomique après une seconde d’expansion dans un potentiel de type speckle. Les ailes du profil sont caractérisées par un décroissance exponentielle (traits bleus). Le profil rose correspond à la densité atomique initiale. Figure tirée de [10].

de désordres générés à l’aide de modulateurs spatiaux de lumière ou de matrices de micro-miroirs, permettant de réaliser des profils d’illumination arbitraires.

Toutes ces façons de réaliser un désordre pour les atomes possèdent un point commun : ils sont générés à l’aide de champs lumineux et possèdent donc une longueur typique de variation, ou *longueur de corrélation* σ , généralement de l’ordre du micromètre. En particulier, les effets quantiques associés au comportement ondulatoire de la matière sont attendus lorsque la longueur de *de Broglie* est plus grande que la longueur de corrélation :

$$\lambda_{\text{dB}} \geq \sigma \quad \text{soit} \quad T_{\text{typ}} \leq \frac{\hbar^2}{k_B m \sigma^2} \sim \text{quelques nanokelvins.} \quad (2.12)$$

L’observation d’effets quantiques en présence de désordre nécessite donc des températures extraordinairement basses obtenues avec des *condensats de Bose-Einstein*.

Cependant, l’obtention de telles températures n’est pas nécessaire pour observer la dynamique diffusive d’atomes dans un désordre optique. Notamment, celle-ci a été étudiée en deux dimensions en se concentrant sur la décroissance temporelle de la densité atomique [88]. Plus particulièrement, une décroissance de la densité atomique en $1/t$ au centre du nuage servant de point source, signature de la dynamique diffusive, a été observée en présence de désordre, tandis que celle-ci est caractérisée par une décroissance en $1/t^2$ pour une expansion balistique en absence de désordre.

Localisation d’Anderson d’ondes atomiques

C’est en 2008 qu’a été observée la localisation d’Anderson d’ondes de matière simultanément dans deux expériences illustrées sur la figure 2.5. L’expérience de Roati et al. [87] réalisée au LENS à Florence, rapporte l’arrêt de l’expansion d’un condensat

de Bose-Einstein de ^{39}K placé dans un potentiel unidimensionnel composé d'un réseau bichromatique. La seconde expérience, menée au Laboratoire Charles Fabry à Palaiseau, rapporte aussi l'arrêt de l'expansion d'un condensat de Bose-Einstein de ^{87}Rb plongé dans un guide d'onde optique unidimensionnel et dans un désordre de type speckle [10]. De plus, la mesure du profil de densité atomique montre la décroissance exponentielle 2.9 de la fonction d'onde localisée, comme représenté figure 2.5.b.

Ces expériences ont ainsi démontré la pertinence des atomes ultra-froids pour l'étude des systèmes désordonnés, et déclenché ainsi de nombreux efforts expérimentaux pour l'étude de la localisation d'Anderson dans des systèmes de dimensions 2 et 3.

Ce n'est que récemment (2019) que la localisation d'Anderson a pu être observée à l'aide d'atomes froids en raison de l'augmentation exponentielle de la longueur de localisation avec la faiblesse du désordre. White et al. rapportent ainsi l'observation de la localisation d'Anderson en deux dimensions à l'aide d'une expérience de transmission entre deux réservoirs, et témoignent du profil exponentiel de la fonction d'onde dans le canal désordonné [111].

Localisation d'Anderson en trois dimensions

C'est principalement vers l'étude de la localisation d'Anderson à trois dimensions et plus particulièrement vers l'étude du régime critique que ce se sont concentrés les efforts expérimentaux après l'observation de la localisation unidimensionnelle. Un des facteurs expliquant ce développement en faveur du cas tridimensionnel par rapport au cas bidimensionnel provient de la distinction entre la localisation d'Anderson, d'origine quantique, et le piégeage classique. Notamment, il a été montré que pour un potentiel de type speckle à trois dimensions, la percolation classique est négligeable [80], contrairement au cas bidimensionnel où cette question est critique.

Trois expériences rapportent ainsi l'observation de la localisation d'Anderson à trois dimensions. Le groupe de B. de Marco à Urbana Champaign a ainsi utilisé un gaz fermionique de ^{40}K dans un potentiel speckle anisotrope [52]. Simultanément, l'équipe de Palaiseau a observé un arrêt de l'expansion d'une partie du nuage de ^{87}Rb plongé dans un désordre isotrope généré par la superposition cohérente de deux speckles, pour des durées d'observation allant jusqu'à 8 s [45]. Enfin, une expérience récente menée au LENS dans l'équipe de G. Modugno rapporte l'observation de la localisation complète du nuage atomique de ^{39}K , dont les interactions ont été annulées à l'aide de résonances de Feshbach [95].

Ces trois expériences constituent une étape importante de l'étude de la localisation d'Anderson, mais ne permettent pas d'adresser l'étude du régime critique, comme nous le verrons dans la partie suivante.

Localisation dynamique

Notons enfin l'existence d'un autre système permettant d'étudier la localisation d'Anderson à l'aide d'atomes froids, basé sur le phénomène de *localisation dynamique*. Développé expérimentalement dans les années 1990 [63], le système de *rotateurs forcés* (ou *kicked rotors* en anglais) repose sur un mapping entre un rotateur pulsé périodiquement et un

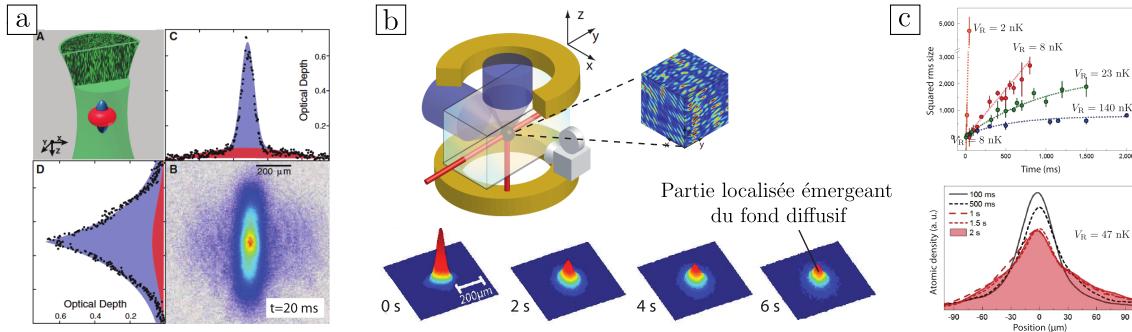


FIGURE 2.6 – Observation de la localisation d’Anderson à trois dimensions avec des atomes ultra-froids. **a :** Localisation d’une partie du nuage de ^{40}K à temps très court. Une partie localisée émerge du centre d’un fond balistique. Figure tirée de [52]. **b :** Observation à temps très long d’une partie localisée du nuage de ^{87}Rb qui se démarque d’un fond très peu diffusif dans un désordre quasi-isotrope. Figure tirée de [45]. **c :** Localisation d’un nuage de ^{39}K complet dont les interactions sont annulées à l’aide d’une résonance de Feshbach. Figure tirée de [95].

modèle d’Anderson, et se focalise sur l’apparition du phénomène de localisation dans l’espace des vitesses [54].

En effet, à l’aide d’une onde stationnaire pulsée périodiquement, équivalente à une transmission périodique d’impulsion aléatoire, on peut décrire le mouvement des atomes soumis à ces *kicks* comme une marche aléatoire dans l’espace des vitesses. Cependant, la richesse de ce système réside dans sa dynamique quantique, grâce à laquelle le phénomène de localisation apparaît de manière équivalente à celle dans l’espace réel et présente une localisation exponentielle de la distribution de vitesses illustrée figure 2.7.

L’extension du kicked rotor unidimensionnel à des dimensions supérieures $d = 2$ et $d = 3$ a pu se faire à l’aide d’une modulation temporelle des kicks [18]. Le *kicked rotor quasi-périodique* possède une transition de phase métal-isolant d’Anderson, confortée par l’existence d’un mapping [55] ainsi que par des études numériques [56]. L’expérience de Chabé et al. réalisée à Lille rapporte ainsi une valeur de $\nu = 1.63 \pm 0.05$ de l’exposant critique de la transition de phase associée. Cette mesure constitue aujourd’hui encore la seule mesure expérimentale des exposants critiques de la transition d’Anderson compatible avec les estimations numériques [19][57].

2.3 Vers l’étude du régime critique

Nous avons vu dans la section précédente que la plateforme des atomes ultra-froids constitue un outil idéal pour étudier la problématique de la propagation cohérente d’ondes dans des milieux désordonnés. En revanche, malgré l’observation de la localisation d’Anderson dans des systèmes unidimensionnels ainsi que la transition d’Anderson dans des systèmes tridimensionnels, l’étude à énergie résolue de la transition d’Anderson reste un défi de taille auquel les trois expériences menées n’ont pas pu apporter de réponse.

Dans cette partie, nous allons donc décrire les manquements des différentes expériences afin de dresser un état de l’art de l’étude de la transition d’Anderson avec des atomes

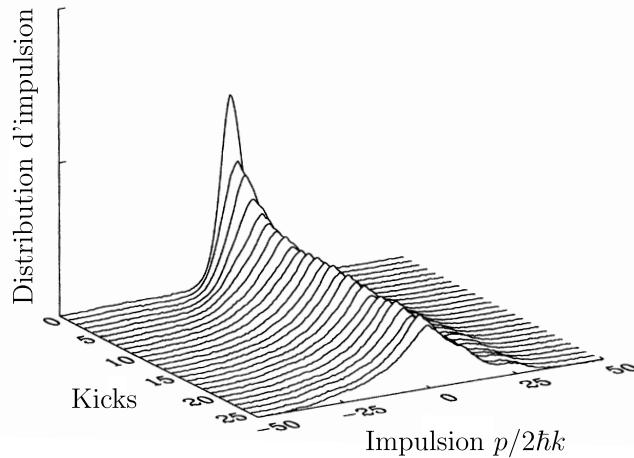


FIGURE 2.7 – Localisation dynamique d'atomes froids. Un nuage d'atomes de sodium est soumis à des kicks périodiques, induisant une marche aléatoire dans l'espace des impulsions. Après un certain nombre de kicks, la distribution d'impulsion se fige et présente une décroissance exponentielle. Figure tirée de [63].

ultra-froids. Enfin, nous nous pencherons brièvement sur l'approche suivie par notre équipe pour tenter de dépasser ces limitations.

2.3.1 Etat de l'art de l'étude de la transition d'Anderson avec des atomes ultra-froids

Comme nous allons le voir plus en détails, les trois expériences menées jusqu'à présent ont pour similarité d'estimer le seuil de mobilité à l'aide de la fraction localisée. La détermination précise du seuil de mobilité constitue une étape cruciale vers l'étude du régime critique de la transition d'Anderson.

Contrairement aux exposants critiques de la transition d'Anderson, l'énergie critique de la transition, le seuil de mobilité, dépend des détails microscopiques du désordre. L'utilisation de désordres de type speckle par les expériences, de distribution asymétrique (voir chapitre 5), résultent en un comportement complexe du seuil de mobilité, qui diffère entre potentiels répulsifs ou attractifs.

Expérience d'Urbana Champaign

La première expérience à donner une estimation du seuil de mobilité à l'aide d'atomes ultra-froids a été menée en 2011 à Urbana Champaign aux États-Unis [52]. Celle-ci se base sur l'expansion d'un nuage thermique de ^{40}K polarisé³ dans un speckle répulsif anisotrope. L'analyse des auteurs repose sur l'observation d'une double structure du profil de densité atomique pour des temps de propagation $t \geq 20\text{ms}$, interprétée comme la coexistence d'états localisés et d'états diffusifs. En définissant la fraction localisée comme la rapport entre le nombre d'atomes localisés et le nombre d'atomes total $f_{\text{loc}} = N_{\text{loc}}/(N_{\text{loc}} + N_{\text{D}})$, il est possible d'estimer le seuil de mobilité en remarquant que seuls les atomes d'énergie

3. Le ^{40}K est une espèce fermionique dont les collisions dans l'onde s sont supprimées si les atomes se trouvent dans le même état de spin. On peut ainsi négliger les interactions entre atomes.

inférieure à E_c restent localisés :

$$f_{\text{loc}} = \int_{-\infty}^{E_c} dE \mathcal{D}_E(E) , \quad (2.13)$$

où $\mathcal{D}_E(E)$ est la distribution d'énergie des atomes dans le potentiel désordonné.

Afin de déterminer la distribution d'énergie $\mathcal{D}_E(E)$, les auteurs font l'hypothèse que l'allumage lent du désordre sur les atomes ne modifie pas leur distribution d'énergie, alors déduite de la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann. En introduisant la *fonction spectrale*⁴ $A(\mathbf{k}, E)$ représentant la probabilité qu'une particule d'impulsion \mathbf{k} ait une énergie E en présence de désordre

$$\mathcal{D}_E(E) = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} A(\mathbf{k}, E) \mathcal{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) , \quad (2.14)$$

l'hypothèse des auteurs selon laquelle le désordre n'affecte pas la distribution d'énergie des atomes revient à assimiler la fonction spectrale à une distribution infiniment fine :

$$A(\mathbf{k}, E) = \delta \left(E - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \right) . \quad (2.15)$$

De nombreuses critiques ont été formulées quant à l'interprétation des données expérimentales [66]. Notamment, les très courts temps de propagation dans le désordre ne permettent pas de conclure quant à l'observation à proprement parler d'états localisés, indissociables d'états très lentement diffusifs. La fraction localisée extraite et le seuil de mobilité sont donc largement surestimés. De plus, l'observation de la localisation d'Anderson à trois dimensions requiert l'utilisation d'un désordre fort (comme spécifié par le critère de Ioffe-Regel $kl_B \sim 1$) pour lequel la distribution d'énergie $\mathcal{D}_E(E)$ est profondément modifiée. Les résultats de cette étude ne permettent donc pas de conclure quant à la mesure du seuil de mobilité [78].

Expérience de Palaiseau

La seconde expérience, réalisée à Palaiseau en 2012, se focalise sur l'évolution temporelle de l'expansion d'un condensat de Bose-Einstein de ^{87}Rb dilué dans la superposition cohérente de deux speckles croisés afin d'obtenir un désordre quasi-isotrope [45]. Le suivi de la densité atomique $n(\mathbf{x}, t)$ au cours de l'expansion jusqu'à 6 s témoigne d'une double structure pour les désordres les plus forts, identifiée à l'existence d'une partie localisée et d'un fond diffusif, comme illustré figure 2.8 :

$$n(\mathbf{x}, t) = f_{\text{loc}} n_i(\mathbf{x}) + n_D(\mathbf{x}, t) . \quad (2.16)$$

L'estimation de la fraction localisée f_{loc} est réalisée en suivant la densité atomique au centre du nuage⁵, ajustée par l'asymptote $f_{\text{loc}} + \chi/t$, qui tient compte de la contribution de la partie diffusive aux temps longs, voir figure 2.8. L'utilisation d'une telle limite asymptotique permet ainsi de s'affranchir des temps de propagation finis.

4. Cette quantité est d'une importance capitale pour l'étude de la localisation d'Anderson avec des atomes froids. Elle sera étudiée plus en détails dans le chapitre 7.

5. Il s'agit en réalité de la densité atomique intégrée suivant la direction d'imagerie, voir section 3.3.4.

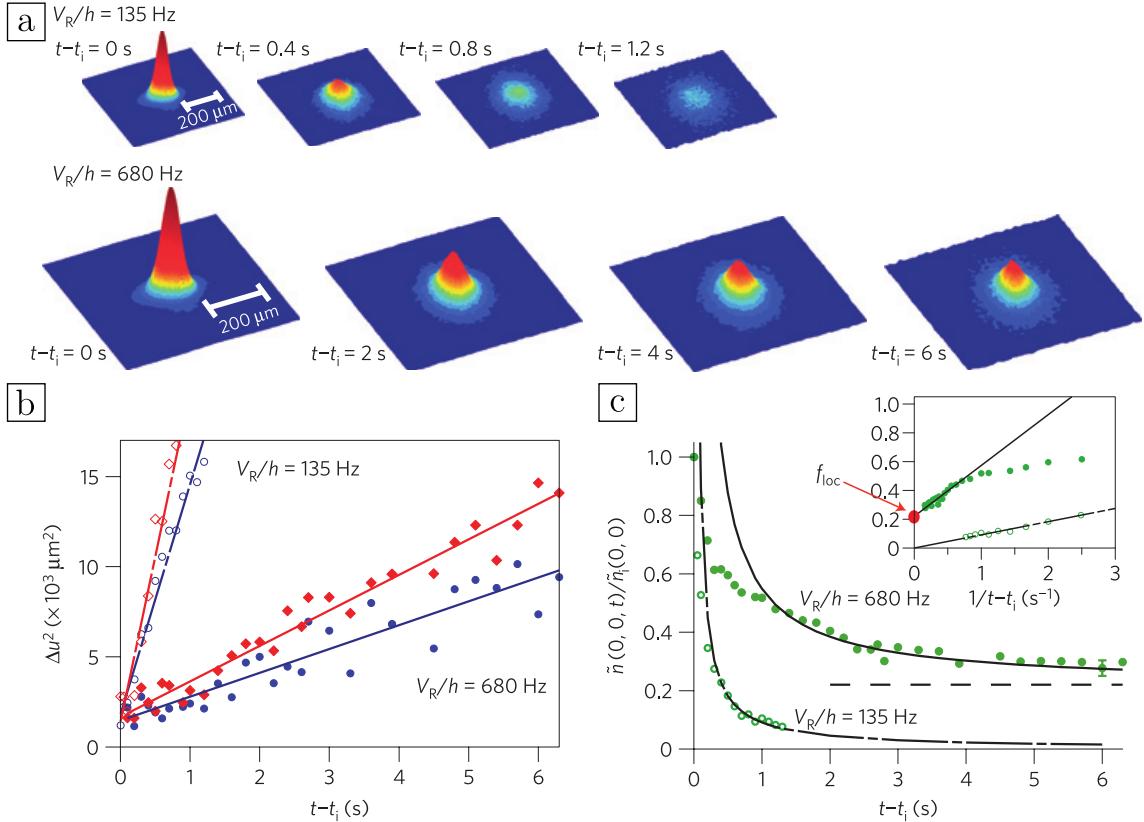


FIGURE 2.8 – Expérience de Palaiseau. **a :** Images expérimentales du nuage de ^{87}Rb après propagation dans le désordre. Pour un désordre de 135 Hz , le nuage a une dynamique de diffusion. Pour un désordre de 680 Hz , une partie localisée apparaît parmi un fond diffus lent. **b :** Évolution temporelle de la taille du nuage selon deux axes. L'augmentation de l'amplitude du désordre ralentit la diffusion du nuage. **c :** Évolution de la densité atomique au centre du nuage. Le régime asymptotique (aux temps longs) permet de déterminer la fraction localisée. Figure tirée de [45].

Étant donné la très faible énergie des atomes, l'onde de matière initiale peut être considérée comme une onde plane $|\mathbf{k} = 0\rangle$. Contrairement à l'expérience d'Urbana Champaign, le désordre est allumé brusquement, projetant ainsi l'état initial sur les différents états propres du désordre. À l'aide de l'équation 2.14, on trouve que la distribution d'énergie des atomes dans le désordre est donnée par

$$\mathcal{D}_E(E) = A(\mathbf{k} = 0, E) , \quad (2.17)$$

calculée numériquement. Une fois la distribution d'énergie des atomes dans le désordre connue, il est possible d'estimer le seuil de mobilité à l'aide de l'équation 2.13 [81].

Si l'observation de l'arrêt de l'expansion d'une partie du nuage est directe dans cette expérience, la détermination du seuil de mobilité est quant à elle très indirecte. En effet, celle-ci repose sur deux calculs intermédiaires : le calcul numérique de la fonction spectrale $A(\mathbf{k} = 0, E)$ et le calcul de E_c .

Expérience de Florence

La troisième expérience, réalisée en 2015 à Florence, est la dernière expérience en date cherchant à déterminer le seuil de mobilité avec des atomes ultra-froids [95]. Si celle-ci partage de nombreuses similarités avec les expériences précédentes, telles que l'utilisation d'un désordre de type speckle répulsif et l'estimation du seuil de mobilité à l'aide de la mesure de la fraction localisée, elle se distingue par l'approche utilisée pour peupler les différents états.

En effet, l'originalité de cette expérience est de moduler l'amplitude du potentiel pendant 500 ms afin de transférer une partie contrôlée des atomes initialement dans un état d'énergie E à un état d'énergie $E + \hbar\omega$ avec ω la fréquence de modulation. La fraction localisée est ensuite obtenue en détectant les atomes localisés après 500 ms supplémentaires de propagation dans le désordre, voir figure 2.9. De manière identique aux expériences précédentes, le seuil de mobilité est déterminé à l'aide de l'équation 2.13.

Une seconde distinction avec l'expérience de Palaiseau réside dans la procédure de chargement du désordre. En effet, le désordre est ici allumé progressivement et la distribution d'impulsion du nuage $\mathcal{D}_k(k)$ n'est plus associée à l'onde plane $|k = 0\rangle$. Ainsi, la distribution d'énergie des atomes dans le désordre est donnée par l'équation 2.14, où la distribution d'impulsion est mesurée expérimentalement par la méthode de temps de vol et la fonction spectrale est calculée numériquement. La détermination de la distribution d'énergie nécessite donc de calculer la fonction spectrale pour toutes les impulsions du nuage.

L'expérience de Florence se caractérise donc par une nouvelle approche à la mesure du seuil de mobilité. En particulier, l'attention portée à la sélection de l'énergie des atomes marque le début de l'étude de la transition d'Anderson à *énergie résolue*. Néanmoins, cette expérience comporte des limitations. Notamment, la détermination du seuil de mobilité reste indirecte : il est nécessaire de calculer numériquement la fonction spectrale $A(k, E)$ ainsi que la population transférée.

Comparaison aux résultats numériques

Les trois expériences présentées précédemment [52][45][95] ont toutes cherché à montrer l'existence d'un seuil mobilité séparant les états localisés des états diffusifs. Pour cela, celles-ci se sont basées sur la mesure de fractions localisées et sur des estimations de la distribution d'énergie des atomes dans le désordre.

Un second point commun entre ces expériences réside dans la nature du désordre utilisé : toutes ont utilisé un speckle répulsif, généré à l'aide d'un unique faisceau pour l'expérience d'Urbana Champaign tandis que les expériences de Palaiseau et de Florence ont profité de l'interférence de deux speckles croisés pour générer un désordre quasi-isotrope.

Dans le cadre de l'étude de l'effet de l'anisotropie du potentiel sur la position du seuil de mobilité pour un potentiel de type speckle, Pasek et al. [78] ont montré qu'il existe une échelle d'énergie universelle, appelée *énergie de corrélation*, qui rend la position du seuil de mobilité indépendante des longueurs de corrélation du désordre. Cette énergie est définie par

$$E_\sigma = \frac{\hbar^2}{m\bar{\sigma}^2} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma} = (\sigma_x \sigma_y \sigma_z)^{1/3}, \quad (2.18)$$

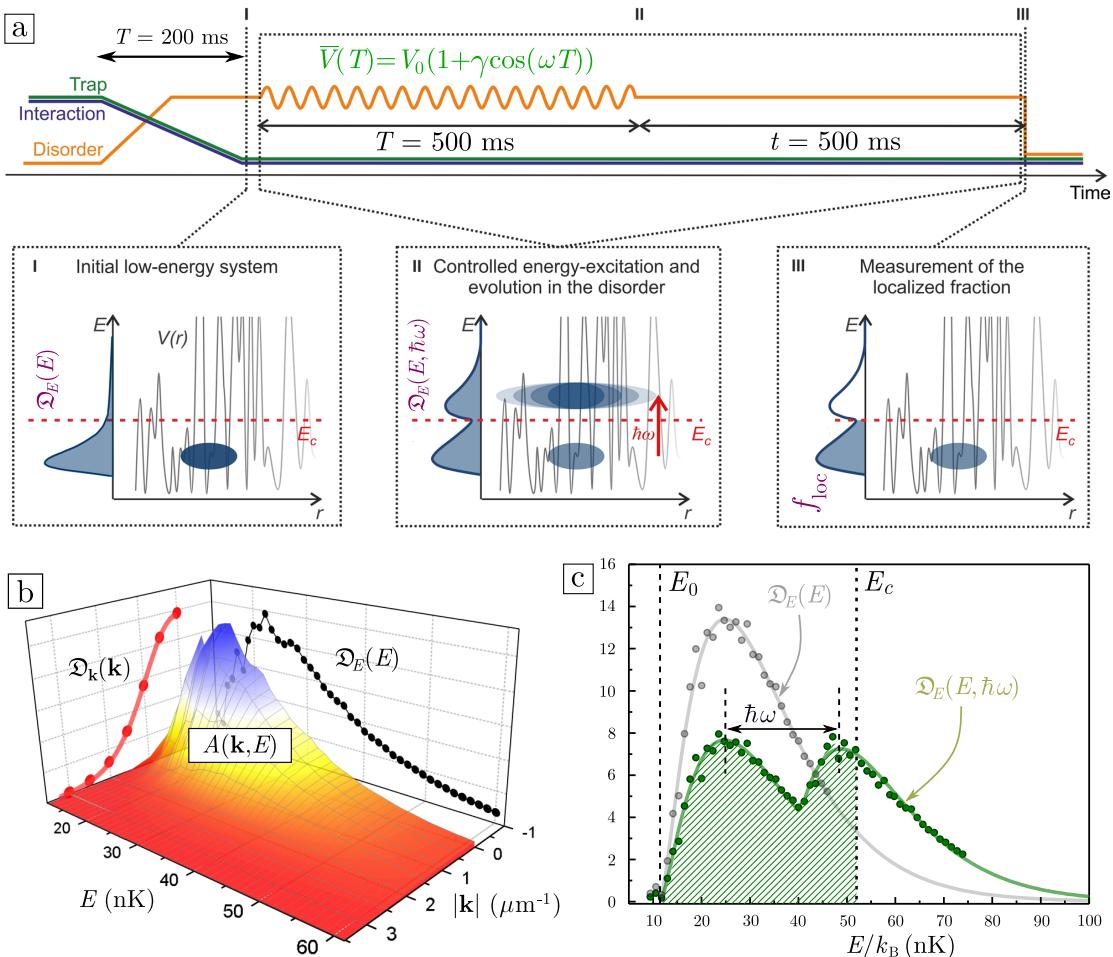


FIGURE 2.9 – **Expérience de Florence.** **a** : Procédure de mesure du seuil de mobilité. Un état de basse énergie est chargé dans le désordre. Une modulation de l'amplitude du désordre permet de transférer une énergie $\hbar\omega$ à certains atomes. La propagation dans le désordre permet d'éliminer la partie diffuse, révélant ainsi la fraction localisée. **b** : Fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ calculée numériquement. Celle-ci permet de calculer la distribution d'énergie des atomes dans le désordre à partir de la distribution d'impulsion des atomes mesurée après le chargement du désordre. **c** : Exemple de distribution d'énergie des atomes après chargement, modulation et propagation dans le désordre. La courbe grise correspond à la distribution d'énergie après chargement du désordre, la courbe verte correspond à la distribution d'énergie après modulation de l'amplitude du désordre et la surface verte correspond à la fraction des atomes qui sont localisés. Figure tirée de [24].

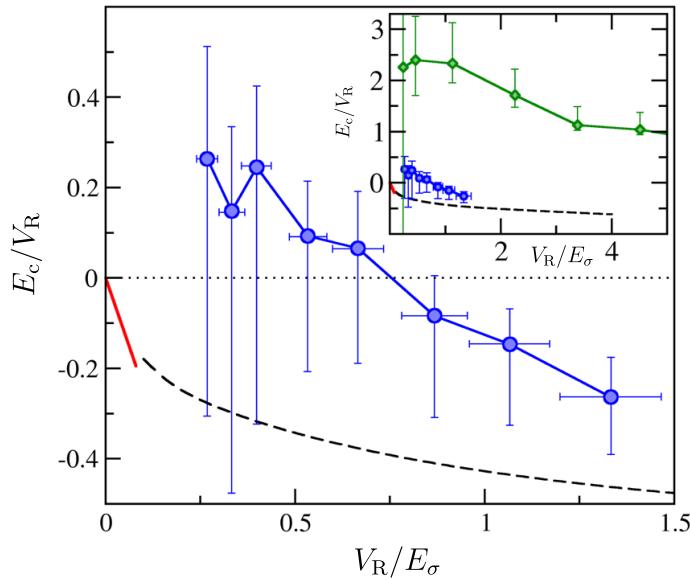


FIGURE 2.10 – Comparaison des résultats expérimentaux à des simulations numériques. Evolution du seuil de mobilité E_c en fonction de l'amplitude du désordre V_R . La ligne pointillée noire correspond à la prédiction universelle $E_c/V_R = \mathcal{F}(V_R/E_\sigma)$. Les résultats de l'expérience de Palaiseau sont représentés par la ligne rouge, tandis que les résultats de l'expérience de Florence sont reportés par des points bleus. Les résultats de l'expérience d'Urbana Champaign sont représentés par des points verts dans l'encart. Figure tirée de [78].

où les σ_i correspondent aux longueurs de corrélation selon chaque direction.

À l'aide de cette définition, Pasek et al. ont pu comparer les résultats des différentes expériences à une unique courbe universelle $E_c/V_R = \mathcal{F}(V_R/E_\sigma)$ obtenue à l'aide de simulations numériques. La compilation de ces résultats est illustrée figure 2.10.

Les résultats de l'expérience d'Urbana Champaign, en points verts dans l'encart, montrent un désaccord significatif avec les résultats numériques. En particulier, les résultats expérimentaux surestiment fortement le seuil de mobilité en raison du très court temps de propagation dans le désordre et de l'hypothèse 2.15. L'expérience de Palaiseau, dont les résultats sont représentés en rouge, semblent en accord quantitatif avec les prédictions numériques. Les résultats de l'expérience de Florence sont représentés en bleu et semblent en accord qualitatif avec les résultats numériques. Néanmoins, les données expérimentales semblent légèrement surestimer le seuil de mobilité, probablement en raison d'un temps de propagation trop court dans le désordre ou du calcul de la distribution d'énergie. L'ensemble de ces résultats montre donc qu'il est fondamental d'avoir des temps de propagation dans le désordre de plusieurs secondes afin de ne pas surestimer le seuil de mobilité.

2.3.2 Nécessité d'une spectroscopie pour sonder le régime critique

Les trois expériences citées précédemment reposent sur une détermination indirecte du seuil de mobilité, et nécessitent une estimation numérique de la distribution d'énergie $\mathcal{D}_E(E)$, capitale pour calculer le seuil de mobilité. Comme nous l'avons vu, l'obtention de la distribution d'énergie passe par l'intermédiaire de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$, qu'aucune

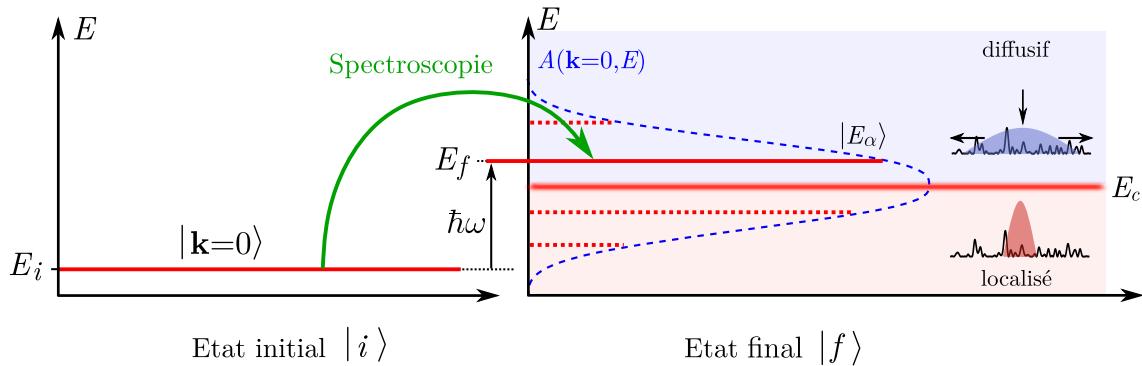


FIGURE 2.11 – Approche spectroscopique de l'étude la transition d'Anderson.
Dans l'optique de sonder la transition d'Anderson, il est nécessaire de peupler sélectivement les différentes énergies du désordre. Pour cela, l'onde est préparée dans un état insensible au désordre, puis est transférée à une énergie bien définie dans le désordre à l'aide d'une spectroscopie. Enfin, l'expansion du nuage permet de caractériser l'énergie adressée en terme de localisation ou de diffusion.

de ces expériences n'a mesurée.

De plus, dans le cas d'une estimation fiable de la fonction spectrale, la coexistence d'une phase localisée et d'une phase diffusive témoigne d'une large distribution d'énergie, rendant l'étude du régime critique et plus particulièrement des exposants critiques de la transition impossible.

Il apparaît donc que, dans l'optique de sonder le régime critique, il est important de maîtriser le paramètre de contrôle de la transition d'Anderson, c'est à dire l'énergie E de l'onde. Pour cela, une nouvelle approche expérimentale résolue en énergie s'avère nécessaire, approche pour laquelle il est possible de peupler sélectivement les états $|E\rangle$ d'énergie bien définie du désordre. Il s'agit donc de réaliser une spectroscopie du désordre.

Le protocole expérimental de spectroscopie de la transition d'Anderson est proche de celui de l'expérience de Florence : un état initial $|i\rangle$ libre de faible énergie est transféré sélectivement dans un état propre $|E_\alpha\rangle$ du désordre dans un premier temps, puis une expansion de plusieurs secondes dans le désordre permet de déterminer si cet état est localisé, ou non.

Depuis ces premiers résultats expérimentaux novateurs, la mise en place d'une telle spectroscopie sur notre expérience a permis de mesurer les fonctions spectrales $A(\mathbf{k} = 0, E)$ (le protocole de mesure sera explicité dans le chapitre 7), démontrant notre capacité à adresser des énergies spécifiques dans le désordre [107]. Cependant, différentes limitations expérimentales ont empêché de procéder aux mesures d'expansion nécessaires à la caractérisation des différents états d'énergie en terme de localisation. Les deux principales sources de limitation identifiées seront discutées dans les chapitres 4 et 5.

3. Production d'ondes de matière

Dans la partie précédente, nous nous sommes concentrés sur la physique des atomes ultrafroids dans le désordre. En particulier, nous avons mis en évidence le fait que l'approche des atomes ultrafroids constitue une plateforme idéale pour l'étude de la propagation d'ondes dans un milieu désordonné, plateforme déjà éprouvée par l'observation de la localisation d'Anderson d'ondes de matières dans un désordre optique.

À présent, concentrons-nous sur la description de l'un des deux éléments-clé de la propagation d'ondes dans le désordre : notre source d'ondes de matière. Le second élément, notre désordre optique, sera quant à lui présenté dans le chapitre 5.

Dans ce chapitre, nous nous attacherons donc à définir ce qu'est un condensat de Bose-Einstein puis nous décrirons ses principales propriétés. Dans un second temps, nous nous intéresserons aux outils dont nous disposons pour manipuler les atomes, puis nous terminerons en présentant la manière dont ces outils sont implémentés sur notre dispositif expérimental.

3.1 Condensation de Bose-Einstein

Commençons par décrire ce qu'est un condensat de Bose-Einstein. Le phénomène de condensation a été prédit par Albert Einstein dans les années 1920 en s'appuyant sur les travaux de Satyendranath Bose traitant des statistiques quantiques pour des particules plus tard appelées *bosons*. Il a cependant fallu attendre les années 1960 et le développement des premiers lasers pour voir émerger les premières techniques de manipulation d'atomes. La mise au point de telles technologies a d'ailleurs valu le prix Nobel à ses principaux architectes Claude Cohen-Tannoudji, Steven Chu et William D. Phillips en 1997. Enfin, le premier condensat de Bose-Einstein gazeux de ^{87}Rb a été obtenu par l'équipe de Eric Cornell et Carl Wieman [3], rapidement suivi par un condensat de ^{23}Na obtenu par Wolfgang Ketterle [22]. Ces travaux ont été récompensés par le prix Nobel de 2001.

Depuis, des condensats de Bose-Einstein ont été produits pour un grand nombre

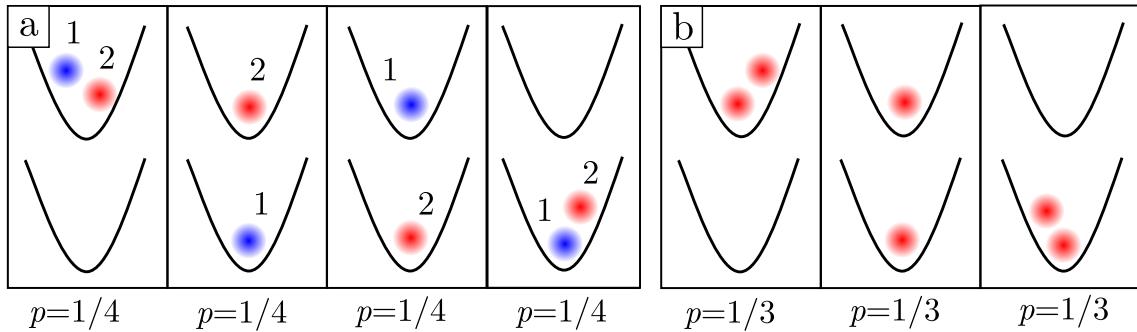


FIGURE 3.1 – a : Répartition de deux particules discernables numérotées 1 et 2 sur deux niveaux d'énergie. Quatre configurations sont possibles. **b : Répartition de deux particules indiscernables sur deux niveaux d'énergie.** Dans le cas où ces particules peuvent se trouver dans le même état (bosons), trois configurations sont alors possibles.

d'espèces chimique, pour des atomes comme pour des molécules. Aujourd'hui, les condensats sont couramment utilisés comme outils à des fins différentes, aussi leurs propriétés ont pu être abondamment étudiées par le passé et restent l'objet de l'investigation de plusieurs groupes dans le monde. Ainsi, nous n'en présenterons ici que les propriétés essentielles à la suite de ce manuscrit.

3.1.1 Statistique de Bose-Einstein

Le phénomène de condensation de Bose-Einstein trouve son origine dans la statistique de Bose-Einstein. Celle-ci se différencie de la statistique classique de Boltzmann dans le formalisme grand-canonical donné par :

$$N_{\mathbf{n}} = g_{\mathbf{n}} \exp(-(E_{\mathbf{n}} - \mu)/k_B T) \quad (3.1)$$

pour un gaz de N particules à l'équilibre thermique, avec $N_{\mathbf{n}}$ le nombre moyen d'atomes présents dans l'état d'énergie $E_{\mathbf{n}}$ et de dégénérescence $g_{\mathbf{n}}$, μ le potentiel chimique, T la température et k_B la constante de Boltzmann. L'origine de cette différence provient de l'indiscernabilité des particules : dans le cadre de la physique classique, les particules identiques sont discernables, c'est à dire qu'il est possible "d'étiqueter" les particules et de suivre leurs mouvements individuels. Dans le cadre de la mécanique quantique, une telle approche n'est pas possible car les particules sont décrites par des fonctions d'onde, étalées dans l'espace. Lors de collisions de particules identiques, le recouvrement de leur fonction d'onde fait qu'il est impossible de déterminer les trajectoires suivies par les particules. L'indiscernabilité des particules dans le cadre de la mécanique quantique est donc essentielle.

Considérons alors le cas simple de la répartition de deux particules sur deux niveaux d'énergie. Dans le cadre de la physique classique, il est possible d'attribuer un numéro à chaque particule, et il on peut placer chaque particule dans n'importe quel niveau d'énergie. Il existe alors quatre configurations que l'on supposera équiprobables, chacune de probabilité $p = 1/4$ (voir figure 3.1a). L'approche quantique, dans laquelle il n'est pas possible de discerner les particules, restreint le nombre de possibilités à trois et donc la probabilité de chacune des configurations est alors de $p = 1/3$ (voir figure 3.1b). Calculons

maintenant la probabilité que deux particules soient dans le même état. En physique classique, cette probabilité est de $p = 2/4 = 1/2$, tandis qu'en mécanique quantique, celle-ci est de $p = 2/3$. On s'attend alors à ce que l'indiscernabilité des particules en mécanique quantique modifie la statistique de Boltzmann en favorisant l'agrégation de particules dans le même état¹.

Condensation de Bose-Einstein

Considérons alors le cas d'un gaz de N bosons identiques dans un piège harmonique :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2z^2 \quad (3.2)$$

où m correspond à la masse des particules, et les ω_i correspondent aux fréquences de piégeage dans chaque direction de l'espace. Les énergies $E_{\mathbf{n}}$ sont donc celles des états liés

$$E_{\mathbf{n}} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\} \quad (3.3)$$

On peut alors montrer que le nombre moyen de particules est donné par la distribution de Bose-Einstein² :[26]

$$N_{\mathbf{n}} = \frac{g_{\mathbf{n}}}{\exp((E_{\mathbf{n}} - \mu)/k_B T) - 1} \quad (3.4)$$

Une condition de validité de cette équation est que le potentiel chimique μ soit plus petit que l'énergie E_0 du niveau de plus basse énergie, appelé niveau fondamental. Autrement, le nombre moyen de particules du niveau fondamental serait négatif (et cela impliquerait que la totalité du réservoir de particules vienne se déverser dans le niveau fondamental). Il est donc nécessaire que $\mu < E_0$. Une conséquence remarquable cette condition est que la population totale des états excités est bornée par :

$$N_e(\mu, T) = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} N_{\mathbf{n}} \leq \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \frac{g_{\mathbf{n}}}{\exp((E_{\mathbf{n}} - E_0)/k_B T) - 1} \quad (3.5)$$

Ainsi, chaque particule supplémentaire peuplera forcément l'état fondamental. On a donc ici le moyen d'accumuler un grand nombre de particules dans le même état quantique. La condensation de Bose-Einstein correspond, par définition, à cette accumulation d'un nombre macroscopique de particules dans l'état fondamental. C'est dans ce régime que les effets quantiques se manifestent, toutes ces particules partageant alors le même état quantique. Afin d'obtenir de tels effets, il est nécessaire que les fonctions d'onde des particules individuelles se recouvrent, c'est à dire que l'extension typique d'un paquet d'onde soit plus grande que la distance moyenne entre particules. Cette extension typique est donnée par la longueur d'onde thermique de de Broglie $\Delta x \sim \lambda_{dB}$, qui correspond à la taille typique d'un paquet d'onde quantique dont la largeur de la distribution en impulsion est donnée par la température. Elle s'exprime [26]

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (3.6)$$

1. Ce raisonnement est valable pour des particules bosoniques, qui peuvent se retrouver dans le même état quantique. Pour des particules fermioniques, qui ne peuvent pas occuper le même état quantique, les statistiques en sont donc profondément changées. En guise d'illustration, la seule configuration possible de la figure 3.1b pour des fermions est la seconde configuration.

2. Pour un gaz de N fermions identiques, le nombre moyen de particules est donné par la distribution de Fermi-Dirac $N_{\mathbf{n}} = \frac{g_{\mathbf{n}}}{\exp((E_{\mathbf{n}} - \mu)/k_B T) + 1}$.

avec m la masse de la particule, un atome de ^{87}Rb dans le cas de notre expérience. La distance inter-particules dans un piège est estimée à partir de la densité de particules $d \sim n^{-1/3}$. On peut alors formuler le critère phénoménologique suivant :

$$n\lambda_{\text{dB}}^3 \gtrsim 1 \quad (3.7)$$

La quantité $n\lambda_{\text{dB}}^3$ est appelée *densité dans l'espace des phases*. Tout l'enjeu des expériences d'atomes ultrafroids est d'arriver à augmenter la densité dans l'espace des phases afin de franchir le seuil donné par l'équation 3.7. Cette condition peut se réécrire en terme de *température critique* :

$$T_C \sim \frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B} N^{1/3} \quad (3.8)$$

où $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ est la fréquence moyenne du piège. Cette température critique est de l'ordre de quelques centaines de nanokelvin pour les expériences typiques d'atomes ultra-froids.

3.1.2 Propriétés d'un condensat de Bose-Einstein

On peut écrire l'équation de Schrödinger pour l'état fondamental en tenant compte de ce terme d'interaction entre particules. La description en champ moyen du condensat est alors donnée par l'équation de Gross-Pitaevskii (aussi connue sous le nom d'*équation de Schrödinger non-linéaire*) :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}) + g |\phi_0(\mathbf{x})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{x}) = \mu \phi_0(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

où $\phi_0(\mathbf{x})$ est la fonction d'onde macroscopique du condensat et μ est le potentiel chimique. La densité d'atomes est donnée par $n(\mathbf{x}) = |\phi_0(\mathbf{x})|^2$. Ainsi, la fonction d'onde du condensat $\phi_0(\mathbf{x})$ est normalisée pour donner le nombre de particules dans le condensat $N_0 = \int d\mathbf{x} |\phi_0(\mathbf{x})|^2$.

Le premier terme de gauche décrit l'énergie cinétique, le second le terme d'énergie potentielle provenant du piège, et le dernier décrit l'énergie d'interaction entre particules, proportionnelle à la densité locale $n(\mathbf{x})$. La somme de ces énergies donne le potentiel chimique μ , qui correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour rajouter une particule supplémentaire au système de N_0 particules.

Régime de Thomas-Fermi

Considérons le cas d'un condensat comportant un grand nombre de particules N_0 . L'énergie cinétique totale du condensat varie avec N_0 de manière linéaire : $\langle E_k \rangle \propto N_0$. L'énergie totale d'interaction varie quant à elle en $E_{\text{int}} \propto N_0^2$. Pour un nombre suffisamment grand de particules, il devient possible de négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire : il s'agit du régime de Thomas-Fermi. Dans ce cas, le profil de densité s'écrit

$$n(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\mu - V(\mathbf{x}))/g & \text{lorsque } \mu > V(\mathbf{x}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.10)$$

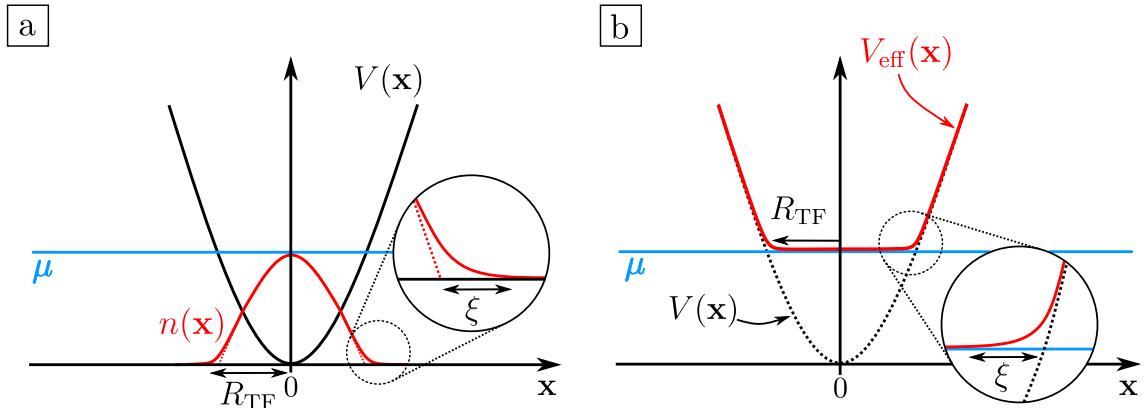


FIGURE 3.2 – a : Profil de densité dans le régime de Thomas-Fermi. La densité est une parabole inversée, liée à la forme parabolique du potentiel. Sur les bords du condensat, la densité s'écarte de la parabole sur une longueur typique appelée longueur de cicatrisation³. **b : Potentiel effectif ressenti pour des particules individuelles.** Ce potentiel effectif suit la forme du potentiel externe, et l'effet des interactions à l'intérieur du condensat écrante le potentiel externe par le potentiel chimique.

Le profil de densité est donc une parabole inversée de rayons $R_{TF,i} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}}$ en considérant le piège harmonique de l'équation 3.2. Ces rayons de Thomas-Fermi ont été déterminés par la condition $n(\mathbf{x}) = 0$. Il est intéressant de noter que le potentiel effectif vu par une particule $V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + gn(\mathbf{x})$ est constant sur l'ensemble du condensat :

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu & \text{lorsque } \mu > V(\mathbf{x}) \\ V(\mathbf{x}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.11)$$

L'énergie d'un atome est donc constante sur l'ensemble du condensat et est donnée par le potentiel chimique. μ correspond alors à l'échelle d'énergie au-delà de laquelle le condensat est perturbé par le potentiel. Il est possible d'obtenir une expression pour le potentiel chimique [79] :

$$\mu = \frac{1}{2} \left(15a N_0 \hbar^2 \bar{\omega}^3 \right)^{2/5} m^{1/5} \quad (3.12)$$

qui vaut environ $\mu/\hbar \approx 40\text{Hz}$ pour notre expérience.

3.2 Processus d'interaction lumière-matière

Précédemment, nous avons brièvement présenté le phénomène de condensation de Bose-Einstein ainsi que les principales propriétés d'un condensat. En particulier, nous avons identifié $n\lambda_{\text{dB}}^3 \gtrsim 1$ comme un critère de condensation, impliquant l'obtention de nuages denses à très basse température. Il s'agit donc de la ligne à atteindre sur notre dispositif. Dans cette partie, nous allons présenter les différents outils de manipulation d'atomes

3. En réalité, l'approximation de Thomas-Fermi décrit bien les zones à l'intérieur des condensats, cependant, il existe une petite région sur les bords du condensat où la densité est faible, et donc l'énergie cinétique ne peut plus être négligée devant l'énergie d'interaction. Cette échelle de longueur s'appelle la longueur de cicatrisation, et est donnée par $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{n_0 m g}}$ avec n_0 la densité moyenne du condensat. ξ représente donc la longueur sur laquelle le potentiel chimique n'écrante pas le potentiel externe.

dont nous disposons, tels que des champs magnétiques, des champs lasers ou encore des radio-fréquences, afin d'obtenir la condensation d'un nuage de rubidium ^{87}Rb .

3.2.1 Le rubidium ^{87}Rb

Comme déjà mentionné plusieurs fois, l'espèce atomique utilisée sur notre expérience est le rubidium ^{87}Rb , le second isotope le plus fréquent après le rubidium ^{85}Rb (l'abondance naturelle du ^{87}Rb est de 27.8%). Il s'agit d'un alcalin bosonique (il possède donc un seul électron de valence) avec un spin nucléaire $\mathbf{I} = 3/2$. Historiquement, le ^{87}Rb est l'atome ayant été condensé en premier [3], son choix reposant sur l'existence d'une transition optique cyclante à 780 nm dans sa raie D ainsi que le développement rapide des technologies laser à cette longueur d'onde. La raie D est en réalité composée de deux transitions : la raie D_1 correspondant à la transition $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{1/2}$ à 795 nm, et la raie D_2 correspondant à la transition $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$ à 780 nm. Sauf mention contraire, nous n'utiliserons que la raie D_2 dans la suite de ce manuscrit, la plupart de nos fréquences optiques se trouvant autour de 780 nm. Le choix de l'atome de rubidium est aussi dû à ses bonnes propriétés. En particulier, sa longueur de diffusion $a_s = 5.3\text{ nm}$ résulte en des taux de collisions relativement élevés, permettant une thermalisation rapide du nuage.

La structure hyperfine de l'état fondamental $5^2S_{1/2}$ consiste en deux niveaux hyperfins dégénérés $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$ séparés de $\Delta_{\text{hf}} = 6.835\text{ GHz}$. Chacun de ces états est composé de $2F+1$ sous-états Zeeman. Une vue simplifiée de cette structure est donnée figure 3.3, et un tableau récapitulatif des principales grandeurs du ^{87}Rb peut être trouvé table 3.1.

| Quantité physique | Symbole | Valeur |
|--|----------------------|----------------------------------|
| Masse | m | $1.44 \times 10^{-25}\text{ kg}$ |
| Fréquence de transition D_2 | ω_0 | $2\pi \times 384.230\text{ THz}$ |
| Longueur d'onde dans le vide (D_2) | λ_0 | 780.241 nm |
| Largeur naturelle de la transition D_2 | Γ | $2\pi \times 6.07\text{ MHz}$ |
| Fréquence de transition D_1 | ω_{D_1} | $2\pi \times 377.107\text{ THz}$ |
| Longueur d'onde dans le vide (D_1) | λ_{D_1} | 794.979 nm |
| Largeur naturelle de la transition D_1 | Γ_{D_1} | $2\pi \times 5.75\text{ MHz}$ |
| Séparation hyperfine | Δ_{hf} | 6.834 682 611 GHz |
| Moment cinétique nucléaire | \mathbf{I} | $3/2$ |
| Facteur de Landé électronique | g_S | 2.002319 |
| Facteur de Landé orbital | g_L | 0.999993 |
| Facteur de Landé nucléaire | g_I | $-0.995\,141\,4 \times 10^{-3}$ |
| Intensité de saturation | I_{sat} | 1.67 mW/cm ² |
| Longueur de diffusion | a_s | 5.3 nm |

TABLE 3.1 – Tableau récapitulatif des grandeurs physiques du rubidium ^{87}Rb que nous utiliserons dans la suite. Ces valeurs sont tirées de [104].

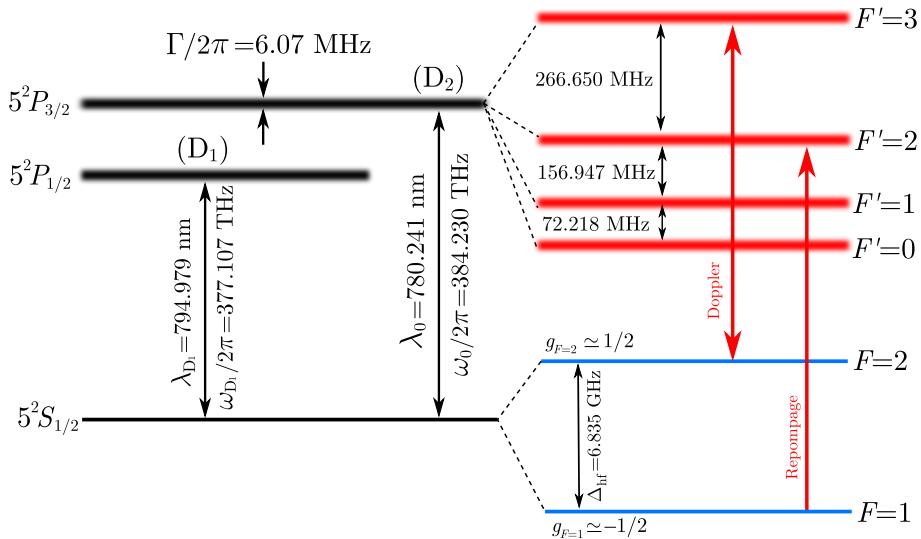


FIGURE 3.3 – **Structure de la raie D du rubidium ^{87}Rb .** Celle-ci est composée de deux transitions, la D_1 à 795 nm, et la transition D_2 à 780 nm que nous utilisons sur l'expérience. L'état fondamental $5^2\text{S}_{1/2}$ est dégénéré en deux sous-niveaux hyperfins séparés d'une énergie $h\Delta_{\text{hf}}$ avec $\Delta_{\text{hf}} = 6.835 \text{ GHz}$.

3.2.2 Potentiel magnétique

Commençons par décrire l'interaction d'un atome de rubidium avec un champ magnétique statique. Ces champs magnétiques sont couramment utilisés dans les expériences d'atomes ultra-froids pour réaliser des pièges conservatifs à l'aide champs inhomogènes (après un refroidissement laser par exemple). En particulier, l'expérience de Stern & Gerlach montre que la force appliquée aux atomes par un gradient de champ magnétique dépend de l'état interne de l'atome. Explicitons cela.

Le moment cinétique total $\hat{\mathbf{F}}$ est donné par la somme des moments cinétiques des composants de l'atome :

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \quad (3.13)$$

avec $\hat{\mathbf{I}}$ le spin total nucléaire, $\hat{\mathbf{L}}$ le moment cinétique orbital et $\hat{\mathbf{S}}$ le moment cinétique de spin électronique. On a alors un moment magnétique total $\hat{\mu} = \mu_B(g_I\hat{\mathbf{I}} + g_L\hat{\mathbf{L}} + g_S\hat{\mathbf{S}})$ où les $g_{I,L,S}$ sont les facteurs de Landé et μ_B est le magnéton de Bohr⁴. L'énergie d'interaction de ce moment magnétique avec un champ magnétique \mathbf{B} est donnée par $\hat{V} = -\hat{\mu} \cdot \mathbf{B}$. On obtient les énergies propres par la formule de Breit-Rabi, dont l'application aux états $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$ fournit :

$$\begin{aligned} E_{F=2} &= +\frac{h\Delta_{\text{hf}}}{2} \sqrt{1 + m_F \beta + \beta^2} \\ E_{F=1} &= -\frac{h\Delta_{\text{hf}}}{2} \sqrt{1 + m_F \beta + \beta^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec $\beta \simeq 2\mu_B|B|/h\Delta_{\text{hf}}$. À faible champ magnétique $|B| \ll h\Delta_{\text{hf}}/\mu_B$ (régime où $\beta \ll 1$), on

4. L'interaction avec le spin du noyau donne une correction très faible car $g_I \propto 1/m_P$ avec m_P la masse du proton, et $g_{L,S} \propto 1/m_e$ avec m_e la masse de l'électron. Ainsi, $g_I \ll g_{L,S}$ et donc on peut négliger l'effet du spin nucléaire lors de l'application d'un champ magnétique extérieur, voir table 3.1.

retrouve l'effet Zeeman linéaire avec

$$U_{\text{mag}}(\mathbf{x}) = m_F g_F \mu_B |B(\mathbf{x})| \quad (3.15)$$

et $g_{F=2} = 1/2$ et $g_{F=1} = -1/2$. L'utilisation d'un champ magnétique non homogène génère donc un potentiel dépendant de la position, tel que dans l'expérience de Stern & Gerlach. L'utilisation de tels champs inhomogènes est très répandue dans le domaine des atomes ultra-froids, en particulier pour la génération de pièges magnétiques, l'accélération de particules, mais aussi pour réaliser une lévitation magnétique comme c'est le cas sur notre expérience.

3.2.3 Forces lumineuses

On se concentre à présent sur l'interaction entre un atome et un champ laser incident. Ce champ laser comporte un grand nombre de photons émis par seconde (typiquement 10^{12} photons par seconde pour une puissance de $1 \mu\text{W}$), on peut donc décrire ce champ laser par une onde classique

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left(E(\mathbf{x}) e^{-i\omega t - i\phi(\mathbf{x})} \boldsymbol{\epsilon} \right) \quad (3.16)$$

dont l'effet sur un atome est donné par le hamiltonien $H_{\text{AL}} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. Dans la cadre de la théorie de la réponse linéaire, on introduit la polarisabilité atomique $\alpha(\omega)$ et on montre alors que la force moyenne exercée sur un atome est la somme de deux termes :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \text{Re}(\alpha(\omega)) E(\mathbf{x}) \nabla E(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \text{Im}(\alpha(\omega)) E^2(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

Un calcul pleinement quantique est nécessaire pour déterminer la polarisabilité, cependant on peut montrer que pour un système à deux niveaux, on a [36]

$$\alpha(\omega) = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^3)\Gamma} \quad (3.18)$$

où ω_0 est la fréquence de résonance et Γ est la largeur de la transition.

Potentiel dipolaire

Le premier terme de l'équation 3.17 est proportionnel à la partie réelle de la polarisabilité atomique. Ce terme décrit donc comment un moment dipolaire électrique induit interagit avec le gradient d'intensité lumineuse. Cette force est conservative et dérive d'un potentiel qui est proportionnel à l'intensité lumineuse : on parle de *potentiel dipolaire*. Dans le cas d'un faisceau très désaccordé, ce potentiel s'écrit :

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{x}) = \frac{3\pi c^2 I(\mathbf{x})}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega - \omega_0} - \frac{\Gamma}{\omega + \omega_0} \right) \quad (3.19)$$

avec $I(\mathbf{x})$ l'intensité lumineuse à la position \mathbf{x} . Appliquée au ^{87}Rb , cette expression est valable très loin de résonance : cela signifie que le laser ne voit pas le détail de la raie D , c'est à dire que le désaccord $\omega - \omega_0$ doit être très grand devant la structure fine séparant les transitions D_1 et D_2 , et l'onde laser ne voit qu'un système à deux niveaux $\{5^2S, 5^2P\}$.

Un tel potentiel présente de nombreux avantages pour les expériences d'atomes ultrafroids. Suivant le signe de la quantité $\delta = \omega - \omega_0$, ce potentiel peut être soit attractif ($\delta < 0$, on parlera alors de potentiel désaccordé vers le *rouge*), soit répulsif ($\delta > 0$, potentiel désaccordé vers le *bleu*). Les atomes seront alors attirés par les maxima d'intensité lumineuse (pour un faisceau désaccordé vers le rouge) ou bien vers les zones d'ombre (pour les faisceaux désaccordés vers le bleu). Un faisceau gaussien focalisé et désaccordé vers le rouge permet ainsi de piéger les atomes en son foyer : la forme gaussienne du faisceau attire les atomes vers le centre du faisceau.

De plus dans cette limite des grands désaccords, ce potentiel est indépendant de l'état interne. Contrairement à un piège magnétique, un piège dipolaire n'est pas sélectif en état de spin et donc offre de nombreuses possibilités grâce à la disponibilité de degrés de liberté internes. Nous tirerons profit de cet avantage de différentes manières dans la suite.

Cependant, l'utilisation de tels désaccords (plusieurs centaines de nanomètres) constraint l'utilisation de forte intensités lumineuses afin d'obtenir des potentiels suffisamment importants. Ainsi, il est courant que les expériences d'atomes ultrafroids utilisent des lasers ayant des puissances de plusieurs Watts⁵ focalisés sur de petites tailles, typiquement de l'ordre de 100 µm.

Insistons sur le fait que l'expression 3.19 a été obtenue dans le contexte d'un système à deux niveaux, et donc dans la limite des grands désaccords. Cette approximation n'est plus valable pour des désaccords de quelques nanomètres, le laser pouvant sonder la structure fine, voire la structure hyperfine de l'atome. Cela permet des approches originales telles que la réalisation d'un potentiel dépendant de l'état interne. En revanche, le rapprochement des transitions atomiques rend les atomes susceptibles de subir des processus de diffusions inélastiques de photons via l'émission spontanée, décrits plus bas.

Force de pression de radiation

Le second terme s'appelle *force de pression de radiation*. Il provient de la partie imaginaire de la polarisabilité atomique, qui caractérise l'absorption de photons par l'atome. Il s'agit donc d'une force inélastique qui résulte d'un grand nombre de cycles d'absorption de photons du faisceau laser et d'émission spontanée dans des directions aléatoires de l'espace⁶. L'impulsion totale cédée par émission spontanée s'annule donc, et en moyenne le transfert d'impulsion ne provient que de l'absorption de photons du faisceau laser comme illustré par le terme de droite de l'équation 3.17. En effet, le gradient de la phase du laser vaut $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{k}$. Cette force est donnée par

$$\mathbf{F}_{\text{PR}} = \hbar\mathbf{k}\Gamma_{\text{sp}} \quad (3.20)$$

avec Γ_{sp} le taux d'émission spontanée en présence du champ laser, et \mathbf{k} le vecteur d'onde associé à l'onde laser. L'interprétation est directe : en moyenne, l'atome acquiert une impulsion $\hbar\mathbf{k}$ à un taux Γ_{sp} . Ce taux vaut :

$$\Gamma_{\text{sp}} = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad \text{avec} \quad s = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1+4\delta^2/\Gamma^2} \quad (3.21)$$

5. À titre de comparaison, il ne suffit que de quelques milliWatts pour endommager l'œil humain.

6. Pour réaliser de tels cycles, il est nécessaire d'avoir une transition cyclante, c'est à dire de disposer d'un état excité dont la désexcitation renvoie forcément sur l'état d'origine.

où l'intensité de saturation $I_{\text{sat}} = \frac{\pi h c \Gamma}{3 \lambda_0^3} = 1.67 \text{ mW/cm}^2$ est une constante de l'atome de ^{87}Rb . La grandeur s s'appelle le paramètre de saturation. Celui-ci dépend de l'intensité lumineuse incidente (et donc du nombre de photons incidents) ainsi que du désaccord du laser par rapport à la résonance atomique⁷ $\delta = \omega - \omega_0$. Le paramètre de saturation est maximal en $\delta = 0$, c'est à dire lorsque le laser est à résonance. Dans le cas d'un laser très saturant $s \gg 1$, la force de pression de radiation s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{PR}} = \frac{\hbar \mathbf{k} \Gamma}{2} \quad (3.22)$$

où le facteur 2 indique que à forte saturation, un atome autant de chance d'être dans l'état excité que dans l'état fondamental. Enfin, mentionnons que pour un atome se déplaçant à une vitesse \mathbf{v} dans le référentiel du laboratoire, le désaccord devient $\delta = \omega - \omega_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ par effet Doppler. Nous reviendrons sur ce point lorsque nous décrirons les mécanismes du refroidissement laser.

3.2.4 Couplage radio-fréquence

Les outils de manipulation des atomes présentés précédemment offrent la possibilité de créer des potentiels conservatifs (comme le potentiel dipolaire ou le potentiel magnétique) ou encore des forces dissipatives à l'aide la force de pression de radiation. De manière générale, certains de ces outils dépendent de l'état interne de l'atome⁸, une dernière possibilité de manipulation des atomes consiste donc à contrôler leur état électronique. Un bon contrôle de ce degré de liberté permet donc d'augmenter l'efficacité des processus qui en dépendent (le chargement d'un piège magnétique par exemple), ainsi que de proposer des solutions technologiques originales.

Comme présenté section 3.2.1, la séparation entre les états fondamentaux $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ correspond à une fréquence Δ_{hf} de l'ordre du GHz, donc à une fréquence qui se trouve accessible électroniquement. Un couplage radio-fréquence entre ces états apparaît alors comme un formidable outil de contrôle de l'état interne des atomes, décrit par un système à deux niveaux dont le hamiltonien⁹ est donné dans la base $|F = 1\rangle, |F = 2\rangle$ par

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta_{\text{hf}} & \Omega e^{i\omega t} \\ \Omega e^{-i\omega t} & \Delta_{\text{hf}} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

avec ω la fréquence de l'onde radio-fréquence, et Ω la pulsation de Rabi qui caractérise l'amplitude rayonnée sur les atomes. En se plaçant dans le référentiel tournant, le hamiltonien du système devient

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \delta & \Omega \\ \Omega & -\delta \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

7. L'expression 3.19 n'est valable que dans un régime de faible saturation. L'utilisation de grands désaccords autorise l'utilisation de grosses puissances optiques tout en gardant $s \ll 1$. Dans ce régime, on peut estimer le taux d'émission spontanée par $\Gamma_{\text{sp}}(\mathbf{x}) = \frac{3\pi c^2 I(\mathbf{x})}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega - \omega_0} - \frac{\Gamma}{\omega + \omega_0} \right)^2$.

8. Le potentiel magnétique dépend bien évidemment de l'état interne, tandis que ce n'est pas le cas du potentiel dipolaire dans la limite des grands désaccords.

9. Le terme de couplage 3.23 est obtenu en appliquant l'approximation de l'onde tournante, c'est à dire que l'on néglige les termes en $\omega + \Delta_{\text{hf}}$ devant les termes en $\omega - \Delta_{\text{hf}}$ car on estime qu'ils évoluent rapidement, et donc qu'ils s'apparentent à leur valeur moyenne qui est nulle.

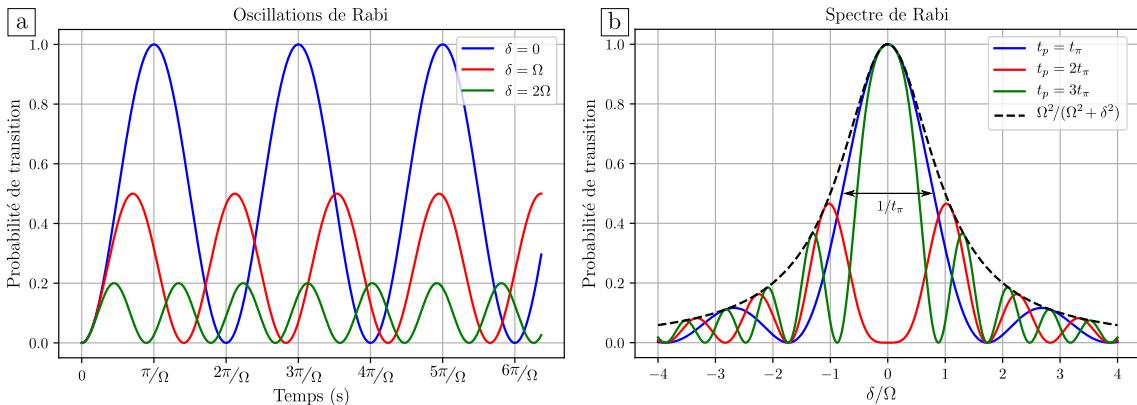


FIGURE 3.4 – a : Oscillations de Rabi tracées pour différents désaccords. Les populations oscillent à la fréquence $\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ avec une amplitude qui dépend du désaccord. L'amplitude est maximale et atteint 1 lorsque l'onde radio-fréquence est à résonance, et la population maximale transférée décroît avec l'augmentation du désaccord. **b : Spectres de Rabi pour différentes durées d'application t_p .** Le transfert de population est le plus efficace à résonance ($\delta = 0$), et l'utilisation d'un désaccord entraîne une diminution de l'efficacité de transfert. Les populations maximales transférées sont décrites par l'enveloppe lorentzienne de l'équation 3.25.

avec $\delta = \omega - \Delta_{\text{hf}}$. En supposant que le système est dans l'état $|F = 1\rangle$ à $t = 0$, la probabilité d'avoir l'atome dans l'état $|F = 2\rangle$ est donnée par la formule de Rabi [7]

$$\mathcal{P}_{|F=2\rangle}(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \sin^2 \left(\sqrt{\Omega^2 + \delta^2} \frac{t}{2} \right) \quad (3.25)$$

Cette formule met en évidence un caractère résonant des transitions radio-fréquences :

- Dans le cas d'un grand désaccord $\delta \gg \Omega$, la probabilité de transition est très faible à n'importe quel instant.
- À résonance $\delta = 0$, la probabilité de transition peut atteindre 1, même pour un couplage très faible (Ω petit).

Ces caractéristiques sont illustrées figure 3.4. En effet, l'enveloppe lorentzienne représentée figure 3.4b montre les populations maximales transférées, faibles lorsque $|\delta| > \Omega$. On retrouve la condition de résonance à $\delta = 0$, où l'efficacité de transfert est maximale.

3.3 Description d'un cycle expérimental

Dans la partie précédente, nous nous sommes familiarisés avec quelques outils couramment utilisés sur les expériences d'atomes ultrafroids pour piéger et manipuler les atomes. Dans cette nouvelle partie, nous nous pencherons sur l'implémentation de ces outils sur notre expérience afin d'obtenir un condensat de Bose-Einstein de ^{87}Rb . La présentation qui en sera donnée ici se verra succincte, nous nous contenterons d'illustrer brièvement les différentes étapes de refroidissement qui mènent à la condensation. De nombreux détails pourront être trouvés dans les thèses des doctorants qui ont contribué à faire de cette expérience ce qu'elle est aujourd'hui : [29][86][9][44][67][24]...

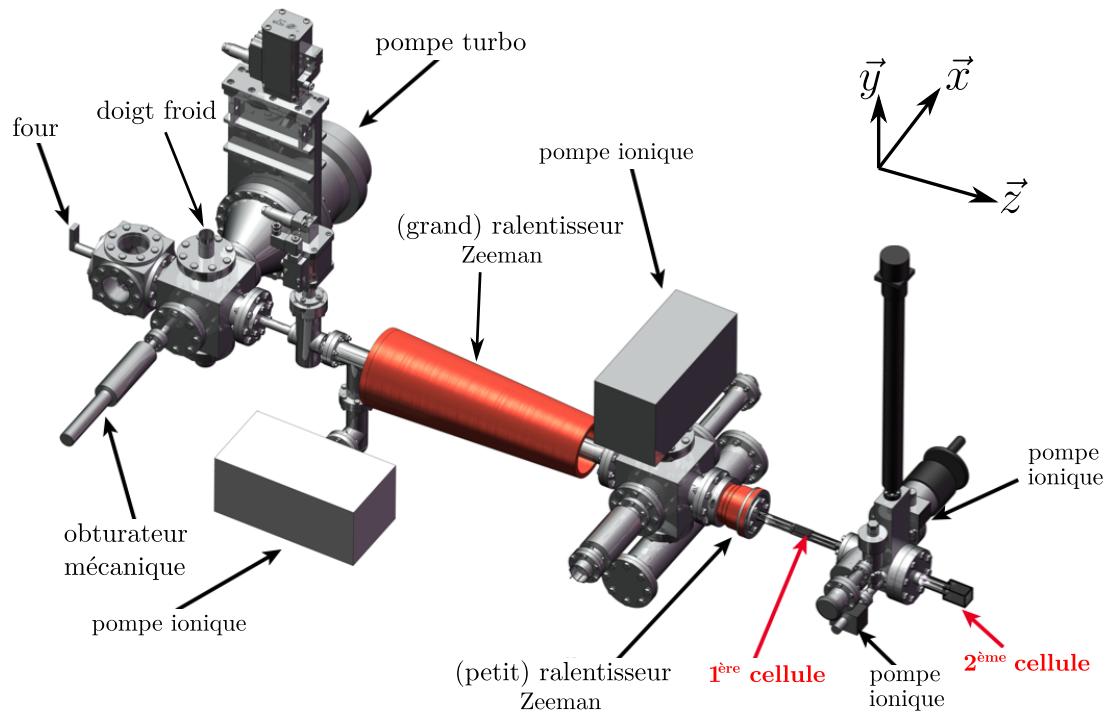


FIGURE 3.5 – Vue d’ensemble du corps de l’expérience. Les atomes se trouvent dans un montage sous ultra-vide, composé de deux chambres dans lesquelles les atomes sont manipulés.

3.3.1 Présentation générale du dispositif

Comme toutes les expériences d’atomes ultra-froids, la manipulation des atomes se déroule sous ultra-vide afin de s’affranchir des conditions extérieures. En particulier, on évite ainsi les collisions avec des particules extérieures à température ambiante, ce qui chaufferait notre gaz et détruirait la cohérence d’un nuage condensé. Une vue d’ensemble de l’enceinte à vide est donnée figure 3.5 qui montre aussi les pompes utilisées en continu pour maintenir le vide. Notre dispositif est composé d’un four chauffé à 120 °C qui éjecte les atomes de rubidium, il s’agit de notre source d’atomes. Un doigt froid refroidi à -30 °C sert de diaphragme et permet de filtrer le jet d’atomes tout en adsorbant les atomes qui sont bloqués afin de pas polluer le vide. Un obturateur mécanique permet de couper le jet lorsqu’on ne souhaite pas accumuler des atomes en cours de cycle. Les atomes sont décélérés dans le ralentisseur Zeeman et capturés dans la première cellule où ils subissent les premières étapes de refroidissement. Ils sont ensuite transportés dans la seconde cellule où ils sont refroidis jusqu’à la condensation. C’est dans cette seconde cellule que se déroulent les expériences de science, on l’appelle alors *Chambre de science*.

3.3.2 Première chambre

C’est dans la première chambre que se déroulent les premières étapes de refroidissement du gaz de rubidium. Celles-ci sont dans un premier temps basées sur le refroidissement laser, puis dans un second temps sur un piégeage magnétique et l’évaporation forcée à l’aide d’un couteau radio-fréquence.

Refroidissement laser

Le principe du refroidissement laser repose sur la force de pression de radiation, présentée section 3.2.3. Une compréhension du phénomène de refroidissement laser peut être donnée à l'aide du désaccord $\delta = \omega - \omega_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ dans le cas d'un atome se déplaçant à vitesse \mathbf{v} . Dans le référentiel de l'atome, la condition de résonance $\delta = 0$ s'écrit $\omega_0 = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. L'atome va donc absorber un photon d'énergie $\hbar\omega$ et en émettre un d'énergie $\hbar\omega_0$ (d'énergie plus grande que le photon absorbé dans le cas d'un décalage vers le rouge par effet Doppler). Il y a donc eu un transfert d'énergie entre l'énergie cinétique et le désaccord. La répétition de tels cycles permet ainsi de transférer beaucoup d'énergie cinétique de l'atome vers le désaccord entre photons absorbés et photons rayonnés.

La possibilité de répéter ces cycles d'absorption de photons et d'émission spontanée repose sur l'existence d'une transition cyclante entre les états hyperfins $|F = 2\rangle$ et $|F' = 3\rangle$. La désexcitation de $|F' = 3\rangle$ renvoie forcément l'atome dans l'état $|F = 2\rangle$ car les règles de sélection imposent $F' - F = \{0, \pm 1\}$. En revanche, on peut accidentellement envoyer des atomes dans l'état excité $|F' = 2\rangle$ car la séparation avec l'état ciblé $|F' = 3\rangle$ n'est que de 266 MHz. Statistiquement, un atome visite cet état tous les 50 cycles environ, et sa désexcitation peut faire tomber les atomes dans l'état $|F = 1\rangle$. Cet état étant un état noir, pour conserver les atomes, on doit alors utiliser un second laser appelé *repompeur* qui permet de recycler les atomes perdus vers la transition cyclante¹⁰. Il est accordé sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$.

Notre dispositif laser se compose alors d'un laser principal de refroidissement accordé sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$. Il est secondé d'un second laser *repompeur* accordé sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. Enfin un dernier laser sert de référence de fréquence pour les deux précédents en étant asservi par absorption saturée. Une représentation schématique de l'ensemble de ces lasers et de leur amplification peut être trouvée figure 3.6.

Le ralentisseur Zeeman

La première étape consiste à ralentir suffisamment le jet d'atomes pour pouvoir les capturer dans un premier piège. Un laser désaccordé vers le rouge par rapport à la transition cyclante $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ permet de réaliser une décélération des atomes à l'aide de cycles d'absorption et d'émission spontanée de photons. Cependant, le ralentissement des atomes entraîne un éloignement de la résonance à cause de l'effet Doppler. Pour palier à ce problème, on applique un champ magnétique pour satisfaire localement la condition de résonance par effet Zeeman. Ce champ est appliqué à l'aide d'une bobine comportant un nombre de tours par unité de longueur variable, représentée figure 3.5 entre le four et la première chambre. Ainsi, on est capable de réduire la vitesse des atomes de 100 ms^{-1} à environ 20 ms^{-1} sur une distance de seulement 1 m.

Le piège magnéto-optique

Une fois les atomes suffisamment ralenti, ils sont capturés dans le piège magnéto-optique (abrégé en *MOT* pour l'anglais *Magneto-Optical Trap*). Celui-ci est composé de trois

¹⁰ À titre d'illustration, le temps de vie du piège magnéto-optique a été mesuré à une dizaine de secondes. Sans le faisceau repompeur, les atomes tombent dans l'état noir $|F = 1\rangle$ en quelques micro-secondes seulement.

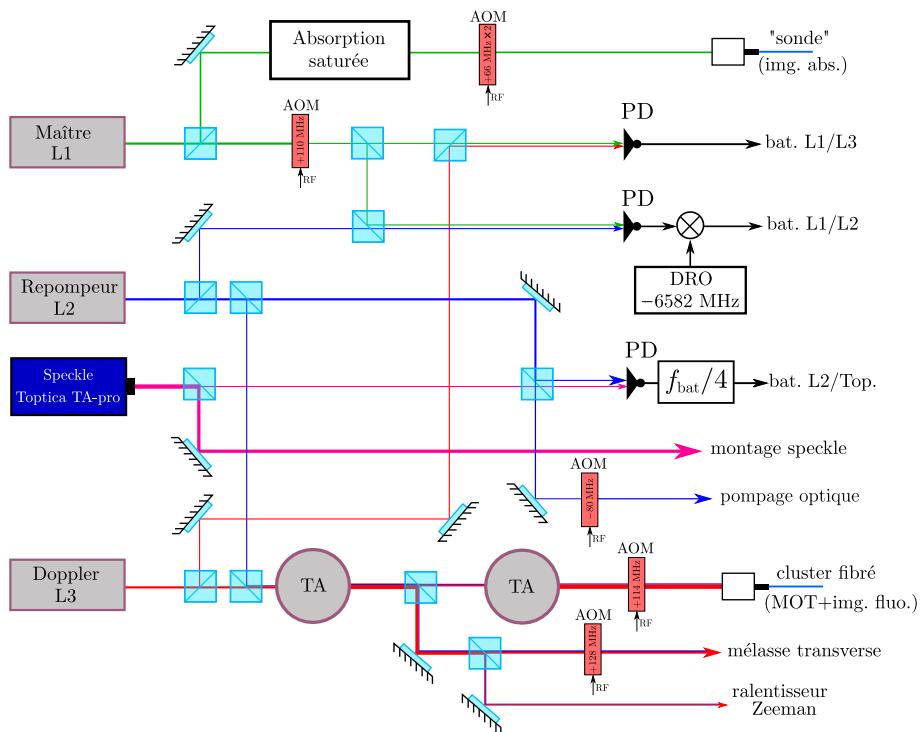


FIGURE 3.6 – Représentation schématique de notre montage laser. Le laser maître L_1 sert de référence de fréquence en étant asservi par absorption saturée. Le laser de refroidissement Doppler L_3 est asservi par battements avec L_1 . Le laser repompeur L_2 est lui aussi asservi par battements avec L_2 grâce à l'utilisation d'électronique rapide. Notons enfin que les faisceaux de L_2 et L_3 sont mélangés avant amplification (TA). Les faisceaux arrivant sur les atomes comporteront alors les fréquences provenant de ces deux lasers. Un obturateur mécanique (non représenté) permet de couper le faisceau de L_2 allant vers les amplificateurs.

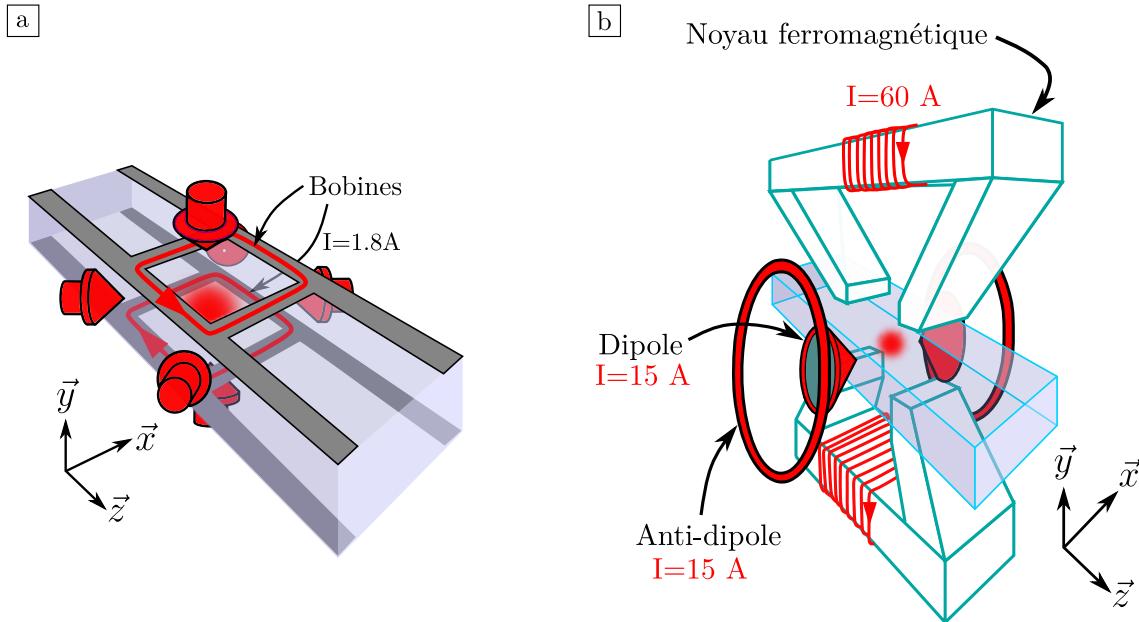


FIGURE 3.7 – a : Éléments du piège magnéto-optique. Il est réalisé à l'aide de trois paires de faisceaux contra-propageants et de deux bobines formant un champ quadrupolaire. Ces bobines sont faites à partir de circuits imprimés posés sur la cellule. **b : Géométrie du piège magnétique.** Un champ quadrupolaire intense est créé selon les directions \vec{y} et \vec{z} par un électroaimant. Un champ de biais est généré par deux paires de bobines suivant la direction \vec{x} . Ce champ possède une courbure longitudinale et est responsable du confinement suivant cette direction.

paires de faisceaux contra-propageants désaccordés vers le rouge d'environ $\delta = -16\text{ MHz}$, de polarisations opposées σ^+ et σ^- . Chacun de ces faisceaux possède une puissance d'environ 12 mW . De plus, deux bobines en configuration anti-Helmholtz permettent de générer un champ quadrupolaire, donc un gradient magnétique dans les trois directions de l'espace, afin de créer une force de rappel. On charge environ 2×10^9 atomes en moins d'une seconde grâce à la mélasse transverse qui permet de collimater le jet d'atomes et donc d'améliorer le flux. Une fois le chargement saturé, on coupe le champ magnétique pendant quelques millisecondes afin de réduire fortement la température : c'est l'étape de mélasse optique qui permet de descendre la température à environ $50\text{ }\mu\text{K}$.

Piège magnétique et évaporation radio-fréquence

Après l'étape de mélasse, on souhaite manipuler les atomes dans un piège magnétique. Afin d'augmenter le nombre d'atomes piégeables magnétiquement, il est nécessaire de manipuler l'état interne des atomes. On procède ainsi à une étape de dépompage en éteignant le faisceau de repompage et en accordant le faisceau de refroidissement sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$: en moins d'une milliseconde, les atomes se trouvent dans

l'état $|F = 1\rangle$, dont seul le sous-état Zeeman $|F = 1, m_F = -1\rangle$ peut être piégé ^{11 12}. Afin de maximiser la population de ce sous-état, on allume un faisceau de pompage optique accordé sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$ et polarisé σ^- pendant 40 µs. En parallèle, on allume le champ du dipôle afin de définir un axe de quantification.

Le piège magnétique que l'on utilise est un piège de type *Ioffe-Pritchard*. Il est composé essentiellement de deux éléments :

- Un champ de biais orienté dans la direction \vec{x} , généré par une paire de bobines (*dipôle*) de configuration légèrement plus éloignée que celle de Helmholtz : on a ainsi une courbure positive dans la direction longitudinale au centre des bobines. Une seconde paire de bobines (*anti-dipôle*) permet d'abaisser le champ constant au centre du piège, et donc de le comprimer [29].
- Un champ quadrupolaire dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) généré par un électroaimant ferromagnétique épais (*quadrupôle*) comportant deux entrefers et deux bobines excitatrices dans deux sens opposés. L'épaisseur importante du matériau magnétique minimise l'effet de l'électroaimant dans la direction \vec{x} .

Le confinement dans la direction \vec{x} est donc réalisée par le champ de *dipôle*, tandis que le confinement dans les directions \vec{y} et \vec{z} est fait par le *quadrupôle*. La présence du champ de dipôle permet aussi de s'affranchir des pertes par transition Majorana, le champ ne s'annulant à aucun endroit de l'espace. On obtient ainsi un nuage piégé magnétiquement comportant environ 1×10^9 atomes tous dans le même sous-état zeeman à une température de $\sim 300 \mu\text{K}$.

Une fois le nuage thermalisé, on procède à une étape de refroidissement évaporatif grâce à la méthode de *couteau radio-fréquence*. Le principe du refroidissement évaporatif sera détaillé section 4.4, mais on peut le résumer de la manière suivante :

- On tronque le piège de telle sorte que quelques atomes très énergétiques (la queue de la distribution de vitesses de Maxwell-Boltzmann) puisse s'échapper du piège.
- Les collisions entre les particules étant restées dans le piège permettent au système de retourner à l'équilibre thermique à une température plus basse.

La troncature du piège se fait à l'aide d'une onde radio-fréquence rayonnée par les bobines MOT. Celle-ci induit une transition de l'état piégé $|F = 1, m_F = -1\rangle$ à l'état non piégé $|F = 1, m_F = 0\rangle$ lorsque la condition de résonance $\hbar\omega_{\text{RF}} = m_F g_F \mu_B B(\mathbf{x})$ est vérifiée. En abaissant progressivement la fréquence rayonnée pendant une dizaine de secondes, on obtient finalement un nuage de 70×10^6 atomes à une température de $10 \mu\text{K}$.

3.3.3 Chambre de science

Après ces premières étapes de refroidissement, les atomes sont transportés dans une seconde cellule où l'on procède à une évaporation tout-optique pour franchir le seuil de

11. Il est le seul des trois sous-états Zeeman de *etatF1* à avoir le produit $g_F m_F > 0$, c'est à dire qu'il s'agit d'un état *Low Field Seeker*, qui est attiré par les zones de faible champ magnétique. En effet, c'est à l'aide d'un minimum de champ magnétique que l'on réalise ce piège, le théorème de Wing interdisant les maxima de champ magnétique.

12. Des huit sous-états Zeeman fondamentaux, il s'agit de celui ayant la plus grande probabilité d'occupation tout en étant piégeable, justifiant son choix.

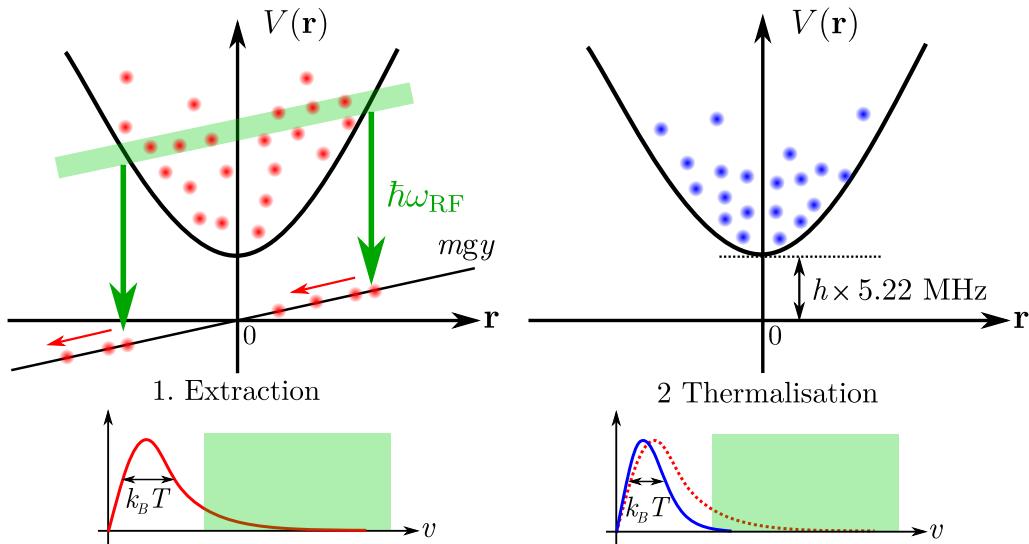


FIGURE 3.8 – Principe de l'évaporation radio-fréquence. L'application d'une radiofréquence permet de tronquer le piège magnétique, et d'éliminer les atomes les plus énergétiques. L'énergie moyenne par particule étant plus basse, la température s'en retrouve abaissée après thermalisation.

condensation. La raison d'être de cette seconde cellule est de profiter d'un maximum d'accès optiques tout en s'affranchissant de l'environnement magnétique de la première chambre, en particulier celui du ferromagnétique. Nous nous contenterons ici de présenter les grandes lignes des éléments de cette seconde chambre, de nombreux détails pourront être trouvés dans la thèse d'Alain Bernard [9], dans la thèse de Fred Jendrzejewski [44] et de Kilian Muller [67]. De plus, certains de ces éléments ont été modifiés au cours de ma thèse et une étude plus approfondie en sera présentée dans le chapitre 4.

Transport dans une pince optique et piège dipolaire croisé

Après évaporation radio-fréquence, on transfert le nuage dans une pince optique. Il s'agit d'un piège dipolaire créé par focalisation sur les atomes d'un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 1070\text{ nm}$ et de puissance estimée d'environ 1.5 W. Dans le plan focal, ce faisceau a une taille $w_0 = 28\text{ }\mu\text{m}$ et la distance de Rayleigh vaut donc $z_R = \pi w_0^2 / \lambda = 2.3\text{ mm}$. On obtient ainsi 10×10^6 atomes à une température de $10\text{ }\mu\text{K}$ aux alentours du foyer de la pince¹³.

Le transport dans la seconde chambre se fait à l'aide d'une platine de translation montée sur coussin d'air *Aerotech ABL800/40*. Les optiques de focalisation de la pince se trouvant sur cette platine, on déplace ainsi les atomes de 40 cm en moins de 2 s, comme illustré figure 3.9. On estime l'efficacité de transfert à 75%, mesurée en effectuant un aller-retour pour retourner dans la première chambre.

Une fois les atomes arrivés dans la seconde chambre, un second faisceau de piégeage

13. Ce faible taux de transfert entre le piège magnétique et la pince provient du mauvais recouvrement spatial entre ces deux pièges. La pince est très allongée suivant la direction \vec{z} , tandis que le piège magnétique est étendu suivant la direction \vec{x} . Cette géométrie est un héritage des débuts de cette expérience, originellement utilisée pour étudier le laser à atomes.

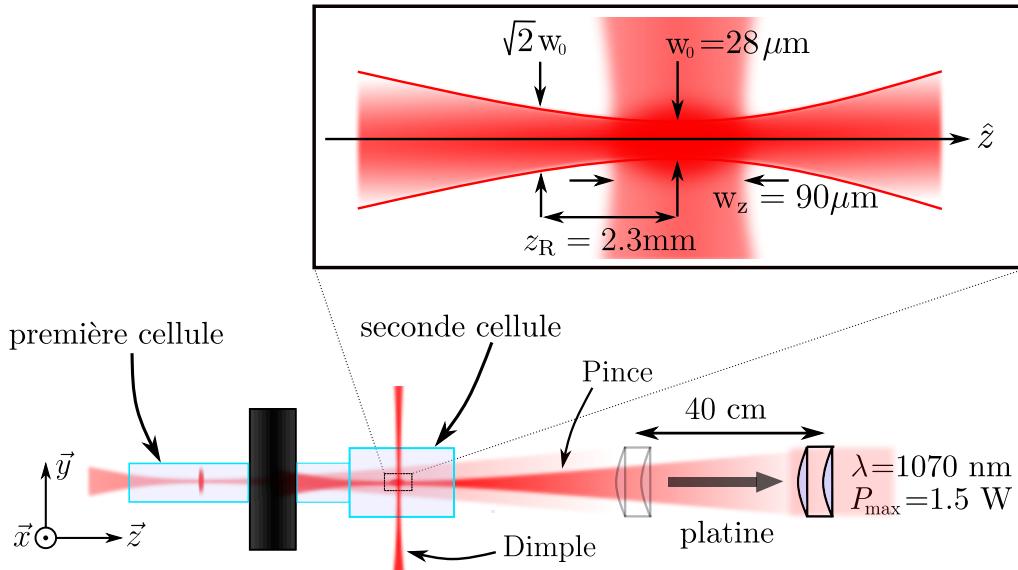


FIGURE 3.9 – Illustration du transport et du piégeage optique. Les atomes sont capturés autour du foyer de la pince dans la première chambre, et le point de focalisation est déplacé de 40 cm à l'aide d'une platine de translation. Une fois le transport terminé, on allume un second faisceau de piégeage vertical (*dimple*).

dipolaire de longueur d'onde 1070 nm et de puissance 7 W est allumé afin de comprimer le nuage suivant la direction \vec{z} qui correspond à la direction longitudinale de la pince. Ce faisceau *Dimple* est de forme elliptique, de tailles $180\text{ }\mu\text{m} \times 90\text{ }\mu\text{m}$ dans les directions \vec{x} et \vec{z} respectivement. Étant donnée sa grande longueur de Rayleigh (de l'ordre du centimètre), on suppose que le piégeage vertical induit est négligeable devant toutes les autres sources de piégeage. Ainsi, dans le piégeage dipolaire croisé, le confinement suivant les directions \vec{x} et \vec{y} est fait par la pince, tandis que le confinement suivant la direction \vec{z} est fait par le faisceau vertical¹⁴, comme illustré figure 3.9. À ce stade, on estime disposer de 3×10^6 atomes à une température de $10\text{ }\mu\text{K}$.

Enfin, une dernière étape d'évaporation est requise pour franchir le seuil de condensation. Succinctement, celle-ci consiste à diminuer la puissance des lasers afin de diminuer la profondeur des potentiels de piégeage de telle sorte que les atomes les plus énergétiques puissent s'échapper. Cette étape sera étudiée plus en détails dans la partie 4.4.

Lévitation magnétique

Une contrainte liée à l'étude la localisation d'Anderson réside dans les grands temps de propagation dans le désordre requis. Dans l'expérience visant à observer la localisation d'Anderson à trois dimensions, plusieurs secondes d'évolution dans le désordre ont été nécessaires [45], ce qui n'est pas possible en présence de la gravité. En conséquence notre expérience dispose d'une lévitation magnétique permettant de s'affranchir de la gravité et donc de multiplier nos possibilités expérimentales. Celle-ci a été mise en place durant la thèse d'Alain Bernard et de nombreux détails concernant ce système et ses performances se trouvent dans son manuscrit. Cependant, la lévitation magnétique a fait l'objet d'une

14. La forme allongée du dimple dans la direction \vec{x} fait que le piégeage dans cette direction est très faible comparé à celui de la pince. De plus, cela rend le piégeage tolérant face à un léger défaut d'alignement.

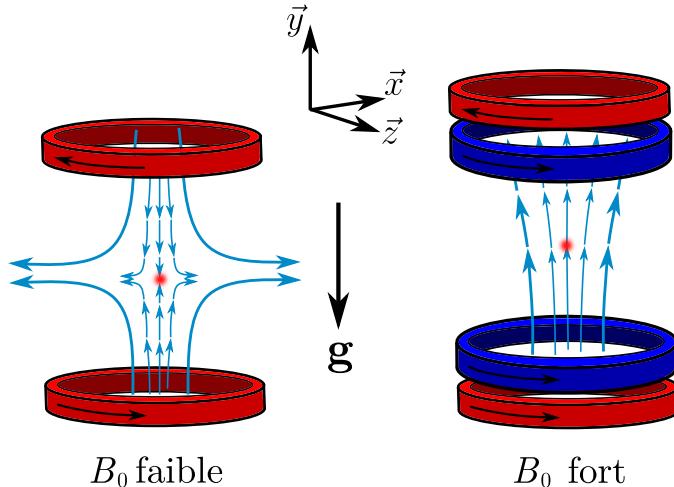


FIGURE 3.10 – Design simplifié de la lévitation magnétique. Un gradient magnétique est appliqué aux atomes grâce à une paire de bobines parcourues par des courants opposés. La conservation du flux magnétique entraîne des gradients dans les autres directions de l'espace. L'application d'un fort champ de biais créé par d'autres bobines permet de minimiser l'impact de ces gradients et de diminuer les fréquences de piégeage (ou d'anti-piégeage) associées.

attention particulière durant ma thèse, aussi une étude approfondie en sera donnée dans la partie 4.2. Donnons en tout de même quelques caractéristiques.

Le principe de la lévitation magnétique est de compenser la force de pesanteur à l'aide d'un gradient magnétique. Pour l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ qui est *Low Field Seeker*, il s'agit d'un gradient de 30 G cm^{-1} . Cependant, le théorème de Wing impose une valeur minimale aux fréquences de piégeage dues à la conservation du flux magnétique :

$$\sum_{i=x,y,z} \omega_i^2 \geq \left| \frac{mg^2}{2m_F g_F \mu_B B_0} \right| \quad (3.26)$$

avec g l'accélération de la pesanteur et B_0 la norme du champ magnétique à la position des atomes. Une stratégie de réduction de ces fréquences de piégeage (les ω_i sont positifs pour l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$) consiste à augmenter fortement le champ B_0 , on utilise alors des bobines pour créer un tel champ, qui peut monter jusqu'à 2000 G, entraînant des fréquences de piégeage de l'ordre de $\omega_i/2\pi \sim 0.2 \text{ Hz}$. Une version simpliste du design de notre lévitation est donnée figure 3.10.

Une autre stratégie couramment utilisée par l'équipe est de se placer dans l'état $|F = 2, m_F = -2\rangle$ qui est *High Field Seeker*, il sera donc expulsé de la lévitation par les courbures résiduelles. Il s'agit pour nous d'un avantage puisque cela favorise le processus d'évaporation, de plus on ne pourra pas attribuer à la lévitation un éventuel arrêt de l'expansion du nuage dans l'étude de la localisation d'Anderson. Pour atteindre cet état, on applique une transition radio-fréquence dans le piège optique croisé avant évaporation.

Pour finir, citons un dernier avantage offert par la lévitation magnétique : la compensation de la gravité n'entraîne pas d'effet *SAG*, c'est à dire que la gravité ne vient pas "pencher" le potentiel de notre piège optique. Nous avons donc la possibilité de pousser l'évaporation optique jusque dans un domaine où la gravité aurait normalement dû tirer

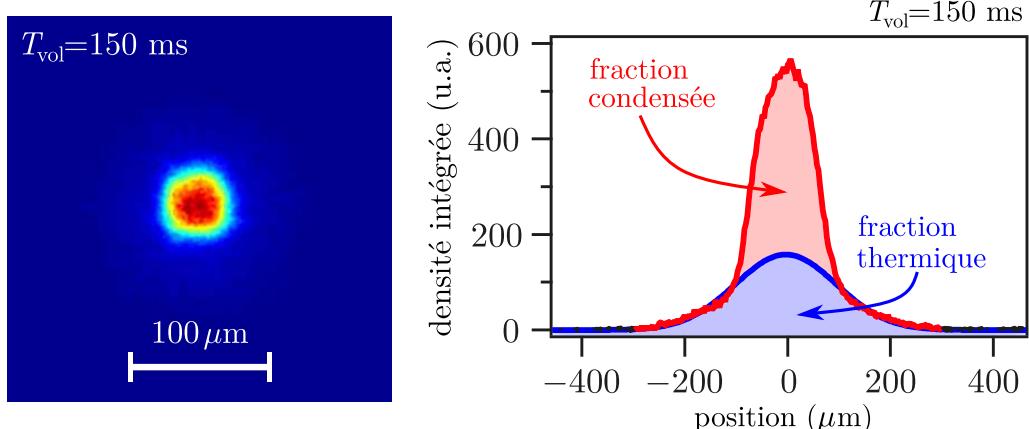


FIGURE 3.11 – Image expérimentale d'un condensat de Bose-Einstein. Cette image correspond à celle d'un condensat après expansion pendant un temps de vol de 150 ms. L'image de droite correspond au profil de la densité intégrée suivant une direction, et montre la double structure témoignant d'une partie condensée. La partie condensée a un profil parabolique (en rouge), tandis que la partie thermique est de forme gaussienne (en bleu).

les atomes en dehors du piège, nous pouvons ainsi évaporer beaucoup plus loin et atteindre des températures extrêmement basses.

Refroidir encore plus

L'assimilation d'un condensat de Bose-Einstein à une onde de matière monochromatique $|k = 0\rangle$ nécessite de pouvoir négliger la largeur de distribution de vitesses Δk , et implique donc d'obtenir des nuages extrêmement froids. Bien que la lévitation magnétique nous permette d'obtenir des températures particulièrement basses, le refroidissement peut être poussé encore plus loin.

Une première technique consiste en une décompression du nuage à l'aide de l'ouverture adiabatique du piège. Cette décompression se traduit par une diminution des fréquences de piégeage, que l'on obtient en changeant la taille des faisceaux de piégeage. En pratique, il nous suffit de reculer le plan de focalisation de la pince de 4.5 mm en une seconde à l'aide de la platine de translation comme illustré figure 3.12a. La température obtenue est alors donnée par le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$T' = \frac{\omega_r'}{\omega_r} T < T \quad (3.27)$$

avec ω_r la fréquence de piégeage de la pince dans la direction radiale. L'abaissement de la température est donc obtenu par diminution de la densité du nuage, c'est à dire par dilution. Cette étape se déroule en même temps que l'évaporation optique.

À la fin du cycle d'évaporation et d'ouverture adiabatique, il reste environ 2×10^5 atomes dont environ 50% forment un condensat de Bose-Einstein. Le potentiel chimique de la partie condensée est estimée à $\mu/h = 40 \text{ Hz}$, et la température de la fraction thermique est d'environ 5 nK.

Après l'extinction du piège, l'énergie d'interaction du nuage est convertie en énergie

cinétique, le nuage s'étend alors librement grâce à la lévitation. L'évolution de la taille du nuage donne alors accès à la distribution de vitesse, en particulier à sa dispersion $\Delta k \simeq 0.5 \mu\text{m}^{-1}$. Une dernière technique reposant aussi sur le principe de la dilution permet de réduire davantage cette dispersion. Cette technique dite de *refroidissement par delta-kick* consiste à transférer l'énergie d'interaction en énergie cinétique en éteignant le piège, puis à figer le mouvement des atomes en appliquant un potentiel harmonique pendant un bref instant. L'énergie cinétique est alors transformée en énergie potentielle, disparaissant à l'extinction du piège. Une illustration de ce procédé est donnée figure 3.12b.

Une approche classique permet de justifier cela. En supposant que l'expansion des atomes est balistique, la position des atomes après un temps d'expansion t_{exp} suffisamment grand est donnée par leur vitesse initiale :

$$\mathbf{x}(t_{\text{exp}}) = \mathbf{v}t_{\text{exp}} \quad (3.28)$$

Et appliquons un kick de potentiel harmonique pendant un temps Δt . La vitesse des atomes à la fin de ce kick est donnée par

$$\dot{\mathbf{x}}(\Delta t) = -\mathbf{x}\omega \sin(\omega\Delta t) + \mathbf{v} \cos(\omega\Delta t) \quad (3.29)$$

avec ω la fréquence du piège. On peut trouver Δt tel que $\dot{\mathbf{x}}_i = 0$:

$$\Delta t = \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{1}{t_{\text{exp}}\omega} \right) \quad (3.30)$$

On remarque que Δt ne dépend pas de la vitesse initiale des atomes : on peut donc geler l'ensemble du nuage en appliquant un potentiel harmonique pendant la bonne durée de kick¹⁵. La mise en œuvre expérimentale de cette technique est détaillée dans le manuscrit de thèse de Kilian Muller [67] et témoigne de résultats impressionnantes : la dispersion en vitesse s'est abaissée à $\Delta k \simeq 0.15 \mu\text{m}^{-1}$. La température effective associée est alors de $T \sim 150 \text{ pK}$, et en tenant compte de la taille du nuage de l'ordre de $\Delta x \sim 30 \mu\text{m}$, on s'approche à un ordre de grandeur de la limite de Heisenberg $\Delta x \hbar \Delta k \simeq 10 \hbar / 2$.

3.3.4 Imagerie

À la fin de la majorité de nos cycles expérimentaux, nous souhaitons obtenir des informations à propos de notre gaz d'atomes. Une grande partie de ces informations peut être extraite d'une image du nuage après extinction du piège, image que l'on obtient à l'aide d'une caméra et l'utilisation de lasers à résonance avec les atomes¹⁶. L'utilisation d'un retard (appelé *temps de vol* et abrégé en *TOF* pour l'anglais *Time Of Flight*) entre l'extinction du piège et la prise de l'image est extrêmement courant fournit de précieux renseignements.

15. Une approche équivalente consiste à dire que la force de rappel est proportionnelle à la distance parcourue par les atomes, qui est proportionnelle à la vitesse initiale. L'instant où les vitesses s'annulent ne dépend donc pas de la vitesse initiale des atomes.

16. L'utilisation de lasers à résonance conduit inévitablement à la destruction du nuage sur notre expérience. Il est donc nécessaire de répéter l'ensemble du cycle expérimental pour obtenir une seconde image des atomes.

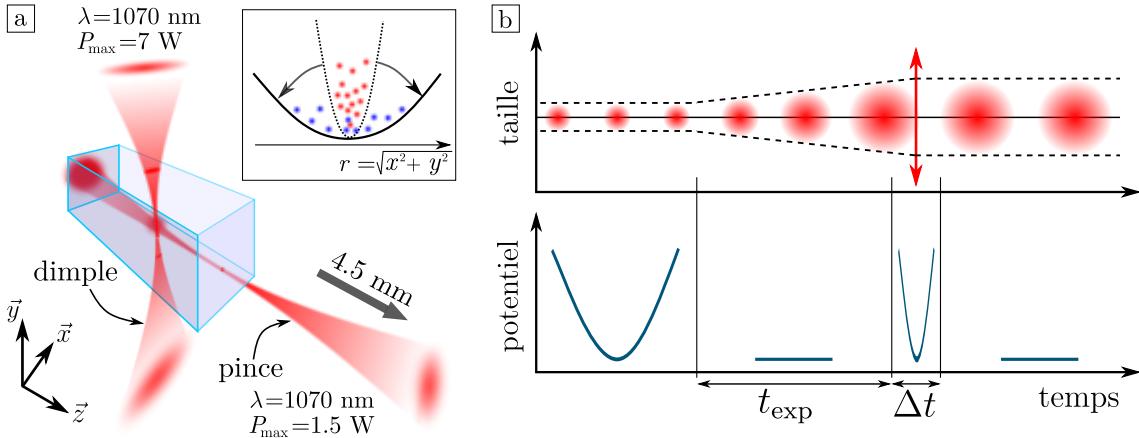


FIGURE 3.12 – a : Principe de l'ouverture adiabatique. Le déplacement du point de focalisation de la pince permet d'augmenter la taille du faisceau au niveau des atomes. La fréquence de piégeage en est alors diminuée, et on abaisse alors la température par dilution. **b : Illustration du refroidissement par *delta-kick*.** L'extinction du piège entraîne l'étalement du nuage, et le transfert de l'énergie d'interaction en énergie cinétique. On peut ensuite *focaliser* les atomes à l'aide d'un *kick* de potentiel, en transformant l'énergie cinétique en énergie potentielle, supprimée à l'extinction du piège.

Dispositif d'imagerie

L'expérience est équipée de trois caméras *EMCCD C9102* de chez *Hamamatsu*, chacune comportant une matrice de 1000×1000 pixels de taille $8 \mu\text{m} \times 8 \mu\text{m}$. Ces trois caméras sont contrôlées via l'outil d'acquisition d'images de *MATLAB*, qui permet aussi de récupérer et traiter les images obtenues. L'acquisition des images est déclenchée de manière externe par le séquenceur.

Une première caméra acquiert des images des atomes dans la première chambre selon l'axe horizontal \vec{x} avec un grossissement de 1, la zone imageable est donc de $8 \text{ mm} \times 8 \text{ mm}$. Il est possible d'utiliser cette caméra pour de l'imagerie par absorption (représentée figure 3.13) aussi que pour de l'imagerie par fluorescence grâce à un montage $4f$. Néanmoins, l'observation selon une direction induit forcément une intégration de la densité suivant cette direction : on ne peut mesurer qu'une densité intégrée.

$$n_{2D}(y, z) = \int dx n(x, y, z) \quad (3.31)$$

avec n la densité à trois dimensions.

Les deux autres caméras sont positionnées autour de la chambre de science selon l'axe horizontal \vec{x} et vertical \vec{y} . Toutes deux voient le nuage au travers d'un système optique de grossissement 3¹⁷, conduisant à une résolution de $2.71 \mu\text{m}$ pour une zone imageable de $2.71 \text{ mm} \times 2.71 \text{ mm}$. Seule de l'imagerie par fluorescence est utilisable dans cette chambre, en revanche il est possible d'utiliser ces deux caméras simultanément pour obtenir les densités intégrées suivant deux directions $n_{2D}(y, z)$ et $n_{2D}(x, y)$ pour le même nuage.

17. Ce grossissement a été mesuré en observant la chute libre du nuage en l'absence de la lévitation.

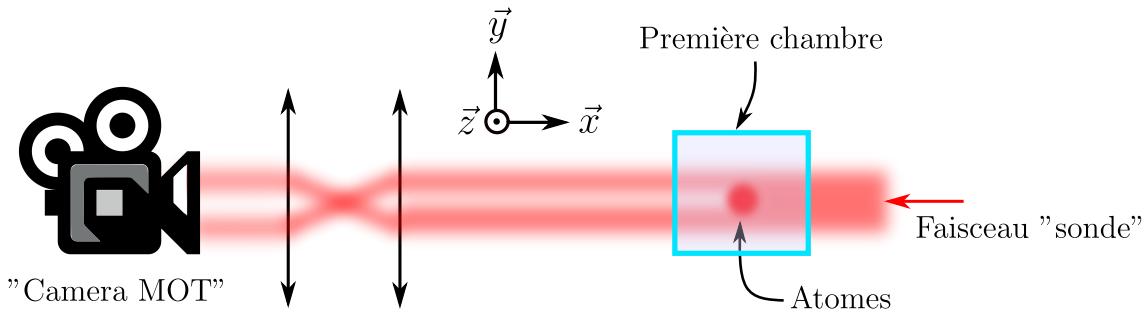


FIGURE 3.13 – Imagerie par absorption. Un faisceau collimaté est envoyé sur les atomes, qui absorbent une partie des photons qui traversent le nuage. Le signal détecté à la caméra correspond à "l'ombre" des atomes, et la comparaison avec une image du faisceau incident sans atomes permet de remonter à la densité atomique intégrée selon la direction longitudinale.

Imagerie par absorption

Le principe de l'imagerie par absorption repose sur la loi de Beer-Lambert. En effet, lorsque qu'un faisceau laser traverse un milieu, son absorption dépend directement de la densité du milieu en particules absorbantes (la densité atomique dans notre cas). Pour sonder cette densité atomique, on envoie donc un faisceau laser à résonance directement sur les atomes et la caméra comme illustré figure 3.13. Dans un régime de très basse saturation $s \ll 1$, on peut montrer que la section efficace d'absorption de photons σ est indépendante de l'intensité incidente $I_0(y, z)$. En pratique, on garde la puissance du faisceau *sonde* en dessous de $100 \mu\text{W}$ pour s'en assurer. Le faisceau *sonde* correspond à une impulsion lumineuse d'une durée de $50 \mu\text{s}$ réalisée par un laser à résonance avec la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ et permet ainsi de mesurer la densité atomique dans l'état $|F = 2\rangle$.

Afin de mesurer aussi les atomes qui sont dans l'état $|F = 1\rangle$, on procède à un transfert de population vers l'état $|F = 2\rangle$ à l'aide d'une impulsion du faisceau repompeur accordé sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ pendant une durée de $40 \mu\text{s}$. Ce transfert est réalisé à la fin du temps de vol, juste avant le déclenchement de la caméra.

L'application de la loi de Beer-Lambert permet de déterminer la densité atomique intégrée suivant l'axe longitudinal :

$$n_{2D}(y, z) = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{I_0(y, z)}{I(y, z)} \right) \quad (3.32)$$

L'opération de reconstruction du profil de densité atomique nécessite donc deux images : une image des atomes absorbant une partie du faisceau *sonde*, et une image de ce faisceau sans les atomes pour connaître le profil d'intensité $I_0(y, z)$. En pratique, on prend une troisième image afin de soustraire le bruit de fond. De plus, une bonne reconstruction du profil nécessite des contraintes supplémentaires. En effet, nous nous fixons de travailler dans un régime où la sonde ne sature pas la caméra (cela fixe une borne supérieure pour l'intensité du faisceau), et où l'absorption de photons n'est pas totale dans les régions les plus denses.

Imagerie par fluorescence

Le principe de l'imagerie par fluorescence consiste à éclairer les atomes avec de la lumière à résonance, puis à détecter la lumière que les atomes diffusent comme illustré

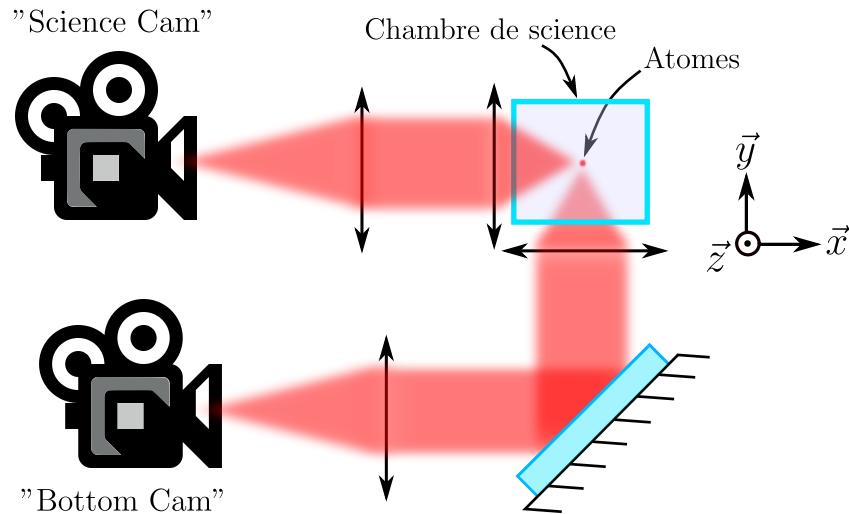


FIGURE 3.14 – Dispositif d'imagerie par fluorescence pour la chambre de science. Une caméra capte les photons de fluorescence émis par les atomes selon une direction horizontale (*Science Cam*), tandis qu'une autre capte ceux émis vers le bas avec un transport d'image (*Bottom Cam*). Les faisceaux de fluorescence ne sont pas représentés ici (selon l'axe \vec{z}).

figure 3.14. Pour cela, on envoie des faisceaux très saturants $s \gg 1$ sur les atomes afin que le taux d'émission spontanée ne dépende plus de l'intensité incidente. Un avantage de cette technique par rapport à l'imagerie par absorption est sa capacité à détecter de très faibles nombres d'atomes, rendu possible grâce à l'amplification des caméras. Un deuxième avantage réside dans la simplicité de sa mise en œuvre : l'imagerie dans la première chambre est réalisée à l'aide des faisceaux MOT. L'imagerie de la seconde chambre est quant à elle réalisée à l'aide de deux autres faisceaux dédiés. Les faisceaux d'imagerie sont à résonance avec la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ et permettent donc de sonder les atomes se trouvant dans l'état $|F = 2\rangle$. Comme pour l'imagerie par absorption, il est aussi possible d'adresser les atomes qui sont dans l'état $|F = 1\rangle$. Pour cela, on superpose aux faisceaux de fluorescence le faisceau repompeur¹⁸, accordé sur $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ pendant toute la durée de l'impulsion lumineuse, qui est typiquement de 50μs.

L'intensité fluorescée captée dans le plan d'imagerie est alors donnée par :

$$I_{\text{fluo}}(y, z) = \frac{\Omega}{4\pi} \frac{s}{1+s} \frac{\Gamma \hbar \omega_0}{2} n_{2D}(y, z) \quad (3.33)$$

avec $\Omega \simeq \pi ON^2$ l'angle solide dans lequel les photons de fluorescence sont captés par le système d'imagerie d'ouverture numérique $ON \sim 0.4$.

Théoriquement, une seule image suffit à obtenir le profil de densité atomique. Cependant, on décide de prendre une seconde image avec les faisceaux de fluorescence allumés afin de soustraire un éventuel bruit dû à ces faisceaux. Pour des raisons de simplicité de configuration des caméras, on décide aussi de prendre une troisième image du bruit de fond, non utilisée pour le calcul de densité atomique.

Étant donné le nombre de paramètres non parfaitement connus dans la formule 3.33, il est nécessaire de calibrer cette méthode d'imagerie. La calibration du nombre d'atomes se

18. Les faisceaux de refroidissement laser et de fluorescence comportent déjà une partie de repompeur : le mélange se fait avant les amplificateurs optiques et il est possible de couper la partie repompeur à l'aide d'un obturateur mécanique, voir figure 3.6.

fait par comparaison avec l'imagerie par absorption. Si la comparaison est directe dans la première chambre, celle de l'imagerie dans la chambre de science est un peu plus délicate. La méthode retenue par l'équipe consiste à calibrer l'efficacité du transfert par la pince optique à l'aide d'allers-retours pour déterminer le nombre d'atomes attendu dans la seconde chambre.

4. Mises à jour de l'expérience

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment, expérimentalement, nous pouvons créer une onde de matière obtenue par la condensation de Bose-Einstein. Nous avons ainsi présenté les principaux outils dont nous disposons pour manipuler les atomes et la manière dont nous en tirons profit sur notre dispositif. Une telle plateforme requiert une quantité importante de matériels variés qu'il est nécessaire d'entretenir, de réparer, voire de remplacer.

Dans ce nouveau chapitre, nous nous pencherons sur les modifications apportées à l'expérience au cours de ma thèse. Dans la première partie, nous parlerons d'informatique et plus particulièrement du contrôle de l'expérience. Dans un second temps, nous caractériserons la lévitation magnétique suite à une avarie sur le circuit de refroidissement à eau. Ensuite, nous calibrerons le piège dipolaire dont le laser source a été changé. Pour terminer, nous discuterons de l'amélioration de l'évaporation optique permise par les changements précédents.

4.1 Contributions au système informatique de l'expérience

Souvent absente des présentations des expériences, l'informatique occupe pourtant une place primordiale dans les dispositifs d'atomes ultra-froids. Le contrôle simultané et de manière séquentielle des différents équipements de l'expérience, souvent précis à la micro-seconde, n'est possible qu'à l'aide d'un ordinateur disposant de sorties de tension contrôlables. Cet ordinateur, appelé *séquenceur*, constitue le cerveau de l'ensemble du dispositif et contrôle tous les éléments nécessaires à la manipulation des atomes.

Le second aspect où l'informatique se rend indispensable réside dans l'acquisition et le traitement d'images. Le contrôle des caméras et l'extraction des quantités physiques à partir d'images expérimentales nécessite l'utilisation d'un ordinateur et d'au moins un logiciel adapté.

De manière générale, les ordinateurs sont les éléments du dispositif avec lesquels

l'expérimentateur interagit le plus. Dans cette partie, on présentera donc les changements informatiques ayant eu lieu durant ma thèse.

4.1.1 Contrôle de l'expérience : passage à la suite Cicero

Une modification majeure a été le changement du séquenceur de l'expérience. Le précédent système développé par *André Villing*, ingénieur électronicien du laboratoire maintenant retraité, était piloté de manière programmatique depuis le logiciel Matlab. À des fins de maintenance ainsi que de meilleures performances, le nouveau séquenceur est d'origine commerciale et est basé sur du matériel *National Instruments* :

- Un ordinateur *PXIe-8840* dans un châssis *PXIe-1078* qui alimente aussi les cartes de génération de signaux.
- Deux cartes numériques *PXIe-6535* de 32 voies chacune.
- Deux cartes analogiques *PXIE-6738* de 32 voies $\pm 10\text{V}$ chacune et codées sur 16 bits.

En addition, un circuit logique programmable (*FPGA*) *XEM3001* provenant de *Opal-Kelly* permet de générer une horloge de fréquence variable pour le matériel *National Instruments*. La justification de cette horloge de fréquence variable réside dans la grande variabilité de la durée des différentes étapes d'une expérience d'atomes ultra-froids : l'expérience peut rester dans le même état plusieurs secondes (pendant le chargement d'un MOT par exemple) tout comme elle doit pouvoir changer d'état pendant quelques microsecondes seulement (pendant l'imagerie par exemple). Une séquence durant typiquement 30 s discrétisée toutes les microsecondes pour un minimum d'une cinquantaine de voies saturerait alors la mémoire de l'ordinateur.

L'écriture de la séquence se fait à présent grâce à la suite *Cicero Word Generator*, développée au *MIT* dans le groupe de Wolfgang Ketterle [50]. Cette suite comporte deux logiciels qui fonctionnent selon une architecture client/serveur. Le client *Cicero* est une interface graphique dans laquelle l'utilisateur écrit une séquence sous la forme d'une suite d'étapes comme illustré figure 4.1. Au lancement d'un cycle expérimental, *Cicero* envoie les données de séquence au serveur *Atticus* qui calcule alors les consignes des cartes ainsi que l'horloge variable à appliquer [49].

Grâce à cette architecture client/serveur, il est possible de connecter une interface *Cicero* à plusieurs serveurs. Nous avons ainsi développé un serveur supplémentaire ¹ afin de faciliter notre traitement de données. Celui-ci enregistre les principales données de séquence ² à chaque cycle.

Ce changement de séquenceur ouvre de nouvelles perspectives en augmentant le nombre de voies utilisables (16 voies analogiques codées sur 12 bits et 48 voies numériques avec le précédent système) tout en permettant la génération de signaux arbitraires (auparavant limités à des morceaux de rampes).

1. Une attention particulière a été accordée à n'apporter aucune modification au code source de la suite *Cicero* excepté dans l'environnement de ce serveur. Les environnements de *Cicero*, *Atticus* et les environnements communs n'ont subit aucun changement pour s'assurer de la compatibilité avec la version compilée 1.64rev7 de la suite.

2. Il s'agit du nom de séquence, de l'heure de lancement, de l'ensemble des variables, des étapes, des groupes d'étapes et de la dernière consigne du piège dipolaire avant le temps de vol.

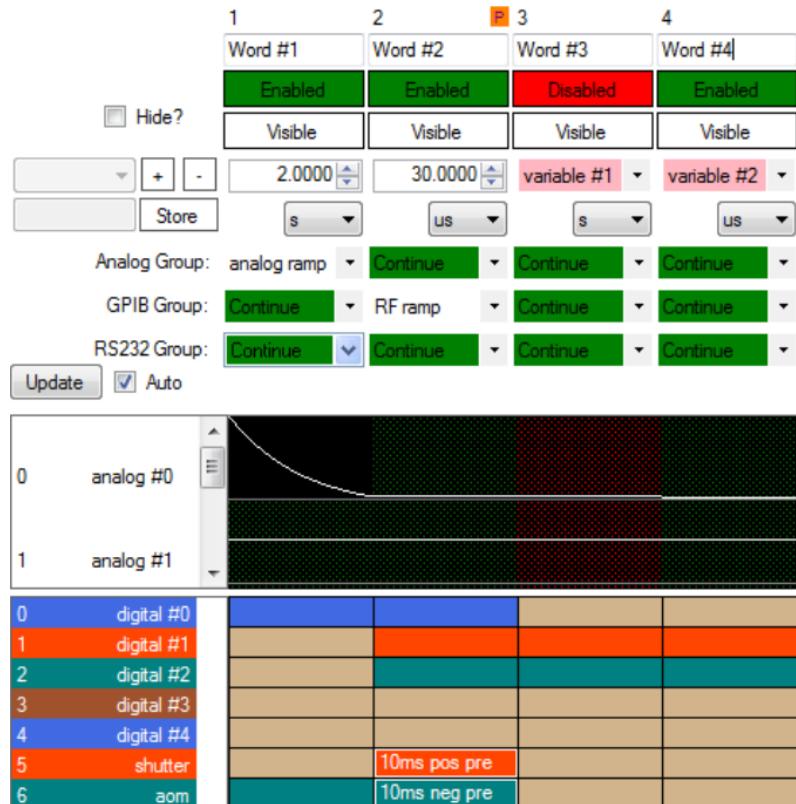


FIGURE 4.1 – **Capture d'écran de Cicero.** Une séquence est une suite d'étapes (des colonnes dans l'interface) pendant lesquelles on peut faire des motifs avec les voies analogiques. Les voies numériques changent d'état en général entre deux étapes. Il est possible de désactiver certaines étapes et d'utiliser des variables. Figure tirée de [50].

4.1.2 Développement d'une nouvelle interface d'acquisition et de traitement d'images

Comme présenté dans la partie 3.3.4, les caméras que l'on utilise sur l'expérience sont configurées et contrôlées via le logiciel Matlab. En particulier, l'acquisition et le traitement des images se faisait à l'aide d'une interface commune avec l'ancien séquenceur. Son remplacement a donc eu un impact important sur le fonctionnement de la partie imagerie.

En conséquence, nous avons réalisé une nouvelle interface graphique permettant de configurer les caméras, d'acquérir et de traiter les images, d'enregistrer les données et de contrôler tout les éléments non adressables depuis *Cicero*. Le cahier des charges de cette nouvelle interface est donc le suivant :

- Gestion des trois caméras, avec possibilité de faire l'acquisition simultanée sur les deux caméras de la chambre de science³.
- Imagerie par absorption et par fluorescence.
- Calcul en direct des grandeurs physiques pour chaque image.
- Lecture des données de Cicero récupérées grâce au serveur que nous avons développé.
- Programmation en début de cycle des sources radio-fréquence utilisées pour l'évaporation radio-fréquence et la manipulation de l'état de spin dans la chambre de science⁴.
- Enregistrement de l'ensemble des données et des paramètres du cycle pour un futur traitement.

L'utilisation de cette nouvelle interface a donc permis de centraliser les données générées par l'acquisition d'images en n'ayant plus besoin d'un ordinateur supplémentaire (et de la synchronisation associée). De plus, ce changement a permis de s'affranchir de plusieurs canaux de communication, les libérant ainsi pour le contrôle d'instruments. Enfin, l'utilisation et le fonctionnement de cette nouvelle interface Matlab sont simplifiés, permettant d'opérer avec une plus grande facilité les changements à venir sur l'expérience.

4.2 Calibration de la lévitation magnétique

Comme présenté partie 3.3.3, la lévitation magnétique est un élément essentiel de notre expérience. En plus d'être un pré-requis pour l'étude de la localisation d'Anderson à trois dimensions, celle-ci nous permet de manière plus générale d'obtenir des échantillons particulièrement froids. Son bon fonctionnement est donc une priorité pour notre expérience.

Malheureusement, une avarie dans le circuit de refroidissement de la lévitation a conduit à son démontage. Les modifications apportées avant remontage ayant pu conduire à une modification du comportement magnétique du système, une nouvelle calibration des champs générés a été menée.

3. Un ordinateur supplémentaire était nécessaire pour le contrôle de la caméra *bottom*, pilotée via une autre interface. Il fallait donc synchroniser ces deux ordinateurs qui enregistraient chacun leurs fichiers de données.

4. Cette programmation en début de cycle est rendue possible grâce à l'utilisation d'un *FileSystemWatcher* provenant d'une bibliothèque .NET utilisable dans Matlab. Un fichier texte contenant les données du cycle en cours est généré en début de séquence par le serveur que nous avons développé, déclenchant alors automatiquement sa lecture par l'interface.

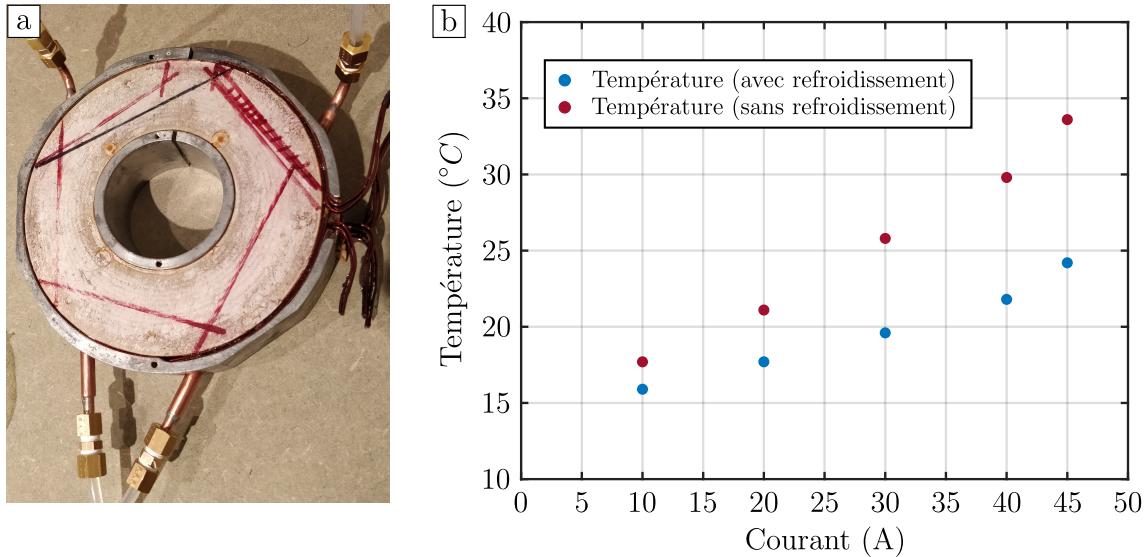


FIGURE 4.2 – a : Refroidissement de la lévitation magnétique. L'un des supports des bobines de la lévitation est maintenant refroidi à l'aide de deux tubes en cuivre le traversant. Auparavant, l'eau circulait directement dans le support dans un circuit percé illustré par les traits rouges. Les tubes en cuivre ont pu être installés en rendant une partie de ce circuit débouchant. **b : Efficacité de refroidissement.** Ces mesures ont été réalisées dans des conditions proches de véritables cycles expérimentaux. Le même courant a été appliqué pendant 10 s sur toutes les bobines à la fin de séquences habituelles. La température a été mesurée après la répétition d'au moins 30 cycles et en s'assurant de sa stabilisation.

Dans cette partie, nous présenterons dans un premier temps notre système de lévitation ainsi que les modifications qui y ont été apportées. Ensuite, nous nous pencherons sur les méthodes utilisées pour calibrer le système après sa réinstallation sur l'expérience, en commençant par des expériences d'oscillations puis à l'aide transitions radio-fréquences.

4.2.1 Implémentation de la lévitation magnétique

L'ensemble du système de la lévitation magnétique a été développé alors que l'équipe se dirigeait vers les expériences de localisation d'Anderson à trois dimensions. De nombreux détails de conception pourront être retrouvés dans le manuscrit de thèse d'Alain Bernard [9], mais rappelons les éléments nécessaires à la suite.

La lévitation magnétique est composée de plusieurs bobines collées dans un support en aluminium, qui sert aussi de réservoir thermique à l'aide d'un refroidissement à eau. Après de lourds travaux de débouchage et d'étanchéité, ce refroidissement est à présent effectué par le contact entre le support en aluminium et la circulation d'eau dans deux tubes en cuivre encastrés⁵. L'efficacité de ce refroidissement est illustrée figure 4.2.

Ces supports, disposés de part et d'autre de la cellule, comportent chacun trois bobines.

5. Auparavant, l'eau circulait directement dans des trous percés dans le support en aluminium. Le débouchage de ces trous leur a fait perdre leur étanchéité, et après quelques essais infructueux, nous avons retenu la solution de deux tubes de cuivre encastrés et débouchants. De nombreux tests électriques ont été menés sur les bobines tout au long de leur maintenance pour s'assurer de l'absence de dégradation.

Les deux paires de bobines les plus proches de la cellule créent un champ de biais au niveau des atomes, dans des configurations légèrement plus rapprochée que celle de Helmholtz pour les bobines les plus proches de la cellule et légèrement plus éloignée pour les autres⁶. Enfin, la paire de bobines la plus éloignée permet de créer un gradient magnétique qui permet de lutter contre la gravité.

Le champ magnétique au niveau des atomes peut alors être écrit

$$\mathbf{B} = \left(\frac{b'}{2}x\right)\vec{x} + \left[B_0 - b'y + b''\left(y^2 - \frac{x^2+z^2}{2}\right)\right]\vec{y} + \left(\frac{b'}{2}z\right)\vec{z}, \quad (4.1)$$

où b' correspond au gradient magnétique généré par les bobines de *Gradient*, les plus éloignées de la cellule. Le paramètre b'' est la courbure du champ généré par l'écart des bobines de *Biais* à la configuration de Helmholtz. Le potentiel magnétique étant proportionnel à la norme du champ, celle-ci est donnée à l'ordre deux par

$$B = B_0 - b'y + b''y^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b'^2}{4B_0} - b''\right)(x^2 + z^2), \quad (4.2)$$

où le terme linéaire est celui qui permet de compenser la gravité.

Comme mentionné précédemment, il existe une limite pour les fréquences de piégeage (formule 3.26) qui décroît avec la norme du champ magnétique. Une stratégie usuelle est donc de créer un champ aussi fort que possible, qui est d'environ 2000 G avec notre système (correspondant à un courant maximal de 200 A). Pour de tels champs, le potentiel magnétique n'est plus décrit par l'effet Zeeman linéaire, mais par la formule de Breit-Rabi 3.14. En revanche, pour une petite zone autour du centre de la lévitation, on peut simplifier l'étude en supposant que le champ change peu $B \simeq B_0$. On peut ainsi définir un facteur de Landé local

$$\tilde{g}_{F,m_F}(B_0) = \frac{1}{m_F \mu_B} \frac{dE}{dB}(B_0), \quad (4.3)$$

obtenu à l'aide d'un développement limité de la formule de Breit-Rabi. La physique derrière cette approche est de considérer l'effet Zeeman linéaire sur un état dont la réponse dépend du champ de Biais B_0 . La valeur du gradient nécessaire pour compenser la gravité peut alors être donnée par

$$b' = \frac{mg}{m_F \tilde{g}_{F,m_F}(B_0) \mu_B}. \quad (4.4)$$

Cette dépendance est illustrée figure 4.3 pour les différents états internes d'intérêt dans cette thèse : $|F=1, m_F=-1\rangle$, $|F=2, m_F=+1\rangle$ et $|F=2, m_F=-2\rangle$. Il est possible de déduire de cette dépendance une calibration des bobines de gradient à partir de couples $\{I_{\text{Gradient}}, I_{\text{Biais}}\}$ permettant de compenser précisément la gravité. Le gradient généré s'écrit alors $b' = c_G I_G$ avec le facteur de calibration $c_G = 0.66 \text{ G cm}^{-1} \text{ A}^{-1}$. Notons également trois résultats remarquables de la figure 4.3 :

- L'état $|F=2, m_F=-2\rangle$ nécessite un gradient indépendant du biais magnétique pour être lévité.
- Les états $|F=1, m_F=-1\rangle$ et $|F=2, m_F=+1\rangle$ sont lévités pour le même gradient à bas champ.

6. L'intérêt de cette configuration est de contrôler la courbure du champ au niveau des atomes indépendamment de la valeur du champ. Il suffit de jouer sur l'équilibre des courants dans les différentes paires de bobines pour changer la courbure.

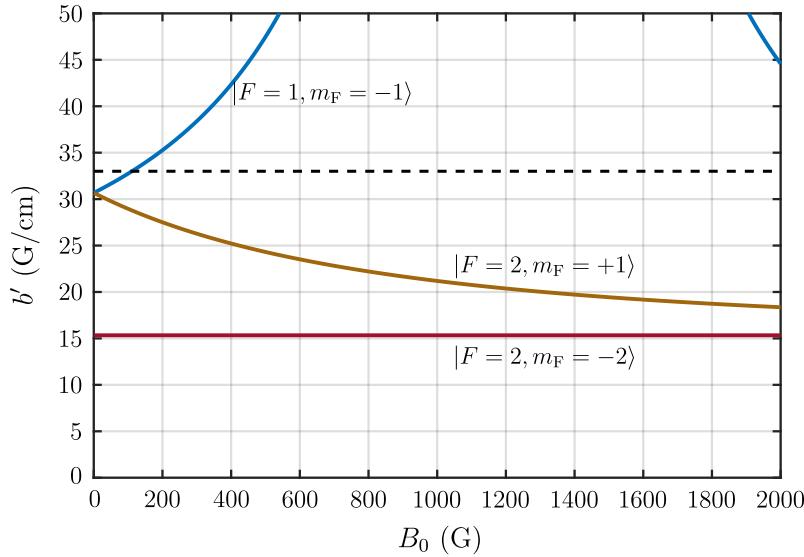


FIGURE 4.3 – Gradient nécessaire pour compenser la gravité en fonction du biais magnétique. La valeur du gradient magnétique à appliquer pour léviter dépend de l'état électronique, mais aussi du biais magnétique B_0 par la formule de Breit-Rabi. L'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ne peut être lévité qu'à bas champ (courbe bleue), l'alimentation des bobines de gradient ne pouvant délivrer plus de 50 A (limite tracée en pointillés). Les états $|F = 2, m_F = +1\rangle$ (courbe marron) et $|F = 2, m_F = -2\rangle$ (courbe bordeau) peuvent être lévités pour n'importe quel valeur du biais.

- L'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ne peut être lévité que pour des champs inférieurs à environ 150 G, le gradient nécessaire pour contrer la gravité augmentant avec le champ magnétique.

Plusieurs stratégies expérimentales de lévitation s'offrent alors. La première provient de l'état $|F = 2, m_F = -2\rangle$ qui peut être lévité tout en gardant la valeur du champ de biais comme un degré de liberté, on peut alors réaliser des lévitations très décomprimées. Il s'agit de l'approche utilisée pour la mesure du temps de diffusion élastique, présentée chapitre 6. Une autre possibilité est que les états $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 2, m_F = +1\rangle$ peuvent coexister dans le champ de lévitation, on peut ainsi utiliser l'état interne de l'atome comme degré de liberté tout en étant lévité. Cette stratégie a par exemple été utilisée pour la mesure des fonctions spectrales [107].

4.2.2 Calibration par radio-fréquences

Cette dernière stratégie rend possible l'approche novatrice de désordre dépendant de l'état interne, qui impose de travailler à un *biais magique* $B_0^* = 3.229\text{G}$ pour lequel les susceptibilités magnétiques des états $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 2, m_F = +1\rangle$ sont identiques [24]. La valeur précise de ce champ magique demande alors une connaissance fine des caractéristiques du dispositif de génération des champs magnétiques de l'expérience.

À ces fins, la mesure précise de ces champs magnétiques a été effectuée par spectroscopie radio-fréquence. Son principe repose sur le transfert de population entre l'état d'origine $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et les états $\{|F = 2, m_F = -2\rangle, |F = 2, m_F = -1\rangle, |F = 2, m_F = 0\rangle\}$ acces-

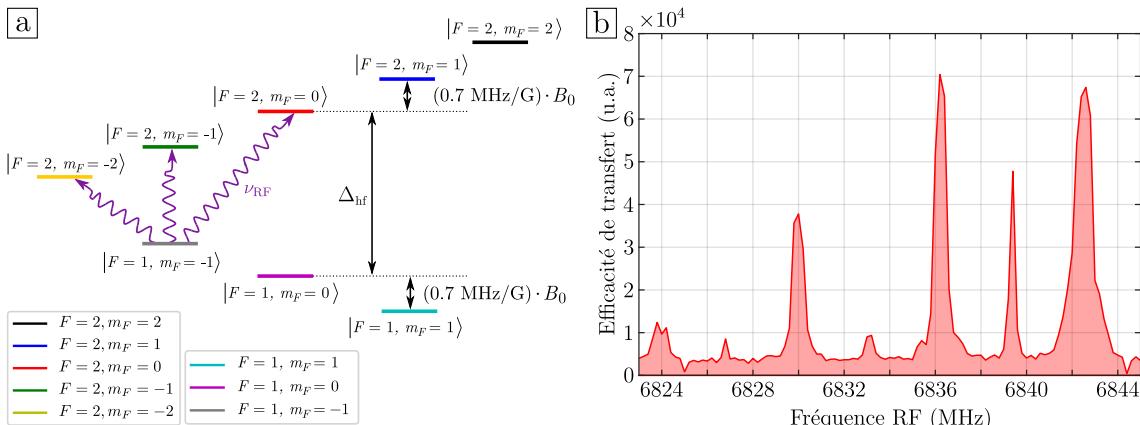


FIGURE 4.4 – **a : Principe de la spectroscopie radio-fréquences.** En balayant la fréquence de l'onde radio-fréquence appliquée, on adresse les différentes transitions entre sous-états Zeeman de $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ dont la séparation dépend du champ magnétique. **b : Spectre radio-fréquence.** Lorsque l'onde radio-fréquence est à résonance, on transfère des atomes initialement dans l'état $|F = 1\rangle$ vers l'état $|F = 2\rangle$. La présence de sept résonances équidistantes indique une dépolarisation partielle du nuage⁷, les règles de sélection imposant $\Delta m_F = \{\pm 1, 0\}$. Le champ magnétique extrait de ce spectre est alors d'environ 4.4 G.

sibles, dont la séparation en énergie dépend du champ magnétique. Ainsi, lorsque la radio-fréquence satisfait la condition de résonance $\nu_{RF} = \Delta_{hf} + \delta\nu(B)$ avec $\delta\nu(B)$ le décalage par effet Zeeman, une partie des atomes sera transférée dans l'un des sous-états de $|F = 2\rangle$. Le principe de cette spectroscopie est illustré figure 4.4.

Cette mesure a été effectuée dans le piège dipolaire croisé, et étant donné le très grand désaccord du faisceau de piégeage, on peut considérer que les déplacements lumineux induits sur les états $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ sont identiques. La séparation entre les états considérés n'en sera donc pas affectée. Il est ensuite possible d'imager sélectivement les atomes dans l'état $|F = 2\rangle$ en coupant la partie du faisceau d'imagerie provenant du laser repompeur.

En relevant le spectre des transitions radio-fréquences, on accède ainsi à la valeur du champ magnétique au niveau des atomes à l'aide du décalage Zeeman :

$$\delta\nu(B) \simeq -(m_{F_2} - m_{F_1}) \times 0.7 \text{ MHz G}^{-1} \times B . \quad (4.5)$$

En réalisant cette opération pour différents courants appliqués aux bobines générant les champs de biais, on peut ainsi calibrer les champs magnétiques de biais :

$$B = \sqrt{(B_x + b_{0x})^2 + (B_y + b_{0y})^2 + (B_z + b_{0z})^2} , \quad (4.6)$$

où $B_i = c_i I_i$ est la composante du champ rayonné dans la direction \vec{i} qui dépend du courant appliqué I_i via le facteur de calibration c_i . b_{0i} est la composante du champ rémanent dans cette même direction, souvent négligeable devant le champ rayonné pour des courants usuels. Cependant à bas courant, on peut en déduire toutes les composantes du champ naturellement présent dans la cellule. Il est également possible de déterminer un courant seuil pour lequel les alimentations haute-puissance des bobines de lévitation commencent à faire circuler le courant. L'ensemble de ces grandeurs est donné table 4.1.

7. Cette dépolarisation a été confirmée par une analyse Stern-Gerlach.

| Grandeur | Valeur |
|----------------------------------|--------------------------|
| Calibration Biais A c_A | 4.704 G A^{-1} |
| Calibration Biais B c_B | 6.180 G A^{-1} |
| Calibration Compensation X c_x | 4.903 G A^{-1} |
| Calibration Compensation Z c_z | 4.969 G A^{-1} |
| Courant seuil Biais A $I_{0,A}$ | $< 1 \text{ mA}$ |
| Courant seuil Biais B $I_{0,B}$ | 0.345 A |
| Champ rémanent b_{0x} | 0.089 G |
| Champ rémanent b_{0y} | 0.426 G |
| Champ rémanent b_{0z} | -0.416 G |

TABLE 4.1 – **Calibration des champs de biais dans la chambre de science.** Les champs rémanents b_{0i} correspondent aux champs extérieurs dans la direction \vec{i} . Le champ magnétique généré dans la cellule est proportionnel au courant parcourant les bobines $B_i = c_i \times (I_i - I_{0,i})$ avec $I_{0,i}$ le courant seuil, qui correspond à la consigne minimale à appliquer pour le courant circuler dans les bobines.

Toutes ces mesures sont en accord avec celles réalisées à l'aide d'un gaussmètre dans la limite d'une déviation de 10% , que l'on attribue à un défaut de positionnement du gaussmètre, celui-ci ne pouvant être placé à l'intérieur de la cellule.

4.2.3 Étude du piégeage

Il est primordial que les atomes se trouvent au centre de la lévitation car il s'agit de l'endroit où le champ magnétique est le plus homogène, et cette condition est d'autant plus importante alors nous nous orientons vers des lévitations à bas champ. En effet, c'est dans ce régime de bas champ que l'effet de piégeage de la lévitation est le plus fort.

Fréquences de la lévitation

Ainsi, si les atomes ne sont pas au centre du piège, la réalisation de temps de vol en présence de la lévitation conduira à un mouvement du nuage. Pour l'état $|F=1, m_F=-1\rangle$ en particulier, le centre de masse du nuage décrit des oscillations autour du centre de la lévitation dont les fréquences peuvent être trouvées à l'aide de la norme du champ magnétique 4.2 :

$$\omega_x^2 = \omega_z^2 = \left| \frac{m_F \tilde{g}_{F,m_F} \mu_B}{m} \left(\frac{b'^2}{4B_0} - b'' \right) \right| \quad \text{et} \quad \omega_y^2 = \left| \frac{2m_F \tilde{g}_{F,m_F} \mu_B}{m} b'' \right|. \quad (4.7)$$

L'exploitation de ces oscillations fournit donc de précieux renseignements quant à la position du centre de la lévitation, mais aussi quant à la forme du potentiel magnétique dans lequel les atomes évoluent.

En particulier, la mesure des fréquences de la lévitation permet de déterminer la courbure des champs générés par les bobines de biais A et de biais B. L'influence de ces courbures est représentée figure 4.5 pour les champs de biais A et de biais B. Pour un courant suffisamment grand, le terme de courbure n'est plus négligeable devant celui de

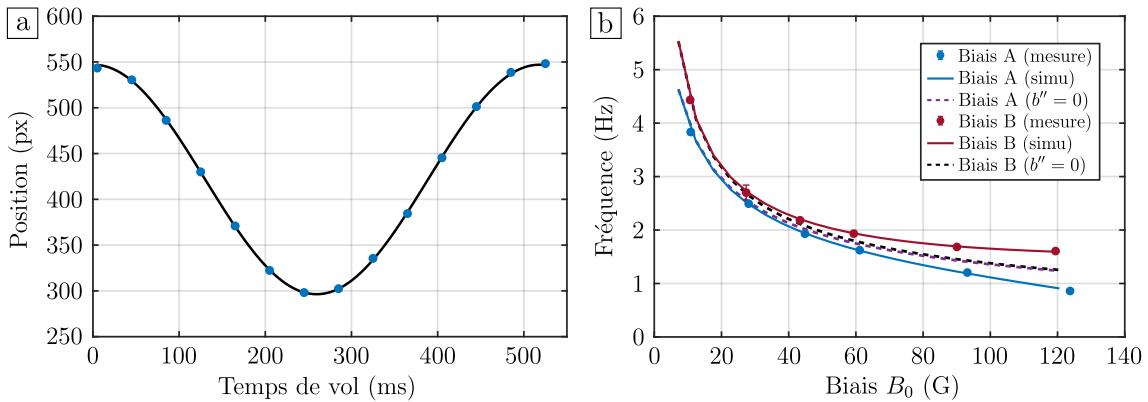


FIGURE 4.5 – a : Oscillation du nuage dans la lévitation magnétique. Le nuage, initialement dans le piège optique, est relâché sur le bord de la lévitation. Il acquiert alors un mouvement oscillatoire autour du centre de la lévitation pendant le temps de vol où la gravité est compensée. **b : Évolution des fréquences de piégeage de la lévitation.** Les fréquences mesurées (points) diminuent avec l'augmentation de B_0 et sont comparées à des simulations (lignes continues) afin de calibrer le champ créé par les bobines. L'influence des courbures est visible pour les plus champs les plus intenses, les simulations en absence de courbure (courbes tiretées) montrant alors une déviation par rapport aux données.

gradient, atténué par le biais. En effet, la comparaison des fréquences expérimentales à un modèle sans courbure montre un fort désaccord dans la zone des courants les plus hauts, tandis qu'un modèle tenant compte d'une courbure proportionnelle au courant décrit correctement cette zone (voir figure 4.5). On peut alors extraire le facteur de conversion courant/courbure c_i'' .

| Courbure | Valeur |
|-----------------|---|
| Biais A c_A'' | $4 \times 10^{-2} \text{ G/cm}^2/\text{A}$ |
| Biais B c_B'' | $-7 \times 10^{-2} \text{ G/cm}^2/\text{A}$ |

TABLE 4.2 – Calibration des courbures de la lévitation magnétique. Les bobines générant les champs de biais n'étant pas en configuration de Helmholtz, elles créent donc une courbure de champ magnétique au niveau des atomes. Cette courbure dépend de la géométrie des bobines ainsi que du courant les parcourant $b_i'' = c_i'' \times (I_i - I_{0,i})$.

On peut alors estimer les fréquences de piégeage (ou d'anti-piégeage pour l'état $|F=2, m_F=-2\rangle$) dans les configurations expérimentales d'intérêt. Pour le champ magique B_0^* , les états $|F=1, m_F=-1\rangle$ et $|F=2, m_F=+1\rangle$ sont soumis à un piégeage de fréquence d'environ 5 Hz par les bobines de biais A tandis que dans le régime de champ fort, nécessaire pour obtenir les décompressions maximales qu'offre notre système, la fréquence de piégeage (anti-piégeage) pour l'état $|F=2, m_F=+1\rangle$ ($|F=2, m_F=-2\rangle$) est diminuée jusqu'à 0.20 Hz (0.18 Hz) sous un champ de 2000 G [9].

Centre de la lévitation

Si pour le système isolé de lévitation magnétique le centre du potentiel magnétique correspond au centre géométrique des bobines, ce n'est plus le cas en présence d'un

champ extérieur. Afin d'éviter de mettre le nuage en mouvement après relâchement du piège optique, on utilise alors des champs de compensation générés à l'aide de bobines supplémentaires et dont le rôle est de s'affranchir de ces champs extérieurs, et donc de repositionner le centre du potentiel magnétique sur le nuage.

Le champ permettant de déplacer le potentiel est donc la somme du champ naturellement présent et du champ de compensation :

$$B_i = b_{0,i} + c_i \times I_i \quad \text{avec} \quad i = \{x, z\}. \quad (4.8)$$

Les mesures des différents termes de ce champ ont été effectuées à l'aide de radio-fréquences, comme décrit section 4.2.2. Le champ magnétique total s'écrit alors

$$\mathbf{B} = \left(\frac{b'}{2} x \right) \vec{x} + \left[B_0 - b'y + b'' \left(y^2 - \frac{x^2 + z^2}{2} \right) \right] \vec{y} + \left(\frac{b'}{2} z + B_z \right) \vec{z} \quad (4.9)$$

en ne considérant un effet que dans la direction \vec{z} . La présence d'un champ de biais dans le plan horizontal mène donc à un déplacement du centre de la lévitation

$$z_c = -\frac{2B_z}{b'} \left(\frac{1}{1 - 4B_0b''/b'^2} \right) \quad (4.10)$$

pour un champ $B_z \ll B_0$ ⁸. On retrouve ici le résultat intuitif que dans le régime de bas champ B_0 , l'effet d'un biais horizontal est de déplacer le centre de la lévitation à l'aide d'un gradient $b'/2$, résultant en un déplacement du potentiel magnétique de $z_c = -2B_z/b'$.

Une conséquence importante de ce résultat est que le déplacement du centre de la lévitation par un biais de positionnement dépend du biais de lévitation, ainsi que du gradient et de la courbure du champ. La décompression de la lévitation magnétique peut alors entraîner un déplacement du nuage, dont l'effet peut être critique pour l'étude à énergie résolue de la transition d'Anderson. Deux solutions sont envisageables pour contrer cet effet :

- Placer le nuage au centre géométrique des bobines de lévitation, c'est à dire avoir $B_z = 0$ et compenser exactement les champs naturellement présents.
- Modifier le champ de compensation à chaque instant lors de la décompression pour éviter le déplacement du centre du potentiel magnétique.

L'étude du système de lévitation magnétique nous a non seulement permis de calibrer nos bobines dont la position, l'orientation et le comportement magnétique ont été légèrement modifiés suite à un démontage et de lourds travaux de réparation, mais elle nous a de plus permis d'identifier de possibles limitations pour l'étude de la transition d'Anderson à énergie résolue. En particulier, il nous sera nécessaire de pouvoir contrôler de manière arbitraire les courants des bobines de compensation en cours de séquence, ce qui n'est pas possible sur le dispositif actuel. Il s'agit d'une étude à laquelle l'équipe porte une attention particulière à l'heure de l'écriture de ces lignes.

8. Dans l'hypothèse où le champ de biais généré par les bobines de lévitation ne serait pas orienté parfaitement selon l'axe du gradient vertical, l'effet d'un angle θ se manifesterait via la présence d'un champ horizontal $B_0 \sin \theta$, qui participerait à déplacer le centre.

4.3 Changement du laser telecom et calibration du piège optique

Listés dans la partie 3.3.3, uniquement deux éléments participent à la manipulation d'atomes dans la chambre de science avant condensation. Le premier élément, la lévitation magnétique, a fait l'objet d'un entretien essentiel présenté dans la partie précédente.

Cette partie se concentrera sur le second élément, le piège optique. Nous commencerons par présenter le système optique et décrire les changements opérés, puis nous décrirons la calibration de ce piège sur les atomes.

4.3.1 Changement du laser telecom

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le piège dipolaire était composé de deux faisceaux se croisant dans la chambre de science. Ces deux faisceaux, la pince et le dimple, sont orientés suivant les directions \vec{z} et \vec{y} respectivement et permettent de franchir le seuil de condensation. Il s'agit donc du piège donnant au condensat ses propriétés. De plus, c'est avec ce même piège que l'on met en œuvre les techniques de refroidissement extrême que sont l'ouverture adiabatique du piège ou encore le refroidissement par delta-kick. Il est donc primordial d'avoir une connaissance complète des caractéristiques de ce piège.

Les deux faisceaux du piège dipolaire croisé proviennent d'une source laser commune avant d'être mis en forme séparément. Cette source, un laser fibré Ytterbium de *Keopsys* émettant une puissance 20 W en continu à une longueur d'onde $\lambda = 1070\text{ nm}$, a été changée au cours de ma thèse. Ce laser a été sujet à un grand nombre d'opérations de maintenance, et, dans les mois précédant son remplacement, il ne pouvait plus émettre que 14 W lors de son allumage et seulement 12.5 W en fin de journée.

Cette source a été remplacée par un laser fibré Ytterbium *YLR-50-LP-A-Y12* de *IPG*, opérant à la même longueur d'onde $\lambda = 1070\text{ nm}$, et avec une puissance maximale mesurée à 55 W. La taille du faisceau en sortie de fibre est de 0.8 mm (contre 1.4 mm pour le laser *Keopsys*), il a donc fallu adapter un télescope afin de conserver les mêmes tailles de faisceaux au niveau des atomes. Le montage de mise en forme des faisceaux est présenté figure 4.6. Celui-ci est majoritairement mis dans des tubes (non représentés figure 4.6) contenant un grand nombre de diaphragmes, facilitant ainsi la procédure d'alignement.

4.3.2 Calibration du piège optique

La présence d'une fibre optique pour la mise en forme du faisceau de la pince permet de s'assurer que le mode envoyé sur les atomes n'a pas changé. Pour le faisceau dimple en revanche, le trajet jusqu'à la cellule se fait sans filtrage. La présence de deux périscopes, d'un nombre d'éléments optiques important et l'utilisation d'un profil elliptique imposent une étude attentive des caractéristiques de ce faisceau au niveau des atomes.

Estimation de la taille du faisceau au niveau des atomes

Le faisceau dimple est rendu elliptique à l'aide du second télescope qui comporte quatre lentilles dont deux cylindriques, comme illustré figure 4.6. Le rapport de forme du faisceau est alors de 2. Cependant, l'utilisation de plusieurs périscopes risque de faire tourner cette

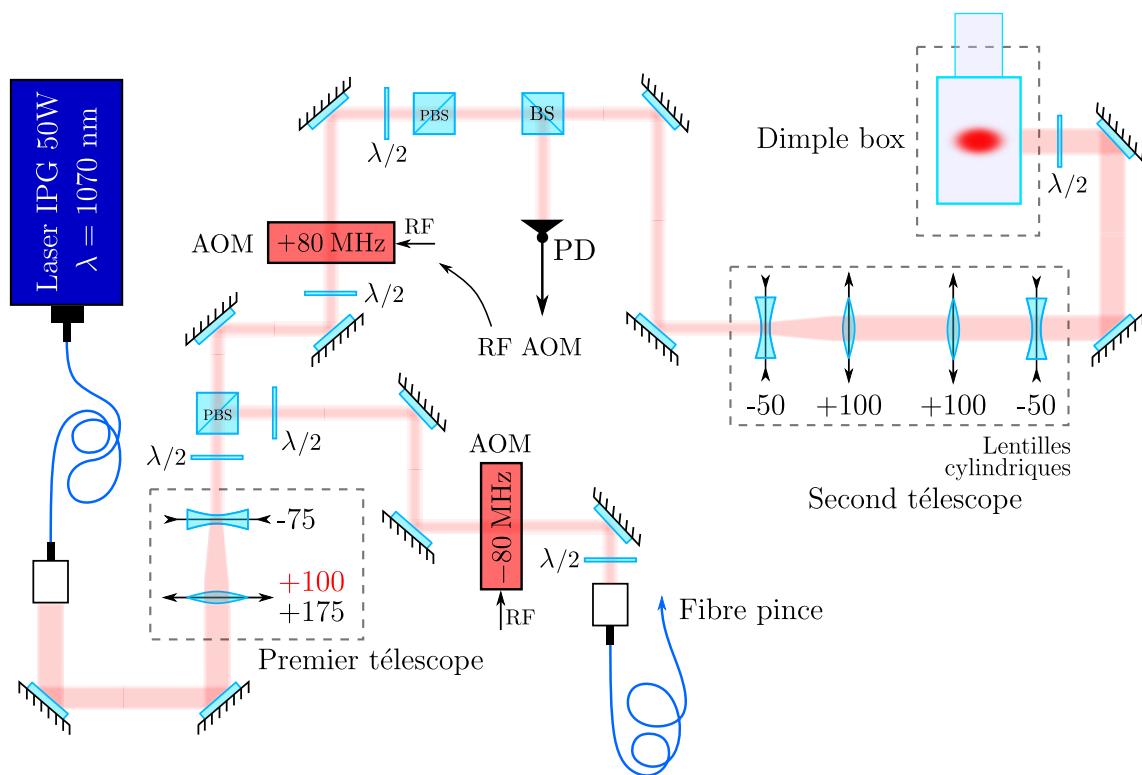


FIGURE 4.6 – Schéma du montage optique pour le piège dipolaire. Le faisceau issu du laser source passe dans un premier télescope avant d'être séparé en deux parties. La partie déviée passe dans une fibre optique pour devenir le faisceau de la pince. La partie transmise ensuite passe dans un second télescope pour devenir elliptique et arrive dans la *Dimple box*, qui envoie le faisceau sur les atomes et contient les optiques d'imagerie [67]. Afin de garder les mêmes tailles de faisceaux, la première lentille du premier télescope a été remplacée par une lentille de focale +100 mm.

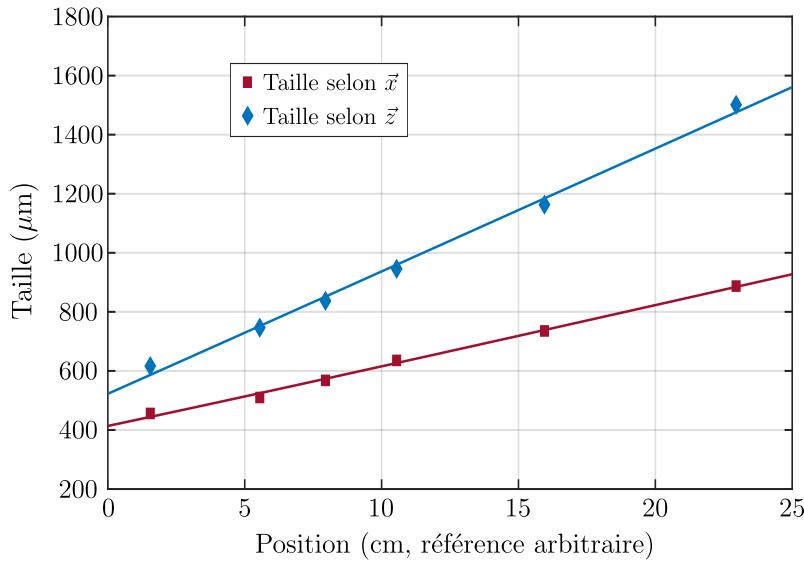


FIGURE 4.7 – **Divergence du faisceau dimple après la cellule.** Les tailles du faisceau dimple sont représentées en fonction de la position de la caméra (points). La divergence du faisceau permet de remonter aux waists du faisceau et d'en estimer la position. Les waists extraits par ajustement (lignes continues) sont de $w_z \simeq 82 \mu\text{m}$ et de $w_x \simeq 160 \mu\text{m}$ et leur position est compatible avec celle des atomes.

ellipse, il est donc primordial de connaître les tailles du faisceau au niveau des atomes.

L'approche suivie pour estimer le profil du faisceau au niveau des atomes consiste à en étudier la divergence après la cellule à l'aide d'une caméra, la zone d'intérêt se trouvant sous vide. Un avantage de cette méthode est de s'affranchir d'un système optique qui compliquerait le traitement, sous réserve que la caméra soit suffisamment large pour imager l'entièreté du faisceau. Le principal inconvénient est qu'il est nécessaire d'extrapoler la forme du faisceau pour en estimer le profil au niveau des atomes.

Cette extrapolation est en réalité aisée : la taille du faisceau $w_i(y)$ dans la direction \vec{i} ($\vec{i} = \{\vec{x}, \vec{z}\}$) est donnée par l'optique gaussienne :

$$w_i(y) = w_i \sqrt{1 + \left(\frac{y}{y_{Ri}}\right)^2}, \quad (4.11)$$

où w_i est le waist du faisceau dans la direction \vec{i} . La distance de Rayleigh associée s'exprime $y_{Ri} = \pi w_i^2 / \lambda$ et correspond à la distance sur laquelle la taille du faisceau suivant la direction \vec{i} change peu. Dans le régime de champ lointain $y \gg y_{Ri}$, le faisceau diverge selon un angle $\tan \theta_i \simeq \lambda / \pi w_i$.

La mesure des tailles du faisceau a été réalisée à l'aide d'une caméra *IDS Ueye* disposant d'une matrice de 1024×1280 pixels de $5.2 \mu\text{m}$ de côté. Les tailles ont été extraites par ajustement gaussien après intégration suivant une direction. Enfin, l'évolution de la taille en fonction de la position a été ajustée par la formule 4.11, illustrée figure 4.7.

On estime alors les waists du faisceau à $w_z = 81.6 \pm 7.8 \mu\text{m}$ et $w_x = 160 \pm 13 \mu\text{m}$, assez proche des valeurs précédentes. La position de ces waists est compatible avec la position des atomes, et la longueur de Rayleigh du faisceau est de l'ordre de $y_{Rz} \simeq 2 \text{ cm}$.

Calibration des fréquences de piégeage

Le fonctionnement du piège optique repose sur le potentiel dipolaire. Celui-ci s'écrit :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \bar{\Delta}} I(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\bar{\Delta}} = \frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0}. \quad (4.12)$$

En supposant que les atomes restent proches du centre du piège, on peut faire l'approximation que le profil d'intensité des faisceaux est de forme harmonique. On peut ainsi définir la profondeur de piégeage pour chaque faisceau :

$$U_{\text{pince}} = \frac{3c^2 \Gamma}{\omega_0^3 \bar{\Delta}} \frac{P_{\text{pince}}}{w_0^2} \quad \text{et} \quad U_{\text{dimple}} = \frac{3c^2 \Gamma}{\omega_0^3 \bar{\Delta}} \frac{P_{\text{dimple}}}{w_x w_z}, \quad (4.13)$$

ainsi que les fréquences de piégeage $\omega_{x,y,z}$. Rappelons que le confinement dans les directions \vec{x} et \vec{y} est fait par la pince, et que celui dans la direction \vec{z} est fait par le dimple, les fréquences de piégeage du piège dipolaire croisé s'expriment alors :

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{-\frac{4U_{\text{pince}}}{mw_0^2}} \quad \text{et} \quad \omega_z = \sqrt{-\frac{4U_{\text{dimple}}}{mw_z^2}}. \quad (4.14)$$

La caractérisation finale du piège dipolaire croisé se fait à l'aide des fréquences de piégeage, qui fixent les propriétés physiques du nuage. Afin de mesurer ces fréquences, nous avons fait le choix d'induire de petites oscillations du nuage à l'intérieur du piège à l'aide d'une force extérieure, et de suivre ces oscillations en fonction du temps d'évolution dans le piège de manière équivalente à celle présentée pour la lévitation magnétique section 4.2.3.

La fréquence de piégeage de la pince a été mesurée suivant la direction verticale à l'aide de la lévitation magnétique. En commutant rapidement le courant des bobines de gradient, on dispose d'un bouton pour allumer et éteindre la gravité, et donc générer une force pendant un bref instant pour donner un mouvement aux atomes dans le piège. En relevant la position des atomes en fonction de la durée d'évolution dans le piège après excitation, on extrait alors la fréquence associée.

La mesure de la fréquence de piégeage dans la direction \vec{z} , provenant du dimple, a été effectuée selon deux méthodes suivant la puissance du faisceau :

- À haute puissance, les atomes sont poussés à l'aide d'un gradient magnétique provenant de bobines de compensation. Celles-ci peuvent exercer une force sur les atomes pendant de courts instants à l'aide d'un commutateur rapide.
- À plus basse puissance, le piège optique est décomprimé et peu profond grâce à la lévitation. Cependant, le piégeage de la lévitation peut arracher les atomes du piège optique, il est donc nécessaire de déplacer le centre de la lévitation magnétique à l'aide de champs de compensation. Pour pousser les atomes, on utilise alors les bobines de compensation dans leur configuration normale, et leur brève extinction conduit à accélérer les atomes en déplaçant le centre de la lévitation magnétique.

L'ensemble de ces mesures est représenté figure 4.8. La variation des fréquences s'est fait en abaissant la puissance du laser au cours de l'évaporation optique, celle-ci conduisant à une décompression du piège de comportement $\omega/2\pi = A\sqrt{P}$ comme illustré formules 4.13 et 4.14. Les fréquences mesurées expérimentalement (carrés pour la pince, losanges pour le dimple) sont comparées à celles estimées à l'aide de mesures de la puissance des faisceaux

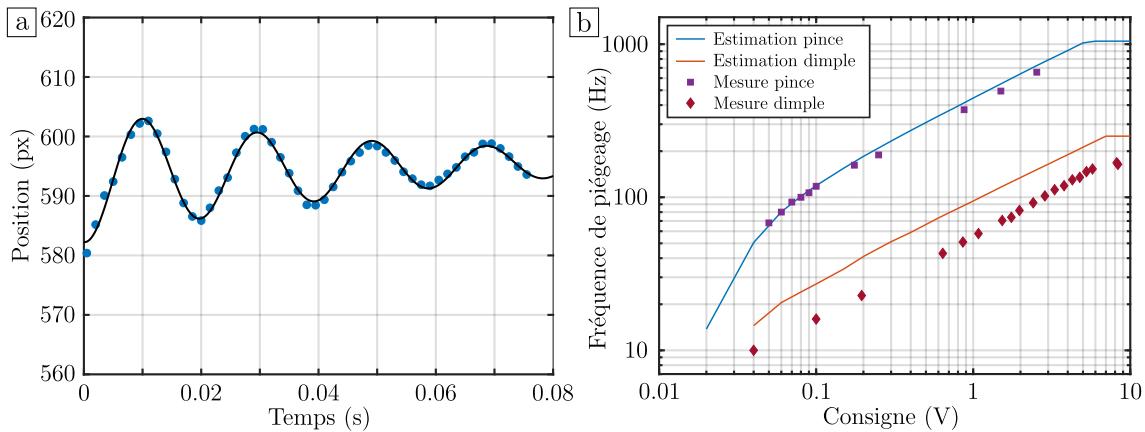


FIGURE 4.8 – **a : Exemple d’oscillation dans le piège optique.** Le nuage oscille dans la direction \vec{z} pour une puissance du dimple de 0.70 W après avoir été poussé par un gradient magnétique (points bleus). La fréquence d’oscillation est alors de $\omega_z/2\pi \simeq 51$ Hz, extraite par ajustement (courbe noire). **b : Fréquences d’oscillations du piège optique.** Les fréquences mesurées par oscillations du nuage (points) sont comparées à des estimations issues de mesures de la taille des faisceaux et de mesures de puissance de ces faisceaux (lignes continues).

et de leurs tailles (lignes continues). Si la comparaison est tout à fait correcte pour la pince, ce n’est pas le cas pour le dimple qui présente une surestimation de la fréquence de piégeage. La calibration de la pince est alors $A_{\text{pince}} = 912 \pm 30 \text{ Hz/W}^{1/2}$, et celle du dimple est de $A_{\text{dimple}} = 62.5 \pm 1.2 \text{ Hz/W}^{1/2}$. La prédiction pour cette dernière est de $103 \text{ Hz/W}^{1/2}$ en utilisant les tailles mesurées $w_x \simeq 160 \mu\text{m}$ et $w_z \simeq 82 \mu\text{m}$, en accord qualitatif avec la valeur mesurée⁹.

Une seconde conséquence de la figure 4.8 est que les deux faisceaux présentent une saturation à haute puissance, c’est à dire qu’ils restent à leur puissance maximale au delà d’une certaine consigne seuil. Pour le dimple, cette saturation provient d’une limitation de la puissance de la source de la radio-fréquence servant à la diffraction du faisceau dans le modulateur acousto-optique. Pour la pince, cette limitation provient du maximum de l’efficacité de diffraction du modulateur acousto-optique. Ces deux saturations peuvent être repoussées en augmentant la puissance émise par le laser source¹⁰, cependant elles ne sont pas problématiques pour notre configuration. De plus, cette augmentation de puissance se traduirait par un chauffage local des bloqueurs de faisceau plus important, entraînant des effets thermiques néfastes.

4.4 Optimisation de l’évaporation tout-optique

Vingt-cinq ans après l’obtention du premier condensat de Bose-Einstein, l’étape de refroidissement par évaporation forcée reste un passage obligatoire pour l’obtention d’un

⁹. La dernière calibration date de la mise en place de la *dimple box* lors de la thèse de Kilian Muller [67]. Celle du dimple était alors de $A_{\text{dimple}} = 64.5 \pm 1.2 \text{ Hz/W}^{1/2}$, très proche de la valeur actuelle.

¹⁰. Le réglage actuellement utilisé sur l’expérience est une émission à 50% de la puissance maximale du laser *IPG*, c’est à dire environ 23 W. Il a été observé que le mode émis est suffisamment stable à ce point de fonctionnement.

gaz dégénéré, à l'exception de quelques développements récents se basant des techniques novatrices de refroidissement laser [105] [41].

Comme brièvement présenté dans le chapitre précédent, le principe du refroidissement évaporatif repose sur l'extraction de particules très énergétiques, suivie par la thermalisation des particules restantes moins énergétiques en moyenne, donc de température abaissée.

Néanmoins, l'efficacité de ce processus dépend fortement de la configuration expérimentale. Les modifications apportées à notre piège optique, piège dans lequel le seuil de condensation est franchi, nécessitent donc d'adapter les consignes d'évaporation à notre nouvelle géométrie. De plus, l'utilisation de nouvelles cartes analogiques *National Instruments* avec la suite *Cicero Word Generator* permet de générer de nouvelles consignes arbitraires, non limitées à des morceaux de rampes telles qu'auparavant.

Dans cette partie, nous allons dans un premier temps présenter le fonctionnement du refroidissement par évaporation forcée, puis nous détaillerons les résultats de l'optimisation de notre évaporation optique.

4.4.1 Lois d'échelle du refroidissement évaporatif

Le but de l'étape de refroidissement évaporatif étant d'augmenter la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = n\lambda_{dB}^3$, aussi appelée *paramètre de dégénérescence*, afin de franchir le seuil de condensation, il est donc nécessaire que notre système présente de la dissipation. L'origine de celle-ci repose sur la profondeur finie des pièges utilisés.

Évaporation naturelle dans un piège de profondeur finie

Une conséquence de cette profondeur finie est que la fonction de partition $f(E)$ est tronquée à l'énergie U correspondant à la profondeur du piège. Plus précisément, il a été montré que la fonction de partition est très proche d'une distribution de Boltzmann tronquée

$$f(E) \propto e^{-\frac{E}{k_B T}} \Theta(U - E), \quad (4.15)$$

dont le temps de thermalisation τ_{th} est de l'ordre de quelques collisions élastiques [59].

En effet, la collision élastique de deux particules permet de transférer de l'énergie d'une particule à la seconde. En particulier, une particule est susceptible d'acquérir par collision une énergie mécanique totale supérieure à la profondeur de piège, celle-ci est donc extraite du piège et emporte une énergie $U + \kappa k_B T$ ($\kappa > 0$) supérieure à l'énergie moyenne par particule. La particule restante a quant à elle perdu de l'énergie.

Ce processus étant le plus probable pour des particules de grandes énergies, celui-ci favorise l'accumulation des particules dans les états de basse énergie tandis qu'il dépeuple les états de grande énergie. Ce raisonnement permet d'expliquer de manière qualitative la forme de la fonction de partition 4.15, qui favorise les états de basse énergie.

Ce phénomène d'*évaporation naturelle* conduit donc à une diminution de la température, dont l'efficacité décroît avec le temps. En effet, l'énergie moyenne par particule diminuant, la probabilité que des particules acquièrent suffisamment d'énergie pour s'échapper du piège décroît exponentiellement [108]. Ainsi, le processus d'évaporation naturelle est fortement

ralenti et le taux d'évaporation, c'est à dire le nombre de particules expulsées du piège par évaporation naturelle par unité de temps, peut être estimé par $\Gamma_{\text{ev}} \sim e^{-U/k_B T} \Gamma_c$, avec Γ_c le taux de collisions élastiques (voir équation 4.31).

Très rapidement, le temps d'évaporation $1/\Gamma_{\text{ev}}$ excède le temps de vie des atomes dans le piège et ceux-ci sont perdus par des collisions inélastiques. Afin de dépasser cette limitation et de garder une évaporation efficace, la technique expérimentale développée afin d'obtenir les premiers condensats de Bose-Einstein consiste à abaisser progressivement la profondeur du piège U . On parle alors d'*évaporation forcée*.

Lois d'échelle de l'évaporation forcée

Comme mentionné précédemment, la mise en œuvre pratique du refroidissement évaporatif se fait par le biais de la diminution de la profondeur du piège, forçant ainsi le processus d'évaporation. Cette opération est réalisée en continu, et à une vitesse suffisamment lente devant le temps de thermalisation τ_{th} afin que le système soit constamment à l'équilibre thermodynamique¹¹.

En particulier, définissons le paramètre de troncature η comme le rapport entre la profondeur du piège et la température du gaz piégé :

$$\eta = \frac{U}{k_B T}. \quad (4.16)$$

Dans le cas d'un abaissement lent et continu de la profondeur du piège, le paramètre de troncature est constant¹² et sa valeur est de l'ordre de 10 dans le cas d'un piège optique.

Le potentiel de piégeage $U(\mathbf{x}, t)$ étant modifié au cours de l'évaporation, les atomes sont soumis à un potentiel variant dans le temps. Dans le cas d'un piège harmonique, les fréquences de piégeage associées peuvent changer au cours de l'évaporation en fonction de l'implémentation expérimentale du refroidissement évaporatif¹³. Les variations d'énergie potentielle sont alors caractérisées par le paramètre ν défini par

$$\nu = \frac{\dot{\bar{\omega}}/\bar{\omega}}{\dot{U}/U} \quad (4.17)$$

où $\bar{\omega}$ est la moyenne géométrique des fréquences du piège. Comme explicité formule 4.14, les fréquences de piégeage du piège optique évoluent en $\bar{\omega} \propto \sqrt{U}$, impliquant donc $\nu = 0.5$ [73]. L'abaissement de la profondeur du piège sera donc forcément accompagnée d'une décompression de celui-ci.

11. Dans ce cas, les seules pertes d'atomes considérées sont celles liées à l'évaporation par collisions élastiques. Cela revient à négliger la dynamique de l'évaporation, qui fait apparaître les pertes par déversement[21]. Celles-ci correspondent aux atomes ayant une énergie de $U - \delta E$ qui ne sont plus piégés lors de l'abaissement de la profondeur du piège de U à $U - dU$, avec $dU > \delta E$. Dans le cas d'un gaz à l'équilibre thermodynamique, seule une infime partie des atomes se trouve dans cet intervalle d'énergie que l'on peut négliger devant les autres sources de pertes.

12. Étant donné la dépendance exponentielle du taux d'évaporation en η , le processus d'évaporation sera très fortement ralenti dans le cas d'un nuage très froid (η grand), et rapide dans le cas d'un nuage chaud (η petit). Lors de l'abaissement de la profondeur du piège, un nuage chaud sera rapidement évaporé tandis qu'un nuage froid sera figé, la température variant donc avec la profondeur du piège.

13. La méthode de couteau radio-fréquence utilisée dans le piège magnétique dans la première chambre ne modifie pas les fréquences de piégeages et ne change que la profondeur du piège, tandis que l'évaporation tout optique, réalisée à l'aide de faisceaux lasers de tailles fixées, est accompagnée d'une décompression du piège lors de l'abaissement de la puissance des lasers.

Dressons alors un bilan d'énergie afin de déterminer la manière dont varient les principales quantités thermodynamiques au cours de l'évaporation. L'énergie totale du gaz dans un piège harmonique est donnée par

$$E = 3Nk_B T \quad (4.18)$$

avec N le nombre total d'atomes. La variation temporelle de l'énergie totale du gaz est alors donnée par

$$\dot{E} = 3\dot{N}k_B T + 3Nk_B \dot{T}, \quad (4.19)$$

exprimée en fonction des variations temporelles du nombre d'atomes et de la température.

En identifiant les différentes sources de variations de l'énergie totale, on montre que la variation de l'énergie totale du système est donnée par [21]

$$\dot{E} = \dot{N}(U + \kappa k_B T) + \nu \frac{\dot{U}}{U} E, \quad (4.20)$$

où le premier terme décrit la perte d'énergie liée à l'évaporation des atomes énergétiques et le second terme décrit le changement d'énergie potentielle des particules restées dans le piège. Dans le cas d'une évaporation 3D, $\kappa = 3/2$ [51].

En combinant les équations 4.19 et 4.20, on montre alors que la variation du nombre d'atomes en fonction de la profondeur de piégeage est donnée par [73] :

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{3(1-\nu)}{\eta' - 3} \frac{\dot{U}}{U}, \quad (4.21)$$

avec $\eta' = \eta + \kappa$. Il est alors possible de déterminer les lois d'échelle des différentes grandeurs thermodynamiques d'un gaz classique.

En particulier, dans le cas d'un piège harmonique, la densité dans l'espace des phases s'exprime :

$$\mathcal{D} = N \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^3. \quad (4.22)$$

On peut alors déterminer les variations du paramètre de dégénérescence en fonction des variations du nombre d'atomes :

$$\frac{\dot{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}} = -(\eta' - 4) \frac{\dot{N}}{N}. \quad (4.23)$$

Le paramètre $\eta' - 4 \equiv \gamma$ correspond à l'efficacité du processus d'évaporation : la perte d'atomes engendre un gain de densité dans l'espace des phases d'autant plus élevé que ce paramètre est grand. L'enjeu de l'optimisation du refroidissement évaporatif consiste donc à augmenter ce paramètre autant que possible.

Une conséquence remarquable de l'équation 4.23 est que l'efficacité du processus d'évaporation ne dépend pas du paramètre ν témoignant du changement de forme du piège. Ceci s'explique par le fait que pour une évaporation à η constant, le paramètre ν traduit une ouverture adiabatique du piège, la décompression du nuage étant accompagnée d'une diminution de la température, voir section 3.3.3.

Taux de collisions et régime d'emballement

Si l'équation 4.23 ne fait pas apparaître l'influence du paramètre ν , celui-ci joue cependant un rôle primordial quant à la cinétique de l'évaporation. En effet, la vitesse maximale d'évaporation est limitée par la vitesse à laquelle le gaz atteint un état d'équilibre thermique, c'est à dire le taux de thermalisation $1/\tau_{\text{th}}$. Celui-ci est de l'ordre du taux de collisions élastiques $\Gamma_c = n\sigma\bar{v}$, avec n la densité du gaz, σ la section efficace de diffusion et \bar{v} la vitesse moyenne relative entre deux atomes [108].

Dans le cas d'un piège harmonique, on montre que la loi de variation du taux de collisions élastiques peut s'écrire [73]

$$\frac{\dot{\Gamma}_c}{\Gamma_c} = \left[1 - (\eta' - 3) \left(\frac{1 - 3\nu}{3(1 - \nu)} \right) \right] \frac{\dot{N}}{N}, \quad (4.24)$$

où le facteur entre crochets peut changer de signe suivant la valeur de ν . Ainsi, il est possible que le taux de collisions élastiques augmente au cours de l'évaporation malgré la perte d'atomes, rendant ainsi l'évaporation de plus en plus rapide. Dans ce régime d'*emballement*, la diminution du nombre d'atomes et de leur vitesse relative est plus que compensée par une forte augmentation de la densité au centre du piège, augmentant ainsi le taux de collisions. Ce régime est atteint pour de faibles valeurs de ν , en particulier pour notre piège magnétique où $\nu = 0$.

En revanche, l'évaporation optique opère en abaissant la puissance des faisceaux laser, imposant donc $\nu = 0.5$. Dans ce régime, le taux de collisions élastiques diminue au cours de l'évaporation, la rendant de plus en plus lente contrairement au régime d'emballement. Il est donc primordial qu'une évaporation optique commence avec un grand taux de collisions élastiques pour permettre une thermalisation rapide. De manière générale, une évaporation optique possède une première phase pendant laquelle la puissance des faisceaux laser est abaissée rapidement, la thermalisation du nuage étant immédiate grâce au grand taux de collisions, puis une seconde phase plus lente où la thermalisation du nuage nécessite plus de temps.

Effet des collisions inélastiques

En pratique, l'évaporation par collisions élastiques n'est pas la seule source de perte des particules. L'expérience se déroulant à l'intérieur d'une enceinte sous ultra-vide pompée en continu, les collisions avec les particules du gaz résiduel à température ambiante sont responsables de pertes indépendantes de l'énergie des atomes piégés. Cela se traduit par un temps de vie $1/\Gamma_{\text{bg}}$ fini des atomes dans le piège.

On peut alors écrire les pertes d'atomes liées au gaz résiduel sous la forme d'équations de taux

$$\dot{N}_{\text{bg}} = -\Gamma_{\text{bg}} N \quad (4.25)$$

$$\dot{E}_{\text{bg}} = -\Gamma_{\text{bg}} E, \quad (4.26)$$

où le temps de vie $1/\Gamma_{\text{bg}}$ est de l'ordre de 10 s.

Deux régimes limites se présentent alors. Dans le cas d'une évaporation rapide telle que $\Gamma_{\text{ev}} \gg \Gamma_{\text{bg}}$, l'essentiel des pertes d'atomes est dû au processus d'évaporation. La présence

du gaz résiduel n'a donc que peu d'effet sur le nuage, l'évaporation pouvant se dérouler sur une durée petite devant le temps de vie des atomes dans le piège.

Au contraire, les pertes dues au gaz résiduel peuvent fortement entraver le processus d'évaporation dans le cas d'un petit temps de vie, dans le régime où $\Gamma_{\text{ev}} \ll \Gamma_{\text{bg}}$. Dans ces conditions, les atomes ne peuvent rester assez longtemps dans le piège pour que certains aient le temps d'acquérir une énergie suffisante pour être évaporés.

Le gaz résiduel n'est pas la seule source néfaste de perte d'atomes. Des processus complexes liés à la nature métastable des expériences d'atomes froids peuvent conduire à la perte de plusieurs atomes. Aux températures atteintes par les nuages piégés, la majorité des éléments devraient se trouver à l'état solide, mais le caractère binaire des collisions élastiques permet au système de rester sous forme gazeuse. Cependant, il est possible que lors d'une collision tertiaire, deux atomes établissent une liaison moléculaire, dont la grande énergie est évacuée par le biais d'un troisième atome. Ce processus de pertes à trois corps conduit alors à la perte des trois atomes.

Puisque ce mécanisme nécessite la collision de trois atomes, on peut décrire la variation de densité due aux pertes à trois corps ainsi que la variation de l'énergie totale à l'aide d'une loi de puissance :

$$\dot{n}_{3b}(\mathbf{x}) = -K_{3b}n^3(\mathbf{x}) \quad (4.27)$$

$$\dot{E}_{3b} = \frac{3}{2}\dot{N}_{3b}k_B T + \int d\mathbf{x} U(\mathbf{x})\dot{n}_{3b}(\mathbf{x}), \quad (4.28)$$

où le coefficient K_{3b} est une constante du ^{87}Rb et vaut $1.8 \times 10^{-29} \text{ cm}^6 \text{s}^{-1}$ [16][103].

Comme illustré par l'équation 4.27, le mécanisme de pertes à trois corps devient important dans des régions de fortes densités. Les pièges optiques étant fortement comprimés afin d'avoir un taux de collisions suffisant pour pouvoir évaporer, ceux-ci sont particulièrement susceptibles de générer des pertes à trois corps.

En présence de ces pertes, il est possible de modifier les lois d'échelles présentées précédemment [59][14]. En particulier, on peut montrer que dans le cas d'un piège harmonique profond, l'équation 4.21 régissant l'évolution du nombre d'atomes se généralise en

$$\frac{\dot{N}}{N} = \left(\frac{\eta' - 3}{3(1-\nu)} + R \frac{2 - \eta'}{3(1-\nu)} \right)^{-1} \frac{\dot{U}}{U}, \quad (4.29)$$

où $R = \dot{N}_{3b}/\dot{N}_{\text{tot}}$ est la fraction d'atomes perdus par collisions à trois corps. De même, l'équation 4.23 devient

$$\frac{\dot{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}} = -\gamma \frac{\dot{N}}{N} \quad \text{avec} \quad \gamma = \eta' - 4 + R(2 - \eta'), \quad (4.30)$$

témoignant ainsi de la réduction de l'efficacité de l'évaporation par les pertes à trois corps.

4.4.2 Implémentation expérimentale

Nous allons à présent détailler la manière dont cette étape d'évaporation est implémentée sur notre dispositif. La consigne présentée ici est le résultat d'une optimisation de l'efficacité de l'évaporation, encodée dans le paramètre γ . De plus, nous discuterons l'influence qu'a la lévitation magnétique lors de cette étape de refroidissement.

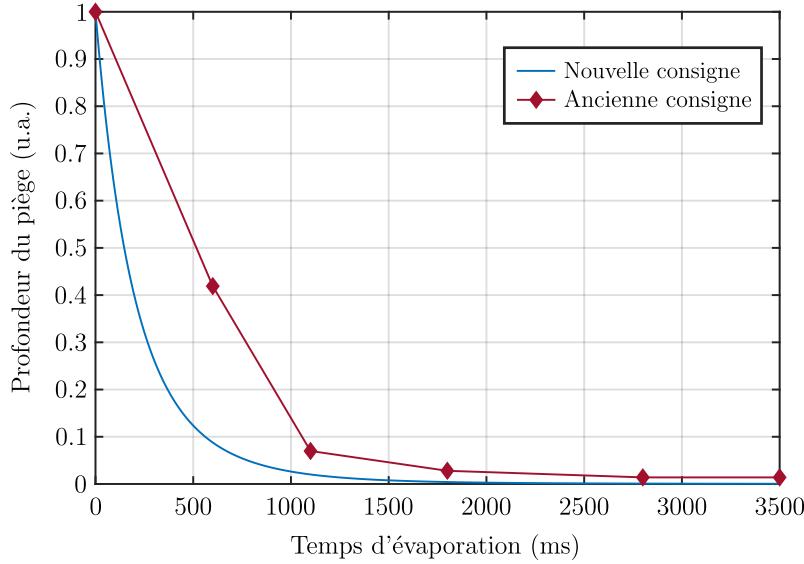


FIGURE 4.9 – **Comparaison de la nouvelle consigne d'évaporation du piège optique.** L'ancienne consigne, composée de cinq morceaux de rampe linéaire, est représentée . La nouvelle consigne, donnée par l'équation 4.32 et représentée, possède une décroissance plus rapide que dans le cas de l'ancienne consigne, et permet d'obtenir un condensat de Bose-Einstein plus rapidement.

Consigne d'évaporation

Les lois d'échelle présentées dans la section précédente montrent comment évoluent les différentes grandeurs thermodynamiques du nuage en fonction de la profondeur du piège, sans pour autant spécifier la dépendance temporelle de celle-ci. Afin de déterminer le profil optimal de la consigne d'évaporation, il est possible d'établir un bilan du nombre d'atomes présents dans le piège ¹⁴. En considérant que les atomes sont uniquement perdus par évaporation, on peut écrire les variations du nombre d'atomes à l'aide d'une équation de taux [59][73]

$$\dot{N} = -\Gamma_{\text{ev}} N \quad \text{avec} \quad \Gamma_{\text{ev}} = 2(\eta - 4)e^{-\eta}\Gamma_c . \quad (4.31)$$

On peut alors déterminer que le profil optimal de la consigne d'évaporation est aussi donné par une loi de puissance

$$U(t) = U_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-\beta} , \quad (4.32)$$

avec $U_0 = U(t=0)$ la profondeur initiale de chaque faisceau au début de l'étape d'évaporation. L'optimisation de cette étape sur notre nuage nous a permis de déterminer les paramètres $\beta_{\text{pince}} = \beta_{\text{dimple}} = 6$, $\tau_{\text{pince}} = 1.2\text{s}$ et $\tau_{\text{dimple}} = 1.3\text{s}$, dont le profil est comparé à l'ancienne consigne composée de morceaux de rampes linéaires figure 4.9.

On remarque que la nouvelle consigne appliquée est de forme similaire à l'ancienne et possède deux dynamiques distinctes. Comme annoncé dans la section 4.4.1, l'évaporation est dans un premier temps rapide afin de profiter du grand taux de collisions élastiques, puis dans un second temps, la consigne est lentement abaissée en raison de l'augmentation du temps de thermalisation.

¹⁴. Les lois d'échelle présentées dans la section précédente ont été obtenues à l'aide d'un bilan d'énergie.

Notons tout de même la principale différence entre ces courbes. Par construction, la formule 4.32 permet de mieux tirer parti du processus d'évaporation naturelle. Il est alors possible d'effectuer une évaporation plus rapide, réduisant l'impact de la durée de vie finie des atomes par collisions avec le gaz résiduel¹⁵.

Mesure de la température d'un nuage lévité

La quantité thermodynamique permettant de témoigner du refroidissement du gaz au cours de l'évaporation correspond naturellement à sa température. De manière générale, celle-ci est estimée à l'aide d'une imagerie par *temps de vol*. Son principe repose sur l'expansion libre du nuage après extinction du piège, expansion dont l'origine provient de la distribution des vitesses des atomes. Dans le cas d'un nuage thermique, la température est donnée par la largeur de la distribution des vitesses du gaz, qui est directement donnée par la taille du nuage après un temps d'expansion suffisamment long¹⁶.

Cependant, pour des nuages particulièrement froids, les temps d'expansion requis pour estimer correctement la température du nuage peuvent dépasser le temps d'observation possible des atomes alors en mouvement de chute libre. L'utilisation de la lévitation magnétique pendant cette phase d'expansion permet de dépasser cette limite en compensant la gravité¹⁷. Néanmoins, comme nous l'avons détaillé dans la section 4.2.3, l'utilisation de la lévitation magnétique conduit à un piégeage de l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ dans lequel nous souhaitons franchir le seuil de condensation.

L'estimation de la température du nuage impose alors deux contraintes sur le temps d'expansion du nuage :

- Celui-ci doit être suffisamment grand pour pouvoir négliger la taille initiale du nuage devant celle mesurée.
- Le temps d'expansion doit être suffisamment petit devant la période d'oscillation de la taille du nuage, liée au piégeage de la lévitation magnétique. De cette manière, l'expansion peut être considérée balistique.

Dans la configuration à bas champ de la lévitation magnétique, proche du biais magique $B_0^* = 3.2\text{ G}$, les fréquences de piégeage sont particulièrement grandes et il n'est pas possible de satisfaire ces deux contraintes simultanément.

La méthode retenue par l'équipe pour obtenir une mesure correcte de la température du nuage repose sur la technique de *focalisation atomique*. Celle-ci permet d'imager dans l'espace réel la distribution de vitesses à l'aide d'un potentiel harmonique, à l'instar d'une lentille en optique [69]. Pour illustrer ces propos, considérons un ensemble d'atomes dont la distribution initiale des positions est de largeur $\Delta x_{i,0}$ dans la direction \vec{i} et la distribution de vitesses est de largeur $\Delta v_{i,0} = \hbar \Delta k_{i,0}/m$. Sous l'effet du potentiel harmonique, l'évolution

15. Dans le cadre d'une évaporation à η constant, le taux de pertes à trois corps ne dépend pas de la vitesse à laquelle l'évaporation est effectuée.

16. La taille du nuage thermique évolue selon $\sigma_i^2 = \sigma_{i,0}^2 + t^2 k_B T/m$, avec T la température, m la masse des atomes, t le temps d'expansion libre et $\sigma_{i,0}$ la taille du nuage à $t = 0$. Pour t suffisamment grand, on peut ainsi négliger la taille initiale du nuage.

17. Un second intérêt de la lévitation magnétique est de supprimer l'influence de la gravité lors de l'évaporation. La pesanteur a pour effet de *pencher* le potentiel, pouvant changer la dimensionnalité de l'évaporation [13], mais aussi limiter la profondeur du piège optique à environ $U/k_B \sim 2.5\mu\text{K}$ pour laquelle le gradient maximal d'intensité lumineuse ne permet plus de compenser le poids des atomes.

temporelle de la largeur de la distribution de positions est donnée par

$$\Delta x_i^2(t) = \Delta x_{i,0}^2 \cos^2(\omega_i t) + \frac{\hbar^2 \Delta k_{i,0}^2}{m^2 \omega_i^2} \sin^2(\omega_i t) . \quad (4.33)$$

En coupant le potentiel harmonique après un quart d'oscillation à $t = T_{\text{osc}}/4$ avec $T_{\text{osc}} = 2\pi/\omega_i$ la période d'oscillation, la distribution de positions des atomes a une largeur donnée par

$$\Delta x_i(T_{\text{osc}}/4) = \left| \frac{\hbar \Delta k_{i,0}}{m \omega} \right| , \quad (4.34)$$

indépendante de la distribution initiale des positions des atomes. À l'aide de la distribution thermique des vitesses, on déduit

$$T = \frac{m \omega_i^2 \Delta x_i^2(T_{\text{osc}}/4)}{k_B} \quad (4.35)$$

Cette mesure de la température est donc indépendante de la taille initiale du nuage, contrairement à la mesure par temps de vol qui nécessite une longue expansion pour s'affranchir de l'influence de la taille initiale. Une seconde différence entre ces méthodes réside dans le fait que le temps d'expansion par focalisation atomique n'est plus ajustable, celui-ci étant fixé par la fréquence du piégeage harmonique de la lévitation magnétique.

Notons que dans la configuration magnétique choisie, le piégeage vertical est négligeable devant celui des directions horizontales. En considérant que l'expansion du nuage est balistique suivant la direction verticale, la valeur de la température obtenue est en accord avec les valeurs extraites par focalisation atomique suivant les deux directions horizontales, comme illustré figure 4.10.

Nous pouvons alors comparer la température du nuage à la profondeur du piège, que l'on estime au cours de l'évaporation à l'aide de la calibration du piège optique présentée dans la section 4.3.2. L'évolution temporelle de la température du nuage est représentée figure 4.11, à laquelle nous superposons sans paramètre ajustable¹⁸ la profondeur estimée du piège divisée par 10. L'accord entre ces courbes est remarquable, validant ainsi l'approche d'une évaporation à η constant.

Résultats de l'optimisation de l'évaporation

L'évolution du nombre d'atomes au cours de l'évaporation présente un intérêt particulier car celle-ci contient les informations liées aux processus inélastiques.

En particulier, il est possible de mesurer la densité atomique du nuage au cours de l'évaporation, et ainsi d'évaluer les pertes à trois corps à l'aide de la formule 4.27. En comparant ces pertes aux variations mesurées du nombre d'atomes, on obtient un rapport R de l'ordre de 0.1. Il apparaît donc que les pertes à trois corps ont un effet marqué sur la cinétique de l'évaporation, mais que celles-ci ne constituent pas une limite pour notre système.

¹⁸. L'estimation de la profondeur du piège optique est réalisée selon la calibration présentée dans la section 4.3.2, donc uniquement à l'aide de mesures photométriques des puissances et tailles des faisceaux, complétées par les mesures des fréquences de piégeage obtenues par oscillations du centre de masse du nuage.

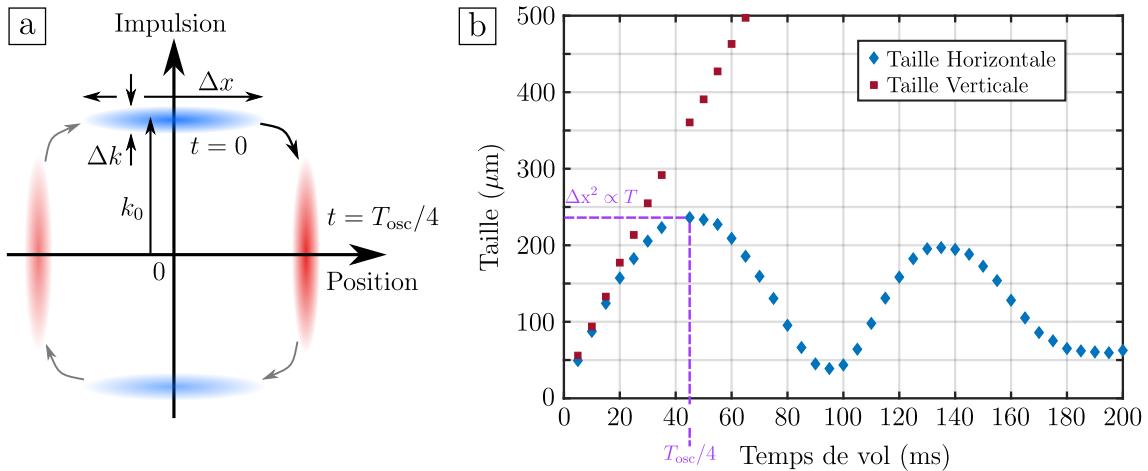


FIGURE 4.10 – **a : Principe de la focalisation atomique.** L'évolution temporelle d'un nuage dans l'espace des phases est une rotation autour de l'origine. À $t = T_{\text{osc}}/4$, la distribution du nuage dans l'espace des phases a subi une rotation de $-\pi/2$. On peut ainsi mesurer la distribution initiale d'impulsion par une mesure de densité atomique dans l'espace réel. **b : Évolution temporelle de la taille du nuage dans le champ de lévitation.** Le piégeage étant quasi-nul dans la direction verticale, le nuage s'étend de manière balistique (points bordeaux). Dans la direction horizontale, le nuage subit l'effet de piégeage harmonique de la lévitation magnétique et sa taille oscille à une fréquence correspondant au double de la fréquence de piégeage (points bleus). Pour un temps de vol d'environ 45 ms, le nuage atteint sa taille maximale représentative de la distribution initiale d'impulsion. Cette valeur est en accord avec la fréquence de piégeage estimée à environ 5 Hz. On remarque de plus que l'expansion du nuage est isotrope à temps court. La température du nuage, mesurée suivant les deux directions, est d'environ 620 nK.

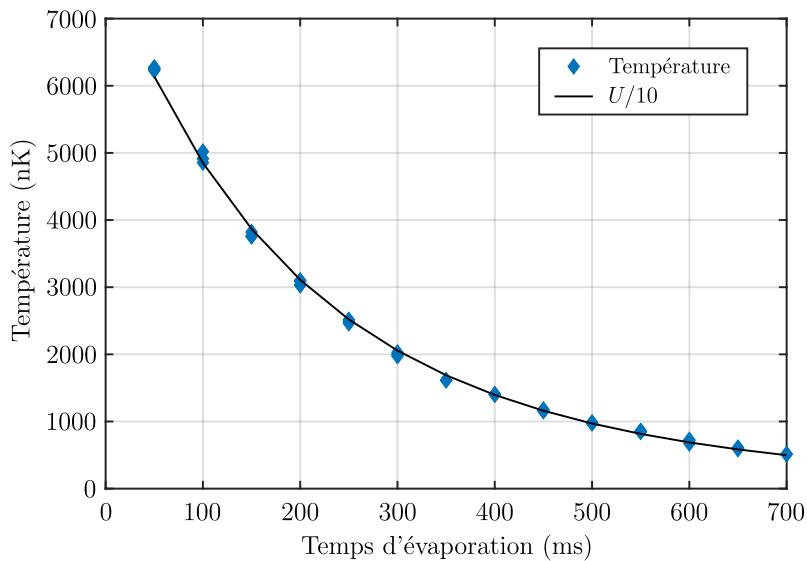


FIGURE 4.11 – **Évolution de la température au cours de l'évaporation.** La température (points bleus) est mesurée après différentes durées d'évaporation et comparée à la profondeur du piège divisée par 10 (courbe noire). Sans paramètre ajustable, les deux courbes se superposent remarquablement. Chaque point correspond à une mesure unique, répétée plusieurs fois pour chaque durée d'évaporation sans moyenner.

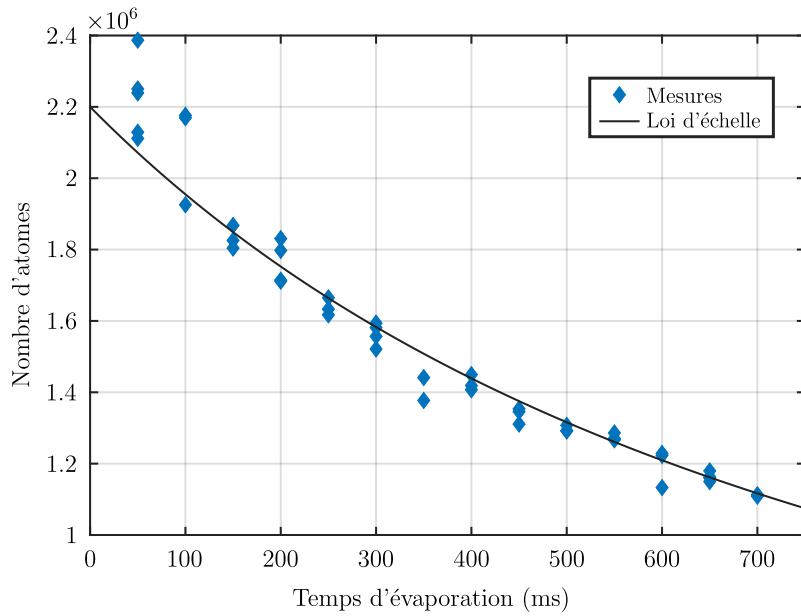


FIGURE 4.12 – **Évolution du nombre d'atomes au cours de l'évaporation.** Les points bleus correspondent aux mesures expérimentales du nombre d'atomes, chaque point étant issu d'un unique cycle expérimental. La ligne continue noire correspond à la prédiction de la loi d'échelle 4.29 avec les paramètres $\eta = 10$ et $R = 0.1$, et où le seul paramètre ajustable est le nombre d'atomes initial. Il apparaît alors un très bon accord entre les données et le modèle.

De plus, il est possible de négliger l'effet des pertes due aux collisions avec le gaz résiduel, limitant le temps de vie des atomes dans le piège à $1/\Gamma_{\text{bg}} \approx 10\text{s}$. En effet, l'optimisation de notre évaporation se concentre sur les premières 700 ms d'abaissement de la profondeur du piège¹⁹ comme illustré sur les figures 4.11 et 4.12, et la durée totale de notre évaporation est de 3.5 s, courte comparée au temps de vie permis par le gaz résiduel.

L'évolution du nombre d'atomes au cours de l'évaporation est représentée figure 4.12 et est comparée à la prédiction de la loi d'échelle 4.29, tracée avec les paramètres $\eta = 10$ et $R = 0.1$, extraits de la mesure de température et du nombre d'atomes. En ajustant uniquement le nombre d'atomes initial du modèle, il apparaît que la théorie d'échelle permet de décrire correctement l'évolution du nombre d'atomes.

Enfin, rappelons que l'optimisation de l'évaporation est réalisée en maximisant le gain de densité dans l'espace des phases par atome perdu, donné par le paramètre γ en présence de pertes à trois corps (voir la formule 4.30).

L'évolution de la densité dans l'espace des phases en fonction du nombre d'atomes est représentée figure 4.13 en échelle *log-log* pour dans le cas de notre nouvelle consigne (en bleu) ainsi que pour notre ancienne consigne (en bordeaux). La comparaison est immédiate : la nouvelle consigne permet d'atteindre le seuil de condensation $\mathcal{D} \approx 1$ pour une perte d'atomes bien moindre que l'ancienne.

Plus quantitativement, l'efficacité mesurée pour la nouvelle consigne est de $\gamma \approx 4.5$ tandis

19. Cette durée correspond au temps nécessaire pour franchir le seuil de condensation $\mathcal{D} \approx 1$ et l'obtention d'un gaz dégénéré. Celle-ci était d'environ 1.2 s avec l'ancienne consigne.

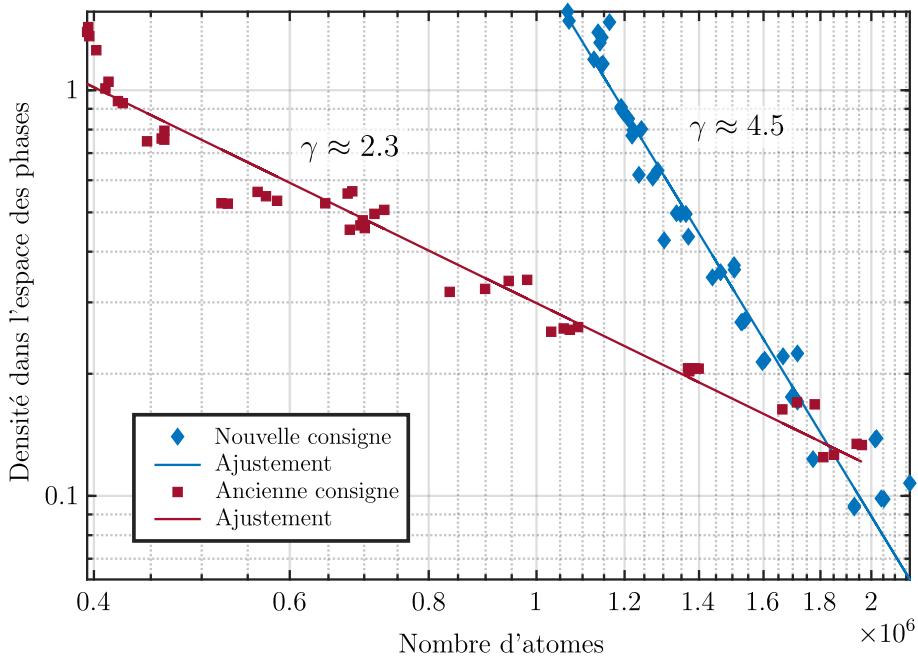


FIGURE 4.13 – Efficacité de l'évaporation optique. En traçant la densité dans l'espace des phases du nuage en fonction du nombre d'atomes, on peut évaluer l'efficacité du refroidissement évaporatif. La nouvelle consigne d'évaporation permet d'obtenir les points bleus pour différents temps d'évaporation, tandis que l'ancienne consigne est représentée en bordeaux. Les lignes continues sont des ajustements des données expérimentales par des lois de puissance 4.23, qui permettent ainsi d'extraire le paramètre γ quantifiant l'efficacité de l'évaporation.

que l'ancienne présente une efficacité d'environ 2.3²⁰, témoignant de la nette amélioration de notre évaporation. Notons que la loi d'échelle 4.30 en présence de pertes à trois corps prédit une valeur $\gamma \approx 6.5$, bien supérieure à notre valeur mesurée. Une étude approfondie de l'origine de cette différence n'a pas été menée compte-tenu de l'excellente efficacité obtenue. En effet, la valeur de $\gamma \approx 3$ représente déjà une très bonne efficacité pour la plupart des expériences d'atomes ultra-froids [6][42].

Finalement, la consigne retenue à l'issue de l'optimisation de l'évaporation permet d'obtenir un condensat de Bose-Einstein d'environ 1.2×10^6 atomes avec une température d'environ 500 nK en 700 ms. Après 3.5 s d'évaporation, notre nuage contient environ 2×10^5 atomes à une température de 10 nK sans utiliser la technique d'ouverture adiabatique pour refroidir davantage. À l'heure de l'écriture de ces lignes, l'implémentation de cette technique n'a pas encore été réalisée.

20. Cette mesure a été réalisée après le changement du laser source du piège optique. Avant changement, l'efficacité était plutôt estimée à 2.8 [44].

5. Propriétés d'un désordre de type speckle

Le chapitre 3 nous a renseigné quant aux propriétés de notre onde de matière ainsi que sa production. En particulier, on a vu qu'il était possible d'appliquer des potentiels externes conservatifs aux atomes par le biais du potentiel dipolaire. Ce potentiel étant proportionnel à l'intensité lumineuse I , on peut alors appliquer un désordre à nos atomes, pourvu que l'on soit capable de créer un désordre optique. En effet, une originalité de notre expérience est "d'inverser" les rôles habituels de la matière et de la lumière.

Ainsi, dans ce chapitre, nous allons nous attacher à décrire le second élément clé de la localisation d'Anderson : le désordre. Nous montrerons que la génération d'un tel désordre est aisée : la diffraction d'un faisceau laser au travers d'une lame de verre rugueuse produit un motif d'intensité lumineuse aléatoire et à fort contraste, appelé champs de tavelures optiques, ou encore *Speckle* (anglicisme communément admis). Citons deux énormes avantages d'un tel désordre : on en connaît toutes les propriétés, régies par la diffraction, et on contrôle ce désordre.

La première partie se concentrera sur la génération d'un champ de speckle, en particulier sur le diffuseur qui donne au speckle toutes ses propriétés. Dans un second temps, nous décrirons les propriétés spatiales d'un speckle, en particulier la taille des grains de lumière dans les directions transverses et longitudinale. Dans une troisième partie nous parlerons du potentiel ressenti par les atomes ainsi que des possibilités offertes par la structure multi-niveaux du ^{87}Rb et l'excellent contrôle du désordre dont nous disposons, puis dans une ultime partie nous étudierons une approche à deux longueurs d'onde pour dépasser les limitations d'un speckle monochromatique pour l'étude de la transition d'Anderson à énergie résolue.

5.1 Génération d'un champ de speckle

C'est avec le développement des premiers lasers qu'a été observée la structure granulaire de la lumière réfléchie par certaines surfaces rugueuses. Rapidement, il a été compris que ce motif provenait de la diffraction aléatoire et cohérente par une surface rugueuse.

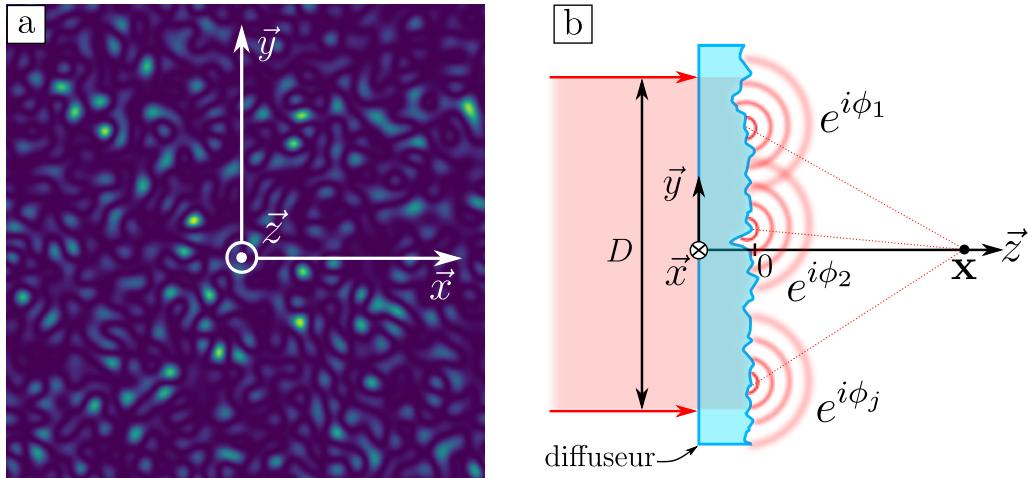


FIGURE 5.1 – a : Motif de speckle. Un tel motif est composé de grains lumineux entourés de zones d'ombre, où l'intensité est quasiment nulle. **b : Génération d'une figure de speckle.** La diffraction d'une onde cohérente par une surface rugueuse appelée diffuseur résulte en l'interférence multiple d'une grande quantité d'ondes à déphasage aléatoire. La phase de chacune de ces ondes est déterminée par l'épaisseur de verre traversée en chaque point.

Cette surface rugueuse peut-être considérée comme un ensemble d'émetteurs cohérents de déphasages aléatoires, et le profil d'intensité obtenu est le résultat de l'interférence multiple de l'ensemble de la surface. Un profil typique est montré figure 5.1. Celui-ci comporte un ensemble de grains lumineux séparés par des zones d'obscurité. Souvent considéré néfaste dans le domaine de l'imagerie, le speckle est pour nous une formidable source de désordre optique.

5.1.1 Statistiques de l'intensité d'un speckle

Le phénomène de speckle apparaît lorsque l'amplitude $E(\mathbf{x})$ au point d'observation \mathbf{x} résulte de la somme d'un grand nombre N d'ondes indépendantes d'amplitude E_0 et de phases aléatoires ϕ_j comme illustré figure 5.1. Cette amplitude peut alors s'écrire

$$E(\mathbf{x}) = \sum_j^N E_0 e^{i\phi_j} . \quad (5.1)$$

En supposant qu'un grand nombre de grains du diffuseur participent à l'interférence au point d'observation ($r_{\text{diff}} \ll D$ avec r_{diff} la taille typique d'un grain du diffuseur et D la taille de l'éclairement incident), on peut appliquer le théorème central limite à l'amplitude rayonnée. En supposant de plus que les phases aléatoires ϕ_j sont réparties de manière homogène sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, les distributions de probabilités des parties réelle et imaginaire de l'amplitude sont données par la loi normale

$$\mathcal{P}(E_{\mathcal{R}, \mathcal{I}}) = \frac{1}{\sigma_E \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{E_{\mathcal{R}, \mathcal{I}}^2}{2\sigma_E^2}\right) , \quad (5.2)$$

avec $E_{\mathcal{R}}$ et $E_{\mathcal{I}}$ les parties réelle et imaginaire du champ complexe $E = E_{\mathcal{R}} + iE_{\mathcal{I}}$ respectivement. Étant donné que les atomes ne sont sensibles qu'à l'intensité lumineuse $I = |E|^2$,

on montre alors que la distribution de probabilité de l'intensité lumineuse suit une loi exponentielle [35]

$$\mathcal{P}(I) = \frac{1}{\bar{I}} \exp\left(-I/\bar{I}\right). \quad (5.3)$$

De manière générale, on appellera *speckle pleinement développé* tout speckle vérifiant cette loi de probabilité. Deux conséquences importantes de cette loi sont à noter :

- L'écart-type σ_I de la loi 5.3 est égal à sa valeur moyenne \bar{I} , et donc le contraste σ_I/\bar{I} d'une figure de speckle pleinement développé est de 1. Une telle figure comportera alors des zones de forte intensité tout comme des zones d'intensité quasi-nulle.
- La probabilité d'obtenir une forte intensité lumineuse est exponentiellement petite, tandis que les zones de faible intensité sont beaucoup plus probables. Ainsi, une figure typique de speckle (représentée figure 5.1) est composée de maxima d'intensité lumineuse (*grains de speckle*) entourés de larges zones d'ombre.

5.1.2 Propriétés du diffuseur

L'analyse précédente décrivant la statistique de l'intensité lumineuse d'un speckle pleinement développé repose sur deux hypothèses :

- Il faut qu'un grand nombre d'émetteurs participe à l'interférence au point d'observation. Notamment, cela signifie que le diffuseur comporte un nombre suffisamment grand de *grains* ($r_{\text{diff}} \ll D$) et que ceux-ci rayonnent au point d'observation. Ce dernier point sera illustré section 5.2.
- Pour que la distribution de probabilité de l'amplitude soit centrée en 0, propriété essentielle pour un speckle pleinement développé, il faut que la distribution de phases soit suffisamment large, c'est à dire $\sigma_\phi \gg 2\pi$.

Les deux grandeurs apparaissant dans ces hypothèses, r_{diff} et σ_ϕ , sont fixées par les propriétés du diffuseur, que nous nous attacherons à décrire dans cette partie.

Dans le cadre de notre expérience, la génération du speckle se fait par transmission d'une onde laser au travers d'une lame de verre dépolie, d'épaisseur locale $e(\mathbf{x}_0)$ aléatoire et répartie selon une distribution gaussienne de largeur σ_e et de valeur moyenne \bar{e} , où \dots représente la moyenne sur les différentes réalisations de l'épaisseur aléatoire. On supposera que cette lame a été dépolie de manière homogène, ainsi, la statistique de l'épaisseur ne dépend pas de la position considérée sur la surface du diffuseur. On assimilera donc la distribution de l'épaisseur à un processus stationnaire.

La phase localement accumulée par le faisceau laser incident lors de la traversée du diffuseur est proportionnelle à l'épaisseur traversée et donnée par

$$\phi(\mathbf{x}_0) = 2\pi(n-1) \frac{e(\mathbf{x}_0)}{\lambda}, \quad (5.4)$$

avec n l'indice du verre et $\lambda \approx 780\text{nm}$ la longueur d'onde de l'onde laser. L'influence de cette phase sur l'amplitude du champ laser se traduit via la transmission locale du diffuseur

$$t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) = e^{i\phi(\mathbf{x}_0)} \quad (5.5)$$

dont la valeur moyenne \bar{t}_{diff} caractérise le pouvoir diffusant. Pour une lame peu rugueuse, le faisceau est en moyenne peu affecté lors de sa traversée et l'on a $\bar{t}_{\text{diff}} \approx 1$, tandis que dans

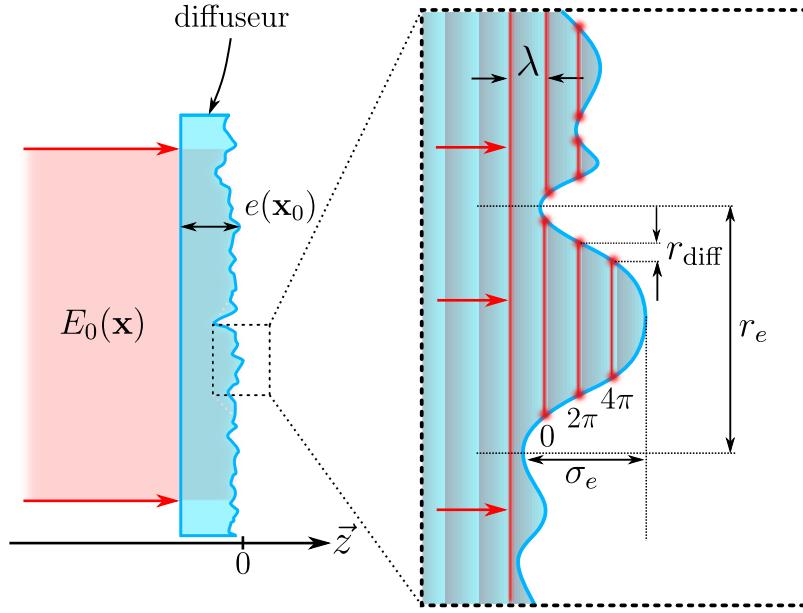


FIGURE 5.2 – **Caractéristiques du diffuseur.** L'épaisseur aléatoire est caractérisée par une hauteur typique σ_e et une granularité de taille r_e . Pour $\sigma_e \gg \lambda$, on a plusieurs oscillations de l'onde incidente dans le même grain, et donc t_{diff} qui est une fonction 2π -périodique, voit sa corrélation réduite.

le cas d'un diffuseur fort $\overline{t_{\text{diff}}} \approx 0$. En fixant la phase moyenne $\bar{\phi} = 0$, on montre annexe A que [24]

$$\overline{t_{\text{diff}}} = e^{-\frac{\sigma_\phi^2}{2}} \quad \text{avec} \quad \sigma_\phi = 2\pi(n-1)\frac{\sigma_e}{\lambda}. \quad (5.6)$$

Dans le cas d'un diffuseur de grande rugosité, dont l'épaisseur typique des grains σ_e est de l'ordre de plusieurs λ , on a $\sigma_\phi \gg 2\pi$ et cela permet donc de considérer que la distribution de phases est constante sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, essentiel pour un speckle pleinement développé.

Les grains du diffuseur sont de plus caractérisés par une certaine extension typique r_e correspondant à une largeur de corrélation de l'épaisseur. Celle-ci induit donc une corrélation spatiale de la transmission, décrite à l'aide la fonction de corrélation

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) = \overline{t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)t_{\text{diff}}^*(\mathbf{x}'_0)} = \overline{e^{i(\phi(\mathbf{x}_0)-\phi(\mathbf{x}'_0))}}. \quad (5.7)$$

Puisque l'épaisseur et la phase sont proportionnelles, ces deux grandeurs sont corrélées sur la même taille r_e correspondant à la granularité de la surface du verre. En revanche, dans le cas où $\sigma_e \gg \lambda$ (ce qui est le cas sur notre expérience), l'onde oscille plusieurs fois dans le même grain du diffuseur. La transmission étant une fonction 2π -périodique de la phase, celle-ci perd alors sa corrélation sur une taille $r_{\text{diff}} \ll r_e$, voir figure ???. On montre alors annexe A que la corrélation de la transmission à courte portée ¹ est de forme gaussienne :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) \approx \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0|^2}{2r_{\text{diff}}^2}\right) \quad \text{avec} \quad r_{\text{diff}} = r_e/\sigma_\phi. \quad (5.8)$$

¹. La corrélation de la transmission tend suffisamment vite vers 0 pour que l'on puisse considérer que $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0| \ll r_e$ dans le cas où $\sigma_\phi \gg 2\pi$.

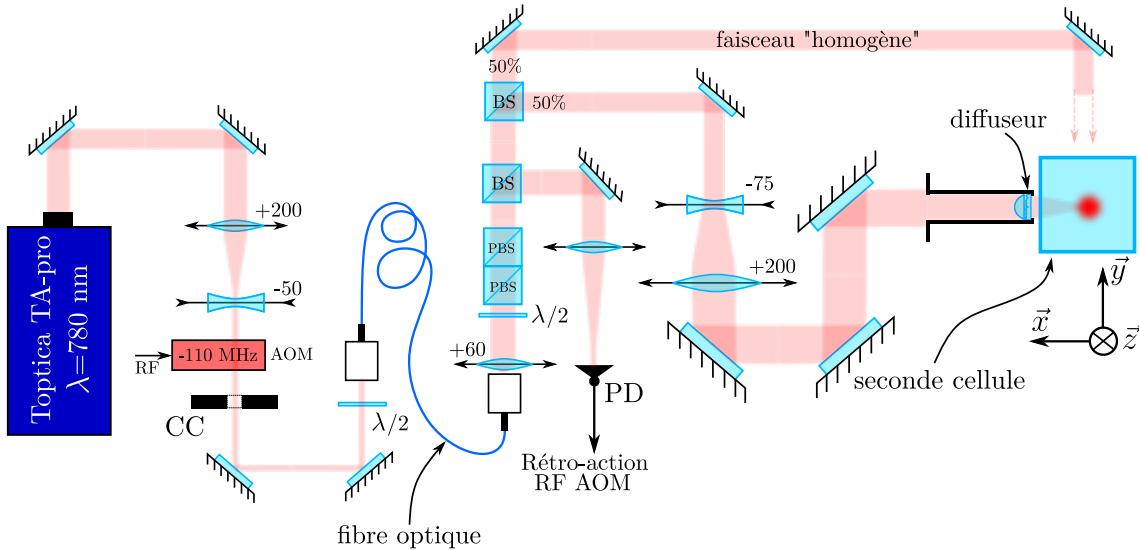


FIGURE 5.3 – Montage de génération du désordre optique. Ce montage se décompose en deux parties, la première étant dédiée à la mise en forme du faisceau. Celui-ci est émis d'un laser Toptica TA-Pro, dont le mode et la polarisation sont filtrés, et la puissance est stabilisée. Dans un second temps, ce faisceau est focalisé sur les atomes et passe au travers du diffuseur générant le speckle.

r_{diff} joue alors le rôle de la taille effective d'un émetteur indépendant tel que considéré dans la section 5.1.1. La condition d'un grand nombre d'émetteurs s'écrit alors $r_{\text{diff}} \ll D$.

Enfin, il est possible de définir l'angle de diffusion $\theta_{\text{diff}} = \lambda/\pi r_{\text{diff}} = 2(n-1)\sigma_e/r_e$, qui est indépendant de la longueur d'onde de l'onde laser incidente. θ_{diff} est donc une constante du diffuseur, fixée par les paramètres géométriques de celui-ci.

5.1.3 Implémentation expérimentale

Les expériences menées sur notre dispositif jusqu'en 2014 utilisaient un speckle réalisé à la longueur d'onde de 532 nm. Ce grand désaccord vers le bleu par rapport à la transition D₂ du ⁸⁷Rb permet ainsi de s'affranchir de l'émission spontanée, même pour les très longs temps de propagation nécessaires à l'étude de la localisation d'Anderson. Depuis 2015 en revanche, l'équipe utilise un speckle accordable autour de 780 nm offrant ainsi la possibilité de réaliser un désordre attractif ou répulsif. Nous verrons section 5.3 que cette accordabilité autour de la transition D₂ offre un grand nombre de possibilités expérimentales.

Mise en forme du faisceau speckle

Par voie de concision, seules les grandes lignes du montage de génération du speckle à 780 nm seront données ici, de nombreux détails à propos de ce montage pouvant être retrouvés dans les thèses de Jérémie Richard, Vincent Denechaud et Musawwadah Mukhtar [84, 24, 65]. De plus, les détails des éléments du montage dépendent fortement de la mesure souhaitée comme nous le verrons dans la suite de chapitre, néanmoins la philosophie en reste inchangée.

Ce montage se décompose en deux parties, la première permettant de mettre en forme les propriétés du faisceau laser, et la seconde génère le désordre sur les atomes.

Le faisceau source du speckle est émis par un laser industriel *Toptica TA-Pro 2 W* accordable autour de 780 nm. Étant donné la proximité de la transition atomique, ce laser peut être asservi par battements sur le laser repompeur *L2*², ce qui permet alors d'en fixer la fréquence avec une précision de 1 MHz. Le mode spatial et la polarisation du faisceau sont filtrés à l'aide d'une fibre optique à maintien de polarisation et de cubes séparateurs de polarisation.

Une partie de la puissance du faisceau est ensuite prélevée et mesurée à l'aide d'une photodiode, et la rétroaction sur le faisceau à l'aide d'un modulateur acousto-optique (AOM pour l'anglais *Acousto-Optic Modulator*) permet alors d'en stabiliser la puissance. La photodiode étant placée après la fibre optique et les cubes séparateurs de polarisation, la boucle d'asservissement de puissance permet de plus de s'affranchir des fluctuations de puissance dues à la polarisation.

Enfin, le faisceau est séparé en deux parties par une séparatrice 50/50, chacune de ces parties pouvant être envoyée sur les atomes. La partie réfléchie est ensuite agrandie à l'aide d'un télescope avant d'être focalisée sur les atomes et diffraction par le diffuseur, dont la géométrie sera présentée dans le paragraphe suivant. À ce stade, on dispose d'un faisceau de waist 14.6 mm (rayon à $1/e^2$), de polarisation π et dont la puissance est stabilisée et contrôlable.

Historiquement, la partie transmise était utilisée afin de réaliser une superposition cohérente de deux faisceaux speckle, permettant d'obtenir un désordre isotrope³ [44]. Aujourd'hui, ce faisceau est utilisé sans diffuseur et permet de réaliser un potentiel homogène servant à calibrer l'amplitude du potentiel.

Génération du speckle

La génération du speckle se fait selon le montage représenté figure 5.4. Un faisceau gaussien collimaté de waist 14.6 mm et de longueur d'onde $\lambda = 780$ nm, dont la mise en forme a été présentée dans le paragraphe précédent, est tronqué par un diaphragme de diamètre 22.9 mm. Ce faisceau passe ensuite au travers d'une lentille asphérique épaisse (*Thorlabs ACL2520-B*) de focale 16.0 mm (et de frontale 15.7 mm) montée dans ce même diaphragme. Le rôle de celle-ci est de focaliser la lumière sur les atomes⁴. Accolé à cette lentille se trouve un diffuseur *Newport FSD10-3* possédant une épaisseur de 0.5 mm⁵ et un angle de diffusion $\theta_{\text{diff}} \approx 5^\circ$.

Enfin, ce faisceau convergent traverse la paroi de la cellule en verre sous ultra-vide

2. Le choix d'asservir ou non ce laser dépend du désaccord utilisé. Ainsi, nous verrons que le laser speckle n'était pas asservi en fréquence pour la mesure du temps de diffusion élastique ($|\Delta|/2\pi \sim 1$ THz), tandis que ce fut le cas lors de la mesure des fonctions spectrales ($|\Delta|/2\pi \sim 70$ MHz).

3. Comme nous le verrons section 5.2.3, les grains d'un speckle unique sont étendus suivant la direction longitudinale. L'interférence entre deux speckles croisés permet de fortement réduire cette anisotropie [81].

4. Nous verrons dans la section suivante que cela permet d'obtenir des grains de speckle les plus petits possibles. En effet, on attend la manifestation d'effets quantiques sur la propagation d'une onde de matière dans un speckle pour des longueurs d'onde de de Broglie plus grandes que la taille des grains de speckle.

5. Cette épaisseur était initialement de 3 mm avant d'être réduite à 0.5 mm par l'atelier d'optique de l'IQGS.

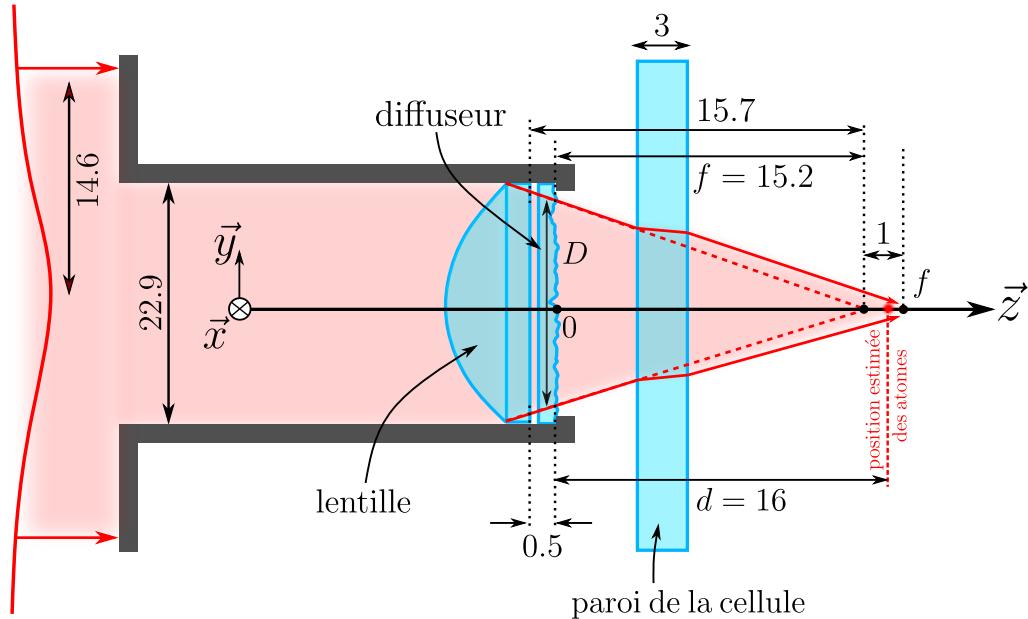


FIGURE 5.4 – Géométrie du montage de génération du speckle. Un faisceau gaussien incident de waist 14.6 mm est tronqué dans un diaphragme de diamètre 22.9 mm qui supporte le diffuseur. Ce faisceau est ensuite focalisé par une lentille asphérique épaisse de focale 16 mm et traverse le diffuseur d'épaisseur 0.3 mm. Le plan de focalisation est déplacé d'environ 1 mm à cause de la paroi de la cellule à vide, d'épaisseur 3 mm.

d'épaisseur $e = 3.0 \text{ mm}$ et située à 0.5 mm de la monture du diffuseur. Le matériau de cette cellule est du Vycor, d'indice optique $n = 1.46$. L'épaisseur de cette cellule, considérée comme une lame à faces parallèles, induit un décalage des rayons lumineux par réfraction, décalage représenté figure 5.4 montrant la trajectoire des rayons lumineux en absence de la paroi par des traits pointillés. La présence de la paroi entraîne donc un déplacement du plan de focalisation donné par $\Delta d = e(1 - 1/n) \approx 1 \text{ mm}$. La distance focale en présence de la paroi de la cellule est alors de 17.0 mm.

En choisissant pour origine de l'axe \vec{z} ⁶ la surface du diffuseur, la position du plan de focalisation se trouve à $f = 16.2 \text{ mm}$. Dans ce repère, la position des atomes dans le piège optique est estimée quant à elle à $d = 16 \pm 0.5 \text{ mm}$, dont la valeur est proche de celle de la position du plan de focalisation. Néanmoins, l'incertitude liée à la position des atomes est cruciale, celle-ci pouvant conduire à un écart de 0.7 mm du plan de focalisation. Il est ainsi primordial de connaître les propriétés du speckle autour du plan de focalisation.

Géométrie effective du montage du diffuseur

La lentille asphérique utilisée pour la focalisation du faisceau sur les atomes étant épaisse⁷, le faisceau est donc fortement affecté par sa traversée. L'éclairement dans le plan du diffuseur correspond donc à l'éclairement incident gaussien de waist 14.6 mm (rayon à $1/e^2$) tronqué par une pupille de diamètre 22.9 mm et ayant déjà subit un effet de

6. L'axe \vec{z} utilisé dans ce chapitre correspond à la direction de propagation du faisceau speckle. Dans le repère de l'expérience, il s'agit en réalité de l'axe \vec{x} , perpendiculaire au plan formé par les faisceaux du piège optique.

7. L'épaisseur au centre est de 12 mm pour une frontale de 15.7 mm.

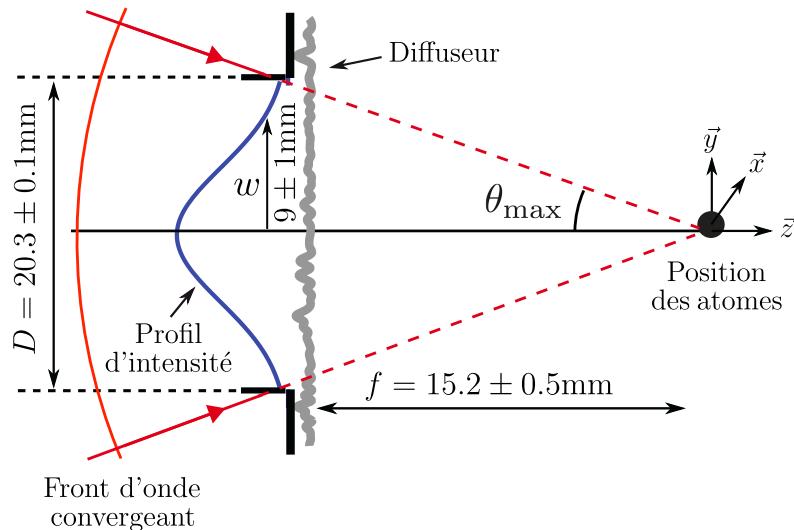


FIGURE 5.5 – Géométrie effective du montage du diffuseur. L'épaisseur de la lentille n'étant pas négligeable, l'éclairage au niveau du diffuseur a déjà subit un effet de focalisation comparé à celui au niveau de la lentille. Cela se traduit par un front d'onde au niveau du diffuseur qui est convergeant, avec un profil gaussien de largeur $w \approx 9\text{ mm}$ tronqué à un diamètre $D \approx 20.3\text{ mm}$.

focalisation. Il a été déterminé par photographie que le profil de l'éclairage dans le plan du diffuseur est aussi de forme gaussienne tronquée, avec un waist $w_0 = 9 \pm 1\text{ mm}$ et une pupille de diamètre $D = 20.3 \pm 0.1\text{ mm}$.

Il est alors possible de décrire le montage du diffuseur et le champ incident à l'aide d'une géométrie effective simplifiée illustrée figure 5.5. On considérera ainsi que que le profil d'intensité au niveau du diffuseur est donné par une forme gaussienne de largeur $w = 9 \pm 1\text{ mm}$ tronquée par une diaphragme de diamètre $D = 20.3 \pm 0.1\text{ mm}$ et convergeant à la distance $f = 15.2 \pm 0.5\text{ mm}$ ⁸. Ceci entraîne une ouverture numérique maximale $ON = \sin(\theta_{\max}) = 0.55 \pm 0.02$.

Dans la suite, nous utiliserons ce modèle pour décrire les propriétés du champ de speckle.

5.2 Propriétés spatiales d'un champ de speckle

Le speckle résultant de la propagation d'un faisceau transmit par le diffuseur, il est donc régit par les lois de la diffraction et il est possible de déduire ses propriétés spatiales de celles de l'éclairage au niveau au diffuseur. Notamment, les variations spatiales du champ de speckle sont décrites quantitativement par la fonction de corrélation de ce champ. L'étude de cette fonction de corrélation nous permet donc de déterminer toutes les tailles caractéristiques d'intérêt pour notre expérience, l'extension du champ de speckle ainsi que les tailles moyennes des grains de lumière.

8. Si la présence de la paroi de la cellule entraîne un déplacement du plan focalisation, celle-ci ne modifie pas l'ouverture numérique du système, c'est à dire l'angle des rayons avec l'axe optique. Comme nous le verrons dans la suite, il s'agit de la quantité qui décrit, avec la longueur d'onde, les propriétés spatiales d'un champ de speckle.

Dans cette section, nous allons nous attacher à décrire ces échelles de longueur caractéristiques autour du plan de focalisation à l'aide de la fonction de corrélation du champ, dont le détail des calculs est donné en annexe A.

De plus, lors de la conception de ce système, l'extension du champ de speckle ainsi que les tailles des grains de speckle ont été mesurées expérimentalement sur un montage reproduisant exactement les conditions réelles en présence de la cellule à vide, celle-ci empêchant de faire des mesures in-situ. La description de ces mesures et de leur traitement sont référencées dans la thèse de Jérémie Richard [84].

5.2.1 Extension transverse du champ de speckle le long de l'axe optique

L'extension transverse du champ de speckle est donnée par le waist du faisceau speckle, il est donc nécessaire de calculer le profil d'intensité moyenne $\bar{I}(\mathbf{x}_d)$, où l'ensemble des points $\{\mathbf{x}_d\}$ correspond au plan $\{x, y, z = d\}$ situé à une distance d de la surface du diffuseur. Pour cela, explicitons le champ rayonné $E(\mathbf{x}_d)$ à l'aide du principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation paraxiale :

$$E(\mathbf{x}_d) \propto \int d\mathbf{x}_0 E_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) \exp\left(ik\frac{\mathbf{x}_0^2}{2d_{\text{eff}}}\right) \exp\left(-ik\frac{\mathbf{x}_d \cdot \mathbf{x}_0}{d}\right), \quad (5.9)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde et d_{eff} correspond à une distance effective donnée par $1/d_{\text{eff}} = 1/d - 1/f$. L'ensemble des points $\{\mathbf{x}_0\}$ décrit le plan du diffuseur $\{x, y, z = 0\}$, et $E_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$ correspond au champ dans ce plan, qu'il est possible de décomposer sous la forme

$$E_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) = E_0(\mathbf{x}_0)t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) \quad \text{avec} \quad E_0(\mathbf{x}_0) = E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_0)m(\mathbf{x}_0), \quad (5.10)$$

où $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$ est la transmission du diffuseur, $E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_0)$ est le champ incident⁹, et $m(\mathbf{x}_0) = \Theta(|\mathbf{x}_0| - D/2)$ avec Θ la fonction de Heaviside est un masque représentant le diaphragme de diamètre D et les montures de optiques. $E_0(\mathbf{x}_0)$ correspond alors au champ au niveau du diffuseur, et on supposera dans la suite que celui-ci varie lentement à l'échelle des variations de $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$, c'est à dire que $E_0(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0) \approx E_0(\mathbf{x}_0)$ avec $\delta\mathbf{x}_0$ de l'ordre de r_{diff} .

On montre alors (voir annexe A) que le profil d'intensité moyenne à la distance d peut s'écrire [31]

$$\begin{aligned} \bar{I}(\mathbf{x}_d) &= \overline{E(\mathbf{x}_d)E^*(\mathbf{x}_d)} \\ &\propto I_0\left(\frac{d_{\text{eff}}}{d}\mathbf{x}_d\right) * \widetilde{C_{\text{diff}}}\left(\frac{\mathbf{x}_d}{\lambda d}\right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

où le symbole $*$ dénote le produit de convolution. L'évolution du profil d'intensité moyenne en fonction de la distance d est alors dû à deux contributions dont l'interprétation physique est la suivante :

- Le premier terme correspond à l'effet de la lentille, et focalise donc le profil d'intensité initiale $I_0(\mathbf{x}_0) = |E_0(\mathbf{x}_0)|^2$ dans le plan focal $\{x, y, z = f\}$. Cette focalisation se traduit au travers d'un changement d'échelle de l'intensité par le facteur $d/d_{\text{eff}} = |d - f|/f$. Ainsi, la taille de ce faisceau focalisé décroît avec la distance jusqu'à s'annuler dans le plan focal, comme prédit par l'optique géométrique.

9. Il s'agit du faisceau gaussien de waist 9 mm dans notre géométrie effective.

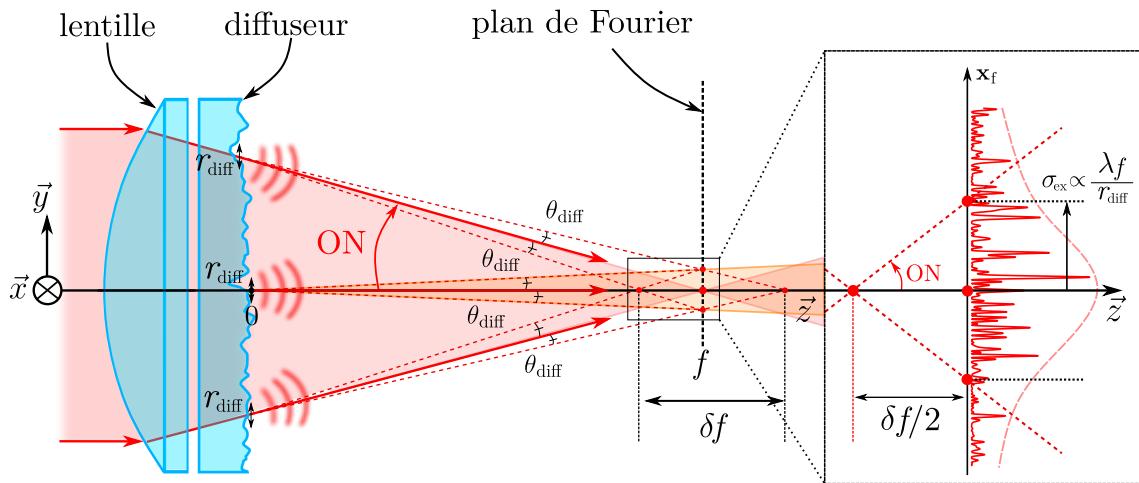


FIGURE 5.6 – Extension du champ de speckle. L’extension du faisceau de speckle est due à deux effets distincts, la focalisation du faisceau incident et la diffraction du faisceau par le diffuseur. La contribution de la focalisation à l’extension du faisceau est illustrée par des flèches rouges et un remplissage rose, tandis que celle de la diffraction correspond à un remplissage orange. La région aux alentours du plan focal est particulièrement intéressante car il s’agit de celle où l’ensemble des émetteurs contribuent à l’éclairement, chaque émetteur diffractant dans un cône d’angle θ_{diff} illustré par des pointillés rouges. Dans le cas où l’angle de diffusion est petit devant l’ouverture numérique $\theta_{\text{diff}} \ll \text{ON}$, on peut estimer par trigonométrie l’étendue de cette région à $\delta f/2 = \sigma_{\text{ex}}/\text{ON}$ (encart).

- Le second terme est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du diffuseur $C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$. Ce terme traduit la diffraction de l’onde incidente par les grains du diffuseur de taille r_{diff} , dont la largeur est donnée par $\lambda d/\pi r_{\text{diff}}$, qui croît linéairement avec la distance d .

Ces dépendances sont illustrées figure 5.6, où le fond rose correspond au premier terme de focalisation, tandis le fond orange illustre le second terme de diffraction. On identifie alors deux régimes pour lesquels un terme est prépondérant.

Dans une première région, loin du plan focal de la lentille, la taille du faisceau est donnée par l’effet de focalisation de la lentille. Une seconde région, proche du plan focal de la lentille, est dominée par l’effet de diffraction des émetteurs du diffuseur, la taille de l’éclairement incident étant fortement réduite par focalisation. Ainsi, pour une zone très proche du plan focal de la lentille, on peut décrire le profil d’intensité lumineuse par

$$\bar{I} \propto \text{TF}[C_{\text{diff}}](\mathbf{x}_f/\lambda f) \quad (5.12)$$

où l’ensemble des points $\{\mathbf{x}_f\}$ correspond au plan de Fourier¹⁰ $\{x, y, z = f\}$, et C_{diff} est la fonction de corrélation du diffuseur, de forme de gaussienne avec une largeur r_{diff} . Le profil d’intensité lumineuse dans le plan de Fourier est alors donnée par

$$\bar{I}(\mathbf{x}_f) \propto \exp\left(-\frac{2|\mathbf{x}_f|^2}{\sigma_{\text{ex}}^2}\right) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\text{ex}} = \frac{\lambda f}{\pi r_{\text{diff}}} . \quad (5.13)$$

10. Dans le plan focal $\{x, y, z = f\}$, le champ rayonné est alors la transformée de Fourier du champ incident comme illustré par la formule 5.9. Il s’agit d’une propriété bien connue des lentilles de pouvoir ramener l’infini de la diffraction de Fraunhofer à distance finie.

σ_{ex} correspond donc au waist du profil d'intensité moyenne, dont l'expression peut se réécrire à l'aide de l'angle de diffusion $\sigma_{\text{ex}} = \theta_{\text{diff}} f = 1.5 \pm 0.1 \text{ mm}$. Donc, dans le plan de Fourier, l'extension du champ de speckle ne provient que de l'effet de la diffraction des émetteurs individuels dont les faisceaux se recouvrent tous, comme illustré figure 5.6 par la zone orange.

Cette condition de recouvrement des faisceaux provenant de l'ensemble des émetteurs du diffuseur permet de considérer que dans cette région le speckle est entièrement développé. Afin d'en déterminer l'étendue longitudinale, on s'intéresse aux positions de l'espace où l'ensemble des faisceaux provenant du diffuseur participent. Dans la limite $\theta_{\text{diff}} \ll \text{ON}$, on détermine par trigonométrie que cette zone s'étend par part et d'autre du plan de Fourier sur une distance $\delta f / 2 \approx \sigma_{\text{ex}} / \text{ON} = 2.5 \pm 0.1 \text{ mm}$ (voir figure 5.6), délimitant ainsi les régions décrites précédemment. Par analogie avec un faisceau gaussien, on appellera δf la *distance de Rayleigh* du champ de speckle, et sa valeur nous assure que les atomes de trouveront dans la zone où le speckle est pleinement développé, celle-ci étant un ordre de grandeur plus grande que l'incertitude de positionnement des atomes.

5.2.2 Longueur de corrélation transverse le long de l'axe optique

La seconde taille caractéristique du speckle, la taille des grains de lumière, est une grandeur d'une importance capitale pour la physique du désordre. Si l'extension du faisceau de speckle est une grandeur d'intérêt pratique (celle-ci donne une borne supérieure sur les tailles de nuages), nous verrons chapitre 6 que la taille des grains de speckle fixe la dynamique de la propagation d'une onde en milieu désordonné.

Le potentiel ressenti par les atomes étant proportionnel à l'intensité lumineuse, la taille des grains du potentiel est donnée par la largeur de la fonction de corrélation des fluctuations d'intensité. À l'aide du théorème de Wick pour les variables gaussiennes, il est possible de relier cette fonction de corrélation des fluctuations d'intensité à la fonction de corrélation en amplitude du champ :

$$\overline{\delta I(\mathbf{x}_d) \delta I(\mathbf{x}'_d)} = \left| \overline{E(\mathbf{x}_d) E^*(\mathbf{x}'_d)} \right|^2 , \quad (5.14)$$

où $\delta I(\mathbf{x}_d) = I(\mathbf{x}_d) - \bar{I}(\mathbf{x}_d)$ correspond aux fluctuations statistiques d'intensité et les positions \mathbf{x}_d et \mathbf{x}'_d correspondent à deux points dans le plan $\{x, y, z = d\}$ transverse à l'axe optique.

Dans les conditions expérimentales usuelles, il est possible de négliger l'effet de l'extension spatiale finie du speckle, celle-ci étant très grande à l'échelle des grains de speckle. Ainsi, on peut considérer que la fonction de corrélation en amplitude ne dépend uniquement que de la différence des positions considérées. Dans ce régime, on montre annexe A que la fonction de corrélation transverse en amplitude le long de l'axe optique peut s'écrire [31] :

$$\begin{aligned} C_E(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}'_d) &= \overline{E(\mathbf{x}_d) E^*(\mathbf{x}'_d)} \\ &\propto \tilde{I}_0 \left(\frac{\delta \mathbf{x}_d}{\lambda d} \right) * C_{\text{diff}} \left(\frac{d_{\text{eff}}}{d} \delta \mathbf{x}_d \right) , \end{aligned} \quad (5.15)$$

où $\delta \mathbf{x}_d = \mathbf{x}'_d - \mathbf{x}_d$. De même que pour l'extension spatiale du champ de speckle, la fonction de corrélation transverse résulte de deux contributions, dont les interprétations physiques sont les suivantes :

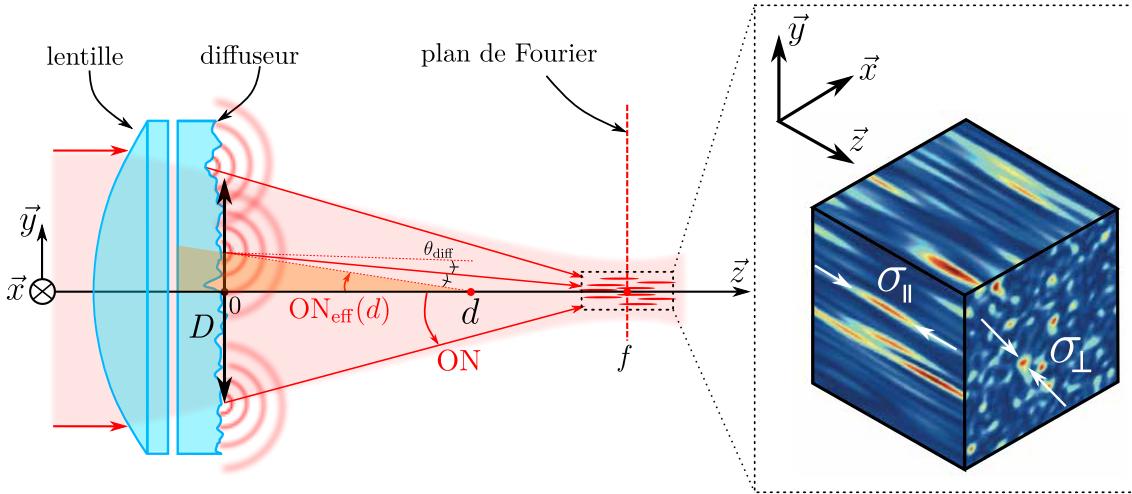


FIGURE 5.7 – Tailles des grains de speckle. La taille transverse σ_{\perp} des grains de speckle est donnée par la limite de diffraction, et dépend donc de l'ouverture numérique à la position d'observation d . Loin du plan de Fourier, seule une zone réduite du diffuseur participe à l'interférence, réduisant donc l'ouverture numérique (zone orange). **Encart :** Simulation tridimensionnelle d'un champ de speckle. Celle-ci fait apparaître une forme très allongée des grains selon la direction longitudinale. La taille longitudinale σ_{\parallel} des grains est de l'ordre de la distance de Rayleigh associée à la taille transverse σ_{\perp} comme on le verra section 5.2.3.

- Le premier terme correspond à la transformée de Fourier de l'intensité lumineuse dans le plan du diffuseur. Il s'agit ici du motif de diffraction à l'infini en l'absence du diffuseur, dont la taille est proportionnelle à la distance. Ce facteur d'échelle s'interprète comme une diminution de l'ouverture numérique au fur et à mesure de l'éloignement avec le diffuseur, comme indiqué par la relation $ON'(d) = D/2d$ en considérant les rayons les plus inclinés, avec D la taille du diaphragme de l'éclairage au niveau du diffuseur. Ce terme conduit donc à largeur de l'ordre de $\sim \lambda/\pi ON'(d)$, qui croît linéairement avec la distance d .
- Le second terme décrit quant à lui le fait que les grains du diffuseur ne diffractent que selon un angle θ_{diff} . De fait, ce terme décrit les régions de l'espace dans lesquelles l'ensemble du diffuseur ne participe pas à l'interférence au point x_d , comme illustré par la zone orange figure 5.7. Ce terme joue ainsi le rôle d'ouverture numérique effective, dont l'expression $ON_{\text{eff}}(d) = \theta_{\text{diff}} f / |d - f|$ peut être obtenue par trigonométrie. L'écriture de ce terme donnée équation 5.15 permet néanmoins d'obtenir une expression simple de la largeur induite pour la fonction de corrélation transverse : $\sim \lambda/\pi ON_{\text{eff}}(d)$.

La largeur de la fonction de corrélation apparaît alors comme la plus petite taille permise par les lois de la diffraction : il s'agit de la limite de diffraction. L'étude de la taille transverse des grains de speckle se résume alors à l'évolution de l'ouverture numérique le long de l'axe de propagation du faisceau.

À l'instar de l'extension du champ de speckle, il est possible d'identifier deux régions dans lesquelles le comportement de la largeur de la fonction de corrélation transverse en amplitude du speckle est majoritairement dû à l'un des effets mentionnés ci-dessus. La frontière entre ces deux régions est donnée, comme pour l'extension du speckle, par la

distance de Rayleigh δf du champ lumineux qui caractérise, rappelons-le, l'étendue sur laquelle l'ensemble de diffuseur participe à l'amplitude rayonnée.

Nous considérerons donc dans la suite que les atomes se trouvent à proximité du plan de Fourier, et la fonction de corrélation sera dominée par le régime de diffraction à l'infini, où l'ouverture numérique y est maximale. La fonction de corrélation des fluctuations d'intensité s'écrit alors simplement

$$\overline{\delta I(\mathbf{x}_f)\delta I(\mathbf{x}_f + \delta \mathbf{x}_f)} \propto |\text{TF}[I_0](\delta \mathbf{x}_f/\lambda f)|^2 , \quad (5.16)$$

qui n'est autre que le théorème de Van Cittert-Zernike en remarquant que la fonction de corrélation $\overline{\delta I(\mathbf{x}_f)\delta I(\mathbf{x}_f + \delta \mathbf{x}_f)}$ correspond au degré de cohérence spatiale. Dans la suite, nous assimilerons la forme de cette fonction de corrélation à une gaussienne (voir section 5.2.4), cependant, la forme exacte de la fonction de corrélation aux alentours du plan de Fourier nécessite tout de même une connaissance fine du profil d'intensité dans le plan du diffuseur¹¹.

Nous retiendrons ici que la taille transverse des grains de lumière est donnée par la limite de diffraction du système, $\sigma_{\perp} \sim \lambda/\pi ON$ de l'ordre de $0.5 \mu\text{m}$, bien inférieure à l'extension du faisceau de speckle $\sigma_{\perp} \ll \sigma_{\text{ex}}$. Une calibration précise de la taille transverse des grains de speckle est présentée section 5.2.4.

5.2.3 Longueur de corrélation longitudinale autour du plan de Fourier

Comme représenté figure 5.7, les grains de speckle possèdent une extension longitudinale finie. De même que dans le cas de l'extension transverse des grains, la taille longitudinale des grains de speckle est donnée par la largeur de la fonction de corrélation longitudinale des fluctuations des grains de speckle aux alentours du plan de Fourier :

$$\overline{\delta I(f)\delta I(f + \delta z)} = \left| \overline{E(f)E^*(f + \delta z)} \right|^2 , \quad (5.17)$$

évaluée aux positions $\{0, 0, z = f\}$ et $\{0, 0, z = f + \delta z\}$ sur l'axe optique.

En supposant que l'extension longitudinale δf du champ de speckle est très grande devant la taille longitudinale des grains, on peut se limiter à des petits déplacements $\delta z \ll \delta f$. On montre alors que la corrélation longitudinale en amplitude aux alentours du plan de Fourier peut s'écrire [60] :

$$\overline{E(f)E^*(f + \delta z)} \propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{i\pi\mathbf{x}_0^2 \delta z / \lambda f^2} . \quad (5.18)$$

On retrouve ainsi un comportement similaire à celui de la corrélation transverse aux alentours du plan de Fourier : la fonction de corrélation ne dépend que de l'éclairement incident. Cependant, la détermination de la fonction de corrélation longitudinale est plus compliquée que celle de la corrélation transverse, celle-ci ne se résumant pas qu'à une simple transformation de Fourier. Néanmoins, il est possible de donner une estimation de la longueur de corrélation à l'aide de la *méthode du col*. En effet, les valeurs de \mathbf{x}_0 qui contribuent significativement à l'intégrale sont celles pour lesquelles la phase $\pi\mathbf{x}_0^2 \delta z / \lambda f^2$

11. L'assimilation à une forme gaussienne revient à considérer que l'effet du diaphragme sur l'éclairement incident est moindre dans le cas de la corrélation transverse.

est très petite devant 1. On peut alors obtenir une estimation de la longueur de corrélation longitudinale :

$$\sigma_{\parallel} \sim \frac{\lambda}{\pi ON^2}. \quad (5.19)$$

La taille longitudinale des grains apparaît alors comme étant la longueur de Rayleigh associée à la taille transverse des grains, ceux deux grandeurs étant reliées par $\sigma_{\parallel} \sim \sigma_{\perp}/ON$.

Forme de la fonction de corrélation longitudinale

Il est possible d'obtenir des expressions analytiques de la fonction de corrélation longitudinale pour certains profils d'intensité. Notamment, on peut montrer que dans le cas d'un éclairement purement gaussien, la fonction de corrélation 5.17 est de forme lorentzienne :

$$\overline{\delta I(f)\delta I(f + \delta z)} \propto \frac{1}{1 + 4\delta z^2/\sigma_{\parallel}^2} \quad (5.20)$$

avec $\sigma_{\parallel} = 4\lambda f^2/\pi w^2$ et w le waist du faisceau incident. On retrouve ainsi la prédiction de la formule 5.19. Un second cas d'intérêt correspond à celui d'un faisceau homogène tronqué par un diaphragme de diamètre D . Dans cette situation, la fonction de corrélation longitudinale 5.17 possède une forme en sinus cardinal au carré.

Dans le cas de notre éclairement à la fois gaussien et tronqué par un diaphragme, la fonction de corrélation possède donc une forme complexe proche d'une fonction lorentzienne et d'un sinus cardinal au carré, voir figure 5.8. Une calibration expérimentale de la longueur de corrélation longitudinale, donnée par la largeur de cette fonction de forme complexe, est présentée dans la section suivante.

5.2.4 Effets non-paraxiaux sur les corrélations du speckle

La forme des fonctions de corrélations étant directement donnée par celle de l'intensité $I_0(\mathbf{x}_0)$, la détermination précise des longueurs de corrélation du speckle demande une connaissance fine de l'éclairement dans le plan du diffuseur. Cependant, les considérations sur l'éclairement au niveau du diffuseur présentées section 5.1.3 ne suffisent pas à reproduire les fonctions de corrélations expérimentales, mesurées à l'aide d'un objectif de microscope à haute résolution. Le procédé de mesure est décrit dans la thèse de Jérémie Richard [84].

Cette différence observée s'explique par le fait que les expressions des fonctions de corrélation des fluctuations d'intensité ont été obtenues dans le cadre de l'approximation paraxiale. Si l'utilisation d'un système de grande ouverture numérique permet certes d'obtenir les tailles de grains les plus petites possible, cela remet en cause l'approximation paraxiale utilisée pour décrire les caractéristiques spatiales de notre champ de tavelures. En particulier, notre système permet d'obtenir une grande ouverture numérique $ON = \sin\theta_{\max} = 0.55 \pm 0.02$ et cela implique que certains rayons lumineux sont inclinés d'un angle de plus de 30° par rapport à l'axe optique, pour lesquels l'approximation $\sin\theta = \theta$ n'est plus suffisante.

Notons tout de même que la forme de la fonction de corrélation transverse est très bien décrite par une fonction gaussienne, comme représenté figure 5.8. En particulier, dans

le cas d'un désordre 2D¹² tel qu'utilisé pour les mesures du temps de diffusion élastique, seule la corrélation transverse participe à la dynamique du transport de l'onde de matière. On définit alors la fonction de corrélation normalisée à deux dimensions par

$$c_{2D}(\Delta \mathbf{r}_\perp) = e^{-\Delta \mathbf{r}_\perp^2 / \sigma_\perp^2} \quad (5.21)$$

dont l'ajustement sur les données expérimentales donne $\sigma_\perp = 0.50 \pm 0.01 \mu\text{m}$. Il s'agit de la valeur de la longueur de corrélation transverse que l'on retiendra dans la suite.

Modèle numérique non paraxial

Afin de reproduire le désordre utilisé sur notre expérience, M. Pasek et D. Delande ont proposé une approche numérique reposant sur le principe de Huygens-Fresnel [107]. En se basant sur la géométrie de notre dispositif expérimental, ils ont développé un modèle discret dans le but est de reproduire la fonction de corrélation expérimentale

$$c_{\text{exp}}(\Delta \mathbf{x}) = \frac{\overline{\delta I(\mathbf{x}) \delta I(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})}}{\overline{\delta I^2}}, \quad (5.22)$$

essentielle à la simulation du comportement d'ondes de matière dans notre désordre optique.

Pour cela, le modèle se base sur la génération numérique d'un masque de phase représentant la forme de l'éclairement :

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}) = \delta(|\mathbf{k}| - k_L) \exp\left(-\frac{\tan^2 \theta}{(w_0/d)^2}\right) \Theta\left(\frac{D}{2d} - \tan|\theta|\right), \quad (5.23)$$

où $k_L = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde du faisceau laser, et $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ est l'angle entre le vecteur d'onde \mathbf{k} et l'axe optique. d correspond à la distance entre le plan du diffuseur et le plan de focalisation. Le second facteur traduit le profil gaussien du faisceau laser incident, tandis que le troisième facteur décrit quant à lui la présence du diaphragme. Notamment, ce modèle doit décrire l'effet du diaphragme sur les fonctions de corrélation dont le comportement dévie des formes gaussienne et lorentzienne pour les directions transverses et longitudinale respectivement.

Le champ rayonné s'écrit alors comme la somme des champs émis modulés par le masque 5.23 :

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} E_u(\mathbf{k}) \mathcal{P}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (5.24)$$

où les E_u sont des champs complexes décorrélés dont les parties réelle et imaginaire sont des variables gaussiennes centrées¹³. En utilisant les paramètres de l'expérience, on reproduit ainsi les bonnes propriétés statistiques du champ de tavelures, et la fonction de corrélation normalisée c_{num} simulée permet de correctement décrire celles mesurées expérimentalement, comme illustré figure 5.8.

12. Cette notion sera discutée dans le chapitre 6.

13. Le fait que ces champs soient décorrélés induit une extension infinie du champ de speckle. Ceci n'est pas en contradiction avec l'expérience dans la limite où l'extension du champ de speckle reste très grande devant les tailles de nos nuages, nuages se trouvant aux alentours du plan de Fourier.

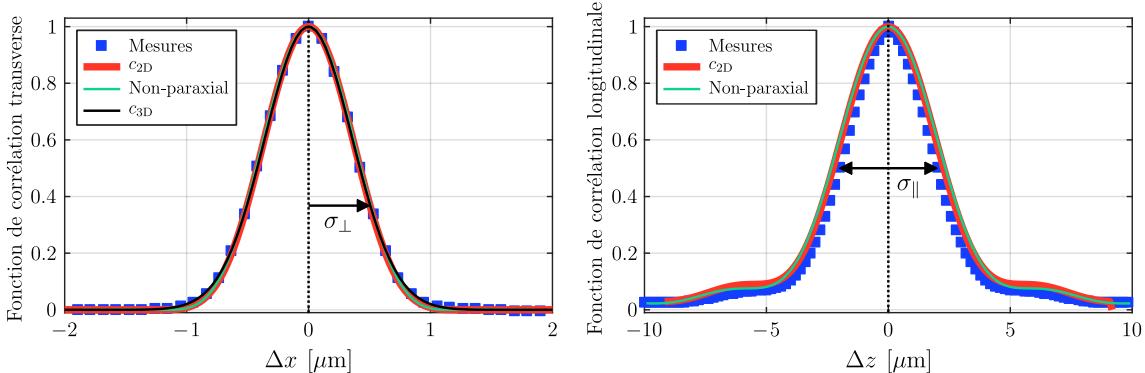


FIGURE 5.8 – Corrélations spatiales du speckle. Les données expérimentales (carrés bleus) sont comparés aux différents modèles. Le modèle non-paraxial (courbes vertes) développé par l'équipe de Dominique Delande permet de correctement décrire les corrélations expérimentales. Le modèle paraxial à ouverture numérique effective (courbes rouges) permet lui aussi de décrire correctement les corrélations mesurées. La fonction de corrélation transverse est similaire à une gaussienne (courbe noire), dont l'ajustement permet d'extraire la longueur de corrélation transverse $\sigma_{\perp} = 0.50 \pm 0.01 \mu\text{m}$ définie par le rayon à $1/e$. On définit la longueur de corrélation longitudinale $\sigma_{\parallel} = 4.1 \pm 0.1 \mu\text{m}$ par la largeur totale à mi-hauteur des données expérimentales.

Modèle à ouverture numérique effective

Cependant, la mise en œuvre du modèle décrit par les équations 5.23 et 5.24 est une procédure complexe autant numériquement qu'analytiquement, en particulier pour la détermination du spectre des fréquences spatiales du désordre $\tilde{C}(\mathbf{k})$, déterminant pour décrire la dynamique du système. Ainsi, l'équipe a développé un modèle plus simple, basé sur l'approximation paraxiale et faisant usage d'un facteur d'échelle géométrique x_{scale} permettant de décrire une *ouverture numérique effective* [85].

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, on montre alors que la fonction de corrélation 5.22 aux alentours du plan de Fourier s'écrit

$$c_{3D}(\Delta \mathbf{x}_{\perp}, \Delta z) \propto \left| \text{TF} \left[I'_0(\mathbf{x}_0) e^{i\pi \mathbf{x}_0^2 \Delta z / \lambda d^2} \right] \frac{\Delta \mathbf{x}_{\perp}}{\lambda d} \right|^2, \quad (5.25)$$

où le profil $I'_0(\mathbf{x}_0)$ d'intensité dans le plan du diffuseur vu sous l'ouverture numérique effective ON_{eff} est donné par

$$I'_0(\mathbf{x}_0) = \exp \left(-\frac{2\mathbf{x}_0^2}{w_{\text{eff}}^2} \right) \Theta \left(|\mathbf{x}_0| - \frac{D_{\text{eff}}}{2} \right) \quad (5.26)$$

avec $\Theta(x)$ la fonction de Heaviside, et $D_{\text{eff}} = x_{\text{scale}} D$ et $w_{\text{eff}} = x_{\text{scale}} w$ les tailles caractéristiques effectives du faisceau.

L'optimisation de la fonction de corrélation c_{3D} sur les données expérimentales permet de reproduire de manière fidèle les détails de notre désordre. De cette manière, on détermine que $x_{\text{scale}} = 0.875 \pm 0.005$, donnant une ouverture numérique effective de $\text{ON}_{\text{eff}} = 0.48 \pm 0.02$ ¹⁴.

14. Cette réduction de l'ouverture numérique provient des termes d'ordres supérieurs du développement limité de $\sin \theta$. Puisque $|\sin \theta| < |\theta|$, il convient d'utiliser un nouvel angle $\theta' < \theta$ de telle sorte que l'on retrouve la véritable valeur de l'ouverture numérique lorsque l'on utilise à nouveau l'approximation paraxiale $\sin \theta' \approx \theta'$

Le champ de speckle étant très étendu, la fonction de corrélation est très allongée selon la direction longitudinale comme décrit section 5.2.3. La forme de la fonction de corrélation étant compliquée, la longueur de corrélation longitudinale est définie par la largeur totale à mi-hauteur¹⁵ $\sigma_{\parallel} = 4.1 \pm 0.1 \mu\text{m}$. Cette définition entraîne alors un rapport d'aspect d'environ 8, témoignant de la forme très allongée des grains de speckle.

Pour terminer, précisons que les définitions des longueurs de corrélation utilisées dans ce manuscrit ne sont pas uniques. Notre présent choix est motivé pour des raisons de simplicité lors de l'étude du temps de diffusion élastique (voir chapitre 6), cependant cette convention n'est pas celle la plus adaptée à l'étude des fonctions spectrales par exemple [107][78].

5.3 Propriétés du potentiel de type speckle

Jusqu'à ce point, nous nous sommes attachés à décrire le champ lumineux d'un speckle. En particulier, nous avons montré le caractère granulaire de celui-ci, granularité dont la taille est donnée par la limite de diffraction.

À présent, nous allons décrire comment les propriétés du champ de speckle se traduisent en terme de potentiel pour les atomes.

5.3.1 Propriétés du potentiel

Comme annoncé en introduction de ce chapitre, le désordre nécessaire à l'étude de la propagation d'ondes de matière en milieux désordonnés est réalisé à l'aide du champ de speckle décrit précédemment, dont l'effet sur les atomes est décrit par le potentiel dipolaire présenté section 3.2.3. En effet, l'effet d'un champ laser de pulsation ω et d'intensité $I(\mathbf{x})$ sur un atome à deux niveaux séparés par $\hbar\omega_0$ est donné par 3.19, que l'on peut écrire plus simplement

$$V(\mathbf{x}) \propto I(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right). \quad (5.27)$$

Comme décrit précédemment, le laser utilisé pour créer ce champ de speckle est accordable autour de 780 nm, c'est à dire proche de la résonance de la raie D_2 du ^{87}Rb . Dans ces conditions, il est possible d'appliquer l'approximation de l'onde tournante et de négliger le terme en $1/(\omega + \omega_0)$ devant le terme co-rotatif en $1/(\omega - \omega_0)$, le potentiel ressenti par les atomes s'exprimant alors

$$V(\mathbf{x}) \propto \frac{I(\mathbf{x})}{\delta}, \quad (5.28)$$

où $\delta = \omega - \omega_0$ est le désaccord du faisceau par rapport à la transition.

Le potentiel désordonné ressenti par les atomes étant proportionnel à l'intensité lumineuse, il apparaît alors que les propriétés statistiques spatiales du potentiel sont exactement celles de l'intensité lumineuse du speckle. Notamment, le potentiel généré par un speckle est anisotrope et la taille typique des fluctuations de potentiel aux alentours du plan de Fourier est donnée par $\sigma_{\perp} = 0.5 \mu\text{m}$ dans le plan transverse et $\sigma_{\parallel} = 4.1 \mu\text{m}$ dans la direction

¹⁵ Le choix de cette définition a été fait par consistance avec le cas d'une illumination purement gaussienne, résultant en une fonction de corrélation longitudinale de forme lorentzienne.

longitudinale, les fonctions de corrélations du potentiel et de l'intensité lumineuse étant identiques.

De plus, il a été montré dans la section précédente que le champ de speckle n'est pas homogène, mais qu'il possède une extension finie. En particulier, l'équation 5.13 stipule que le profil d'intensité moyenne est une gaussienne de waist $\sigma_{\text{ex}} \approx 1.5\text{ mm}$, dont l'intensité au centre du faisceau dépend la puissance du laser P selon

$$\bar{I}(\mathbf{x}_f = 0) = \frac{2P}{\pi\sigma_{\text{ex}}^2}, \quad (5.29)$$

d'après les lois de l'optique gaussienne. Les tailles typiques des nuages utilisés étant au maximum de quelques dizaines de μm , on peut supposer qu'à cette échelle, le potentiel moyen ressenti par les atomes est homogène et que sa valeur est fixée par l'intensité lumineuse au centre de la figure de speckle : $V_R = \bar{V} \propto \bar{I}(\mathbf{x}_f = 0)/\delta$.

Une autre conséquence de l'expression 5.28 est qu'il est possible de créer un potentiel désordonné sur les atomes qui soit répulsif ($\delta > 0$) ou bien attractif ($\delta < 0$) selon le signe du désaccord δ . Cette dernière possibilité nous permet d'avoir un degré de liberté expérimental supplémentaire, celui de la distribution de potentiel, dont l'importance sera illustrée dans les chapitres 6 et 7. En effet, si la distribution de la norme du potentiel est fixée par celle de l'intensité lumineuse 5.3, ces deux quantités étant proportionnelles, le signe du désaccord nous permet de retourner la distribution de potentiel par rapport au potentiel nul $V = 0$ (voir figure 5.9)

$$\mathcal{P}(V) = \frac{1}{|V_R|} e^{-V/V_R} \cdot \Theta(V/V_R), \quad (5.30)$$

où Θ est la fonction de Heaviside valant 1 pour $V/V_R > 0$, et 0 sinon. V_R est le potentiel moyen, proportionnel à l'intensité lumineuse moyenne et dont le signe peut changer suivant celui du désaccord. L'amplitude du désordre est quant à elle donnée par l'écart-type de la distribution de potentiel $\sigma_V = (\bar{V}^2 - \bar{V}^2)^{1/2} = |V_R| > 0$ et sera toujours positive. Ainsi, sur notre dispositif, changer l'amplitude du désordre revient simplement à faire varier la puissance du faisceau speckle rayonné sur les atomes.

5.3.2 Possibilité d'un potentiel dépendant de l'état interne

L'étude de la transition d'Anderson, en particulier du régime critique, nécessite de pouvoir adresser sélectivement les différents niveaux d'énergie liés au désordre. Il s'agit donc de procéder à une spectroscopie du désordre. Pour cela, nous devons disposer d'un état libre dans lequel nous préparons notre condensat de Bose-Einstein, c'est à dire insensible au potentiel désordonné, et d'un second état couplé au désordre. Dans cette section, on s'attachera donc à décrire la notion de potentiel dépendant de l'état interne des atomes.

Principe du désordre dépendant de l'état interne

Comme explicité section 3.2.3, la formule 3.19 décrivant le potentiel dipolaire a été obtenue dans la limite des grands désaccords pour un système à deux niveaux, ne tenant donc compte ni de la structure fine, ni de la structure hyperfine du ^{87}Rb . En particulier, la structure hyperfine de l'état fondamental $5^2S_{1/2}$ possède deux niveaux $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ séparés de $\Delta_{\text{hf}} = 6.83\text{ GHz}$ très grande devant la largeur de la transition $\Gamma/2\pi = 6.07\text{ MHz}$.

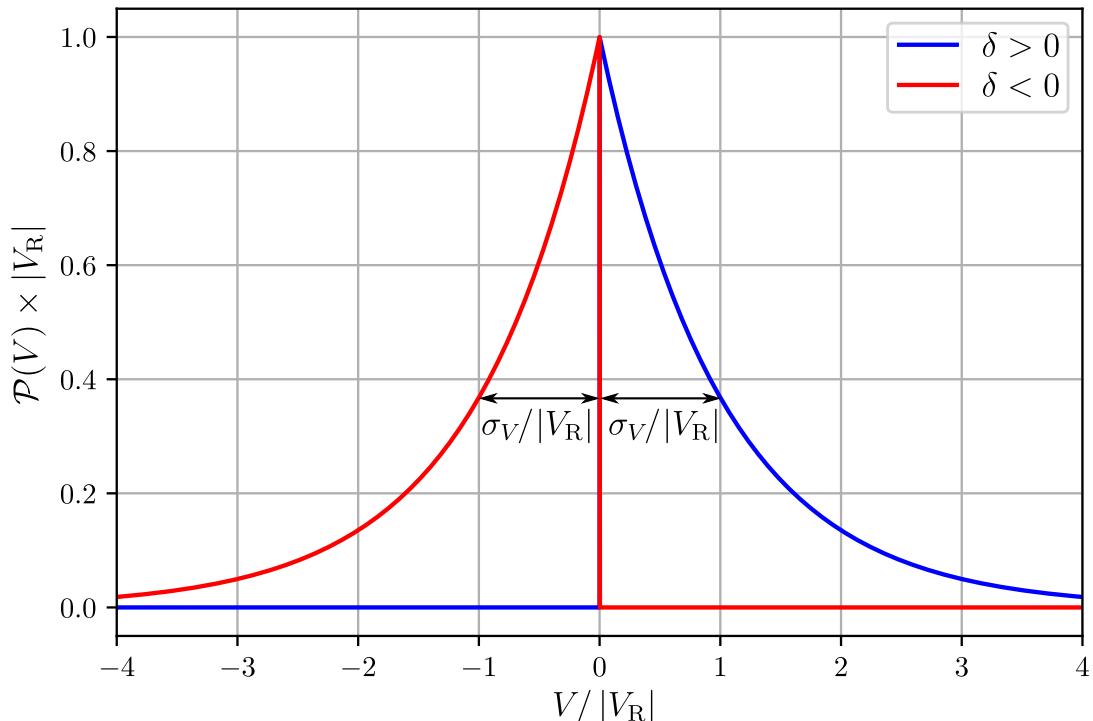


FIGURE 5.9 – Distributions de potentiel pour un désordre optique de type speckle. La distribution de potentiel suit celle de l'intensité lumineuse. Pour des désaccords positifs $\delta > 0$, le potentiel créé est positif et sa distribution est une exponentielle décroissante (courbe bleue). Pour des désaccords négatifs $\delta < 0$, le potentiel est alors attractif et ne peut dépasser 0. La distribution de potentiel est alors une exponentielle croissante (courbe en rouge).

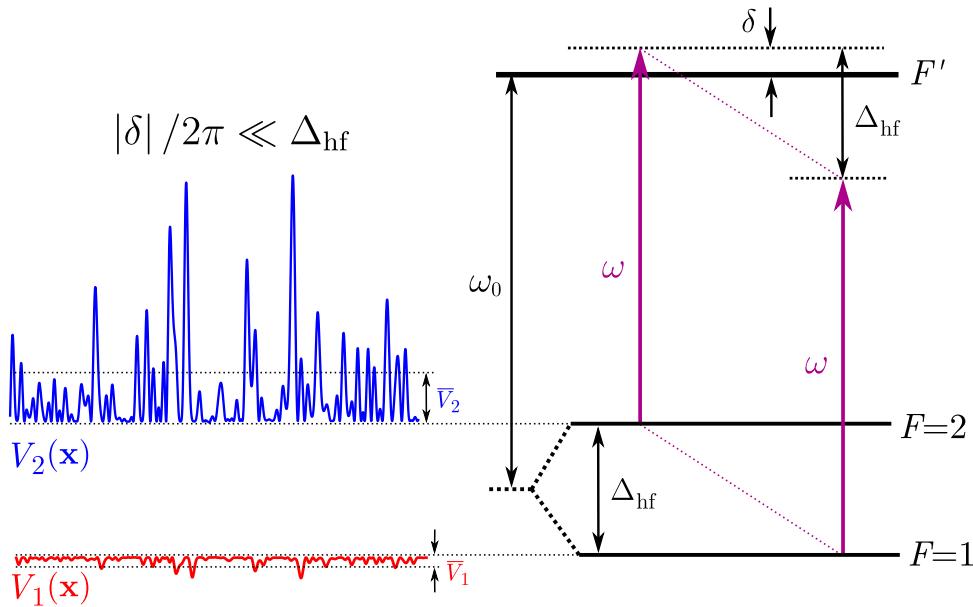


FIGURE 5.10 – Réalisation d'un potentiel dépendant de l'état interne. Le choix d'un désaccord par rapport à la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F'\rangle$ qui soit petit devant la séparation hyperfine des états $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ permet de soumettre un potentiel aux atomes dans l'état $|F = 2\rangle$ tout en perturbant peu ceux dans l'état $|F = 1\rangle$. Plus de blabla ici.

En fixant le désaccord $\delta_{2,F'}$ par rapport à la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F'\rangle$ de telle sorte que celui-ci soit très petit devant la séparation hyperfine des états fondamentaux $|\delta_{2,F'}|/2\pi \ll \Delta_{hf}$, on peut réaliser un potentiel dont la valeur moyenne dépend de l'état interne :

$$\bar{V}_2 \propto \frac{\bar{I}}{\delta_{2,F'}} \quad \text{et} \quad \bar{V}_1 \propto \frac{\bar{I}}{\delta_{2,F'} + \Delta_{hf}}. \quad (5.31)$$

Avec la condition d'un petit désaccord, on obtient alors $|\bar{V}_1| \ll |\bar{V}_2|$, comme illustré figure 5.10. On dispose donc d'un moyen de réaliser un potentiel conséquent sur l'état $|F = 2\rangle$ tout en perturbant peu l'état $|F = 1\rangle$ dans lequel on prépare notre condensat de Bose-Einstein.

Détails du potentiel dipolaire

Cependant, à l'échelle des désaccords typiques recherchés dans une telle situation (de l'ordre de 100 MHz), il est aussi nécessaire de tenir compte de la structure hyperfine de l'état excité $5^2P_{3/2}$ du ^{87}Rb , qui se décompose en quatre états hyperfins $|F' = \{0, 1, 2, 3\}\rangle$. On peut alors montrer que le potentiel dipolaire ressenti par les états fondamentaux $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ est la somme des contributions de chacune des transitions vers un état excité [36].

De plus, le faisceau speckle étant polarisé linéairement suivant l'axe du champ magnétique \vec{y} , les contributions au potentiel dipolaire se restreignent aux transitions π ($\Delta m_F = 0$) et on peut alors montrer à l'aide d'un calcul attentif de la polarisabilité atomique que le potentiel dipolaire ressenti par les états fondamentaux hyperfins est donné par [36][104][24] :

$$V_2(\mathbf{x}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma I(\mathbf{x})}{\omega_0^3} \left(\frac{1}{40 \delta_{2,1}} + \frac{1}{24 \delta_{2,2}} + \frac{4}{15 \delta_{2,3}} \right) \quad (5.32)$$

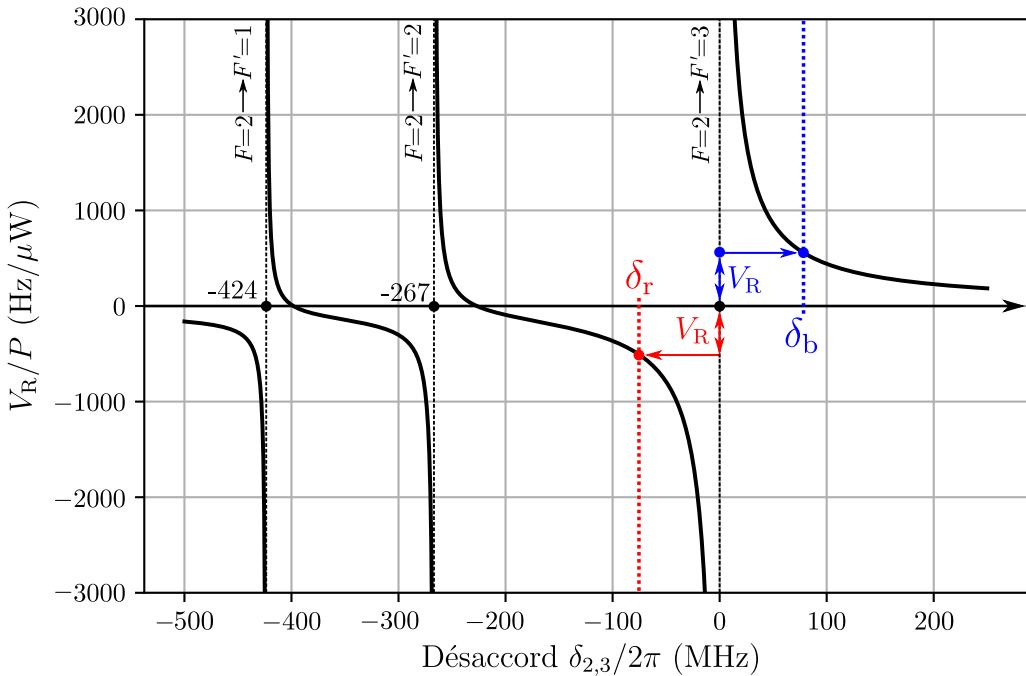


FIGURE 5.11 – Potentiel dipolaire dû à la structure hyperfine du ^{87}Rb . En fixant la puissance du faisceau speckle d'extension σ_{ex} , le potentiel moyen V_R ressenti par l'état $|F = 2\rangle$ évolue avec le désaccord $\delta_{2,3}$ par rapport à la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$. Les trois divergences de potentiel observées correspondent aux trois transitions π possibles.

et

$$V_1(\mathbf{x}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma I(\mathbf{x})}{\omega_0^3} \left(\frac{5}{24\delta_{1,1}} + \frac{1}{8\delta_{1,2}} \right), \quad (5.33)$$

où les $\delta_{F,F'}$ correspondent aux désaccords en rads^{-1} associés à chacune des transitions $|F, m_F\rangle \rightarrow |F', m'_F = m_F\rangle$. En prenant la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ comme référence, on peut tracer l'évolution du potentiel dipolaire pour l'état $|F = 2\rangle$ en fonction du désaccord $\delta_{2,3}$, les autres désaccords étant déductibles de la structure hyperfine des états excités. Cette évolution est représentée figure 5.11, qui comporte trois divergences du potentiel correspondant aux trois transitions π possibles $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = \{1, 2, 3\}\rangle$.

À l'instar du cas d'un potentiel réalisé à l'aide d'un désaccord suffisamment grand devant la structure hyperfine du ^{87}Rb présenté dans la section 5.3.1 précédente, la figure 5.11 illustre la possibilité de réaliser des potentiels qui soient attractifs ou répulsifs en sélectionnant soigneusement le désaccord du laser par rapport à la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ ¹⁶. Dans cet exemple, les désaccords $\delta_{2,3} = \delta_r = -2\pi \times 73 \text{ MHz}$ et $\delta_{2,3} = \delta_b = 2\pi \times 81 \text{ MHz}$ choisis permettent tous deux d'obtenir un potentiel moyen $|V_R|/P = h \times 0.53 \text{ kHz}/\mu\text{W}$ où $V_R = \overline{V_2}$ est le potentiel moyen ressenti par l'état $|F = 2\rangle$. Le choix de tels désaccords pour des désordres attractifs ($\delta_r < 0$) ou bien répulsifs ($\delta_b > 0$) donne alors un rapport de potentiels sur les états $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ de l'ordre de

$$|V_1|/|V_2| \approx 0.01, \quad (5.34)$$

16. La sélection de cette transition comme référence s'explique par sa forte contribution au potentiel ressenti par l'état $|F = 2\rangle$ comme explicité équation 5.32. Ceci est aussi visible sur la figure 5.11 où l'effet de cette transition apparaît sur une bande d'environ $\pm 200 \text{ MHz}$, bien plus large que pour les deux autres transitions.

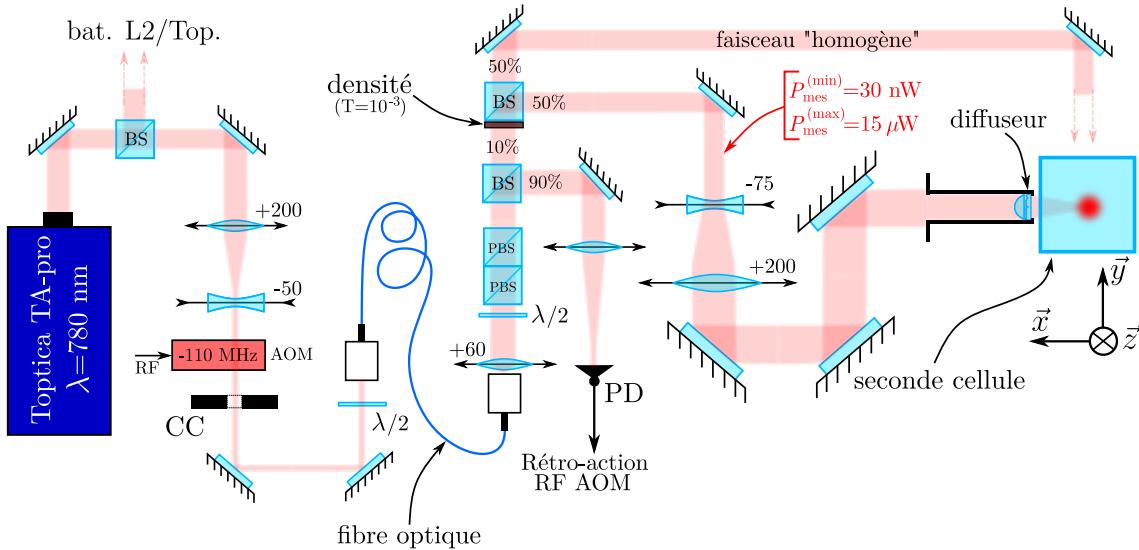


FIGURE 5.12 – Montage speckle pour un désordre dépendant de l'état interne. L'approche de désordre dépendant de l'état interne nécessitant de très faibles puissances optiques, le montage précédent a été adapté afin de pouvoir stabiliser des puissances de l'ordre du μW à l'aide d'une densité optique atténuant fortement le faisceau. L'utilisation de 90% de la puissance du faisceau pour la stabilisation en puissance permet d'obtenir une meilleure sensibilité aux fluctuations de puissance. De plus, la fréquence du faisceau laser est stabilisée par battements avec le laser repompeur $L2$.

montrant donc la très forte différence entre les potentiels ressentis par les deux états fondamentaux de notre atome. La mise en œuvre expérimentale d'un tel désordre dépendant de l'état interne des atomes a permis la mesure des fonctions spectrales [107], dont les grandes lignes de ce procédé seront décrites dans le chapitre 7. L'ensemble des détails de ces mesures est documenté dans la thèse de Vincent Denechaud [24].

Implémentation expérimentale

L'utilisation d'un tel potentiel proche de résonance impose certaines contraintes quant à la puissance et à la fréquence du laser utilisé. En particulier, il est nécessaire de stabiliser la fréquence du laser afin de réduire au maximum les fluctuations du potentiel étant donné le faible désaccord ($|\delta_{2,3}|/2\pi \sim 80$ MHz).

Une spécificité de notre montage réside dans sa capacité à stabiliser des très faibles puissances optiques¹⁷. Pour cela, le montage de mise en forme du faisceau est très similaire à celui présenté section 5.1.3 où l'accent a été mis sur la contrainte de l'utilisation de très faibles puissances optiques, voir figure 5.12. La lame séparatrice utilisée pour la stabilisation de puissance permet de dévier 90% de la puissance vers la photodiode, permettant ainsi d'obtenir une grande sensibilité aux fluctuations de puissance. Les 10% transmis sont ensuite atténus à l'aide d'une densité optique *Thorlabs NE30A-B* permettant de diviser la puissance d'un facteur 1000. Les puissances alors obtenues sont stabilisées et contrôlables entre typiquement 30 nW et 15 µW.

17. L'exemple du paragraphe précédent montre que des fluctuations de puissance de l'ordre de 1 µW peut engendrer des fluctuations de potentiel de 500 Hz.

Limitation du potentiel résiduel sur l'état $|F = 1\rangle$

Une conséquence de l'équation 5.34 est la suivante. Bien que le potentiel moyen \bar{V}_1 ressenti par l'état $|F = 1\rangle$ soit faible, celui-ci ne s'annule pas exactement. Quelle limite peut-on alors donner à la force du désordre V_R ? Pour cela intéressons-nous à la limite que l'on peut donner au potentiel résiduel V_1 .

Nous avons vu section 3.1.2 que pour un condensat de Bose-Einstein dans le régime de Thomas-Fermi, les interactions entre particules écrivent le potentiel externe soumis aux atomes. Il en résulte que sur l'ensemble du condensat, l'énergie des atomes est constante et égale au potentiel chimique μ . Ainsi, pour un potentiel désordonné résiduel d'amplitude faible $\bar{V}_1 \ll \mu$, une petite modulation de densité du condensat permet de compenser l'effet de ce potentiel. Ainsi, l'énergie potentielle de chaque atome reste constante et égale au potentiel chimique. Dans ces conditions, le potentiel résiduel \bar{V}_1 ne perturbe pas l'état libre $|F = 1\rangle$.

Augmentons alors la force du désordre : le potentiel résiduel augmente jusqu'à ce que celui-ci dépasse par endroits le potentiel chimique. À ces endroits, l'énergie d'interaction n'est plus suffisante pour écraser l'énergie potentielle du désordre et on crée un trou dans le condensat. Notons de plus que localement l'énergie ne sera plus égale au potentiel chimique. La conséquence la plus néfaste est l'apparition de nouvelles énergies dans la distribution d'énergie de l'état libre, dégradant ainsi la spectroscopie recherchée.

Le caractère limitant du désordre résiduel apparaît donc lorsque celui-ci est de l'ordre du potentiel chimique $\bar{V}_1 \lesssim \mu \approx h \times 40\text{Hz}$. En utilisant le rapport 5.34, on estime alors que le désordre maximal applicable à l'aide de cette technique est de l'ordre de $h \times 4\text{kHz}$ ¹⁸.

5.4 Potentiel composé d'un speckle bichromatique

Si l'approche décrite dans la section précédente permet de réaliser une spectroscopie du potentiel désordonné appliquée aux atomes, celle-ci ne permet pas d'étudier la transition d'Anderson dans la mesure où celle-ci nécessite de réaliser des expériences d'expansion du nuage suite à la spectroscopie.

La principale limitation de cette approche provient du faible désaccord du faisceau speckle. En effet, les désaccords utilisés étant de l'ordre de $|\delta| \approx 12\Gamma$, le taux d'émission spontanée est relativement grand conduisant à un temps de vie maximal des atomes habillés par le désordre d'une centaine de millisecondes, très insuffisant pour les temps d'expansions visés de plus d'une seconde.

Il est donc nécessaire de compléter la procédure expérimentale utilisée lors de la mesure des fonctions spectrales pour pouvoir procéder à des expériences d'expansion.

5.4.1 S'éloigner de résonance

L'approche intuitive pour diminuer le taux d'émission spontanée consiste à s'éloigner de la transition atomique, et donc à augmenter le désaccord. En effet, il est possible d'obtenir

18. Cet effet a été observé lors de la mesure des fonctions spectrales. [107][24]

une estimation du taux d'émission spontanée Γ_2 de l'état $|F = 2\rangle$ à l'aide de

$$\Gamma_2 \approx \frac{1}{\hbar} [V_R] \frac{\Gamma}{|\delta|}, \quad (5.35)$$

où $\Gamma = 2\pi \times 6.07\text{MHz}$ correspond à la largeur de la transition D_2 du ^{87}Rb et δ est le désaccord.

Afin d'obtenir un temps de vie Γ_2^{-1} de l'ordre de la seconde pour un désordre d'environ 500 Hz typiquement utilisé sur l'expérience, il est nécessaire d'utiliser un désaccord de plusieurs GHz. Cette condition est donc incompatible avec celle de désordre dépendant de l'état interne $\delta/2\pi \ll \Delta_{\text{hf}}$.

La question est alors la suivante : est-il possible de réaliser un désordre dépendant de l'état interne tout en ayant un taux d'émission spontanée suffisamment faible pour permettre l'étude de la localisation d'Anderson ?

Speckle bichromatique

La réponse apportée par l'équipe pour augmenter le temps de vie des atomes vis-à-vis de l'émission spontanée consiste à utiliser des désaccords plus importants, de l'ordre de 100 GHz. Cependant, l'utilisation de désaccords aussi grands ($\delta/2\pi \gg \Delta_{\text{hf}}$) ne permet plus la sélectivité en état interne recherchée pour réaliser une spectroscopie du désordre. L'idée est alors de compenser le potentiel ressenti par l'état $|F = 1\rangle$ à l'aide d'une seconde fréquence optique, comme illustré figure 5.13. Une étude quantitative et détaillée de cette approche peut être retrouvée dans le manuscrit de thèse de Musawwadah Mukhtar [65], aussi nous nous contenterons de décrire les grandes lignes de cette approche.

Dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire, on montre à l'aide de la partie réelle de la polarisabilité atomique que le potentiel moyen total ressenti par chaque état est la somme des potentiels générés par chaque faisceau. Ces potentiels sont alors donnés par :

$$\overline{V}_1 = \overline{V_{P,1}} + \overline{V_{C,1}} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{V}_2 = \overline{V_{P,2}} + \overline{V_{C,2}} = V_R, \quad (5.36)$$

avec $\overline{V_{P,i}}$ ($\overline{V_{C,i}}$) le potentiel moyen créé par le laser principal (de compensation) sur l'état $|F = i\rangle$. Nous avons de plus fait apparaître la contrainte que le potentiel moyen total appliqué à l'état $|F = 1\rangle$ soit nul. De même, les taux d'émission spontanée s'additionnent, ceux-ci étant issus de la partie imaginaire de la polarisabilité atomique :

$$\Gamma_{sp,1} = \Gamma_{sp,P,1} + \Gamma_{sp,C,1} \quad \text{et} \quad \Gamma_{sp,2} = \Gamma_{sp,P,2} + \Gamma_{sp,C,2}, \quad (5.37)$$

avec $\Gamma_{sp,i}$ le taux d'émission spontanée pour l'état $|F = i\rangle$.

Afin de pouvoir étudier la dynamique des atomes dans le désordre pendant de très longs temps d'expansions, il est nécessaire de maximiser le temps de vie de l'état $|F = 2\rangle$. Cependant, cette procédure tend à diminuer le temps de vie de l'état $|F = 1\rangle$, qui doit être suffisamment long pour pouvoir réaliser l'étape de *chargement* du désordre. Le but cette étude est alors d'optimiser les temps de vie 5.37 des deux états pour un désordre V_R fixé, tout en respectant les contraintes 5.36 du potentiel. Expérimentalement, nous disposons de quatre degrés de liberté (la puissance et le désaccord de chaque speckle) pour atteindre la configuration optimale. En particulier, les désaccords des deux faisceaux doivent satisfaire des conditions afin de permettre l'approche de désordre dépendant de l'état interne.

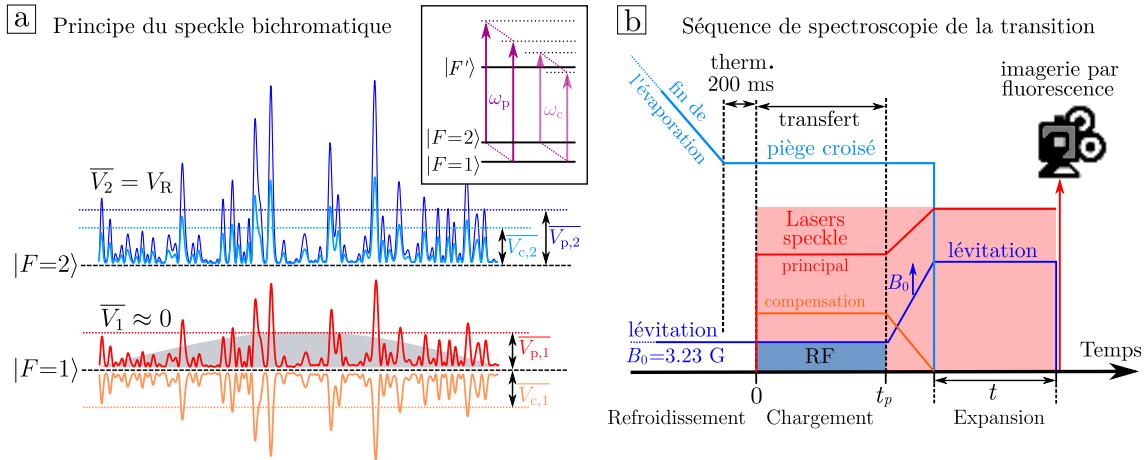


FIGURE 5.13 – a : Principe de speckle bichromatique. Un laser principal très désaccordé soumet les deux états fondamentaux à un potentiel. Afin d'obtenir un potentiel dépendant de l'état interne, on utilise une seconde fréquence optique dans le but de compenser le potentiel créé par le laser principal sur l'état $|F=1\rangle$. Dans le cas d'un désordre répulsif comme illustré ici, il est de plus possible d'additionner les effets répulsifs des potentiels créés par ces lasers sur l'état $|F=2\rangle$. **b : Séquence expérimentale d'étude de la transition d'Anderson.** Après refroidissement et obtention d'un condensat de Bose-Einstein, une étape de chargement du désordre à énergie résolue est réalisée à l'aide d'un transfert radio-fréquence. Celle-ci est suivie d'une expansion du nuage dans le désordre qui constitue l'expérience de localisation d'Anderson à proprement parler.

Considérons d'abord le cas d'un désordre répulsif sur l'état $|F=2\rangle$. Le laser principal étant très désaccordé, le potentiel moyen induit sur les états $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$ est similaire et vaut $V_R > 0$. En prenant comme référence la transition fictive $|F=1\rangle \rightarrow |F'=3\rangle$ ¹⁹, le désaccord du laser principal doit alors satisfaire la condition $\delta_p > 0$ ²⁰. Afin de compenser le potentiel répulsif induit par le laser principal sur l'état $|F=1\rangle$, il est nécessaire que le laser de compensation réalise un potentiel attractif, impliquant alors que le désaccord soit négatif $\delta_c < 0$ ²¹. De plus, le choix d'un désaccord inférieur à la séparation hyperfine des états fondamentaux permet de générer un potentiel répulsif sur l'état $|F=2\rangle$. On retiendra alors

$$\delta_p > 0 \quad \text{et} \quad -\Delta_{hf} < \delta_c/2\pi < 0 . \quad (5.38)$$

Considérons à présent le cas d'un potentiel attractif pour l'état $|F=2\rangle$. De même que dans le cas répulsif, le laser principal est très désaccordé, mais son désaccord doit être négatif pour les deux états fondamentaux $\delta_p/2\pi < -\Delta_{hf}$ en prenant la transition $|F=1\rangle \rightarrow |F'\rangle$ comme référence²². La principale différence provient ici du laser de compensation, qui ne peut pas générer à la fois un potentiel attractif pour l'état $|F=2\rangle$ et un potentiel répulsif qui pourrait compenser le potentiel attractif du laser principal sur l'état $|F=1\rangle$. La contrainte d'annulation du potentiel sur l'état initial impose alors le choix d'un désaccord positif $\delta_c > 0$ du laser de compensation par rapport à la transition fictive $|F=1\rangle \rightarrow |F'=3\rangle$.

19. Bien que cette transition n'existe pas en pratique, cela ne nous empêche pas de définir les désaccords par rapport à cette référence de fréquence.

20. En prenant comme référence la transition $|F=2\rangle \rightarrow |F'=3\rangle$, cette condition devient $\delta_p/2\pi > \Delta_{hf}$

21. Pour les désaccords supérieurs au GHz utilisés, on peut négliger le détail de la structure hyperfine de l'état excité, large de 229 MHz pour les états accessibles.

22. En choisissant un désaccord de 100 GHz, on peut négliger la structure hyperfine de l'état excité.

Le choix d'un potentiel total attractif sur l'état $|F = 2\rangle$ impose donc :

$$\delta_p/2\pi < -\Delta_{hf} \quad \text{et} \quad \delta_c > 0 . \quad (5.39)$$

Contrairement au cas répulsif, la sélectivité en état interne dans le cas attractif provient donc d'un déséquilibrage des potentiels sur l'état $|F = 2\rangle$.

La table 5.1 présente les résultats de la détermination des paramètres optimisant la temps de vie Γ_2^{-1} de l'état $|F = 2\rangle$ avec la contrainte $\Gamma_1^{-1} \geq 10\text{ ms}$ permettant l'étape de chargement du désordre. Cette étude a été menée pour un désordre d'amplitude $V_R/h = 4\text{ kHz}$ qui correspond au désordre le plus extrême utilisé lors de la mesure des fonctions spectrales. Le choix du désaccord $\delta_p = 2\pi \times 100\text{ GHz}$ permet de fixer déterminer la valeur des trois autres grandeurs expérimentales δ_c , P_p et P_c , et permet d'obtenir un temps de vie Γ_2^{-1} de l'ordre de 150 ms. Comparé au temps de vie de 0.4 ms obtenu avec un speckle monochromatique, ceci représente une amélioration de près de trois ordres de grandeur.

| | Désordre attractif | Désordre répulsif |
|---|--------------------------------|---------------------------------|
| Paramètres fixés | | |
| Amplitude du désordre V_R | $-h \times 4\text{ kHz}$ | $h \times 4\text{ kHz}$ |
| Désaccord du laser principal δ_p | $-2\pi \times 100\text{ GHz}$ | $2\pi \times 100\text{ GHz}$ |
| Temps de vie Γ_1^{-1} | 10 ms | 10 ms |
| Désaccord du laser de compensation δ_c | $2\pi \times 1.354\text{ GHz}$ | $-2\pi \times 1.622\text{ GHz}$ |
| Puissance du laser principal P_p | 8.14 mW | 5.16 mW |
| Puissance du laser de compensation P_c | 130.2 μW | 69.6 μW |
| Temps de vie Γ_2^{-1} | 165 ms | 149 ms |

TABLE 5.1 – **Paramètres expérimentaux optimisés pour un désordre de 4 kHz.** La détermination de ces paramètres est détaillée dans la thèse Musawwadah Mukhtar [65]. Cette étude est menée pour le désordre le plus extrême utilisé pour la mesure des fonctions spectrales [107] pour lequel le temps de vie Γ_2^{-1} n'était que 0.4 ms. On remarque que les conditions 5.38 et 5.39 sont vérifiées.

Augmenter encore plus le temps de vie

Si les potentiels générés par les deux faisceaux sont d'amplitudes semblables (l'annulation du potentiel sur $|F = 1\rangle$ ne serait pas possible autrement), on comprend aisément que le laser de compensation contribue fortement à la dissipation par émission spontanée compte-tenu de son petit désaccord en comparaison de celui du laser principal.

Cependant, après l'étape de chargement, une fois les atomes transférés dans l'état $|F = 2\rangle$ habillé par le désordre, il n'est plus nécessaire de compenser le potentiel vu par l'état $|F = 1\rangle$. Il est alors possible de s'affranchir du laser de compensation. Un moyen simple d'augmenter le temps de vie Γ_2^{-1} consiste alors à diminuer progressivement la puissance du laser de compensation tout en augmentant celle du laser principal de manière à garder V_R constant, comme illustré figure 5.13b. Il s'agit, après chargement dans le désordre, d'un moyen de s'éloigner encore plus de résonance.

On montre alors que le nouveau temps de vie $\Gamma_2'^{-1}$ de l'état $|F = 2\rangle$ après extinction

du laser de compensation est donné par :

$$\Gamma_2'^{-1} = \Gamma_2^{-1} \frac{\overline{V_{p,2}}/V_R}{\Gamma_{p,2}/\Gamma_2}. \quad (5.40)$$

L'application à un désordre d'amplitude $|V_R|/h = 4\text{kHz}$ fournit alors un temps de vie de 0.68 s pour un désordre attractif et de 0.69 s pour un désordre répulsif, soit un gain de plus de trois ordres de grandeur par rapport au cas d'un speckle simple.

Notons de plus que cette étude a été menée pour le cas le plus défavorable d'un désordre d'amplitude $h \times 4\text{kHz}$, l'utilisation de désordres plus modérés conduisant à des temps de vie plus bien grands. Un désordre d'amplitude $h \times 400\text{Hz}$ possède ainsi un temps de vie supérieur à 6 s, permettant donc des temps de propagation extrêmement longs.

5.4.2 Étude de la similitude de deux speckles

Nous avons ainsi montré que l'utilisation d'un speckle bichromatique permettait d'étendre l'applicabilité du désordre dépendant de l'état interne à l'étude de la transition d'Anderson grâce à l'augmentation du temps de vie des atomes dans le désordre de plus de trois ordres de grandeurs.

Cependant, cette approche repose sur une hypothèse cruciale jusqu'à présent passée sous silence. L'approche de l'utilisation d'une seconde fréquence optique afin de compenser le potentiel ressenti par l'état $|F=1\rangle$ n'est valable que si nous pouvons compenser le potentiel du laser principal en chaque point de l'espace. Il est donc nécessaire que les variations spatiales du profil d'intensité lumineuse du speckle de compensation soient exactement celles du speckle principal :

$$V_{c,1}(\mathbf{x}) = -V_{p,1}(\mathbf{x}) \quad (5.41)$$

Cohérence temporelle d'une figure de speckle bichromatique

De manière générale, un champ de speckle résulte de phénomènes d'interférence, et dépend donc fortement de la longueur d'onde du champ incident. Plus particulièrement, nous avons vu dans les sections 5.2.2 et 5.2.3 que la taille des grains de speckle est donnée par la limite de diffraction du système et dépend donc linéairement de la longueur d'onde.

On comprend donc que si les deux profils d'intensité lumineuse sont semblables au point de focalisation des faisceaux, la superposition des grains de lumière se dégrade en s'éloignant de ce point, comme illustré figure 5.14. Cette question de superposition des figures d'interférences de plusieurs fréquences optiques est un problème bien connu en optique : il s'agit ici d'étudier l'influence de la cohérence temporelle sur notre désordre bichromatique. Cette influence est quantifiée par le degré de cohérence temporelle

$$\overline{\delta I_p(\mathbf{x})\delta I_c(\mathbf{x})} = \left| \overline{E_p(\mathbf{x})E_c^*(\mathbf{x})} \right|^2, \quad (5.42)$$

qui fait apparaître la fonction de corrélation en amplitude entre les deux champs évalués au même point. En effet, l'objet de notre étude est de quantifier la mesure dans laquelle les deux motifs de speckle sont similaires en un point donné.

De même que dans le cas d'un speckle monochromatique, l'expression de la fonction de corrélation en amplitude $\overline{E_p(\mathbf{x})E_c^*(\mathbf{x})}$ fait apparaître la fonction de corrélation du diffuseur,

définie à l'aide de sa transmission :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \lambda_p, \lambda_c) = \overline{t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \lambda_p) t_{\text{diff}}^*(\mathbf{x}'_0, \lambda_c)}, \quad (5.43)$$

dont l'expression a été généralisée au cas bichromatique qui nous intéresse à présent. On montre annexe A que l'expression 5.7 se généralise alors à

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \lambda_p, \lambda_c) = \exp\left(-\frac{\delta\phi^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 \theta_{\text{diff}}^2 (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)^2}{2 \lambda_p \lambda_c}\right), \quad (5.44)$$

avec $\delta\phi = |\sigma_{\phi,p} - \sigma_{\phi,c}|$ la différence des largeurs des distributions de phases induites par le diffuseur aux deux longueurs d'onde d'intérêt λ_p et λ_c , et θ_{diff} est l'angle de diffusion, indépendant de la longueur d'onde.

Supposons à présent que les modes de chacun des lasers soient identiques et parfaitement superposés²³, de telle sorte que tous deux soient décrits par le même profil d'intensité $I'_0(\mathbf{x}_0)$ de l'équation 5.26. On montre annexe A que, aux alentours du plan de Fourier, la fonction de corrélation normalisée des fluctuations d'intensité à trois dimensions entre les deux speckles générés par le même diffuseur est donnée par

$$\begin{aligned} c_{2\lambda}(\mathbf{x}_\perp, \delta z) &= \frac{\overline{\delta I_p(\mathbf{x}_\perp, \delta z) \delta I_c(\mathbf{x}_\perp, \delta z)}}{\sqrt{\overline{\delta I_p^2(\mathbf{x}_\perp, \delta z)} \overline{\delta I_c^2(\mathbf{x}_\perp, \delta z)}}} \\ &= \exp(-\delta\phi^2) \times c_{3D}\left(\mathbf{x}_\perp \frac{\delta\lambda}{\lambda_p}, \delta z \frac{\delta\lambda}{\lambda_p}\right), \end{aligned} \quad (5.45)$$

où c_{3D} correspond à la fonction de corrélation 5.25 des fluctuations d'intensité d'un speckle unique aux alentours du plan de Fourier. $\delta\lambda = \lambda_p - \lambda_c$ correspond à la différence entre les deux longueurs d'ondes des deux lasers.

La décorrélation des deux champs vis-à-vis de la cohérence temporelle est donc due à deux contributions :

- Le premier terme en $\exp(-\delta\phi^2)$ décrit l'effet de la propagation dans le diffuseur. Le déphasage accumulé localement dépendant de la longueur d'onde, la distribution de phases diffère entre le laser principal et celui de compensation. Le diffuseur ne se comportant pas exactement de la même manière en fonction de la fréquence de l'onde laser (la transmission $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \lambda)$ dépend de la longueur d'onde), il en résulte une décorrélation générale entre les profils d'intensité de deux speckles.
- Le second terme traduit le déphasage accumulé lors de la propagation du laser, et décrit l'effet de la longueur d'onde du laser sur la taille des grains. Celle-ci étant proportionnelle à la longueur d'onde, les grains des deux figures de speckle seront donc de tailles différentes et ne pourront se superposer que dans une zone réduite de l'espace autour du point de focalisation.

Une conséquence remarquable de l'équation 5.45 est que la forme de cette fonction, donnée par le degré de cohérence temporelle, est identique à celle de la corrélation spatiale d'un unique speckle, donnée par le degré de cohérence spatiale.

23. On satisfait expérimentalement cette hypothèse en injectant les deux faisceaux dans la même fibre optique, voir figure 5.15.

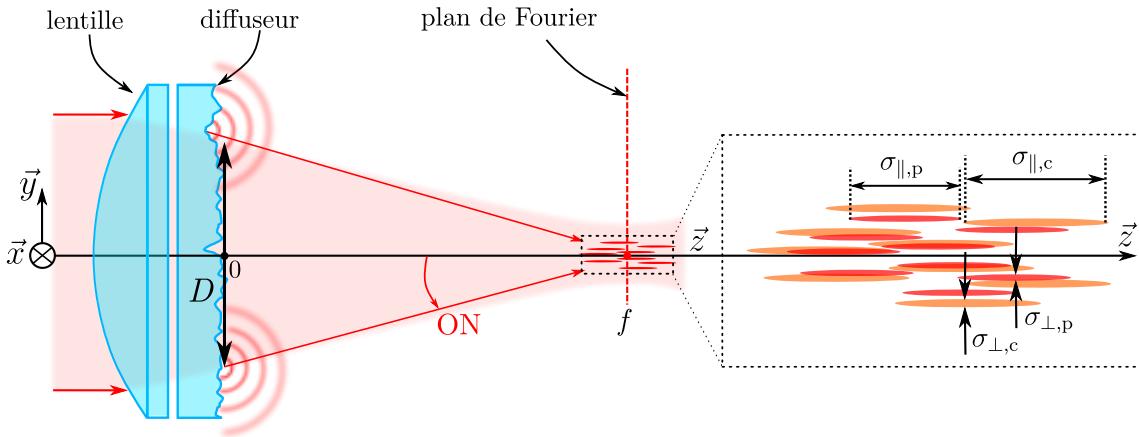


FIGURE 5.14 – Illustration de la cohérence temporelle d'une figure de speckle. La taille des grains de speckle dépendant linéairement de la longueur d'onde, ceux-ci ne pourront se superposer que sur une zone restreinte de l'espace. La distance l_c sur laquelle les grains sont corrélés est obtenue à l'aide du degré de cohérence temporelle, et peut être estimée à quelques millimètres.

La présence du facteur d'échelle $\lambda_p/\delta\lambda \equiv \mathcal{F}$, que l'on appellera *finesse*, s'interprète néanmoins aisément. En effet, la taille σ^{24} d'un grain de speckle est donnée par la largeur de la fonction de corrélation c_{3D} , et est proportionnelle à la longueur d'onde du laser. La largeur de la fonction de corrélation $c_{2\lambda}$ est donc donnée par $l_c = \sigma\mathcal{F}$ et correspond à la distance pour laquelle les grains des deux speckles ne se superposent plus²⁵.

En choisissant le désaccord précédent d'environ 100 GHz et une longueur d'onde proche de la transition D_2 du ^{87}Rb , $\lambda_p \approx 780.2\text{nm}$, l'ordre de grandeur de cette longueur de corrélation est donc de plusieurs millimètres. Cette taille étant très grande devant la taille de nos nuages, la décorrélation par décalage des grains des deux speckles ne nous limitera donc pas²⁶.

Estimation du potentiel résiduel sur $|\mathbf{F} = 1\rangle$

Si les profils d'intensité des speckles sont varient de manières similaires à l'échelle des atomes, ceux-ci ne sont pas totalement corrélés, comme le montre le premier terme de l'équation 5.45. Ainsi, cela signifie que le potentiel généré par le laser de compensation ne peut annuler le potentiel généré par le laser principal *qu'en moyenne*. Le potentiel total $V_1(\mathbf{x}) = V_{p,1}(\mathbf{x}) + V_{c,1}(\mathbf{x})$ est donc de moyenne nulle $\overline{V_1(\mathbf{x})} = 0$ et possède une variance σ_V^2 non nulle.

24. Il n'est pas nécessaire de tenir compte de l'anisotropie des grains de speckle pour ce raisonnement, les longueurs de corrélation transverse et longitudinale étant toutes deux proportionnelles à la longueur d'onde.

25. Déterminons la distance L sur laquelle deux grains de speckle ne se superposent plus. On définit cette distance comme correspondant à un nombre N de grains du speckle du laser principal $L = N\sigma_p$, et un nombre $N+1$ de grains du laser de compensation $L = (N+1)\sigma_c$. Alors $N = \sigma_c/(\sigma_p - \sigma_c) \approx \lambda_p/\delta\lambda = \mathcal{F}$.

26. À l'aide d'un banc de test similaire à celui présenté dans la thèse de Jérémie Richard [84], aucune décorrélation n'a pu être observée expérimentalement dans la limite de résolution du système optique dans une zone de 100 µm autour du centre de la figure de speckle.

Simplifions l'étude en remplaçant les potentiels $V_{p,1}(\mathbf{x})$ et $V_{c,1}(\mathbf{x})$ par leurs intensités respectives $I_p(\mathbf{x})$ et $I_c(\mathbf{x})$ de telle sorte que

$$V_1(\mathbf{x}) \propto I_p(\mathbf{x}) - I_c(\mathbf{x}) , \quad (5.46)$$

et que $\overline{I_p(\mathbf{x})} = \overline{I_c(\mathbf{x})} = I_0(\mathbf{x})$ ²⁷. En définissant la différence de ces intensités par la variable $I = I_p - I_c$, l'étude de la variance du potentiel revient à étudier la quantité

$$\sigma_I^2(\mathbf{x}, \lambda_p, \lambda_c) = 2I_0^2(\mathbf{x})(1 - c_{2\lambda}(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad c_{2\lambda}(\mathbf{x}) = \frac{\overline{\delta I_p(\mathbf{x})\delta I_c(\mathbf{x})}}{I_0^2(\mathbf{x})} , \quad (5.47)$$

en faisant apparaître la fonction de corrélation 5.45. L'interprétation de cette équation est directe : si les deux intensités sont parfaitement corrélées, celles-ci se compensent exactement et $\sigma_I = 0$. Dans le cas où celles-ci sont totalement décorrélées, la variance totale est alors la somme des variances de chaque intensité, comme attendu dans le cas de variables aléatoires indépendantes.

Étant donné la taille de nos nuages, on peut considérer que les atomes sont insensibles aux variations spatiales de la fonction de corrélation 5.45, que l'on approxime alors par sa valeur au centre $c_{2\lambda}(0) = \exp(-\delta\phi^2)$. On peut alors estimer les variations statistiques du potentiel ressenti par les atomes à $|\sigma_V/\overline{V_{p,1}}| = \sqrt{\sigma_I^2/I_0^2}$, soit

$$\sigma_V \sim \sqrt{2} |\overline{V_{p,1}} \delta\phi| , \quad (5.48)$$

avec $\delta\phi \approx 2\pi(n-1)\sigma_e/\lambda_p \mathcal{F} \ll 1$. Il apparaît donc que l'ordre de grandeur des fluctuations du potentiel bichromatique ne sont qu'une fraction du potentiel généré par chaque laser.

Estimons l'ordre de grandeur de ces fluctuations de potentiel dans la configuration présentée section 5.4.1, dans laquelle la différence de fréquence entre les deux lasers est de l'ordre de 100 GHz pour une longueur d'onde proche de 780 nm. La finesse associée est donc d'environ $\mathcal{F} \approx 4000$. En supposant que l'épaisseur typique de la granularité du diffuseur σ_e est de l'ordre de quelques longueurs d'onde λ_p ²⁸, on estime ainsi que les fluctuations du potentiel résiduel sont de l'ordre de

$$\sigma_V \sim 0.01 \overline{V_{p,1}} . \quad (5.49)$$

De même que dans la section 5.3.2, le désordre résiduel que ressent l'état $|F=1\rangle$ possède une borne supérieure pour laquelle le condensat devient perturbé. Ainsi, si les fluctuations du potentiel résiduel sont de l'ordre du potentiel chimique $\mu = 40\text{Hz}$, les modulations de densité ne pourront plus écranter le potentiel désordonné. La condition $\sigma_V \lesssim \mu$ se traduit donc en terme de potentiel maximal applicable aux atomes²⁹

$$V_R \lesssim 4\text{kHz} , \quad (5.50)$$

27. En réalité, les intensités des deux speckles ne sont pas de mêmes valeurs moyennes, cependant il est possible de se ramener formellement à cette situation en tenant compte du fait que les différents désaccords des faisceaux équilibrivent les potentiels associés.

28. L'utilisation d'un diffuseur avec $\sigma_e \approx 5\lambda_p$ suffit à générer un speckle pleinement développé, la partie déterministe étant très fortement atténuée ($t_{\text{diff}} \sim e^{-100}$).

29. V_R et $\overline{V_{p,1}}$ ne sont pas identiques, mais sont du même ordre de grandeur. La limite que nous présentons ne se veut pas quantitative étant donné que nous ne donnons qu'une estimation de σ_e et que la condition $\sigma_V \lesssim \mu$ reste phénoménologique.

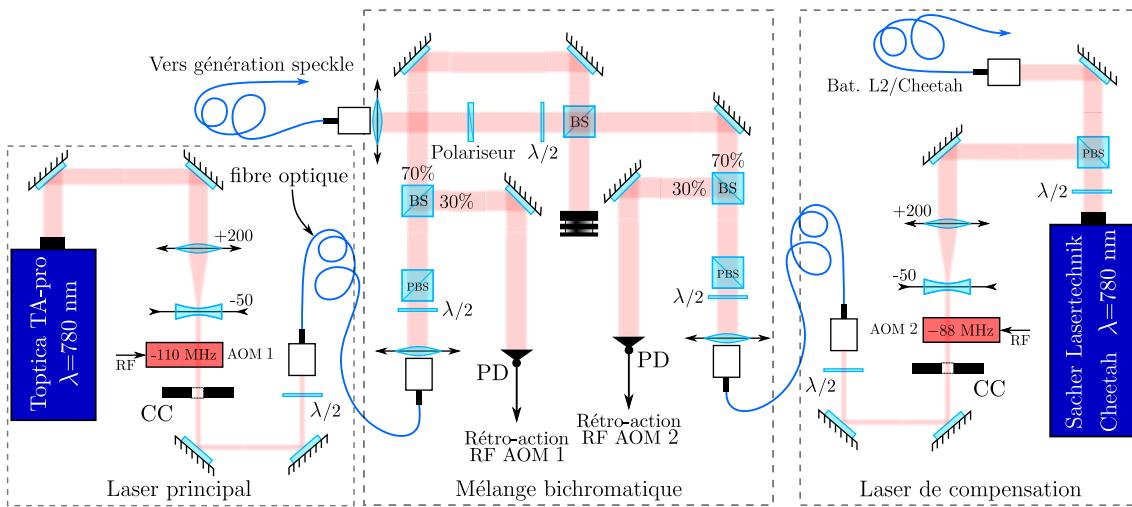


FIGURE 5.15 – Montage optique du speckle bichromatique. De même que pour les montages précédents, le montage optique consiste en une partie de manipulation des faisceaux avant de générer le speckle. À présent, un étage supplémentaire de mélange des faisceaux est nécessaire, et la présence d'une fibre optique commune assure la parfaite superposition des faisceaux sur le diffuseur.

semblable à la limite observée dans le cas d'un potentiel dépendant de l'état interne réalisé à l'aide d'une unique fréquence optique. Insistons sur le fait que si la limite du désordre applicable est comparable à celle dans le cas d'un potentiel monochromatique, ce nouveau désordre bichromatique permet l'amélioration du temps de vie dans le désordre de trois ordres de grandeurs, et ouvre donc la voie aux expériences d'expansion et à l'étude de la transition d'Anderson.

Implémentation expérimentale préliminaire

Comme annoncé section 5.1.3, la structure du montage optique du speckle bichromatique suit la même philosophie que les montages présentés précédemment. Dans sa version préliminaire³⁰, celui-ci est composé d'un premier étage de mise en forme du faisceau, suivi de la partie générant le speckle rayonné sur les atomes.

Dans le cas de notre nouveau potentiel bichromatique, une étape supplémentaire de superposition des faisceaux est nécessaire afin d'obtenir les mêmes modes laser au niveau du diffuseur. L'ensemble de la partie *mise en forme* est représentée figure 5.15, et comporte trois zones relatives aux différentes étapes de la mise en forme du faisceau :

- Une première zone est dédiée à la mise en forme du laser principal et est similaire aux montages précédents. Le faisceau du laser principal est généré par le laser Optica TA-Pro, et son mode et sa polarisation sont filtrés à l'aide d'une fibre optique à maintien de polarisation et d'un cube séparateur de polarisation. Sa puissance est stabilisée à l'aide d'une boucle de rétroaction réalisée à l'aide d'un modulateur acousto-optique et d'une photodiode, et permet de plus de s'affranchir des fluctuations de puissance

³⁰ À l'heure de l'écriture de ces lignes, seuls des tests préliminaires de stabilité ont pu être effectués. Si ceux-ci sont encourageants, il n'est pas exclu que ce montage soit modifié après essai en présence des atomes.

liées aux fluctuations de polarisation du laser, comme précédemment. Ce laser étant désaccordé d'environ 100 GHz, il n'est pas nécessaire d'en asservir la fréquence.

- Une seconde zone, similaire à la première, permet de mettre en forme le faisceau du laser de compensation. Celui-ci est émis par un laser *Sacher Lasertechnik Cheetah* d'une puissance maximale de 380 mW, et subit le même traitement que le faisceau principal. Cependant, la fréquence de ce laser est stabilisée par battement sur le laser repompeur *L2* étant donné son désaccord modéré.
- Enfin, une troisième zone permet de mélanger les lasers. Pour cela, les faisceaux sont superposés à l'aide d'une lame séparatrice 50/50, et un polariseur permet de superposer les polarisations des deux lasers. Ceux-ci sont ensuite injectés dans la même fibre optique à maintien de polarisation, garantissant une superposition parfaite des modes pour la génération du speckle.

La partie de génération du speckle est très similaire à celle présentée figure 5.12. La puissance nécessaire sur les atomes étant environ trois ordres de grandeur plus grande que celle utilisée pour la mesure des fonctions spectrales (voir section 5.3.2 et table 5.1), la densité optique de transmission 1/1000 n'est plus nécessaire. Le reste du montage optique est inchangé³¹.

31. La photodiode précédemment utilisée pour l'asservissement de puissance d'un unique faisceau ne sert plus qu'à titre d'information. En effet, les deux faisceaux étant superposés, il est difficile de les contrôler indépendamment.

6. Temps de diffusion élastique

Dans les chapitres précédents, nous avons détaillé comment était produite notre onde de matière, et plus particulièrement l'utilisation de techniques de refroidissement à l'extrême nous permettant d'obtenir un condensat de Bose-Einstein assimilable à une onde plane $|\mathbf{k} = 0\rangle$. Nous avons aussi discuté comment est généré notre désordre optique et nous nous sommes focalisés sur ses propriétés statistiques et spatiales.

À présent, nous allons nous concentrer sur la mesure directe du temps de diffusion élastique τ_S , réalisée en 2015 lors de la thèse de Jérémie Richard [84]. Le temps de diffusion élastique a ainsi été étudié en fonction de l'amplitude du désordre V_R et de l'énergie de l'onde (énergie cinétique, ou de manière équivalente son impulsion k_i). Les résultats de cette étude ont donné lieu à une publication dans la revue *Physical Review Letters* [85].

Le temps de diffusion élastique étant lié au déphasage de l'onde lors d'une collision dans le désordre, sa mesure directe demande des efforts expérimentaux conséquents. De nombreuses méthodes ont ainsi été développées, telles que des techniques de microscopie [43][61], des mesures de corrélation pour des ondes classiques [94][39][72], des transmissions balistiques [76][91] ou encore des oscillations de magnéto-conductivité dans des systèmes électroniques [70][12][62]. Cependant, des comparaisons quantitatives à des théories ou des simulations restent rares.

6.1 Approximation de Born

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur la description du temps de diffusion élastique dans le régime de désordre faible. Ce régime perturbatif, appelé *régime de Born*, fournit une image intuitive de la physique du désordre et reste le seul régime permettant d'obtenir des résultats quantitatifs.

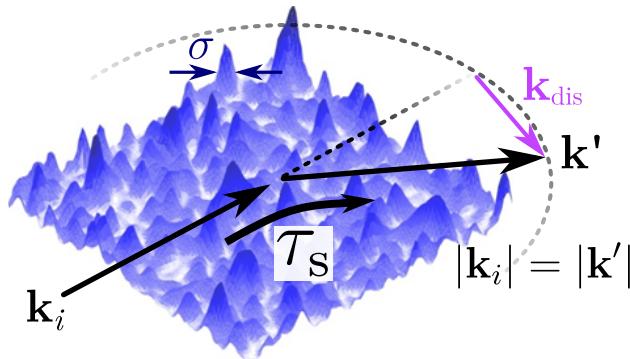


FIGURE 6.1 – Illustration du temps de diffusion élastique dans l’approximation de Born. L’onde plane initiale $|\mathbf{k}_i\rangle$ expérimente une collision dans le désordre et change d’impulsion $|\mathbf{k}'\rangle$. Les collisions avec le désordre étant élastiques, la conservation de l’énergie impose $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}_i|$. L’impulsion transférée \mathbf{k}_{dis} possède une borne supérieure en raison de la taille finie σ des grains de speckle.

6.1.1 Temps de diffusion élastique dans le régime de désordre faible

L’approximation de Born consiste à traiter l’effet du désordre $V(\mathbf{x})$ de manière perturbative¹. Dans cette vision de désordre faible, on peut considérer la propagation dans le désordre comme une succession d’événements de diffusion simple pour lesquels l’onde diffuse sur un diffuseur unique. L’étude du temps de diffusion élastique se concentre donc sur la dynamique d’un unique événement de diffusion.

Dans le régime désordre faible, on peut considérer l’effet du désordre comme un couplage de l’état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ à un continuum d’états d’impulsion $|\mathbf{k}'\rangle$ pour lesquels $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}_i|$ afin de satisfaire la conservation de l’énergie, les collisions étant élastiques. Cette situation est illustrée figure 6.1.

Dans cette image, l’évolution temporelle de l’état initial est donnée par une décroissance exponentielle

$$n(\mathbf{k}_i, t) = n(\mathbf{k}_i, 0)e^{-t/\tau_S}, \quad (6.1)$$

où t est le temps de propagation dans le désordre et le taux de décroissance $1/\tau_S$ est donné par la règle d’or de Fermi

$$\frac{\hbar}{\tau_S^{\text{Born}}} = 2\pi \sum_{\mathbf{k}'} \overline{|\langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle|^2} \delta(E_{\mathbf{k}'} - E_{\mathbf{k}_i}), \quad (6.2)$$

où $E_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$ est l’énergie de l’onde plane $|\mathbf{k}\rangle$ de masse atomique m . L’interprétation de cette équation est aisée : la déplétion de l’état initial fait intervenir tous les états finaux permis par le potentiel qui respectent la conservation de l’énergie.

Dans le cas d’un potentiel auto-moyennant, on peut montrer que le terme de couplage $|\langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle|^2$ est relié à la fonction de corrélation du potentiel de telle sorte que [9]

$$\frac{\hbar}{\tau_S^{\text{Born}}} = 2\pi \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_i) \delta(E_{\mathbf{k}'} - E_{\mathbf{k}_i}), \quad (6.3)$$

1. Une définition plus précise de l’approximation de Born basée sur le concept de *Self-Energy* sera donnée dans le chapitre 7.

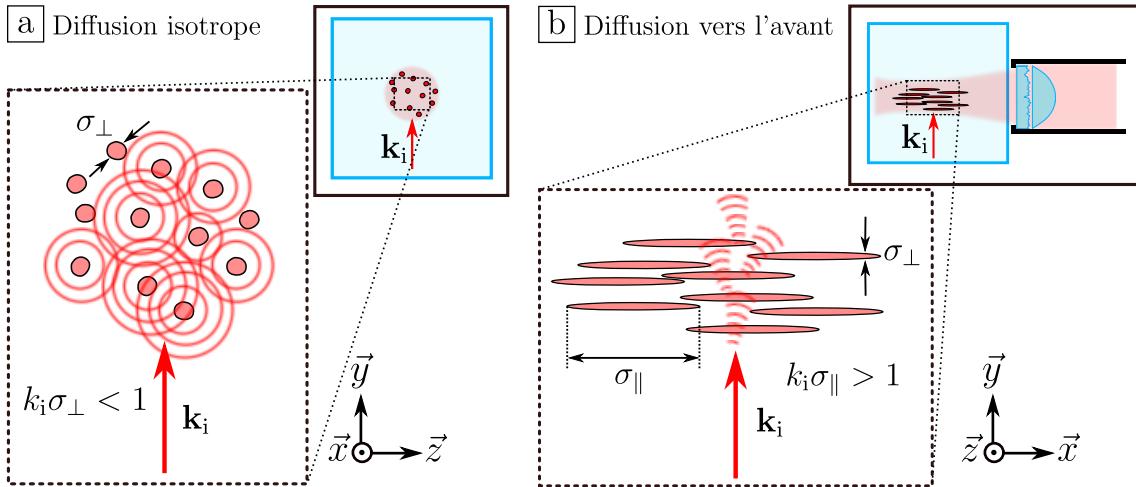


FIGURE 6.2 – Dynamique quasi-2D dans un speckle. Les grains de speckle étant étendus selon la direction longitudinale, on peut trouver une configuration pour laquelle $k_i\sigma_{\parallel} > 1$, impliquant que la diffusion selon la direction \vec{x} se fera essentiellement vers l'avant, et que $k_i\sigma_{\perp} < 1$, impliquant une diffusion isotrope suivant les directions \vec{y} et \vec{z} . De cette manière, on obtient une dynamique de diffusion quasi-2D, sans confiner le mouvement des atomes.

où le spectre des fréquences spatiales du désordre $\tilde{C}(\mathbf{k}_{\text{dis}})$ est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du désordre $C(\Delta \mathbf{x}) = \overline{V(\mathbf{x})V(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})}$ d'après le théorème de Wiener-Khintchine.

6.1.2 Diffusion isotrope et diffusion vers l'avant

Comme nous l'avons montré dans le chapitre 5, le désordre illuminé sur les atomes est corrélé. En particulier, celui-ci possède une longueur de corrélation σ , définissant ainsi une fréquence spatiale caractéristique σ^{-1} à la frontière entre des deux régimes de diffusion brièvement présentés dans la section 2.1.1.

En effet, la diffusion de l'état $|\mathbf{k}_i\rangle$ vers un état $|\mathbf{k}'\rangle$ n'est possible que si la fréquence spatiale $\mathbf{k}_{\text{dis}} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_i$ est contenue dans le spectre du désordre. La présence de la distribution des fréquences spatiales du désordre dans la règle d'or de Fermi traduit donc la conservation de l'impulsion. Pour des impulsions initiales faibles telles que $k_i \ll \sigma^{-1}$, le désordre contient toutes les fréquences spatiales nécessaires pour diffuser l'onde dans toutes les directions (voir figure 6.2.a). Dans le cas contraire, où $k_i \gg \sigma^{-1}$, les fréquences spatiales du désordre sont trop faibles pour satisfaire la condition de rétro-diffusion $\mathbf{k}_{\text{dis}} = -2\mathbf{k}_i$. Dans cette situation, l'essentiel de la diffusion se déroule aux alentours de la direction initiale de l'onde², on parle alors de régime de diffusion vers l'avant (voir figure 6.2.b).

Plus précisément, nous avons vu au cours du chapitre 5 que les grains de speckle ne sont pas isotropes et possèdent deux tailles caractéristiques σ_{\perp} suivant les directions transverses et σ_{\parallel} selon la direction longitudinale. Il est donc possible de se placer dans une situation

2. Ce phénomène est analogue à la diffraction en optique. En effet, l'angle typique de diffraction d'un onde de nombre d'onde k par un obstacle de taille σ est donné par $\theta \sim 1/k\sigma$. Pour de grands nombres d'onde, la diffraction se fait dans un petit angle autour de la direction initiale de l'onde, tandis que pour de petits nombres d'onde la tâche de diffraction est étendue.

où la diffusion est isotrope dans le plan transverse ($k_i \sigma_{\perp} < 1$) tandis que celle-ci se déroule majoritairement vers l'avant selon l'axe optique ($k_i \sigma_{\parallel} > 1$). Pour des temps de propagation dans le désordre de l'ordre de quelques collisions élastiques, la dynamique de la diffusion sera essentiellement bidimensionnelle³, sans devoir confiner le mouvement des atomes.

6.1.3 Temps de diffusion élastique dans le régime de Born

Dans le régime de diffusion quasi-2D, on peut calculer τ_S^{Born} à l'aide de la fonction de corrélation bidimensionnelle 5.21 que l'on peut réécrire sous la forme

$$C(\Delta \mathbf{r}_{\perp}) = V_R^2 e^{-\Delta \mathbf{r}_{\perp}^2 / \sigma_{\perp}^2} \quad (6.4)$$

afin de tenir compte de l'amplitude du désordre. Le passage à la limite continue de la règle d'or de Fermi 6.3 permet de transformer la somme discrète sur les états finaux $|\mathbf{k}'\rangle$ en une intégrale :

$$\frac{1}{\tau_S^{\text{Born}}} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{C}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_i) \delta \left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} \right). \quad (6.5)$$

En injectant l'équation 6.4 dans la règle d'or de Fermi 6.5, on peut ainsi obtenir une expression analytique dans le régime de diffusion quasi-2D [96] :

$$\frac{1}{\tau_S^{\text{Born}}} = \frac{\pi}{\hbar} \frac{V_R^2}{E_{\sigma}} e^{-k_i^2 \sigma_{\perp}^2 / 2} I_0(k_i^2 \sigma_{\perp}^2 / 2), \quad (6.6)$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0. Nous avons de plus fait apparaître l'énergie de corrélation E_{σ} dont l'expression se réduit à $E_{\sigma} = \hbar^2 / m \sigma_{\perp}^2 \sim 466 \text{ Hz}$ dans le cas d'un désordre bidimensionnel.

Il apparaît donc que le temps de diffusion élastique dépend d'une manière simple de l'amplitude du désordre V_R : $\tau_S^{\text{Born}} \propto 1/V_R^2$. De manière plus générale, on peut définir un temps de diffusion élastique renormalisé $\tilde{\tau}_s^{\text{Born}}$ tel que

$$\tau_S^{\text{Born}}(k_i, V_R) = \frac{\hbar E_{\sigma}}{\pi V_R^2} \tilde{\tau}_s^{\text{Born}}(k_i), \quad (6.7)$$

qui est indépendant de V_R , dont le comportement est illustré en rouge sur la figure 6.3.

La formule 6.6 permet d'obtenir une expression approchée dans la limite de diffusion isotrope $k_i \sigma_{\perp} \ll 1$. On montre ainsi que le temps de diffusion devient indépendant de l'énergie initiale de l'onde et tend vers une constante [84] :

$$\tau_S^{\text{Born}} = \frac{\hbar E_{\sigma}}{\pi V_R^2} \quad \text{soit} \quad \tilde{\tau}_s^{\text{Born}} = 1. \quad (6.8)$$

De même, il est possible d'obtenir une expression simple du temps de diffusion élastique dans le régime de diffusion vers l'avant, pour lequel une dépendance en k_i est attendue étant donné que la diffusion se passe essentiellement dans la direction initiale de l'onde.

3. Avec nos paramètres expérimentaux usuels $k_i \sim 1 \mu\text{m}^{-1}$ et $\sigma_{\parallel}/2 \sim 2 \mu\text{m}$, il faut environ $N = (\pi k_i \sigma_{\parallel})^2 \sim 150$ collisions pour que la diffusion devienne isotrope [24].

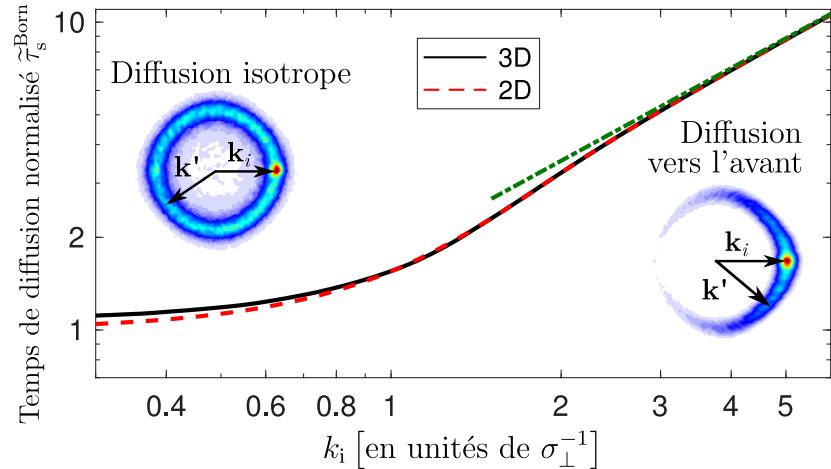


FIGURE 6.3 – Prédiction de l’approximation de Born. La prédiction du temps de diffusion élastique renormalisé par l’approximation de Born 6.6 est tracée en fonction de l’impulsion initiale de l’onde en pointillés rouges pour une configuration bidimensionnelle représentée par la fonction de corrélation 6.4. Celle-ci est très proche de la configuration 3D représentée en noir calculée à l’aide la fonction de corrélation 5.25. La limite asymptotique $\tilde{\tau}_s^{\text{Born}} \sim \sqrt{\pi} k_i \sigma_{\perp}$ est représentée en vert. Les illustrations des distributions de vitesses pour la diffusion isotrope ($k_i \sigma_{\perp} < 1$) et la diffusion vers l’avant ($k_i \sigma_{\perp} > 1$) correspondent à des images expérimentales.

On montre ainsi que dans le régime $k_i \sigma_{\perp} \gg 1$, le temps de diffusion élastique dépend linéairement de l’impulsion initiale $\tau_S \propto k_i \sigma_{\perp}$ [84] :

$$\tau_S^{\text{Born}} = \frac{\hbar E_{\sigma}}{V_R^2 \sqrt{\pi}} k_i \sigma_{\perp} \quad \text{soit} \quad \tilde{\tau}_s^{\text{Born}} = \sqrt{\pi} k_i \sigma_{\perp}, \quad (6.9)$$

représenté en vert sur la figure 6.3.

Notons que d’éventuels effets tridimensionnels sont susceptibles de se manifester dans la limite de diffusion isotrope $k_i \sigma_{\perp} \ll 1$. Il est possible d’estimer le temps de diffusion élastique dans une configuration 3D à l’aide de la fonction de corrélation 5.25 du modèle paraxial effectif. La prédiction de Born de notre configuration tridimensionnelle est représentée en noir sur la figure 6.3 et ne montre qu’une légère déviation par rapport au cas bidimensionnel 6.6 pour les faibles impulsions initiales⁴. Dans la suite, nous nous contenterons donc de décrire nos résultats à l’aide de la prédiction de l’équation 6.6.

Le domaine de validité de l’approximation de Born peut être estimée d’une manière intuitive. En effet, le fait que l’état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ possède un temps de vie τ_S^{Born} fini se traduit par un élargissement de la distribution d’énergie de cet état dans le désordre de l’ordre de

$$\Delta E = \hbar / \tau_S^{\text{Born}} \sim \frac{V_R^2}{E_{\sigma}}. \quad (6.10)$$

Pour valider l’approche perturbative, cette largeur doit être petite devant l’énergie initiale

4. Dans le cas à trois dimensions, τ_S^{Born} tend aussi vers une constante pour de faibles impulsions initiales en raison de l’absence de limite de bruit blanc pour un speckle. En effet, un speckle possède une corrélation de portée infinie selon la direction longitudinale en raison de la propagation de la lumière [35]. Dans le cas d’une limite de bruit blanc et donc de corrélation de portée finie, le temps de diffusion élastique diverge en $1/k_i$ dans la limite des faibles impulsions, que l’on peut reformuler comme $l_S \rightarrow \text{cste.}$

de l'onde $E_{k_i} = \hbar^2 k_i^2 / 2m$. La condition de désordre perturbatif s'écrit alors [53]

$$E_{k_i} \gg \frac{V_R^2}{E_\sigma}. \quad (6.11)$$

En comparant l'amplitude du désordre à son énergie de corrélation, il est possible de satisfaire la condition de désordre perturbatif tout en faisant apparaître deux régimes de désordre :

- Supposons que l'amplitude du désordre soit supérieure à l'énergie de corrélation $V_R \gg E_\sigma$. La condition de désordre perturbatif impose que l'énergie de l'onde soit très grande devant l'amplitude du désordre, et donc que celle-ci ne soit que faiblement perturbée par le désordre. Ainsi, la trajectoire de la particule est essentiellement classique⁵. Dans cette limite, on parle de *désordre classique*.
- Supposons que l'énergie de corrélation du désordre soit supérieure à son amplitude $E_\sigma \gg V_R$. Il est possible de satisfaire la condition de désordre perturbatif en ayant $E_{k_i} < V_R$, c'est à dire que la propagation de la particule se fait par effet tunnel au travers des fluctuations de potentiel. On parle alors de *désordre quantique*.

Le rapport entre l'amplitude du désordre et son énergie de corrélation joue donc un rôle fondamental dans la description de la physique du désordre⁶.

Notons qu'il est aussi possible d'écrire la condition de désordre faible sous la forme $k_i l_S^{\text{Born}} \gg 1$, identifiable au critère de Ioffe-Regel⁷.

6.2 Mesure du temps de diffusion élastique

Les différentes étapes expérimentales menant à l'obtention d'une onde de matière plane ainsi que les différentes configurations magnétiques utilisables ont pu être présentées dans les chapitres 3 et 4.

Dans cette partie, nous allons présenter le protocole expérimental utilisé pour mesurer le temps de diffusion élastique ainsi que la manière dont celui ci a été extrait des données expérimentales.

6.2.1 Procédure expérimentale

La séquence de génération d'un condensat de Bose-Einstein correspond à celle décrite au cours du chapitre 3. On obtient ainsi un nuage dégénéré d'environ 10^5 atomes de ^{87}Rb interagissant faiblement dans un piège optique fortement décomprimé après évaporation.

5. Pour $V_R \gg E_\sigma$, les fluctuations du potentiel peuvent supporter des états liés. Dans la limite $V_R/E_\sigma \rightarrow \infty$, ces états liés forment un continuum pour lequel le mouvement des particules est classique.

6. Il s'agit de la raison pour laquelle la figure 2.10 est tracée en fonction de cette quantité. En particulier, la physique de la localisation peut être assimilée à un piégeage classique dans la limite $V_R/E_\sigma \rightarrow \infty$ (le seuil de mobilité converge vers le seuil de percolation classique), tandis que la localisation d'Anderson d'ondes de matière est de nature purement quantique lorsque $V_R < E_\sigma$.

7. Notons que ce critère coïncide avec celui $E_k \gg V_R^2/E_\sigma$ utilisé par [53] dans le régime de diffusion isotrope. Dans le régime de diffusion vers l'avant, ces deux critères deviennent de manière significative.

Ce nuage est polarisé dans le sous-état Zeeman $|F = 2, m_F = -2\rangle$ et suspendu contre la gravité à l'aide de la lévitation magnétique qui est anti-piégeante.

Dans un second temps, le nuage est refroidi davantage à l'aide du refroidissement par delta-kick présenté en section 3.3.3, permettant d'obtenir en dispersion en impulsions de $\Delta k = 0.15 \mu\text{m}^{-1}$, soit une température équivalente de $T \sim 150 \text{ pK}$. Enfin, une impulsion initiale \mathbf{k}_i selon la direction \vec{y} est conférée au nuage à l'aide d'un gradient magnétique. Cette impulsion initiale varie ainsi de $1 \mu\text{m}^{-1}$ à $20 \mu\text{m}^{-1}$ en modifiant la durée d'application du gradient magnétique. Le nuage peut ainsi être assimilé à une onde plane $|\mathbf{k}_i\rangle$ d'impulsion et d'énergie bien définies.

Le désordre est ensuite brusquement⁸ allumé sur les atomes à $t = 0\text{s}$. Ce désordre est réalisé à l'aide du champ de speckle décrit au cours du chapitre 5, dont la différence entre les longueurs de corrélation σ_{\perp} et σ_{\parallel} permet de considérer le speckle comme un désordre quasi-2D dans le plan ($y - z$) du repère de l'expérience. Le faisceau speckle est accordable autour de la transition D_2 du ^{87}Rb à 780 nm , permettant de réaliser un désordre qui soit attractif ou répulsif, comme expliqué dans la section 5.3.1. Le désaccord utilisé $|\delta|/2\pi \sim 1 \text{ THz}$ est suffisamment faible pour que les propriétés du potentiel soient identiques entre les configurations attractive et répulsive, mais il est de plus suffisamment grand pour que le potentiel soit conservatif⁹. L'amplitude du désordre $|V_R|$ est fixée en contrôlant la puissance du faisceau speckle, $|V_R|/h$ pouvant ainsi aller de 39 Hz à 3.88 kHz .

Le temps de diffusion élastique pouvant être extrait de la déplétion de l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ d'après l'équation 6.1, l'approche naturelle à son étude consiste donc à suivre l'évolution de la distribution d'impulsion du nuage en fonction du temps de propagation t dans le désordre. Celle-ci est obtenue à l'aide d'un très grand temps de vol après extinction du désordre : après une longue expansion balistique, la position des atomes ne dépend plus de la taille initiale du nuage et n'est due qu'à leur vitesse. Ainsi, des temps de vol allant jusqu'à 300 ms peuvent être utilisés grâce à la lévitation magnétique, permettant d'obtenir une résolution d'impulsion de $\Delta k_{\text{res}} = 0.2 \mu\text{m}^{-1}$ ¹⁰. Enfin, la densité atomique est mesurée dans le plan $(\mathbf{k}_y - \mathbf{k}_z)$ (le plan ($y - z$) du repère de l'expérience) à l'aide d'une imagerie par fluorescence.

6.2.2 Extraction du temps de diffusion élastique

L'évolution temporelle de la population de l'état initial $n(\mathbf{k}_i, t)$ est obtenue à l'aide des images expérimentales de la distribution dans l'espace des impulsions. La figure 6.4.a représente la distribution expérimentale d'impulsion $n(\mathbf{k}, t)$ pour les paramètres $k_i = 2.31\sigma_{\perp}^{-1}$ et $V_R/h = -104 \text{ Hz}$, pour des temps de propagation dans le désordre $t = 0 \text{ ms}$ (état initial) et $t = 17.5 \text{ ms}$.

Après propagation dans le désordre, les atomes initialement dans l'état $|\mathbf{k}_i\rangle$ sont diffusés dans les états $|\mathbf{k}'\rangle$. On remarque que les atomes diffusés se répartissent selon un anneau tel que $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}_i|$, témoignant du caractère élastique de la diffusion dans le désordre. Néanmoins, cet anneau admet une largeur finie Δk_{incoh} en raison de l'élargissement en

8. Le temps d'allumage du faisceau speckle est d'environ $50 \mu\text{s}$, limité par la bande-passante de l'électro-optique d'asservissement de puissance.

9. Le taux d'émission spontanée est au plus de 0.1 s^{-1} .

10. Cette résolution est supérieure à la dispersion initiale d'impulsion en raison de la taille du nuage, d'environ $30 \mu\text{m}$, et du temps fini d'expansion.

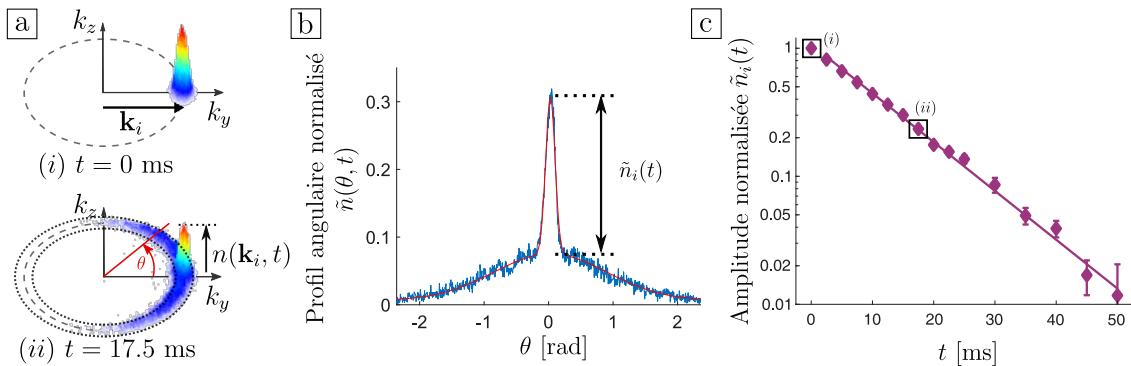


FIGURE 6.4 – Extraction du temps de diffusion élastique. La procédure d'extraction du temps de diffusion élastique est illustrée pour les paramètres expérimentaux $V_R/h = -104 \text{ Hz}$ et $k_i = 2.31\sigma_{\perp}^{-1}$. **a :** Distributions expérimentales d'impulsion $n(\mathbf{k}, t)$ de l'état initial ($t = 0$) et après propagation dans le désordre ($t = 17.5 \text{ ms}$). Une intégration radiale (suivant la ligne rouge et délimitée par les lignes pointillées noires) permet d'obtenir le profil angulaire. **b :** Profil angulaire normalisé $\tilde{n}(\theta, t)$ (en bleu), ajusté par une structure bi-modale (en rouge). L'amplitude de l'état initial est extraite de la partie gaussienne fine, tandis que la partie gaussienne large représente le peuplement d'autres états par des atomes diffusés. **c :** Décroissance de l'amplitude normalisée $\tilde{n}_i(t)$, tracée en échelle semi-logarithmique. Celle-ci est ajustée par une exponentielle, permettant d'extraire $\tau_S = 12.0 \pm 0.3 \text{ ms}$.

énergie lié au temps de vie fini de l'onde plane initiale dans le désordre. On peut ainsi montrer que $\Delta k_{\text{incoh}} \sim 2/l_S$ [20].

La détermination de τ_S repose sur la succession de trois étapes de traitement de données illustrées figure 6.4. Dans un premier temps, la densité atomique $n(\mathbf{k}, t)$ dans le plan ($\mathbf{k}_y - \mathbf{k}_z$) est intégrée radialement afin d'obtenir le profil angulaire $n(\theta, t)$. Les bornes d'intégration correspondent à deux fois la demi-largeur de la distribution d'impulsion initiale $n(\mathbf{k}, 0)$ (figure 6.4.a). Le profil angulaire est ensuite normalisé par sa valeur à l'origine $\theta = 0$ et $t = 0$, $\tilde{n}(\theta, t) = n(\theta, t)/n(0, 0)$. Le profil angulaire normalisé obtenu est le résultat de la somme de deux contributions, une distribution fine correspondant à la distribution initiale non diffusée $\tilde{n}_i(\theta, t)$, et une seconde structure $\tilde{n}_b(\theta, t)$ plus large identifiée aux atomes diffusés dans les états $|\mathbf{k}'\rangle$ (figure 6.4.b).

Dans un second temps, le profil angulaire normalisé est ajusté à l'aide de la somme d'une gaussienne large, représentant le fond diffusé $\tilde{n}_b(\theta, t)$, et d'une gaussienne étroite décrivant la distribution initiale $\tilde{n}_i(\theta, t)$ ¹¹. On obtient ainsi l'amplitude normalisée $\tilde{n}_i(t) = \tilde{n}_i(0, t)$, dont les barres d'erreur sont estimées à l'aide des incertitudes expérimentales et des déviations de l'ajustement bi-modal.

Enfin, l'évolution temporelle de l'amplitude du pic initial $\tilde{n}_i(t)$, suivie sur deux décades, est ajustée par une décroissance exponentielle¹² de temps de vie τ_S ¹² (figure 6.4.c). Les incertitudes associées sont estimées à partir des barres d'erreurs de l'amplitude du pic de

11. Le profil du paquet d'onde ne correspond plus à un profil de Thomas-Fermi en raison de l'étape de refroidissement par delta-kick. Il a été observé que celui-ci était mieux décrit à l'aide d'une fonction gaussienne.

12. Il est attendu que dans un régime de très fort désordre la décroissance de l'état initial ne soit plus exponentielle [106], cependant nous n'avons pas observé de déviation expérimentale importante à la décroissance exponentielle.

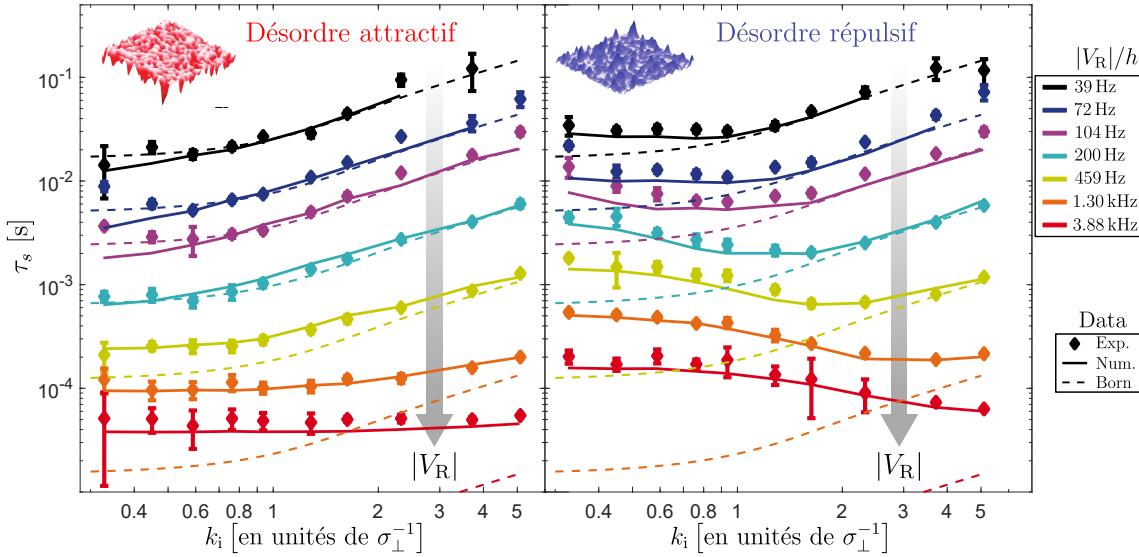


FIGURE 6.5 – Cartographie du temps de diffusion élastique en fonction des paramètres expérimentaux. Le temps de diffusion élastique est tracé en fonction de l’impulsion initiale pour différentes amplitudes du désordre (différentes couleurs) ainsi que pour des désordres attractifs (cadre de gauche) et des désordres répulsifs (cadre de droite). Les données expérimentales (points) sont comparées à des données numériques *ab-initio* (lignes continues) ainsi qu’à la prédiction de Born 6.6 (lignes pointillées).

la distribution initiale et de la déviation de l’ajustement exponentiel.

6.2.3 Cartographie du temps de diffusion élastique

La procédure de mesure du temps de diffusion élastique décrite dans les deux sections précédentes est répétée pour une large gamme de paramètres expérimentaux $|V_R|$ et k_i , ainsi que pour des désordres attractifs et répulsifs. En balayant l’impulsion initial k_i sur un ordre de grandeur et l’amplitude du désordre $|V_R|$ sur deux ordres de grandeur, nous avons pu observer des variations de τ_S sur près de quatre ordres de grandeur.

L’ensemble des valeurs mesurées peut être retrouvé figure 6.5, dans laquelle le temps mesuré τ_S est tracé en fonction de l’impulsion initiale k_i en échelle logarithmique. Les différentes couleurs correspondent aux différentes amplitudes de désordre utilisées. Les données expérimentales (points) sont comparées à la prédiction de Born 6.6 (lignes pointillées) ainsi qu’à des simulations numériques (lignes continues).

Ces simulations correspondent à la résolution numérique en deux dimensions de l’équation de Schrödinger décrivant l’évolution d’un paquet d’onde gaussien dans un désordre dont les propriétés vérifient la distribution de potentiel 5.30 ainsi que la fonction de corrélation 6.4. La résolution numérique s’appuie sur une méthode de différences finies ainsi que l’utilisation de conditions aux limites absorbantes. La distribution d’impulsion est obtenue par transformation de Fourier de la fonction d’onde avant d’être moyennée sur 14 réalisations du désordre¹³. La détermination du temps de diffusion élastique est finalement

13. Nous avons déterminé que moyennen la distribution d’impulsion sur 14 réalisations du désordre permettait d’atteindre la convergence vers la distribution moyenne d’impulsion.

réalisée de la même manière que pour les données expérimentales, explicitée section 6.2.2.

La figure 6.5 témoigne d'un accord remarquable entre les données expérimentales et les données numériques sur l'ensemble des paramètres expérimentaux et confirme ainsi le caractère quasi-2D de notre système. Néanmoins, des petites déviations sont observées dans la région d'impulsion et de désordre faibles (région en haut à gauche), que l'on peut attribuer à deux contributions. En effet, la zone d'impulsions faibles est susceptible de témoigner d'effets tridimensionnels. De plus, la résolution finie de la distribution d'impulsion Δk_{res} engendre des difficultés expérimentales pour déterminer précisément τ_S .

L'excellent accord entre les données expérimentales et les données numériques nous permet de calibrer l'amplitude du désordre V_R utilisé expérimentalement. Notamment, celle-ci est estimée à l'aide de mesures photométriques de la puissance du faisceau utilisé, sujettes à des erreurs systématiques de quelques dizaines de pourcents, qu'il est possible de corriger à l'aide d'un facteur de calibration α . En minimisant les différences entre les données numériques et expérimentales pour l'impulsion $k_i = 0.74\sigma_\perp^{-1}$, on détermine ainsi le facteur de calibration $\alpha = 1.29 \pm 0.02$.

6.3 Comportement du temps de diffusion élastique

Nous avons vu dans la section précédente comment nous avons mesuré le temps de diffusion élastique pour de larges gammes de paramètres k_i et V_R .

À présent, nous allons voir comment ces données se comparent à la théorie de Born. Plus particulièrement, nous allons illustrer l'influence de la distribution de potentiel sur la transition entre les régimes de désordres faible et fort.

6.3.1 Régime de Born

Les données expérimentales et numériques sont comparées aux prédictions du régime de Born dans la figure 6.5. Remarquons que la prédiction théorique du régime de Born, représentée par les lignes pointillées, est simplement translatée verticalement en changeant l'amplitude du désordre $|V_R|$ en vertu de la loi d'échelle $\tau_S^{\text{Born}} \propto 1/|V_R|^2$. De plus, celle-ci est identique pour les désordres attractif et répulsif étant donné que la prédiction 6.3 ne dépend pas de la distribution de potentiel, mais uniquement du spectre des fréquences spatiales du désordre $\tilde{C}(\mathbf{k}_{\text{dis}})$.

De manière générale, τ_S^{Born} montre un bon accord avec les données dans le régime de diffusion faible, c'est à dire la région de désordre faible (petits $|V_R|$) et d'impulsion importante (grands k_i). On observe ainsi les comportements de diffusion isotrope ($k_i\sigma_\perp < 1$) et de diffusion vers l'avant ($k_i\sigma_\perp > 1$), notamment pour la courbe noire de plus faible désordre $|V_R|/h = 39 \text{ Hz}$.

Cependant, l'augmentation de l'amplitude du désordre ou la diminution de l'impulsion initiale mènent à de fortes déviations à la prédiction théorique de Born, obtenue dans le cadre de la théorie des perturbations. L'augmentation de la force de la diffusion montre alors la limite de l'approche de Born.

6.3.2 Déviations au régime de Born

En dehors du régime dans lequel l'approximation de Born permet de décrire quantitativement nos données, nous observons de larges déviations entre les désordres attractifs et répulsifs. Cette signature de l'influence de la distribution de potentiel $\mathcal{P}(V)$ montre l'insuffisance de l'approximation de Born pour décrire le régime de diffusion forte.

Une représentation visuelle des déviations observées à l'approximation de Born est proposée figure 6.6, où le rapport $\tau_S/\tau_S^{\text{Born}}$ est tracé en échelle logarithmique en fausses couleurs en fonction des paramètres expérimentaux k_i et $|V_R|$ pour les différents désordres considérés. Afin d'exposer le rôle fondamental de la distribution de potentiel, cette étude est de plus étendue au cas d'un désordre gaussien¹⁴ dont la distribution de potentiel est donnée par

$$\mathcal{P}(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}V_R} e^{-V^2/2V_R^2}. \quad (6.12)$$

Le parties bleues des cartes du temps de diffusion élastique de la figure 6.6 représentent le régime pour lequel $\tau_S/\tau_S^{\text{Born}} \sim 1$. On observe que ces régions où l'estimation de Born est quantitativement correcte se trouvent dans la zone de désordres faibles et d'impulsions importantes, comme attendu. La région de fort désordre et d'impulsion faible témoigne en revanche de déviations extrêmes, où des déviations de deux ordres de grandeurs ont pu être observées.

Les déviations mesurées à l'approximation perturbative permettent ainsi de révéler la forte influence de la distribution de potentiel sur le régime de diffusion forte, ainsi que sur la transition entre le régime de Born et le régime de diffusion forte. Notamment, le critère de validité de l'approximation de Born communément admis $k_i l_S^{\text{Born}} = 1$ est tracé en ligne blanche continue et semble reproduire remarquablement la zone de transition entre le régime de Born et le régime de diffusion forte. Plus particulièrement, nous avons observé que la ligne $k_i l_S^{\text{Born}} = 1$ correspondait à une iso-déviation de 25% dans le cas du désordre gaussien¹⁵. On vérifie ainsi la pertinence de ce critère pour localiser la transition entre régimes de diffusion faible et forte pour un désordre gaussien, largement utilisé.

Néanmoins, les déviations observées sont beaucoup plus marquées pour les désordres de type speckle, montrant la désadaptation de ce critère à ce type de désordre. En effet, la ligne $k_i l_S^{\text{Born}} = 1$ témoigne de déviations atteignant 250% pour un speckle attractif, et 400% pour un speckle répulsif. Il apparaît donc que la transition entre les régimes de diffusion faible et forte est déplacée vers des valeurs plus importantes de la quantité $k_i l_S^{\text{Born}}$, notamment, des déviations de 25% mentionnées précédemment apparaissent dès $k_i l_S^{\text{Born}} = 40$ (lignes blanches pointillées). La pertinence du critère communément admis $k_i l_S^{\text{Born}} \sim 1$ dépend donc de la nature du désordre utilisé.

La description du comportement du temps de diffusion élastique hors du régime de Born fait l'objet du chapitre 7, mais nous pouvons néanmoins décrire brièvement la nature des déviations au régime de Born. La région des faibles désordres correspond à celle où l'approximation de Born est susceptible d'être valide. Cependant, pour des impulsions

14. L'extension de l'étude au potentiel gaussien n'a pu être réalisée que numériquement. Celui-ci possède la même fonction de corrélation 6.4 que les potentiels de type speckle. La génération expérimentale d'un tel potentiel peut être envisagée en réalisant l'interférence entre un speckle et une onde plane intense, ou encore à l'aide d'un modulateur spatial de lumière.

15. Il s'agit de la ligne de niveau $\tau_S/\tau_S^{\text{Born}} = 1.25$ dans le cas du désordre gaussien.

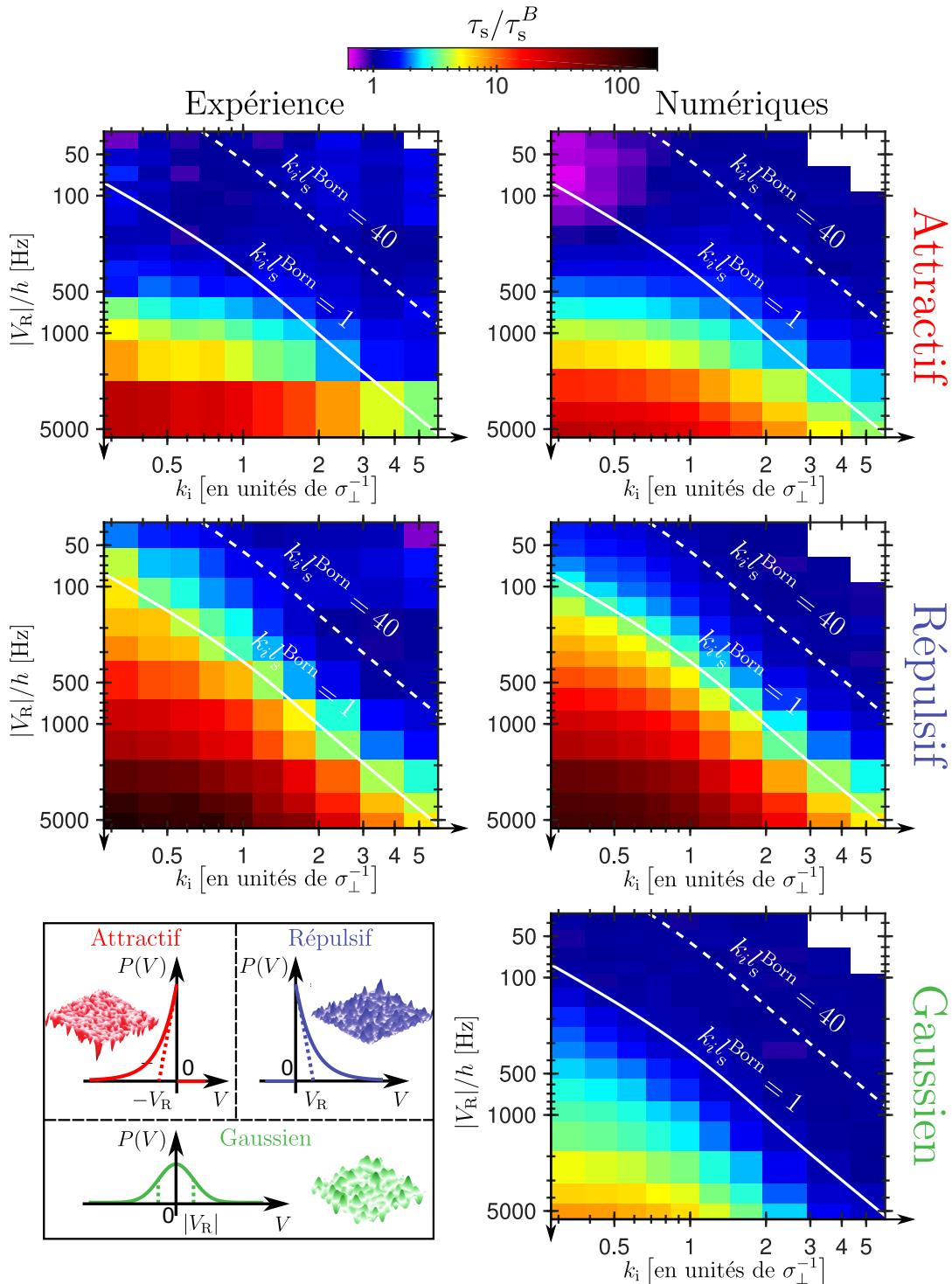


FIGURE 6.6 – Cartographie des déviations au régime de Born. Le rapport $\tau_s/\tau_s^{\text{Born}}$ est tracé en échelle logarithmique en fausses couleurs en fonction des paramètres expérimentaux k_i et $|V_R|$. Les données expérimentales (colonne de gauche) et numériques (colonne de droite) sont tracées pour les désordres attractifs (première ligne), répulsifs (deuxième ligne) ainsi que pour un désordre gaussien (figure en bas à droite) ayant la même fonction de corrélation 6.4 que les désordres speckle. Les distributions $P(V)$ des potentiels sont représentées dans la figure en bas à gauche. Les courbes blanches correspondent aux critères phénoménologiques de désordre faible $k_il_s^{\text{Born}} = 1$ (ligne continue) et $k_il_s^{\text{Born}} = 40$ (ligne pointillée).

faibles, l'énergie de l'onde initiale n'est pas suffisamment grande pour que seul le premier ordre de la théorie des perturbations puisse décrire correctement le temps de diffusion élastique. Notamment, l'ordre suivant de la théorie des perturbations, en $1/V_R^3$, permet d'expliquer l'asymétrie du comportement entre les trois désordre considérés dans la région de faibles désordre et impulsion.

La région de fort désordre sort naturellement du cadre de la théorie perturbative de Born. Il s'agit de la région pour laquelle la distribution de potentiel joue un rôle capital, comme cela est illustré par la différence significative des déviations que l'on peut observer dans cette région pour les différents désordres. Nous verrons dans le chapitre suivant que dans ce régime, l'évolution temporelle de l'état initial est décrite par sa distribution d'énergie, donnée par la fonction spectrale $A(\mathbf{k}_i, E)$ et dont le profil est intimement relié à la distribution de potentiel.

6.3.3 Déviation à la décroissance exponentielle

La décroissance exponentielle de la population de l'état initial étant une prédition du régime perturbatif de Born, des déviations à ce comportement exponentiel sont attendues dans le régime de diffusion forte. Si celles-ci n'ont pas pu être observées avec nos données expérimentales¹⁶, nos simulations révèlent des signatures de la physique hors-Born dans les décroissances de l'état initial.

En particulier, un comportement *universel* à temps court a pu être observé à l'aide de nos données numériques

$$\tilde{n}_i(t) = 1 - \frac{V_R^2 t^2}{\hbar^2}, \quad (6.13)$$

valide pour les temps courts $t < \hbar/E_\sigma$. Si ce départ quadratique est attendu dans le régime classique¹⁷, celui-ci est aussi observé dans le régime de Born, que nous allons à présenter détailler.

L'application de la règle d'or de Fermi 6.2 repose non seulement sur l'hypothèse de désordre perturbatif, mais aussi sur la considération de temps de couplage t suffisamment longs pour résoudre les niveaux d'énergie du système. Notamment, le terme de conservation de l'énergie $\delta(E_{k'} - E_{k_i})$ correspond à la limite aux temps longs d'une fonction donnant la résolution en énergie du couplage [37]

$$g_t(E_{k'} - E_{k_i}) = \frac{\sin^2((E_{k'} - E_{k_i})t/2\hbar)}{((E_{k'} - E_{k_i})t/2\hbar)^2} t^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \delta(E_{k'} - E_{k_i}). \quad (6.14)$$

dans le cas d'une perturbation constante.

Plus particulièrement, cette approximation de temps longs est valable lorsque le temps de couplage est grand devant le temps caractéristique donné par la largeur en énergie du continuum, $t \gg \hbar/E_\sigma$. En effet, le désordre possédant une fréquence spatiale de coupure σ_\perp^{-1} , il s'ensuit un transfert d'énergie maximal de E_σ dans le cas de collisions inélastiques.

16. La précision de nos mesures n'a permis de démontrer des déviations significatives au comportement exponentiel.

17. Celui-ci trouve son origine dans le comportement des fonctions spectrales dans le régime classique. Nous aborderons ce point dans le chapitre 7.

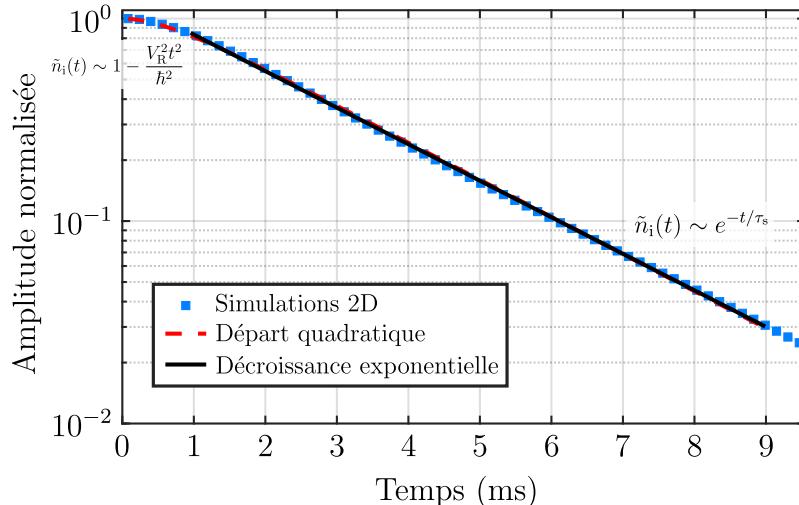


FIGURE 6.7 – Départ quadratique de la décroissance de l'état initial. Cette décroissance est issue de simulations numériques pour un désordre de type speckle avec comme paramètres $V_R = -104 \text{ Hz}$ et $k_i = 0.59\sigma_{\perp}^{-1}$. Celle-ci fait apparaître le régime de temps courts pour lequel la décroissance est quadratique, suivie du régime de décroissance exponentielle. Les points bleus correspondent aux données, la ligne noire continue correspond à l'ajustement par une exponentielle, et la ligne pointillée rouge correspond à un ajustement donné par l'équation 6.15.

Néanmoins, dans la limite de temps courts $t < \hbar/E_\sigma$, la fonction de résolution en énergie du couplage précédente possède une largeur plus grande que celle du continuum adressé. De fait, ce dernier peut être considéré comme un état unique. Le couplage induit donc une oscillation de Rabi entre l'état initial et *l'unique état final*, caractérisé par un départ quadratique de l'oscillation.

La décroissance de l'état initial est donc composée de deux régimes comme illustré sur la figure 6.7 pour les paramètres $V_R = -104 \text{ Hz}$ et $k_i = 0.59\sigma_{\perp}^{-1}$. Un premier régime à temps court est caractérisé par une décroissance quadratique liée au début d'une oscillation de Rabi entre l'état initial et le continuum de largeur finie lui-même. Dans un second temps, le couplage est suffisamment long pour que la conservation de l'énergie soit satisfaite, la décroissance est alors exponentielle avec un temps de vie donné par la règle d'or de Fermi.

Ainsi, il est possible d'obtenir une expression de la décroissance à l'aide d'un modèle simple dans le régime de désordre faible [37] permettant de décrire à la fois le départ quadratique observé et la décroissance exponentielle de l'état initial :

$$\tilde{n}_i(t) = \left| e^{-t/\tau_S^{\text{Born}}/2} \left(1 + \frac{\hbar}{2E_\sigma \tau_S^{\text{Born}}} \right) - \frac{\hbar}{2E_\sigma \tau_S^{\text{Born}}} e^{-E_\sigma t/\hbar} \right|^2, \quad (6.15)$$

dont le développement limité permet de retrouver le départ quadratique 6.13. Cette forme est utilisée pour ajuster la décroissance numérique, et est représentée en pointillés rouges sur la figure 6.7. On remarque que celle-ci décrit correctement l'ensemble de la décroissance là où une décroissance exponentielle pure ne permet pas d'en reproduire le début. Cependant, cette approche de désordre de faible reste inadaptée à la description du régime de désordre fort.

7. Approche spectrale

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes concentrés sur la mesure du temps de diffusion élastique, que nous avons comparé à la théorie perturbative de Born. En particulier, nous avons montré que celle-ci fournit une prédition quantitative du temps de diffusion élastique dans le régime de diffusion faible, mais que de fortes déviations apparaissent lorsque l'amplitude du désordre $|V_R|$ augmente et que l'impulsion initiale k_i diminue. La comparaison de nos données à la prédition de Born nous a de plus permis d'étudier quantitativement la transition entre les régimes de diffusion faible et diffusion forte, révélant ainsi la forte influence de la distribution du potentiel sur la position de cette transition [85].

Néanmoins, l'approximation de Born échoue à décrire le régime de diffusion forte. Dans ce chapitre, nous décrirons le comportement du temps de diffusion élastique à l'aide des fonctions spectrales mentionnées au chapitre 2 et au formalisme de la fonction de Green. Plus particulièrement, nous estimerons les fonctions spectrales à l'aide du développement de Born et à l'aide d'une approche auto-consistante. Enfin, nous comparerons nos valeurs expérimentales du temps de diffusion élastique à des valeurs extraites de la mesure expérimentale des fonctions spectrales.

L'étude présentée ici a fait l'objet d'une publication dans la revue *New Journal of Physics* [98].

7.1 Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales

Dans un premier temps, nous allons présenter le lien entre le temps de diffusion élastique $\tau_S(V_R, k_i)$ et la fonction spectrale $A(k_i, E)$. Nous décrirons ensuite les approximations couramment utilisées pour la détermination de cette dernière, dont nous allons extraire un temps de vie τ_S^{sf} que nous confronterons à nos mesures.

7.1.1 Généralités sur la fonction spectrale

Le hamiltonien \hat{H} d'une particule quantique soumise à un potentiel peut être décomposé sous la forme

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (7.1)$$

avec \hat{H}_0 le hamiltonien non perturbé, dont nous supposerons connaître les états propres, et \hat{V} le potentiel venant perturber la particule. Dans le cadre de la propagation d'ondes dans un milieu désordonné, nous pouvons identifier \hat{H}_0 à l'énergie cinétique $\hat{p}^2/2m$ dont les états propres correspondent aux ondes planes $\{|k\rangle\}$ et \hat{V} au désordre ressenti par les atomes.

Fonction de Green

Un outil couramment utilisé pour décrire l'évolution de ce système quantique est la fonction de Green, qui correspond à la réponse impulsionale de l'équation de Schrödinger. La fonction de Green peut s'écrire

$$\hat{G}(E) = \frac{1}{E - \hat{H} + i0^+} \quad (7.2)$$

dans la base des énergies [2][53]. En remplaçant le hamiltonien \hat{H} par son expression, on montre ainsi que la fonction de Green est solution de l'équation de Dyson

$$\hat{G}(E) = \hat{G}_0(E) + \hat{G}_0(E)\hat{V}\hat{G}(E), \quad (7.3)$$

où $\hat{G}_0(E)$ est la *fonction de Green libre*, qui correspond à la fonction de Green en absence de désordre, régissant donc la dynamique des ondes planes $\{|k\rangle\}$ états propres du hamiltonien non perturbé \hat{H}_0 . Exprimée dans la base des ondes planes où la fonction de Green libre est diagonale, celle-ci s'écrit

$$G_0(E, k_i) = \langle k_i | \hat{G}_0(E) | k_i \rangle = \frac{1}{E - E_{k_i} + i0^+}, \quad (7.4)$$

avec E_{k_i} l'énergie cinétique de la particule.

À l'aide de l'équation de Dyson 7.3, on peut déterminer la fonction de Green moyenne

$$\overline{G}(E, k_i) = \frac{1}{E - E_{k_i} - \overline{\hat{V}} - \Sigma(E, k_i)}, \quad (7.5)$$

où $\overline{\dots}$ représente la moyenne sur les différentes réalisations du désordre. La quantité complexe $\Sigma(E, k_i)$, la *Self-Energy*, est homogène à une énergie et encode l'effet des fluctuations du potentiel désordonné \hat{V} ¹. Si l'expression de la fonction de Green moyenne 7.5 est exacte, sa détermination reste ardue et demande l'utilisation d'approximations pour déterminer la self-energy, telles que l'expansion de Born[53][58], l'approche auto-consistante de Born [100][114], ou encore des approximations semi-classiques [106][83].

1. Seules les fluctuations du potentiel sont contenues dans la self-energy telle qu'écrite ici puisque nous avons fait apparaître explicitement la valeur moyenne du potentiel.

La fonction spectrale

La fonction spectrale est définie à l'aide de la fonction de Green moyenne par

$$A(\mathbf{k}_i, E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\bar{G}(E, \mathbf{k}_i)] . \quad (7.6)$$

Le calcul des fonctions spectrales, essentielle à la bonne description de la dynamique de l'onde dans le désordre (voir section 2.3.1), repose donc directement sur la détermination de la fonction de Green moyenne.

Étant donné que la fonction de Green moyenne est entièrement déterminée par la self-energy, il est aussi possible d'exprimer la fonction spectrale à l'aide de la self-energy :

$$A(\mathbf{k}_i, E) = -\frac{1}{\pi} \frac{\text{Im}[\Sigma(E, \mathbf{k}_i)]}{(E - E_{k,i} - \bar{V} - \text{Re}[\Sigma(E, \mathbf{k}_i)])^2 + \text{Im}[\Sigma(E, \mathbf{k}_i)]^2} . \quad (7.7)$$

Un intérêt particulier de cette expression est de fournir une idée intuitive de la forme de la fonction spectrale dans les différents régimes de diffusion, résumés figure 7.1.

En effet, il est possible de montrer que dans la limite des désordres très faibles, la self-energy varie très lentement autour de l'énergie cinétique E_{k_i} [53]. La forme de la fonction spectrale sera donc très proche d'une lorentzienne, dont le centre est déplacé par la valeur moyenne du potentiel et la partie réelle de la self-energy, et de largeur liée à la partie imaginaire de la self-energy², comme illustré figure 7.1.a.

Il est aussi possible de deviner la forme de la fonction spectrale dans la limite de désordres très forts $|V_R| \gg E_\sigma$, c'est à dire dans la limite de désordres classiques. Dans ce régime, la fonction spectrale, qui est la probabilité qu'une particule d'impulsion \mathbf{k}_i ait une énergie E , converge vers la distribution du potentiel. En effet dans cette limite classique aussi notée $\hbar \rightarrow 0$, l'énergie de la particule est la somme de l'énergie cinétique E_{k_i} et de l'énergie potentielle V . La probabilité d'avoir une énergie E est donc simplement donnée par la probabilité d'avoir une énergie potentielle V , c'est à dire $\mathcal{P}(V)$. Dans cette limite, la fonction spectrale est donc donnée par [106]

$$A^{\text{cl}}(\mathbf{k}_i, E) \approx \mathcal{P}(E - E_{k_i}) , \quad (7.8)$$

comme représenté dans le dernier cadre de la figure 7.1.

Lien entre la fonction spectrale et la décroissance de l'état initial

Il est possible de déterminer d'autres expressions de la fonction spectrale en revenant à la définition de la fonction de Green 7.2. Notamment, on peut montrer que

$$A(\mathbf{k}_i, E) = -\frac{1}{\pi} \overline{\langle \mathbf{k}_i | \text{Im}[G(E)] | \mathbf{k}_i \rangle} = \overline{\langle \mathbf{k}_i | \delta(E - \hat{H}) | \mathbf{k}_i \rangle} , \quad (7.9)$$

en utilisant la relation $1/(x + i0^+) = \text{vp}(1/x) - i\pi\delta(x)$.

En utilisant la représentation exponentielle de la distribution de Dirac, on peut alors montrer que l'opérateur évolution moyen \bar{U}_{k_i} de l'état initial est simplement donné par la

2. Dans le cas d'une particule libre, la fonction spectrale est donnée par une distribution de Dirac centrée sur l'énergie cinétique $A(\mathbf{k}_i, E) = \delta(E - E_{k_i})$. On retrouve la relation de dispersion d'une particule libre.

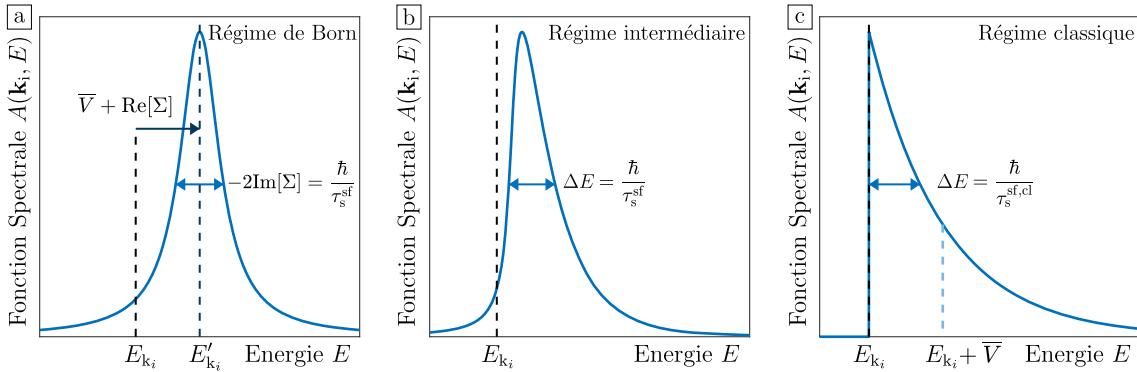


FIGURE 7.1 – Illustration du profil de la fonction spectrale dans les différents régimes de diffusion. **a :** Dans la limite d'un désordre faible, la self-energy est approximativement constante autour de l'énergie cinétique. La forme de la fonction spectrale est alors lorentzienne, dont la largeur est donnée par la partie imaginaire de la self-energy, inversement proportionnelle au temps de diffusion élastique τ_s^{sf} . **b :** Fonction spectrale dans le régime intermédiaire, pour lequel aucune prédition générale n'existe. On peut néanmoins définir un temps de diffusion élastique effectif τ_s^{sf} à l'aide de la largeur de la fonction spectrale. **c :** Dans la limite classique d'un désordre très fort, la fonction spectrale converge vers la distribution de potentiel décalée de l'énergie cinétique initiale. Cette situation est illustrée ici pour un speckle répulsif.

transformée de Fourier de la fonction spectrale

$$\bar{U}_{\mathbf{k}_i}(t) = \left\langle \mathbf{k}_i | \overline{\exp(-itH)} | \mathbf{k}_i \right\rangle = \int dE e^{-iEt} A(\mathbf{k}_i, E) . \quad (7.10)$$

Un tel résultat n'a rien de surprenant. En effet, l'allumage brusque du désordre sur les atomes projette l'état initial sur les états d'énergie propre du désordre, dont la distribution d'énergie est donnée par la fonction spectrale en vertu de la formule 2.14. L'évolution temporelle de l'état initial est donc naturellement donnée par la transformée de Fourier de cette distribution d'énergie, c'est à dire la fonction spectrale.

Notons ici qu'il est ainsi possible d'expliquer l'origine du départ quadratique de la décroissance de l'état initial dans le régime classique. En effet, la distribution de potentiel étant exponentielle pour un désordre speckle (et gaussienne pour un désordre gaussien), la décroissance de l'état initial est lorentzienne (gaussienne pour un désordre gaussien). La dynamique à temps court dans le régime classique est donc caractérisée par un départ quadratique, de la forme $1 - V_R^2 t^2 / \hbar^2$ ³.

Dans la continuité de l'image physique selon laquelle le temps de diffusion élastique correspond au temps de vie de l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ dans le désordre, il est possible de définir un temps caractéristique τ_s^{sf} basé sur la largeur de la distribution d'énergie. On définit ainsi $\Delta E = \hbar/\tau_s^{\text{sf}}$ avec ΔE la largeur totale à mi-hauteur de la fonction spectrale tel qu'illustré dans la figure 7.1.

3. Ce résultat est plus général que les cas étudiés ici. On peut montrer que dans le développement en série entière de l'opérateur évolution $\bar{U}_{\mathbf{k}_i}(t)$ dans le régime classique, les trois premiers termes sont entièrement déterminés par la limite classique de la fonction spectrale $A^{\text{cl}}(\mathbf{k}_i, E)$ [106]. Le comportement quadratique à temps court est donc valable quelque soit le désordre utilisé.

7.1.2 Approximation de Born

En itérant l'équation de Dyson 7.3 et en moyennant sur les différentes réalisations du désordre, on peut décomposer la self-energy sous la forme d'une série en puissances du potentiel

$$\Sigma(E, \mathbf{k}_i) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\left\langle \mathbf{k}_i \left| \hat{V} \left(\hat{G}_0(E) \hat{V} \right)^n \right| \mathbf{k}_i \right\rangle}, \quad (7.11)$$

connue sous le nom de développement de Born. Il est ainsi possible d'écrire la self-energy selon $\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} + \dots$, où chaque terme $\Sigma^{(i)}$ est composé de $i+1$ occurrences du potentiel \hat{V} . Notamment, les premiers termes du développement de Born s'expriment $\Sigma^{(1)} = \overline{VG_0V}$ et $\Sigma^{(2)} = \overline{VG_0VG_0V}$.

Dans la limite de désordre faible, il apparaît de l'équation 7.11 que seul le premier terme $\Sigma^{(1)}$ contribue à la self-energy, chaque occurrence supplémentaire du potentiel atténuant le poids du terme $\Sigma^{(i)}$ correspondant. L'approximation de Born consiste donc à tronquer l'expression de la self-energy à son premier terme :

$$\Sigma(E, \mathbf{k}_i) \approx \Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k}_i) = \overline{\hat{V} \hat{G}_0 \hat{V}}. \quad (7.12)$$

On montre dans l'annexe B que le premier terme du développement de Born $\Sigma^{(1)}$ peut se réécrire comme la convolution du spectre des fréquences spatiales du désordre avec la fonction de Green libre G_0 :

$$\Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k}_i) = \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}') G_0(E, \mathbf{k}') \quad (7.13)$$

Il a été montré que le premier terme du développement $\Sigma^{(1)}$ varie peu autour de l'énergie cinétique, ce qui permet de remplacer la self-energy par sa valeur en couche $E = E_{\mathbf{k}_i}$ [53]. La fonction spectrale obtenue à l'aide de l'équation 7.7 présente alors un profil lorentzien

$$A(\mathbf{k}_i, E) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta E / 2}{(E_{\mathbf{k}_i} - E'_{\mathbf{k}_i})^2 + \Delta E^2 / 4}, \quad (7.14)$$

où la largeur totale à mi-hauteur ΔE s'exprime $\Delta E = -2\text{Im}[\Sigma^{(1)}(E_{\mathbf{k}_i}, \mathbf{k}_i)]$ et le centre $E'_{\mathbf{k}_i} = E_{\mathbf{k}_i} + \overline{V} + \text{Re}[\Sigma^{(1)}(E_{\mathbf{k}_i}, \mathbf{k}_i)]$.

En vertu du lien entre la fonction spectrale et la décroissance de l'état initial, on extrait ainsi un temps de décroissance typique τ_S^{sf}

$$\frac{\hbar}{\tau_S^{\text{sf}}} = -2\text{Im}[\Sigma^{(1)}(E_{\mathbf{k}_i}, \mathbf{k}_i)] = 2\pi \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_i) \delta(E_{\mathbf{k}'} - E_{\mathbf{k}_i}). \quad (7.15)$$

On retrouve ainsi le temps de vie de l'état initial prédit par la règle d'or de Fermi dans la cadre du couplage à un continuum, tracé en lignes tiretées dans la figure 7.2.

7.1.3 Approximation de Born : second ordre

La comparaison de nos données expérimentales à l'approximation de Born, issue du premier ordre du développement de Born, a été traitée dans la section 6.3 du chapitre précédent. En particulier, nous avons montré que le domaine de désordre faible et d'impulsion

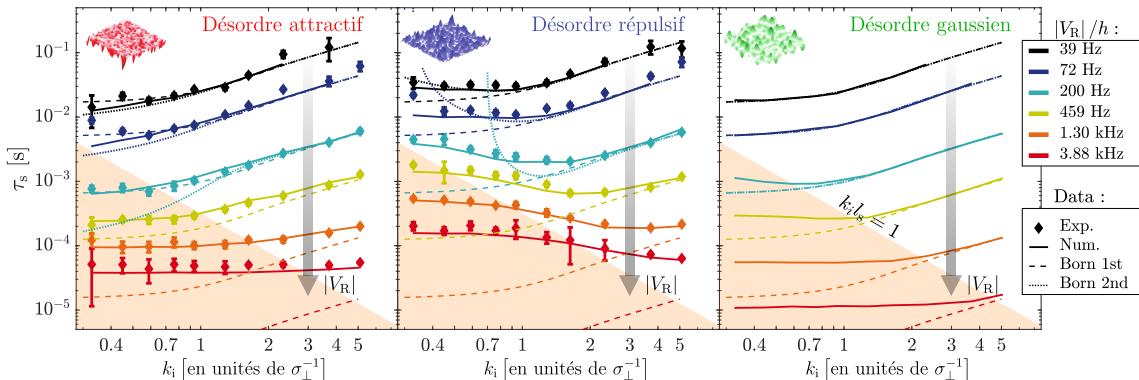


FIGURE 7.2 – Données expérimentales et numériques du temps de diffusion élastique. Les données expérimentales (points) et numériques (lignes continues) sont celles présentées dans le chapitre précédent, que nous avons complétées de simulations numériques pour un désordre gaussien. L’approximation de Born est tracée en lignes tiretées, et s’accorde sur un plan grand domaine de paramètres dans le cas d’un désordre gaussien que pour les désordres speckle. La zone orangée représente le domaine où $k_i l_S^{\text{Born}} > 1$. La correction de l’approximation de Born au second ordre est représentée en lignes pointillées pour les désordres les plus faibles, et montre un accord particulièrement bon pour les désordres d’amplitude $|V_R|/h = 39 \text{ Hz}$. L’augmentation de l’amplitude du désordre mène néanmoins à de fortes déviations vis-à-vis de nos données.

importante permettait de décrire correctement nos données expérimentales et numériques. Cependant, des déviations à la prédiction de Born dépendantes de la distribution de potentiel apparaissent pour des impulsions faibles.

Afin de décrire le domaine d’impulsions et désordres faibles, nous pouvons étendre l’approximation de Born en calculant le terme de second ordre de la self-energy $\Sigma^{(2)} = \overline{VG_0VG_0V}$, introduisant ainsi une correction $-2\text{Im}[\Sigma^{(2)}]$ à la largeur ΔE de la fonction spectrale. De fait, le second terme du développement de la self-energy étant lié à la fonction de corrélation à trois corps $C_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \overline{V(\mathbf{x}_1)V(\mathbf{x}_2)V(\mathbf{x}_3)}$ du désordre, celui-ci révèle l’effet de l’asymétrie de la distribution de potentiel. Notons qu’une telle correction n’existe pas pour un potentiel gaussien, dont la distribution est symétrique.

On montre dans l’annexe B que le second terme du développement de Born peut s’écrire sous une forme semblable à celle du premier terme $\Sigma^{(1)}$

$$\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k}_i) = \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \tilde{C}_3(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}', \mathbf{k}_i - \mathbf{k}'') G_0(E, \mathbf{k}') G_0(E, \mathbf{k}'') , \quad (7.16)$$

que nous pouvons évaluer numériquement afin de déterminer la correction au temps de diffusion élastique au second ordre (voir l’annexe B pour les détails). Le temps de diffusion élastique ainsi obtenu est tracé en lignes pointillées pour les trois amplitudes de désordre les plus petites sur la figure 7.2.

Dans le cas d’un désordre de type speckle, les corrections sont de signe opposé selon que le désordre soit attractif ($V_R^3 < 0$) ou répulsif ($V_R^3 > 0$). Dans le cas d’un désordre attractif, les corrections $-2\text{Im}[\Sigma^{(2)}]$ sont positives, résultant en une diminution du temps de vie associé. Ces corrections du second ordre sont en excellent accord avec nos données dans le cas du désordre le plus faible $V_R/h = -39 \text{ Hz}$. En revanche, l’augmentation de l’amplitude

du désordre mène à de fortes déviations, nécessitant la prise en compte d'ordres supérieurs dans la série 7.11.

Dans le cas d'un désordre répulsif, les corrections du second ordre sont négatives et entraînent l'augmentation de τ_S . De même que dans le cas attractif, l'accord est remarquable pour notre désordre le plus faible, d'amplitude $V_R/h = 39\text{Hz}$. Néanmoins, l'augmentation de l'amplitude du désordre rend rapidement la correction du second ordre de la self-energy comparable au premier ordre. Le temps de vie associé diverge alors, comme illustré sur la figure 7.2. Pour régulariser ce comportement, il est à nouveau nécessaire de tenir compte des ordres supérieurs.

L'extension de l'approximation de Born à la description du régime de désordre fort demande donc la prise en compte de nombreux ordres supplémentaires. Cependant, la série 7.11 est connue pour diverger [53]. Il en résulte que le développement en série de la self-energy ne permet d'étendre le régime de validité de l'approximation de Born qu'au domaine des impulsions faibles, et ne permet pas de décrire le régime de désordre fort.

7.1.4 Approximation de Born auto-consistante

Dans l'approche perturbative de Born, on peut considérer que le potentiel réalise un couplage de l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ aux états libres $|\mathbf{k}'\rangle$ peu perturbés par le potentiel. On comprend aisément que cette considération échoue à décrire le régime de désordre fort, les états finaux $|\mathbf{k}'\rangle$ étant fortement affectés par le désordre.

Une approche communément utilisée pour décrire le régime de désordre fort consiste à considérer que le potentiel couple l'état initial $|_i\rangle$ aux états habillés par le désordre, on parle alors d'approximation de Born auto-consistante (*SCBA* pour l'anglais *Self-Consistent Born Approximation*). Pour tenir compte du temps de vie et des décalages d'énergie de ces états habillés, on remplace la fonction de Green libre $G_0(E, \mathbf{k}_i)$ par la fonction de Green moyennée $\bar{G}(E, \mathbf{k}_i)$ dans l'expression du premier terme de la self-energy $\Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k}_i)$. Le système d'équations de l'approximation auto-consistante de Born est donc

$$\Sigma_{\text{scba}}(E, \mathbf{k}_i) = \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}') \bar{G}_{\text{scba}}(E, \mathbf{k}') \quad (7.17)$$

$$\bar{G}_{\text{scba}}(E, \mathbf{k}_i) = \frac{1}{E - E_{\mathbf{k}_i} - \bar{V} - \Sigma_{\text{scba}}(E, \mathbf{k}_i)} , \quad (7.18)$$

dont la résolution se fait numériquement de manière itérative.

Il apparaît immédiatement dans le système d'équations 7.17 que l'approximation auto-consistante de Born ne peut pas prédire la forme exacte des fonctions spectrales. En effet, celle-ci ne tient compte que de la fonction de corrélation à deux points du désordre, sans tenir compte de la distribution de potentiel $\mathcal{P}(V)$ [77]. Cependant, nous allons voir que pour un désordre gaussien, celle-ci fournit une estimation convaincante de la largeur ΔE^{scba} de la fonction spectrale, et donne donc une bonne estimation du temps de diffusion élastique $\tau_S^{\text{scba}} = \hbar/\Delta E^{\text{scba}}$.

Nous avons ainsi résolu le système 7.17 par itérations numériques jusqu'à ce que la self-energy obtenue converge. La fonction spectrale extraite est tracée figure 7.3.a pour les paramètres $k_i = 0.93\sigma_{\perp}^{-1}$ et $|V_R|/h = \{39\text{Hz}, 458\text{Hz}, 3.88\text{kHz}\}$. Dans le cas de désordre

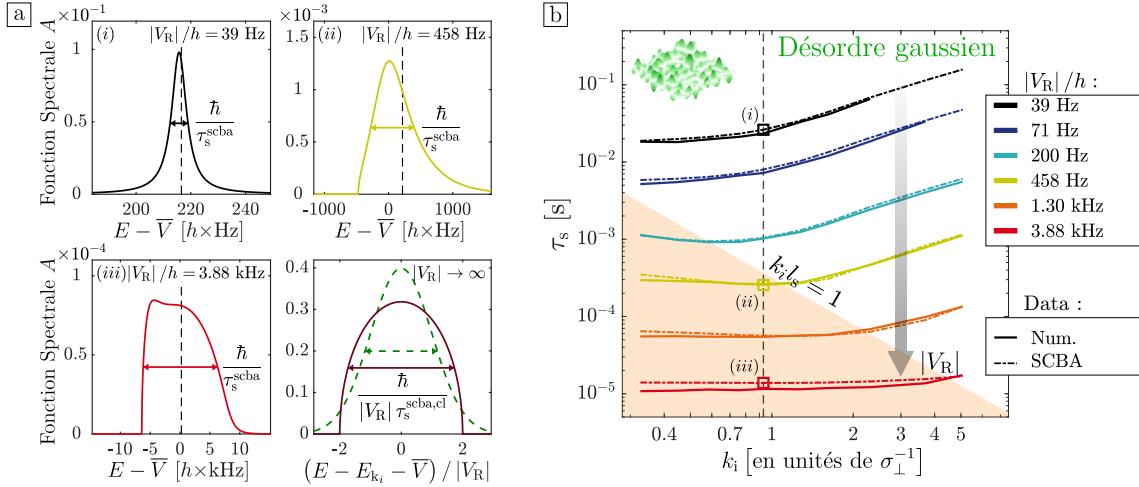


FIGURE 7.3 – Comparaison du temps de diffusion élastique d’un désordre gaussien à l’approximation auto-consistante de Born. **a :** Exemples de fonctions spectrales obtenues en résolvant les équations de l’approximation auto-consistante de Born. Pour un désordre faible, on retrouve la forme lorentzienne attendue par l’approximation de Born au premier ordre. L’augmentation de l’amplitude du désordre se manifeste par une déviation à la forme lorentzienne et un élargissement de la fonction spectrale. Les lignes tiretées verticales indiquent la position de l’énergie cinétique. Dans la limite classique, l’approximation auto-consistante de Born prédit la forme d’un demi-cercle, tandis que la forme attendue correspond à la distribution de potentiel $\mathcal{P}(V)$, de forme gaussienne pour un désordre gaussien. **b :** Comparaison de la prédition de l’approximation auto-consistante de Born (lignes tiretées) à nos données numériques pour un désordre gaussien (lignes continues). L’approximation auto-consistante de Born présente un accord remarquable avec nos données sur l’ensemble des paramètres, y compris au delà de la limite $k_i l_S = 1$. On remarque tout de même l’apparition de déviations pour notre désordre le plus fort $|V_R|/h = 3.88$ kHz.

faible (figure en haut à gauche), la fonction spectrale obtenue par l’approximation auto-consistante de Born reproduit la forme lorentzienne attendue par l’approximation de Born au premier ordre, avec $\hbar/\tau_S^{\text{scba}} = \hbar/\tau_S^{\text{Born}}$. L’augmentation de l’amplitude du désordre $|V_R|$ montre la déviation à la forme lorentzienne attendue pour un désordre faible, et témoigne de l’élargissement de la fonction spectrale (figure en haut à droite pour un désordre d’amplitude intermédiaire $|V_R| \sim E_\sigma$, et figure en bas à gauche pour un désordre fort $|V_R| \gg E_\sigma$).

Il est possible de déterminer analytiquement la limite asymptotique dans le régime classique $|V_R|/E_\sigma \rightarrow \infty$ de l’approximation auto-consistante de Born. Trappe et al. montrent ainsi que la fonction spectrale $A^{\text{scba},\text{cl}}$ est décrite par un demi-cercle de rayon $2|V_R|$ [106]

$$A^{\text{scba},\text{cl}}(\mathbf{k}_i, E) = \frac{1}{2\pi V_R^2} \sqrt{4V_R^2 - (E - E_{k_i} - \bar{V})^2} \quad (7.19)$$

Dans cette limite, le temps de diffusion élastique est donné par $\tau_S^{\text{scba},\text{cl}} = \hbar/(2\sqrt{3}|V_R|)$, indépendant de la distribution de potentiel.

La figure 7.3.b montre la comparaison entre nos données numériques du temps de diffusion élastique τ_S (lignes continues) et la prédition de l’approximation auto-consistance

de Born τ_S^{scba} (lignes tiretées). Il apparaît alors que l'approximation auto-consistante de Born, communément utilisée en matière condensée, reproduit fidèlement nos données pour un désordre gaussien, lui aussi largement utilisé en matière condensée. L'accord en d'autant plus marquant que celui-ci s'étend au delà de la limite $k_l l_S = 1$, alors que l'approximation auto-consistante de Born ne permet pas de reproduire la forme de la fonction spectrale dans le régime classique. Néanmoins, les largeurs à mi-hauteur des fonctions spectrales sont semblables, celles-ci ne différant que d'un facteur $\sqrt{3/(2\ln 2)} \approx 1.5$, expliquant les déviations obtenues pour le désordre le plus important de $|V_R|/h = 3.88 \text{ kHz}$.

7.2 Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales pour un speckle

Dans la section précédente, nous avons pu voir que l'extension de l'approximation de Born au deuxième ordre de la self-energy permet de décrire le régime d'impulsion faible pour des désordres faibles dans le cadre d'une théorie perturbative. Afin de décrire le régime de désordre fort, nous avons comparé la prédiction de l'approximation de auto-consistante de Born communément utilisée à nos données numériques pour un désordre gaussien, témoignant d'un bon accord sur l'ensemble de nos paramètres expérimentaux. Ces deux résultats indiquent donc que l'approche de la fonction spectrale est pertinente pour décrire la décroissance temporelle de l'état initial.

Dans cette section, nous allons décrire en quoi l'approximation auto-consistante de Born n'est pas suffisante pour décrire le régime classique dans le cas de désordres de type speckle. Nous expliquerons ensuite comment les fonctions spectrales de désordre speckle ont été mesurées expérimentalement, et nous tacherons de décrire leur comportement. Enfin, nous terminerons sur la comparaison entre les mesures du temps de diffusion élastique et le temps de vie que l'on peut extraire de la mesure des fonctions spectrales.

7.2.1 Limite de l'approche auto-consistante pour un désordre de type speckle

Si l'approximation auto-consistante de Born permet de décrire correctement l'ensemble de nos données pour un désordre gaussien, ce n'est pas le cas pour un désordre de type speckle. En effet, l'approche auto-consistante ne repose que sur la fonction de corrélation à deux corps du potentiel, et ne tient pas compte des fonctions de corrélation d'ordres supérieurs. De manière plus générale, un ingrédient essentiel manque à la description d'un désordre arbitraire : la distribution de potentiel.

L'approche auto-consistante de Born ne contenant que des puissances paires du potentiel [106], celle-ci ne peut pas décrire les asymétries du potentiel. L'approche auto-consistante ne peut donc pas prétendre à une meilleure description du régime de désordre faible que l'approximation de Born au second ordre pour des désordres speckle.

La comparaison entre nos données expérimentales et la prédiction auto-consistante est montrée figures 7.8 (pour un speckle attractif) et 7.9 (pour un désordre répulsif). Dans le régime de désordre intermédiaire, si la comparaison de l'approximation auto-consistante s'accorde correctement aux données pour un désordre attractif, ce n'est pas le cas pour un désordre répulsif.

Dans le régime de désordre classique, la prédition de la *SCBA* est meilleure que l'approximation de Born au premier ordre. De plus, τ_S et τ_S^{scba} se comportent tous deux en $1/|V_R|$ pour un speckle attractif⁴, résultant en une erreur systématique d'un facteur $\tau_S^{\text{sf,cl}}/\tau_S^{\text{scba,cl}} \approx 5$. Expérimentalement, nous mesurons une déviation de $\tau_S/\tau_S^{\text{scba,cl}} = 3.2 \pm 0.5$, compatible avec la valeur théorique⁵.

Dans le cas d'un désordre répulsif, l'accord est bien moins correct et l'approximation auto-consistante échoue à décrire les données expérimentales. Cet effet montre clairement le manquement de la *SCBA* à décrire le régime classique pour lequel la distribution de potentiel est capitale. Il apparaît donc nécessaire d'analyser les détails de la fonction spectrale pour un désordre de type speckle.

7.2.2 Fonctions spectrales d'un désordre speckle

Nous avons pu voir au cours du chapitre 2 l'importance de la détermination précise des fonctions spectrales. Cette idée n'en a été que renforcée par l'étude détaillée du comportement du temps de diffusion élastique. Dans la perspective d'adresser spécifiquement les niveaux d'énergie du désordre, l'équipe a mis en place un chargement spectroscopique du désordre, permettant la détermination expérimentale des fonctions spectrales pour un désordre de type speckle. Ces mesures ont fait l'objet de la thèse de Vincent Denechaud, où de nombreux détails expérimentaux et théoriques pourront être retrouvés [24].

Mesure des fonctions spectrales

Le protocole de mesure des fonctions spectrales est schématisé sur la figure 7.4. Celui-ci combine de nombreuses astuces expérimentales que nous avons présentées dans les chapitres précédents, notamment l'approche de désordre dépendant de l'état interne (voir section 5.3.2), et l'utilisation d'un champ magnétique magique (voir section 4.2.1).

L'utilisation de l'approche de potentiel dépendant de l'état interne nécessite d'utiliser un sous-état Zeeman dans chacun des états hyperfins $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$. On note ainsi les états correspondants $|1\rangle = |F=1, m_F = -1\rangle$ et $|2\rangle = |F=2, m_F = +1\rangle$, pour lesquels il existe un biais magnétique *magique* $B_0^* = 3.2\text{G}$ où les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ possèdent la même susceptibilité magnétique. Le choix de ces états permet donc d'affranchir la séparation en énergie de ces niveaux des fluctuations de champ magnétique en plus d'être lévités simultanément.

Le chargement du désordre à une énergie bien définie nécessite de coupler les états $|1\rangle$ $|2\rangle$ afin de pouvoir transférer les atomes initialement dans l'état libre vers l'état habillé par le désordre. Compte-tenu de la séparation entre ces états, le choix d'un transfert radio-fréquences est retenu, appuyé par l'excellent contrôle des fréquences qu'il est possible d'obtenir. En raison de la séparation en spin de $\Delta m_F = 2$, il s'agira donc d'une transition à deux photons.

4. Le rayon de la prédition classique de la *SCBA* et de $2|V_R|$. Dans la limite classique, la fonction spectrale converge vers la distribution de potentiel, qui correspond à une exponentielle de largeur à $1/e$ valant $|V_R|$.

5. Cette valeur provient de la valeur de τ_S mesurée pour notre désordre le plus fort $|V_R|/E_\sigma \sim 8.5$ et d'impulsion $k_i = 0.33\sigma_\perp^{-1}$. Pour ces paramètres, le régime classique n'est pas encore entièrement atteint, voir [83] par exemple.

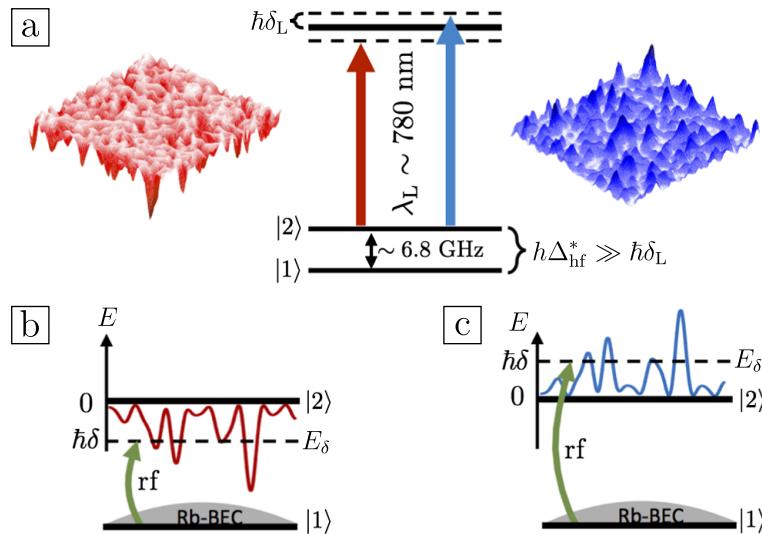


FIGURE 7.4 – Illustration du protocole spectroscopique de mesure des fonctions spectrales. **a :** Illustration du protocole de génération de speckle dépendant de l'état interne. Un laser quasi-résonant sur l'état $|2\rangle$ génère un potentiel attractif (pour $\delta_L < 0$) ou bien répulsif (pour $\delta_L > 0$). Ce potentiel qui est négligeable pour l'état $|1\rangle$ en raison du grand désaccord $2\pi\Delta_{hf}^* + \delta_L$ lié à la séparation hyperfine. **b et c :** Illustration du protocole de spectroscopie. L'état $|1\rangle$ libre est transféré vers l'état $|2\rangle$ habillé par le désordre à l'aide de radio-fréquences. Le choix d'un désaccord δ par rapport à la résonance $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ en absence de désordre permet d'adresser une énergie bien définie dans le désordre.

La séquence commence par la création d'un condensat de Bose-Einstein très décomprimé d'environ 2×10^5 atomes de ^{87}Rb dans l'état $|1\rangle$. Le désordre est allumé brusquement à $t = 0$, et simultanément le transfert radio-fréquences a lieu pendant une durée t_0 . Le taux de transfert est ensuite mesuré en imageant par fluorescence sélectivement les atomes dans l'état $|2\rangle$

$$n_2(t_0) = n_1(0) \times \Gamma t_0 . \quad (7.20)$$

Les atomes transférés possèdent une énergie finale $E_f = E_i + \hbar\omega$, avec ω la pulsation de la radio-fréquence rayonnée. Il est possible d'assimiler l'état initial à une onde plane d'impulsion nulle $|\mathbf{k} = 0\rangle$ ⁶ dans la mesure où $\mu \ll V_R$, et son énergie E_i correspond alors à l'énergie interne $E_{|1\rangle}$. On montre alors que les atomes transférés dans le désordre possèdent une énergie externe $E = \hbar\delta$, où $\delta = \omega - 2\pi\Delta_{hf}^*$ correspond au désaccord par rapport à la résonance au biais magique en absence de désordre donnée par $\Delta_{hf}^* = E_{|2\rangle} - E_{|1\rangle} \approx 6.8 \text{ GHz}$, c'est à dire la différence d'énergie interne. Cette situation est schématisée dans la partie basse de la figure 7.4. Étant donné le temps fini de transfert radio-fréquence, l'énergie adressée dans le désordre possède une résolution $\Delta E \sim \hbar/t_0$ mesurée à l'aide d'un spectre de Rabi à deux photons en absence de désordre. Il a ainsi été montré que pour un temps de transfert de 100 ms, la résolution en énergie obtenue était d'environ $\hbar \times 10 \text{ Hz}$, correspondant à la limite de Fourier⁷.

6. On peut en effet négliger l'énergie cinétique de l'état initial en raison du recul négligeable des photons radio-fréquence absorbés. Un extension de ce protocole à une vitesse initiale donnée peut être réalisée à l'aide d'une transition Raman stimulée où l'angle entre deux faisceaux lasers permet un transfert d'impulsion.

7. Nous avons récemment pu obtenir une résolution de $\hbar \times 5 \text{ Hz}$ grâce à l'étude détaillée des champs magnétiques dans la chambre de science.

Correspondance entre fonction spectrale et taux de transfert

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment nous pouvons mesurer le taux de transfert des atomes dans le désordre à une énergie ciblée. Celui-ci est relié à la fonction spectrale $A(\mathbf{k} = 0, E)$, que nous pouvons réécrire

$$A(\mathbf{k} = 0, E) = \overline{\langle \mathbf{k} = 0 | \delta(E - \hat{H}) | \mathbf{k} = 0 \rangle} \quad (7.21)$$

$$= \overline{\sum_{\alpha} |\langle \mathbf{k} = 0 | \psi_{\alpha} \rangle|^2 \cdot \delta(E - E_{\alpha})} \quad (7.22)$$

en introduisant les états propres $|\psi_{\alpha}\rangle$ du désordre et d'énergie E_{α} . Les fluctuations du terme de recouvrement $|\langle \mathbf{k} = 0 | \psi_{\alpha} \rangle|^2$ disparaissent avec le moyennage sur les différentes réalisations du désordre. On peut alors sortir sa valeur moyenne $|\langle \mathbf{k} = 0 | \psi_E \rangle|^2$ à l'énergie E de la somme :

$$A(\mathbf{k} = 0, E) \approx \overline{|\langle \mathbf{k} = 0 | \psi_{\alpha} \rangle|^2 \cdot \sum_{\alpha} \delta(E - E_{\alpha})} \quad (7.23)$$

$$\approx \overline{|\langle \mathbf{k} = 0 | \psi_E \rangle|^2} \cdot \rho(E) . \quad (7.24)$$

La fonction spectrale apparaît alors comme correspondant au recouvrement moyen entre l'état initial et les états d'énergie E du désordre.

Cette dernière expression présente un intérêt expérimental particulier. En effet, on peut montrer à l'aide de la règle d'or de Fermi que

$$\Gamma(\delta) = 2\pi\hbar\Omega^2 \overline{|\langle \psi_{\delta} | \mathbf{k} = 0 \rangle|^2} \cdot \rho(\hbar\delta) \propto A(\mathbf{k} = 0, \hbar\delta) , \quad (7.25)$$

où $\Gamma(\delta)$ correspond au taux de transfert entre l'état initial du condensat de Bose-Einstein $|\mathbf{k} = 0\rangle$ et les états $|\psi_{\delta}\rangle$ d'énergie externe $E = \hbar\delta$ du désordre réalisé à l'aide d'un couplage de pulsation de Rabi Ω . La mesure de la fonction spectrale peut donc être faite en déterminant le taux de transfert d'une spectroscopie du désordre.

De nombreuses hypothèses sont nécessaires pour obtenir ce résultat, dont une discussion détaillée est donnée dans les références [24][107]. Notamment, cette correspondance entre fonction spectrale et taux de transfert n'est valide que pour un couplage faible (Ω petit devant les autres échelles d'énergie) et des temps t courts tels que $\Gamma t \ll 1$. Une conséquence forte de ces contraintes est seuls quelques pourcents des atomes sont transférés dans le désordre.

Résultats

L'ensemble des mesures des fonctions spectrales $A(\mathbf{k} = 0, E = \hbar\delta)$ est représenté figures 7.5 et 7.6 en points bleus. Sur ces mêmes figures sont tracées en rouge des simulations numériques réalisées par Michael Pasek et Dominique Delande du Laboratoire Kastler Brossel, dont les détails peuvent être retrouvés dans la référence [107]. Afin de comparer les données expérimentales et les simulations, l'amplitude du désordre expérimental est calibrée à l'aide de la fonction spectrale numérique pour $V_R/h = -121\text{Hz}$, permettant de corriger la mesure photométrique de l'amplitude du désordre.

L'accord entre les données expérimentales et numériques est remarquable : les données expérimentales se superposent aux simulations sur l'ensemble des paramètres expérimentaux,

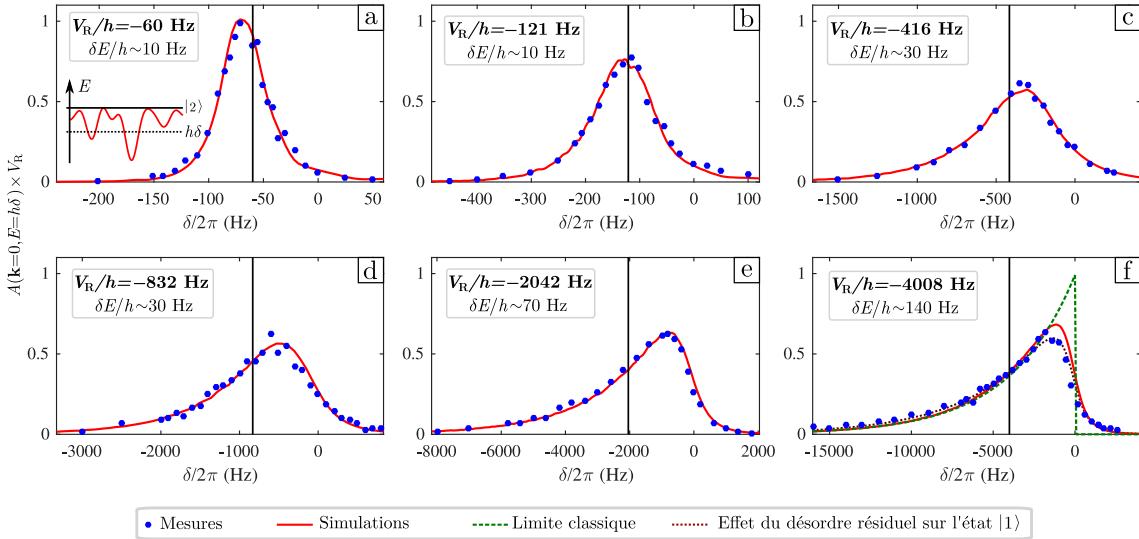


FIGURE 7.5 – Mesures des fonctions spectrales pour un désordre attractif. La fonction spectrale multipliée par $|V_R|$ est tracée en fonction de $\delta/2\pi$, correspondant à l'énergie externe qu'ont les atomes transférés dans le désordre. Les points bleus correspondent aux données expérimentales, qui sont comparées à des simulations numériques tracées en lignes rouges. Dans le panneau de plus fort désordre, les données sont comparées à la limite classique donnée par la distribution de potentiel, tracée en vert. La prise en compte de l'effet du désordre résiduel sur l'état libre $|1\rangle$ est représentée par la courbe marron. Figure adaptée de [24].

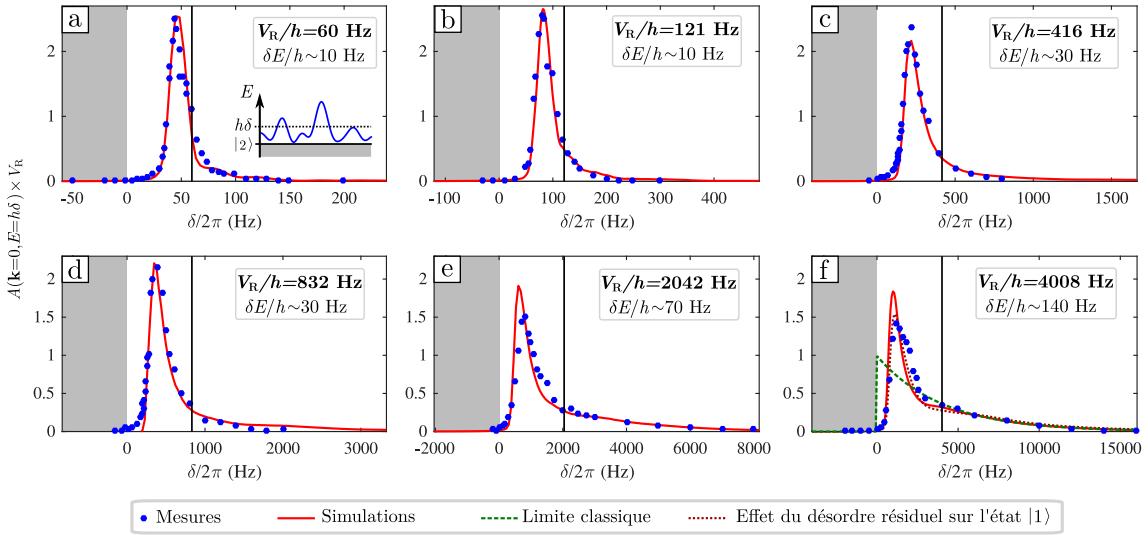


FIGURE 7.6 – Mesure des fonctions spectrales pour un désordre répulsif. La fonction spectrale multipliée par V_R est tracée en fonction de $\delta/2\pi$, correspondant à l'énergie externe qu'ont les atomes transférés dans le désordre. Les points bleus correspondent aux données expérimentales, qui sont comparées à des simulations numériques tracées en lignes rouges. Dans le panneau de plus fort désordre, les données sont comparées à la limite classique donnée par la distribution de potentiel, tracée en vert. La prise en compte de l'effet du désordre résiduel sur l'état libre $|1\rangle$ est représentée par la courbe marron. La zone grise correspond aux énergies qu'il est impossible de peupler étant donné que $V(\mathbf{x}) > 0$. Figure adaptée de [24].

sans paramètre ajustable. De plus, chaque point correspond à un unique cycle expérimental : il n'y a pas de moyennage sur les réalisations du désordre pour les données expérimentales. La validation de l'hypothèse ergodique repose notamment sur le fait que notre condensat de Bose-Einstein est très grand devant la taille des grains du désordre⁸, chaque atome ressentant une réalisation du désordre différente.

Il est possible de distinguer deux régimes dans les figures 7.5 et 7.6, régimes que nous avons brièvement présentés dans la section 6.1.3. La fonction spectrale possède une forme étroite dans le régime de désordre faible (régime de désordre quantique), tandis que celle-ci s'élargit fortement dans le régime de désordre fort (régime de désordre classique). Ces régimes se distinguent en comparant l'amplitude du désordre à l'énergie de corrélation $E_\sigma \sim 440\text{Hz}$ ⁹.

Régime de désordre quantique

Le régime de désordre quantique est obtenu lorsque $|V_R| \ll E_\sigma$. Dans ce régime, l'amplitude du désordre est trop faible pour celui-ci puisse supporter des état liés sur une taille typique des grains de speckle. Les atomes, dont l'énergie est de l'ordre de $|V_R|$, ont alors une longueur d'onde de de Broglie plus grande que les grains de speckle.

De fait, la fonction d'onde s'étale sur plusieurs granularités du potentiel et *lisse* le potentiel vu par la fonction d'onde par effet tunnel. On peut alors montrer que le potentiel effectif issu de ce lissage possède une amplitude $\sim V_R^2/E_\sigma$ assimilable à la largeur de la fonction spectrale, indépendante du caractère attractif ou répulsif du potentiel [11][78]. Les fonctions spectrales des figures 7.5 et 7.6 mesurées pour les désordres les plus faibles présentent donc des similarités (pour $|V_R|/h = 60\text{Hz}$ et $|V_R|/h = 121\text{Hz}$).

Dans la continuité de la correspondance entre largeur de la fonction spectrale et temps de vie de l'état initial développée en début de chapitre, le temps de vie τ_S^{sf} se comporte selon $\hbar E_\sigma / V_R^2$, comme attendu dans le régime de désordre faible (voir section 6.1.3). La forme de la fonction spectrale serait alors de forme Lorentzienne dans ce régime[53].

En réalité, la condition de désordre perturbatif $E_k \gg V_R^2/E_\sigma$ n'est pas validée. Au contraire, l'état initial étant assimilé à une onde plane d'impulsion nulle $|\mathbf{k} = 0\rangle$, l'énergie cinétique des atomes est quasi-nulle $E_k \sim 0$. Il s'agit donc d'un régime très non-perturbatif $E_k \ll V_R^2/E_\sigma$. La forme attendue de la fonction spectrale n'est donc pas lorentzienne, mais plutôt de forme gaussienne en raison du lissage du potentiel [24].

Régime de désordre classique

Dans le cas contraire d'une amplitude de désordre grande devant l'énergie de corrélation $|V_R| \gg E_\sigma$, les fonctions spectrales mesurées témoignent de profils spécifiques aux distributions de potentiels associées. Cet effet du régime de désordre classique est particulièrement marqué pour les amplitudes de désordre de $|V_R|/h = 4008\text{Hz}$, illustrées figure 7.7.

8. Le rayon de Thomas-Fermi de notre condensat est d'environ $30\text{ }\mu\text{m}$, bien plus grand que les tailles des grains de speckle $\sigma_\perp = 0.5\text{ }\mu\text{m}$ et $\sigma_\parallel \approx 4.1\text{ }\mu\text{m}$.

9. Étant donné que l'état couplé au désordre est assimilé à l'onde plane $|\mathbf{k} = 0\rangle$, il est nécessaire de tenir compte de la longueur de corrélation longitudinale des grains de speckle.

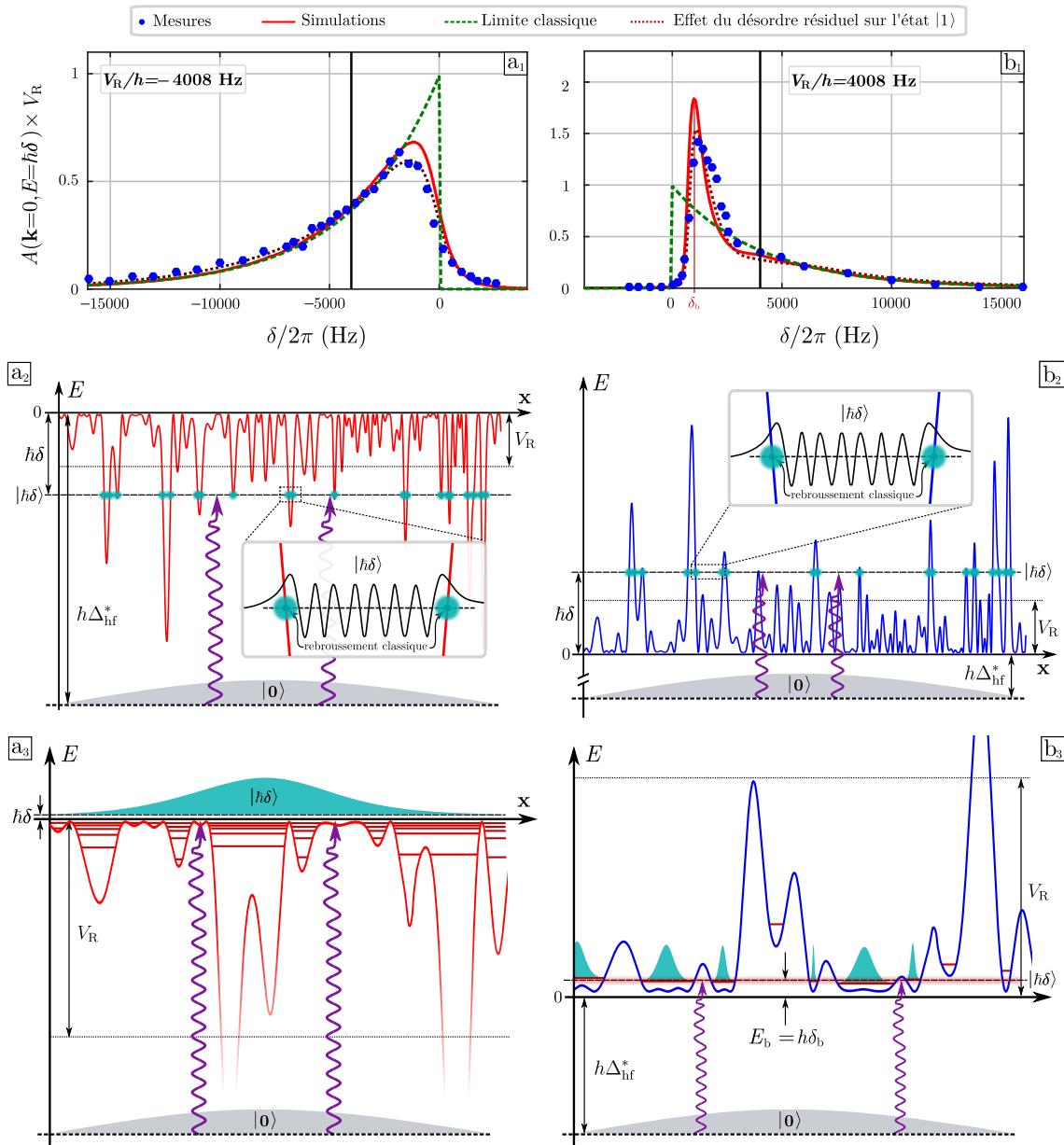


FIGURE 7.7 – Fonctions spectrales dans le régime classique. Dans le régime classique, la forme des fonctions spectrales dépend fortement de la distribution de potentiel. Ces spectres convergent vers la distribution de potentiel pour les hautes énergies, mais montrent un comportement très différent spécifique à la distribution de potentiel pour les basses énergies (**a₁** et **b₁**). Dans la partie de haute énergie, seul les zones de potentiel vérifiant la condition de résonance $V(\mathbf{x}) = \hbar\delta$ sont adressés. La spectroscopie sonde ainsi la distribution de potentiel (**a₂** et **b₂**). Dans la zone de basse énergie pour un potentiel attractif, la fonction d'onde des états $|\hbar\delta\rangle$ s'étale sur plusieurs fluctuations de potentiel, engendrant un lissage analogue au régime de désordre quantique (**a₃**). La discontinuité de la distribution de potentiel en devient adoucie (**a₁**). La zone de basse énergie d'un speckle répulsif sonde l'accumulation des minima locaux de potentiel à $V = 0$ (**b₃**). Ceux-ci supportent un premier état lié d'énergie typique $E_b = \sqrt{V_R E_\sigma}$, traduit par un pic étroit du spectre (**b₁**).

Les distributions des potentiels attractifs et répulsifs sont tracées en vert sur la figure 7.7 et représentent la limite vers laquelle les fonctions spectrales convergent pour $|V_R|/E_\sigma \rightarrow \infty$. On observe que cette convergence est atteinte pour la partie des hautes énergies de la fonction spectrale, aussi bien attractive que répulsive. Cependant, on observe un lissage de celle-ci pour les basses énergies $\delta \sim 0$ en comparaison à la discontinuité attendue par la distribution de potentiel. Les fonctions spectrales témoignent donc de deux comportements selon l'énergie adressée.

Étant donné que l'amplitude du désordre est grande devant l'énergie de corrélation, la longueur d'onde de de Broglie des atomes à haute énergie est petite devant la taille des grains de speckle, et l'onde peut être piégée classiquement. Les fonctions d'onde piégées exhibent des oscillations spatiales courtes, dont le recouvrement avec l'état initial $etatk = 0$ est très mauvais, excepté pour les points de rebroussement classique qui satisfont la condition de résonance $V(\mathbf{x}) = \hbar\delta$. Le transfert radio-fréquence sonde donc la distribution de potentiel, comme illustré sur la ligne du milieu de la figure 7.7.

Néanmoins, cette considération ne permet pas décrire les parties de basse énergie des fonctions spectrales, qui montrent des déviations à la prédiction classique. En particulier, celles-ci ne se comportent pas de manière identique à basse énergie, révélant une influence forte supplémentaire de la distribution de potentiel sur la nature des états de basse énergie.

Dans le cas d'un speckle attractif $V_R < 0$ il est possible d'approximer le profil du potentiel proche de 0 comme étant composé d'oscillateurs harmoniques inversés, donc expulsants. Les fonctions d'onde couplées s'étalent ainsi sur plusieurs grains du potentiel, il en résulte ainsi un lissage du potentiel proche du potentiel nul, de manière analogue au régime de désordre quantique comme illustrée sur la figure 7.7 (figure en bas à gauche). La discontinuité de la distribution de potentiel pour le potentiel nul s'en retrouve donc régularisée [83].

La fonction spectrale d'un speckle répulsif est beaucoup plus spectaculaire. En plus d'être nulle pour les énergies négatives, elle exhibe un pic étroit à basse énergie. L'origine de cette résonance provient de l'accumulation de minima de potentiel pour $V = 0$, supportant des états liés d'énergie similaire[83]. En particulier, il est possible de décrire ces minima locaux comme un oscillateur harmonique de la taille typique d'un grain de speckle et de profondeur V_R (voir figure 7.7, en bas à droite). L'énergie de l'état fondamental de ces oscillateurs harmoniques est alors donnée par

$$E_b = \sqrt{V_R E_\sigma} , \quad (7.26)$$

pour laquelle un grand nombre d'états participent. L'accumulation de ces états autour de la même énergie se traduit donc par un pic de résonance dans la fonction spectrale.

Les fonctions spectrales des désordres de type speckle présentent donc des spécificités importantes, pouvant se manifester sous la forme d'une structure bi-modale qu'il convient de déterminer précisément pour étudier l'effet du désordre sur l'état initial.

Les spectres tracés sur la figure 7.7 permettent de plus d'illustrer la limite de l'approche de potentiel dépendant de l'état interne discutée dans la section 5.3.2. En effet, cette approche n'est valide que lorsque le potentiel résiduel sur l'état $|1\rangle$ peut être négligé devant le potentiel chimique, le potentiel étant écranté par des modulation de densité du condensat. Dans le cas des spectres à $|V_R|/h = 4008\text{Hz}$, le potentiel résiduel est de l'ordre

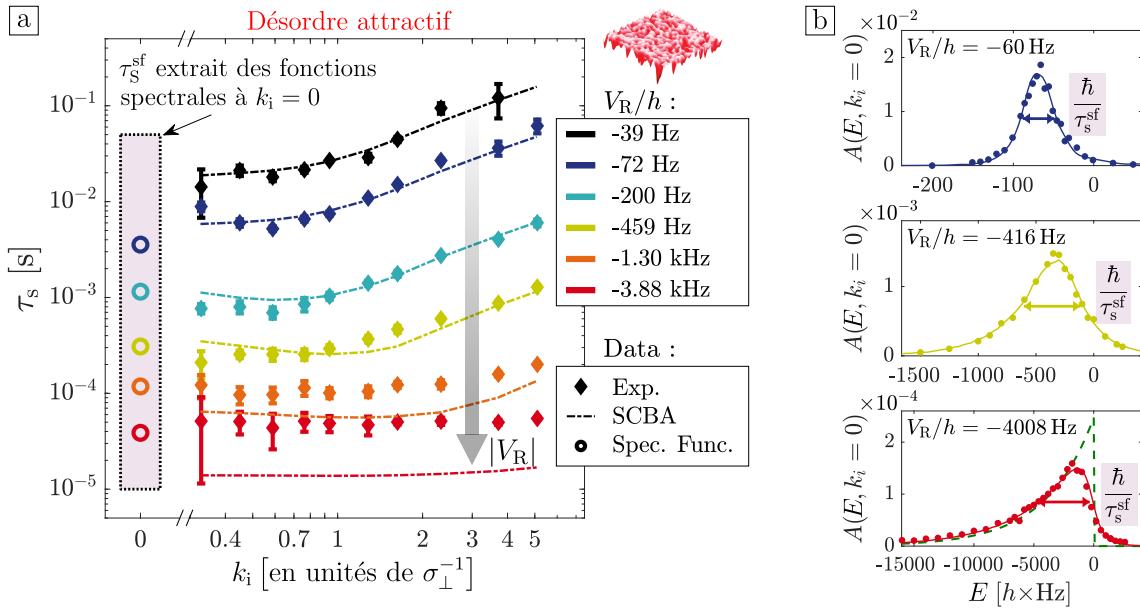


FIGURE 7.8 – Comparaison des fonctions spectrales mesurées au temps de diffusion élastique pour un speckle attractif. **a :** Le temps de diffusion élastique est comparé à la prédiction de l'approximation auto-consistante de Born. Cette dernière est proche des données expérimentales dans le régime de désordre faible, mais ne permet pas de décrire le régime de désordre fort. La *SCBA* échoue de plus à décrire les asymétries du potentiel. Les temps de vie τ_s^sf extraits des fonctions spectrales mesurées sont compatibles avec les mesures de τ_s de basse impulsion. **b :** Illustration de l'extraction du temps de vie τ_s^sf . Le temps de vie est extrait en déterminant la largeur à mi-hauteur d'une fonction d'ajustement des données expérimentales. Ces données sont celles de la figure 7.5.

du potentiel chimique μ et commence à perturber l'état initial. Cet effet a pu être modélisé numériquement, et est tracé sur la figure 7.7 en lignes marron. Cette correction permet de reproduire remarquablement les données expérimentales.

7.2.3 Comparaison du temps de diffusion élastique avec les fonctions spectrales mesurées

Comme nous avons vu précédemment, il est possible de donner une estimation du temps de vie de l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ dans le désordre à l'aide de la largeur à mi-hauteur de la fonction spectrale. Nous pouvons alors extraire un temps τ_s^sf des fonctions spectrales mesurées $A(\mathbf{k} = 0, E)$ mesurées pour différentes amplitudes de désordre V_R .

Dans le cas d'un désordre attractif, la largeur à mi-hauteur de la fonction spectrale mesurée est obtenue à l'aide d'un ajustement des données expérimentales par la convolution d'une lorentzienne avec une fonction exponentielle 5.30, qui permet de reproduire fidèlement la forme de fonctions spectrales pour toutes les amplitudes de désordre. La largeur à mi-hauteur ΔE est ensuite extraite à l'aide d'un algorithme, permettant de déterminer un temps de vie $\tau_s^sf = \hbar/\Delta E$ pour chaque amplitude de désordre considérée. Le temps de vie pour n'importe quelle amplitude de désordre est ensuite obtenu par interpolation.

Les valeurs de τ_s^sf sont donc déterminées pour les amplitudes de désordres considérées

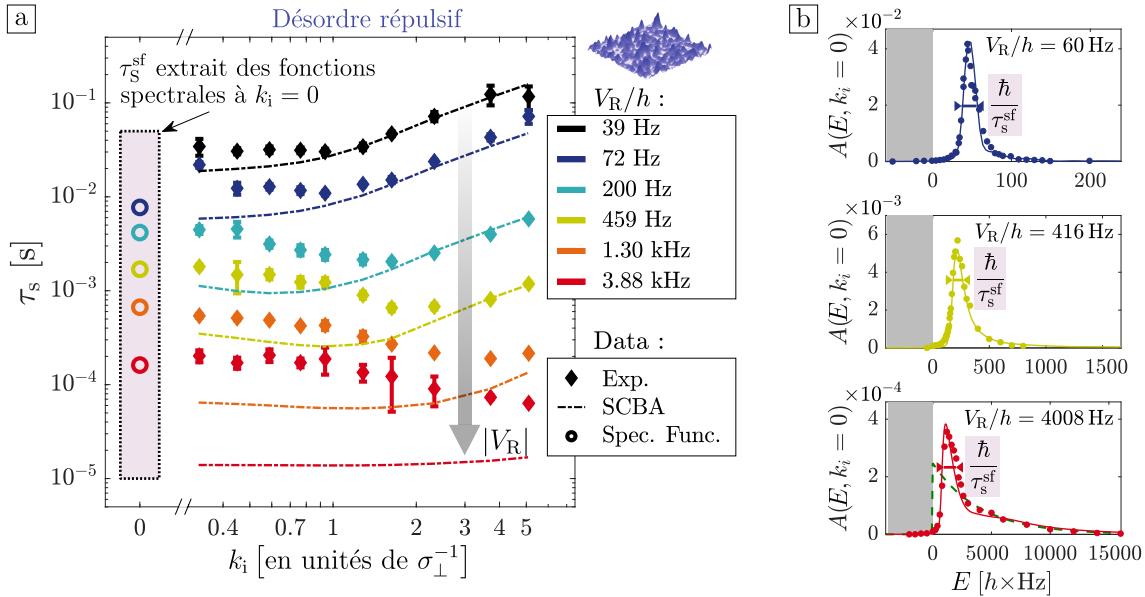


FIGURE 7.9 – Comparaison des fonctions spectrales mesurées au temps de diffusion élastique pour un speckle répulsif. **a :** Les données expérimentales du temps de diffusion élastique sont comparées à la prédition de l'approximation auto-consistante de Born. Celle-ci ne permet de rendre compte que du régime de désordre faible, et de grande impulsion, et échoue encre à décrire les asymétries du potentiel. Les temps de vie τ_s^{sf} estimés à partir du pic de résonance des fonctions spectrales mesurées sont tout à fait compatibles avec les mesures du temps de diffusion élastique à faible impulsion. **b :** Illustration de l'extraction du temps de vie τ_s^{sf} . Le temps de vie est extrait en déterminant la largeur à mi-hauteur d'une fonction d'ajustement bi-modale des données expérimentales. Plus particulièrement, le temps de vie est extrait de la largeur à mi-hauteur de la structure étroite associée à la résonance des premiers états liés du désordre. Ces données sont celles de la figure 7.6.

dans le chapitre 6. Celles-ci sont tracées aux côtés des mesures de τ_s dans la figure 7.8 et montrent un bon accord avec les mesures à impulsion faible, notamment dans le domaine de désordre fort. Cet accord entre données temporelles et données dans le domaine des énergies indique que nos mesures de τ_s sont entièrement compatibles avec le profil des fonctions spectrales pour un désordre speckle attractif.

Comme nous avons vu dans la section précédente, un désordre speckle répulsif présente un comportement pathologique en raison de la présence d'une résonance sur les premiers états liés du désordre. Cette pathologie se manifeste sous la forme d'un pic de résonance dans la fonction spectrale. On s'attend alors à ce que l'évolution temporelle de l'état initial présente deux échelles de temps différentes en raison de la double structure de la fonction spectrale. Un premier temps court est associé à la structure large de la distribution de potentiel, tandis qu'un second temps, plus long, est dû à la structure étroite de la résonance à basse énergie. Expérimentalement, nous ne sommes sensibles qu'à ce dernier temps.

Comme précédemment, le temps de vie estimé de l'état initial est obtenu en déterminant la largeur de la fonction spectrale mesurée expérimentalement par un ajustement. Afin de tenir compte de la double structure, la fonction heuristique d'ajustement est donnée par la somme de la convolution d'une lorentzienne et d'une exponentielle 5.30, comme

précédemment, et d'une gaussienne étroite pour décrire le pic de résonance. On reproduit ainsi la forme des fonctions spectrales mesurées de manière fidèle. Le temps de vie τ_S^{sf} est extrait de la largeur à mi-hauteur de cette gaussienne, et une interpolation permet de l'estimer pour différentes amplitudes de désordre.

Ces mesures de τ_S^{sf} sont confrontées aux mesures de τ_S sur la figure 7.9 et témoignent d'un très bon accord avec les données à basse impulsion, particulièrement dans le régime classique. De même que pour un speckle attractif, cette comparaison entre données temporelles et données spectrales montre qu'il est capital de connaître précisément les détails de la fonction spectrale pour étudier la dynamique de l'état initial.

8. Conclusion et perspectives

Dans ce manuscrit, nous avons rapporté la mesure expérimentale du temps de diffusion élastique faisant suite aux travaux de Jérémie Richard [84], que nous avons comparé à des simulations numériques et à la théorie perturbative de Born. Nous avons ainsi étudié le comportement du temps de diffusion élastique sur une large gamme de paramètres, sondant les régimes de diffusion faible et de diffusion forte.

En complétant notre étude basé sur des potentiels speckle par la simulation d'un potentiel gaussien, nous avons pu examiner quantitativement la pertinence du critère $k_{ilS} \sim 1$ de validité de l'approximation de Born. Si la dynamique dans le désordre est dictée par la distribution de potentiel dans le régime de désordre classique, nous avons montré que cette dernière a une forte influence sur la position de la transition entre les régimes de diffusion faible et de diffusion forte.

Dans le but d'étendre le domaine de validité de l'approximation de Born, nous avons calculé le second ordre du développement de Born de la self-energy, permettant de décrire le comportement asymétrique du temps de diffusion élastique dans un régime de désordre et d'impulsion faibles. L'approximation auto-consistante de Born fournit une estimation tout à fait convaincante du temps de diffusion élastique pour un désordre gaussien, cependant elle échoue à décrire le cas des désordres de type speckle. En comparant le temps de diffusion élastique au temps caractéristique extrait des fonctions spectrales mesurées $A(\mathbf{k} = 0, E = \hbar\delta)$, nous avons montré que la connaissance fine des détails de la fonction spectrale est capitale pour décrire correctement la dynamique du système.

Ces études ont montré le cruel besoin de prédictions quantitatives de la fonction spectrale pour la compréhension de phénomènes de transport plus complexes, tels que la localisation d'Anderson. Plus particulièrement, les désaccords observés entre les différentes expériences, les simulations et les théories s'attachant à décrire la transition de phase d'Anderson à trois dimensions trouvent leur origine dans la difficulté à déterminer expérimentalement et numériquement la distribution d'énergie de l'onde dans le désordre [78].

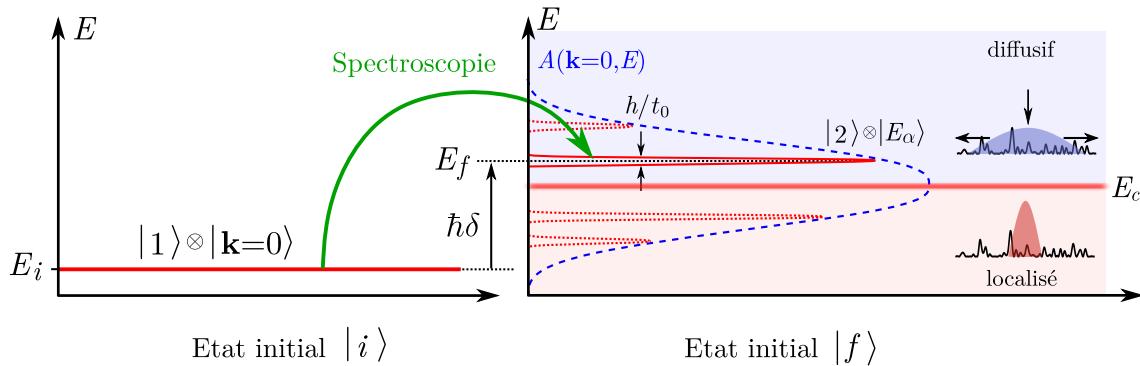


FIGURE 8.1 – Étude spectroscopique de la transition d’Anderson. Une approche spectroscopique de la transition d’Anderson se décomposerait selon deux étapes. Une première étape de chargement du désordre consisterait à transférer une partie du nuage à une énergie $\hbar\delta$ dans le désordre à l’aide d’un couplage radio-fréquence. La résolution en énergie alors obtenue serait limitée par le temps de couplage t_0 , donnant $\Delta E \sim h/t_0$. La seconde étape permettrait de caractériser l’énergie adressée en terme de localisation ou de diffusion en procédant à l’expansion de la partie transférée du nuage.

8.1 Vers l’étude du régime critique

Une difficulté rencontrée par les trois expériences présentées dans la section 2.3.1 correspond à l’élargissement de la distribution d’énergie des atomes dans le désordre, qui peut s’interpréter comme une résolution en énergie ΔE . Notamment, le couplage réalisé entre les atomes et le désordre implique que cette résolution en énergie est au moins aussi grande que le seuil de mobilité $\Delta E \geq E_c$. La détermination du seuil de mobilité requiert alors une connaissance précise de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$. De plus, l’étude des exposants critiques s’avère impossible en raison du manque de contrôle du paramètre d’ordre (l’énergie des atomes) autour de la transition.

L’approche spectroscopique radio-fréquence développée par l’équipe permet d’adresser ces deux limitations. Celle-ci ayant mené à la mesure de la fonction spectrale $A(\mathbf{k} = 0, E)$ pour des désordres de type speckle attractif et répulsif, l’équipe a ainsi mis en évidence le comportement pathologique du speckle répulsif utilisé dans les expériences pionnières de la localisation d’Anderson à trois dimensions. De plus, la résolution en énergie obtenue n’est plus limitée que par le temps de couplage de la spectroscopie $\Delta E \sim h/t_0$. Il apparaît donc possible de réaliser une expérience pour laquelle $\Delta E \ll E_c$, et qui permettrait de sonder le régime critique. De plus, cette approche permet d’étendre l’étude du régime critique à des désordres attractifs, pour lesquels le comportement du seuil de mobilité n’est pas aussi régulier que pour les désordres répulsifs exclusivement utilisés jusqu’à présent [23].

L’étude spectroscopique du régime critique de la transition d’Anderson apparaît naturellement comme prochaine étape expérimentale de l’équipe. En effet, on peut aisément imaginer le protocole de mesure du régime critique comme une extension de la spectroscopique radio-fréquence :

- Une première étape consiste à charger le désordre dans un état d’énergie bien définie à l’aide d’un transfert spectroscopique. Les atomes sont ainsi transférés dans le désordre à une énergie $\hbar\delta$ fixée par le désaccord de la transition de à deux-photons, avec une

résolution d'énergie ΔE limitée par le temps de couplage.

- Une seconde étape d'expansion de la partie transférée du nuage. En suivant l'évolution temporelle du nuage dans le désordre, il est possible de caractériser l'énergie $\hbar\delta$ adressée en terme de localisation ou de diffusion à l'aide d'un arrêt de l'expansion ou de saturation de la densité centrale [10][45].

Cette mesure du régime critique n'a pas pu être réalisée lors de la mesure des fonctions spectrales en raison de deux limitations expérimentales. Une première limitation provient du temps de vie très limité des atomes en présence de désordre en raison du faible désaccord nécessaire à l'approche de désordre dépendant de l'état interne. Le temps de vie ainsi obtenu est de plusieurs ordres de grandeur inférieur aux temps nécessaires pour pouvoir qualifier un état comme localisé. Une nouvelle approche de désordre bichromatique détaillée au chapitre 5 devrait ainsi dépasser cette limitation en permettant de s'éloigner de la résonance atomique tout en conservant le caractère sélectif en état de spin.

Une seconde limitation provient de l'utilisation du champ magnétique *magique* à $B_0^* \approx 3.2\text{G}$ qui permet de s'affranchir des fluctuations de champ magnétique lors du transfert spectroscopique. L'utilisation d'un tel bas champ génère un piégeage de fréquence $\omega/2\pi \sim 8\text{Hz}$, empêchant de procéder à des expansions dans le désordre pour des durées de l'ordre de la seconde. L'étude de la lévitation magnétique présentée au chapitre 4 montre que décomprimer ce piégeage magnétique en augmentant le biais B_0 s'accompagne d'un déplacement du nuage, qu'il convient de compenser afin de conserver la résolution d'énergie obtenue par spectroscopie.

Ces deux limitations ont ainsi fait l'objet d'investigations expérimentales poussées suite à nos travaux autour de la chambre de science au cours de ma thèse. Ceux-ci ont d'ailleurs permis d'obtenir de meilleurs condensats grâce à l'amélioration de notre évaporation optique, ainsi qu'un meilleur contrôle des champs magnétiques. Suite à ces travaux, l'équipe a récemment pu obtenir une résolution en énergie de $\Delta E/\hbar \sim 5\text{Hz}$ pour une durée de transfert de $t_0 = 200\text{ms}$, améliorée d'un facteur 2 par rapport à la résolution obtenue lors de la mesure des fonctions spectrales tout en restant limitée par Fourier.

8.2 Signatures de la localisation d'Anderson dans l'espace des impulsions

Comme nous avons pu voir dans le chapitre 6, l'évolution temporelle de la fonction d'onde dans l'espace des impulsions révèle de nombreuses quantités microscopiques de la propagation d'onde en milieu désordonné, telles que le temps de diffusion élastique [85], le temps de transport donné par l'isotropisation de la distribution de vitesses [82], mais aussi des signatures d'effets de localisation [20].

8.2.1 Rétro-diffusion cohérente

Le pic de rétro-diffusion cohérente (*CBS* pour l'anglais *Coherent BackScattering*) est une signature d'effets de localisation faible dans l'espace des vitesses. Celui-ci résulte d'interférences constructives dans la direction $|\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i\rangle$ entre chemins de diffusions symétriques par renversement du temps lorsqu'une onde plane initiale $|\mathbf{k}_i\rangle$ est plongée dans un

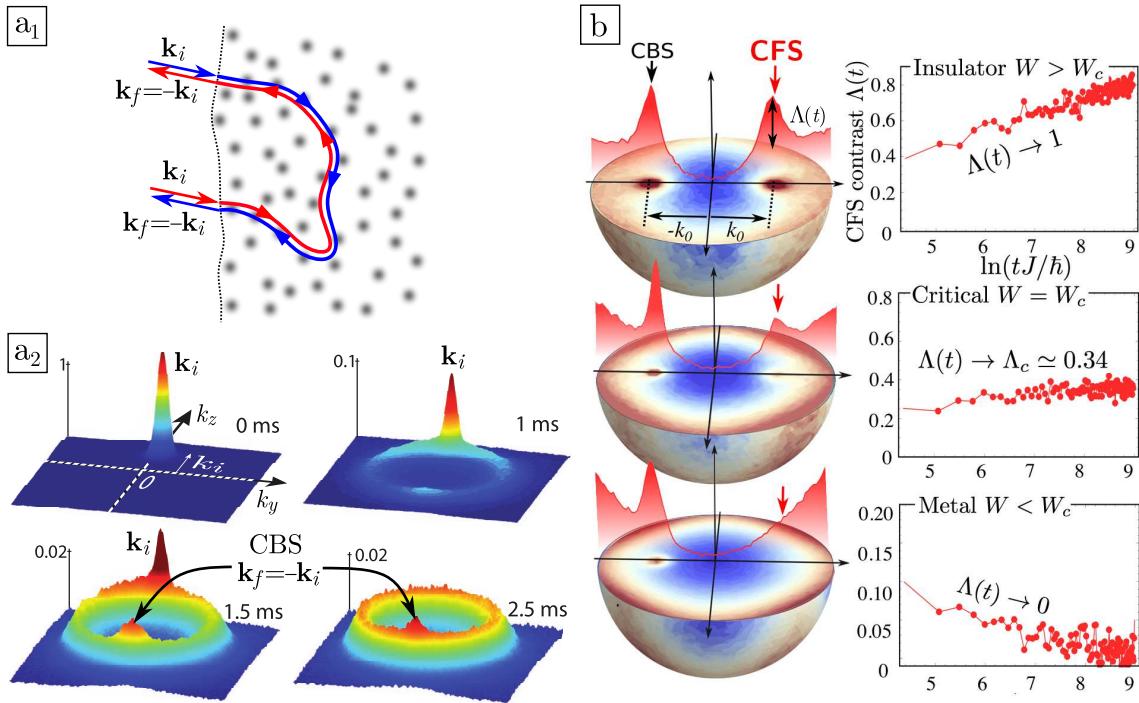


FIGURE 8.2 – **Signatures dans l'espace des vitesses.** a₁ et a₂ : Rétro-diffusion cohérente. Les effets de localisation faible conduisent à des interférences constructives dans la direction de rétro-diffusion, qui se manifeste sous la forme d'un pic émergeant de l'anneau de diffusion élastique dans la direction opposée à la direction initiale. b : Diffusion cohérente vers l'avant. Dans le régime de localisation d'Anderson, la symétrie de la distribution d'impulsion se manifeste par l'apparition d'un pic de diffusion cohérente vers l'avant aux temps longs. Il a été montré que le contraste de ce pic pouvait être considéré comme un paramètre d'ordre de la transition d'Anderson. Dans le régime diffusif, ce pic n'est pas visible et son contraste est nul. Dans le régime localisé, le contraste de ce pic tend vers 1, par symétrie avec le CBS. Dans le régime critique, il a été montré que le contraste du CFS tend vers une valeur intermédiaire de 0.34.

milieu désordonné (voir figure 8.2a₁). Le CBS a pu être observé à l'aide d'un protocole similaire à celui utilisé pour étudier le temps de diffusion élastique [46] sous la forme d'un pic émergeant de l'anneau de diffusion élastique dans la direction $\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i$ (voir figure 8.2a₂), et la manipulation de la symétrie par renversement du temps a mis en évidence le caractère cohérent de celui-ci [68].

Dans de récents travaux, l'équipe de Dominique Delande a montré que l'évolution temporelle de la largeur du pic CBS pouvait être une signature de la localisation d'Anderson [33]. En particulier, ils ont montré que

$$k_i \Delta\theta_{\text{CBS}}(t) \sim \begin{cases} 1/\sqrt{D(E)t} & \text{pour } E > E_c, \\ 1/t^{1/3} & \text{pour } E = E_c, \\ 1/\xi(E) & \text{pour } E < E_c, \end{cases} \quad (8.1)$$

que l'on peut aisément interpréter à l'aide de l'évolution temporelle de la taille du paquet d'onde dans l'espace réel $\Delta x \sim (k_i \Delta\theta_{\text{CBS}})^{-1}$.

Cependant, l'observation de tels effets de localisation forte sur la dynamique du CBS nécessite une résolution dans l'espace des impulsions Δk_{res} d'environ un ordre de grandeur inférieure à la résolution expérimentale actuelle. L'observation de cette signature serait un véritable tour de force expérimental.

8.2.2 Diffusion cohérente vers l'avant

Il est possible d'interpréter les états localisés comme des états liés au désordre. Pour ces états $|\psi\rangle$, l'impulsion moyenne est nulle, ce qui se traduit par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk k |\psi(k)|^2 = 0 . \quad (8.2)$$

Cette condition peut se réécrire

$$|\psi(k)|^2 = |\psi(-k)|^2 , \quad (8.3)$$

montrant que la distribution d'impulsion de ces états est symétrique. Cette symétrie est notamment décrite par l'apparition d'un pic de diffusion cohérente vers l'avant $\mathbf{k} = \mathbf{k}_i$, découvert récemment par Karpiuk et al. [47] à l'aide de simulations numériques. Ce pic n'existant que pour des états localisés, il s'agit d'une signature dans l'espace des impulsions de la localisation d'Anderson.

L'évolution temporelle de la distribution d'impulsion dans le désordre peut alors se décomposer selon trois étapes :

- L'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ décroît avec un temps caractéristique τ_S et est déplété vers les autres états d'impulsion $|\mathbf{k}'\rangle$ avec $k = k_i$.
- Après de multiples diffusions, la distribution d'impulsion devient isotrope sur une durée typique τ_B et le pic CBS émerge de la distribution isotrope.
- Aux temps longs, la localisation d'Anderson se manifeste dans l'espace des impulsions sous la forme du pic CFS.

Il a depuis été montré que le contraste Λ de ce pic de diffusion cohérente vers l'avant (*CFS* pour l'anglais *Coherent Forward Scattering*) pouvait être utilisé comme paramètre d'ordre de la transition d'Anderson [34]. En effet, il a été montré que

$$\Lambda(t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{pour } E > E_c , \\ \Lambda_c \approx 0.34 & \text{pour } E = E_c , \\ 1 & \text{pour } E < E_c , \end{cases} \quad (8.4)$$

illustré figure 8.2b.

L'observation expérimentale du pic de diffusion cohérente vers l'avant consiste un formidable défi expérimental et n'a pas encore été réalisée, excepté dans les systèmes de *kicked rotor* pour lesquels l'analogie est observée dans l'espace des positions [38]. Son observation en dimensions réduites nécessite une amélioration de la résolution d'impulsion Δk_{res} , tandis que son observation en trois dimensions nécessite de plus une reconstruction tridimensionnelle de la fonction d'onde, avec une tomographie optique par exemple [15].

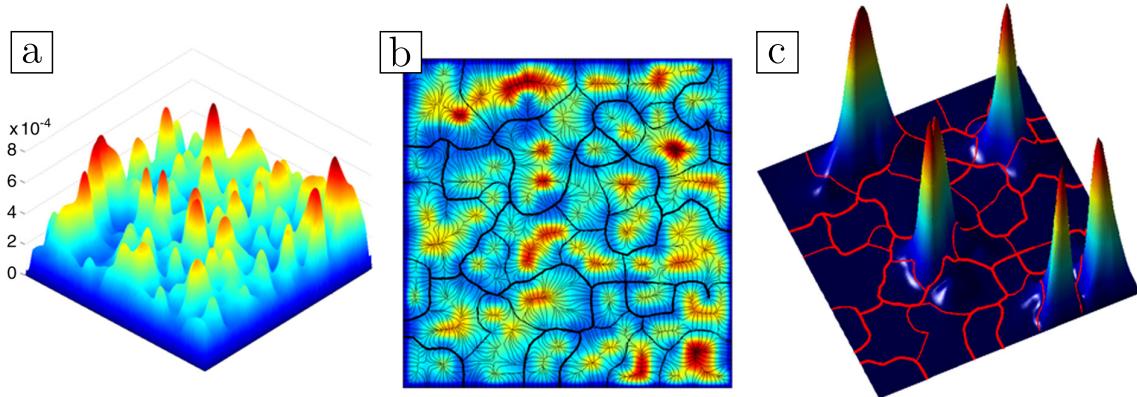


FIGURE 8.3 – Illustration de la théorie de Landscape. **a :** Fonction de landscape pour une réalisation du désordre calculée par l’équation 8.5. **b :** Représentation de la même fonction de landscape avec son réseau de vallées pour une énergie donnée. Ce réseau de vallées délimite des sous-régions entre lesquelles la fonction d’onde est fortement atténuée. **c :** Représentation du réseau de vallées où sont superposés les premiers modes propres du système. Les vallées semblent définir les sous-régions qui supportent les modes propres associés.

8.3 Générer un désordre sur mesure

Au cours de ce manuscrit, nous nous sommes attachés à démontrer l’importance capitale de la distribution de potentiel sur les propriétés de transport. Si l’amplitude du désordre $|V_R|$ est aisément contrôlable sur notre expérience, la distribution de potentiel reste déterminée par l’équation 5.30. L’implémentation d’un modulateur spatial de lumière en remplacement du diffuseur, ou d’une matrice de micro-miroirs, permet de générer un désordre entièrement déterminé. Celui-ci permet non seulement de modifier les corrélations spatiales du désordre, mais aussi sa distribution [8]. Une telle implémentation ouvre de nombreuses applications expérimentales, parmi lesquelles figurent un test de l’universalité de la transition d’Anderson et l’étude la transition entre localisation d’Anderson et percolation classique.

Plus particulièrement, l’utilisation d’un modulateur spatial de lumière nous permettrait d’étudier expérimentalement la théorie de *Landscape*, récemment développée par Marcel Filoche et Svitlana Mayboroda [30]. Dans le cadre de leur théorie, les phénomènes de localisation faible et de localisation d’Anderson sont la manifestation d’un seul mécanisme universel encodé par la fonction de landscape u , solution de l’équation ¹

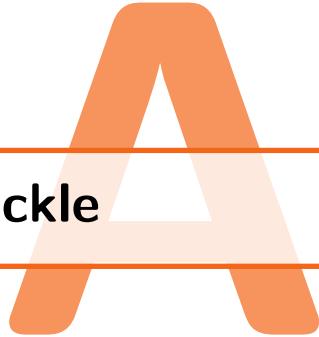
$$(-\Delta + V)u = 1 . \quad (8.5)$$

Les auteurs ont ainsi montré que la fonction d’onde d’un mode est fortement atténuée le long des minima de la fonction de landscape, séparant l’espace en sous-régions délimitées par un réseau de vallées de la fonction de landscape (voir figure 8.3, milieu). Finalement, les auteurs ont remarqué que ce réseau de vallées reproduisait les domaines dans lesquels les modes propres du système étaient localisés (voir figure 8.3, droite). Ils interprètent ainsi le phénomène de localisation comme de la percolation dans un potentiel caché $W = 1/u$.

La théorie de landscape prédit ainsi les régions de localisation et les énergies propres

1. Avec ces unités, l’équation de Schrödinger s’écrit $(-\Delta + V)\psi = E\psi$.

associées avec une précision remarquable. De plus, cette théorie ouvre la voie au *problème inverse*, c'est à dire créer un désordre afin d'obtenir des propriétés souhaitées de localisation. Le développement récent de cette théorie suscite une très grosse activité de recherche dans le monde, dont la mise en place d'une collaboration entre les auteurs et notre équipe afin de reproduire les fonctions spectrales mesurées à l'aide de la théorie de landscape.



A. Propriétés spatiales du speckle

A.1 Fonction de corrélation du diffuseur

On s'attache ici à donner l'expression de la fonction de corrélation du diffuseur et à introduire les différents paramètres nécessaires. La géométrie du diffuseur est détaillée section 5.1.2.

La phase localement accumulée par l'onde laser s'écrit :

$$\phi(\mathbf{x}_0) = 2\pi(n-1)\frac{e(\mathbf{x}_0)}{\lambda} , \quad (\text{A.1})$$

avec $e(\mathbf{x}_0)$ l'épaisseur localement traversée et λ la longueur d'onde du laser. La transmission du diffuseur est aussi une grandeur aléatoire (car reliée à l'épaisseur aléatoire traversée) donnée par :

$$t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \lambda) = e^{i\phi(\mathbf{x}_0)} . \quad (\text{A.2})$$

En considérant une distribution de phase (et donc d'épaisseur) gaussienne, on peut alors obtenir une expression pour la transmission moyenne (on note $\overline{\dots}$ la valeur moyenne sur l'ensemble des réalisations diffuseur) :

$$\overline{t_{\text{diff}}} = \overline{e^{i\phi}} = \int d\phi e^{i\phi} \mathcal{P}(\phi) \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}(\phi) = \frac{1}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi}} e^{-(\phi - \bar{\phi})^2 / 2\sigma_\phi^2} , \quad (\text{A.3})$$

qui correspond alors à la transformée de Fourier de la distribution de phase. On a alors

$$\overline{t_{\text{diff}}} = e^{-\bar{\phi}^2/2} = e^{-\sigma_\phi^2/2} \quad (\text{A.4})$$

en choisissant $\bar{\phi} = 0$.

Dans le cas général de l'étude de la corrélation entre deux speckles réalisés par la même réalisation du diffuseur à deux longueurs d'onde légèrement différentes, la fonction de corrélation du diffuseur est définie par la corrélation des transmissions des deux champs :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \lambda, \lambda') = \overline{t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \lambda) t_{\text{diff}}^*(\mathbf{x}'_0, \lambda')} . \quad (\text{A.5})$$

Avec cette définition, l'étude de la fonction de corrélation d'un unique speckle revient à prendre $\lambda' = \lambda$.

Supposons à présent que tout comme les phases individuelles, la différence de phases $\phi(\mathbf{x}_0) - \phi'(\mathbf{x}'_0)$ est elle aussi une variable gaussienne :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \lambda, \lambda') = \overline{e^{i(\phi(\mathbf{x}_0) - \phi'(\mathbf{x}'_0))}} \quad (\text{A.6})$$

$$= \exp \left[-\frac{1}{2} \overline{(\phi(\mathbf{x}_0) - \phi'(\mathbf{x}'_0))^2} \right] \quad (\text{A.7})$$

$$= \exp \left[-\frac{1}{2} \overline{(\phi(\mathbf{x}_0)^2 + \phi'(\mathbf{x}'_0)^2 - 2\phi(\mathbf{x}_0)\phi'(\mathbf{x}'_0))} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$= \exp \left[-2\pi^2(n-1)^2\sigma_e^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'} \frac{\overline{e(\mathbf{x}_0)(e\mathbf{x}'_0)}}{\sigma_e^2} \right) \right], \quad (\text{A.9})$$

en faisant apparaître la fonction de corrélation de l'épaisseur et l'écart-type de la distribution d'épaisseur σ_e , reliée à la largeur de la distribution de phase par $\sigma_\phi = 2\pi(n-1)\sigma_e/\lambda$. La largeur r_e de celle-ci décrit la taille de la granularité transverse de l'épaisseur du diffuseur. Comme décrit section 5.1.2, pour une large de distribution de phases $\sigma_\phi \gg 2\pi$ (ou $\sigma_e \gg \lambda$), on peut restreindre l'étude de la corrélation du diffuseur sur une zone petite devant r_e . Ainsi, on peut approximer la fonction de corrélation de la granularité du diffuseur, supposée être une courbe en cloche, par :

$$\frac{\overline{e(\mathbf{x}_0)e(\mathbf{x}'_0)}}{\sigma_e^2} \approx 1 - \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)^2}{2r_e^2} \quad \text{pour } |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0| \ll r_e. \quad (\text{A.10})$$

On obtient donc, pour la fonction de corrélation du diffuseur :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \lambda, \lambda') = \exp \left(-2\pi^2(n-1)^2\sigma_e^2 \left[\frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)^2}{\lambda\lambda'r_e^2} + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)^2 \right] \right) \quad (\text{A.11})$$

$$= \exp \left(-\frac{\delta\phi^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{\pi^2\theta_{\text{diff}}^2}{2} \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)^2}{\lambda\lambda'} \right), \quad (\text{A.12})$$

avec $\delta\phi = \sigma_\phi - \sigma_{\phi'}$ et en faisant apparaître l'angle de diffusion $\theta_{\text{diff}} = \lambda/\pi r_{\text{diff}}$. On retrouve ainsi la formule 5.7 de la section 5.1.2 en prenant $\lambda = \lambda'$: la fonction de corrélation du diffuseur est une gaussienne de largeur $r_{\text{diff}} = r_e/\sigma_\phi$ et de maximum 1 pour $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'_0$.

A.2 Amplitude rayonnée

Notons $\mathbf{x}_d \equiv \{x, y, d\}$ et $\mathbf{x}_0 \equiv \{x_0, y_0, 0\}$. Pour calculer le champ rayonné au point \mathbf{x}_d , on utilise le principe de Huygens-Fresnel :

$$E(\mathbf{x}_d) = \frac{1}{i\lambda} \int d\mathbf{x}_0 t(\mathbf{x}_0) E_0(\mathbf{x}_0) \frac{e^{ik|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_0|}, \quad (\text{A.13})$$

avec $t(\mathbf{x}_0)$ la transmission du montage optique au point \mathbf{x}_0 du diffuseur, comportant l'effet du diffuseur et de la lentille. $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde.

Appliquons alors l'approximation paraxiale :

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_0| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + d^2} \\ &= d \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{d^2}} \\ &\approx d + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2d} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

au premier ordre. Reportons A.14 dans A.13 :

$$E(\mathbf{x}_d) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} \int d\mathbf{x}_0 t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) E_0(\mathbf{x}_0) e^{-ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2f}} e^{ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2d}}, \quad (\text{A.15})$$

où nous avons utilisé le premier ordre pour approximer l'exponentielle et l'ordre 0 pour le dénominateur. $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$ correspond à la transmission du diffuseur. Développons alors cette dernière expression :

$$E(\mathbf{x}_d) = \frac{e^{ik\left(d+\frac{x^2+y^2}{2d}\right)}}{i\lambda d} \int d\mathbf{x}_0 t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) E_0(\mathbf{x}_0) e^{ik\frac{x_0^2}{2d_{\text{eff}}}} e^{-ik\frac{\mathbf{x}_d \cdot \mathbf{x}_0}{d}}, \quad (\text{A.16})$$

avec $1/d_{\text{eff}} = 1/d - 1/f$.

A.3 Fonction de corrélation

A.3.1 Calcul général

La fonction de corrélation en amplitude s'écrit

$$C_E(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}'_d, \lambda, \lambda') = \overline{E(\mathbf{x}_d, \lambda) E^*(\mathbf{x}'_d, \lambda')} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{i\left(k(d+\frac{x^2+y^2}{2d})-k'(d'+\frac{x'^2+y'^2}{2d'})\right)}}{\lambda \lambda' dd'} \int d\mathbf{x}_0 d\mathbf{x}'_0 \overline{t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) t_{\text{diff}}^*(\mathbf{x}'_0)} E_0(\mathbf{x}_0) E_0^*(\mathbf{x}'_0) \\ &\quad e^{i\frac{k\mathbf{x}_0^2}{2d_{\text{eff}}}} e^{-i\frac{k'\mathbf{x}'_0^2}{2d'_{\text{eff}}}} e^{-i\frac{k(\mathbf{x}_d \cdot \mathbf{x}_0)}{d}} e^{i\frac{k'(\mathbf{x}'_d \cdot \mathbf{x}'_0)}{d'}}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Appliquons alors le changement de variables $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0\} \rightarrow \{\mathbf{x}_0, \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\}$ (par commodité on omettra le facteur devant l'intégrale) :

$$\begin{aligned} C_E &\propto \int d\mathbf{x}_0 d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) E_0(\mathbf{x}_0) E_0^*(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) \\ &\quad e^{i\frac{\mathbf{x}_0^2}{2}(\frac{k}{d_{\text{eff}}}-\frac{k'}{d'_{\text{eff}}})} e^{-i\frac{k'\Delta\mathbf{x}'^2}{2d'_{\text{eff}}}} e^{-i\frac{k'\mathbf{x}_0 \Delta\mathbf{x}}{d'_{\text{eff}}}} e^{i\frac{k' \mathbf{x}_d \Delta\mathbf{x}}{d'}} e^{i\mathbf{x}_0 \cdot (\frac{k' \mathbf{x}'_d}{d'} - \frac{k \mathbf{x}_d}{d})}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Supposons à présent que la taille des grains du diffuseur sont très petits devant la taille typique de l'éclairement incident, c'est à dire qu'à l'échelle de variation de C_{diff} , l'éclairement incident sera constant. $E_0(\mathbf{x}_0) E_0^*(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) \approx E_0(\mathbf{x}_0) E_0^*(\mathbf{x}_0) = I_0(\mathbf{x}_0)$. En supprimant le terme en $\Delta\mathbf{x}^2$ supposé petit devant toutes les autres échelles de longueur, on obtient :

$$C_E \propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{i\frac{\mathbf{x}_0^2}{2}(\frac{k}{d_{\text{eff}}}-\frac{k'}{d'_{\text{eff}}})} e^{i\mathbf{x}_0 \cdot (\frac{k' \mathbf{x}'_d}{d'} - \frac{k \mathbf{x}_d}{d})} \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{i\Delta\mathbf{x} \cdot (\frac{k' \mathbf{x}'_d}{d'} - \frac{k' \mathbf{x}_0}{d'_{\text{eff}}})}. \quad (\text{A.20})$$

A.3.2 Expression de l'extension transverse du champ de tavelures le long de l'axe optique

L'intensité moyenne pour un speckle simple est donnée par le module carré de l'amplitude rayonnée, qui peut se réécrire à l'aide de la fonction de corrélation en amplitude :

$$\overline{I(\mathbf{x}_d)} = \overline{E(\mathbf{x}_d, \lambda) E^*(\mathbf{x}_d, \lambda)} \quad (\text{A.21})$$

$$\propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{i\Delta\mathbf{x} \cdot \left(\frac{k\mathbf{x}_d}{d} - \frac{k\mathbf{x}_0}{d_{\text{eff}}}\right)} \quad (\text{A.22})$$

$$\propto \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{i\Delta\mathbf{x} \cdot \frac{k\mathbf{x}_d}{d}} \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{-i\mathbf{x}_0 \cdot \frac{k\Delta\mathbf{x}}{d_{\text{eff}}}} \quad (\text{A.23})$$

$$\propto \widetilde{C}_{\text{diff}}\left(\frac{k\mathbf{x}_d}{d}\right) * I_0\left(\frac{\mathbf{x}_d d_{\text{eff}}}{d}\right), \quad (\text{A.24})$$

où $*$ dénote le produit de convolution et $\widetilde{C}_{\text{diff}}(k\mathbf{x}_d/d) = \int d\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) \exp(ik\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_d/d)$ est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de la transmission du diffuseur. On retrouve ainsi le résultat 5.11 du chapitre 5.

Aux alentours du plan de Fourier, $d_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ et donc on peut assimiler la contribution de l'intensité incidente $I_0(\mathbf{x}_f d_{\text{eff}}/d)$ à une distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x}_f)$ de telle sorte que l'intensité moyenne soit donnée par

$$\overline{I(\mathbf{x}_f)} \propto \widetilde{C}_{\text{diff}}\left(\frac{k\mathbf{x}_f}{d}\right). \quad (\text{A.25})$$

A.4 Corrélations transverse et longitudinales d'un speckle monochromatique

A.4.1 Corrélation transverse le long de l'axe optique

Considérons le cas d'un unique speckle, que l'on étudie dans un plan orthogonal à l'axe optique. Posons $\lambda = \lambda'$, $d = d'$ et $\mathbf{x}'_d = \{0, 0, d\}$:

$$C_E(x, y, d) = \overline{E(x, y, d) E^*(0, 0, d)} \quad (\text{A.26})$$

$$\propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{-ik\frac{\mathbf{x}_d \cdot \mathbf{x}_0}{d}} \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{-ik\frac{\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0}{d_{\text{eff}}}} \quad (\text{A.27})$$

$$\propto \widetilde{I}_0\left(\frac{k\mathbf{x}_d}{d}\right) * C_{\text{diff}}\left(\frac{d_{\text{eff}}}{d} \mathbf{x}_d\right). \quad (\text{A.28})$$

On retrouve bien le résultat 5.15 à l'aide de l'invariance par translation selon les directions transverses.

Aux alentours du plan de Fourier, $d_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ et donc on peut assimiler $C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_f d_{\text{eff}}/d)$ à une distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x}_f)$. On obtient alors que la fonction de corrélation en amplitude est donnée par

$$C_E(\mathbf{x}_f) \propto \widetilde{I}_0\left(\frac{k\mathbf{x}_f}{d}\right). \quad (\text{A.29})$$

A.4.2 Corrélation longitudinale autour du plan de Fourier

Plaçons nous sur l'axe optique, autour du plan de Fourier, et posons $\lambda = \lambda'$. Pour $\mathbf{x}_d = \{0, 0, d\} = 0$, et $\mathbf{x}'_d = \mathbf{x}_f = \{0, 0, f\}$, la fonction de corrélation longitudinale :

$$C_E = \overline{E(0, 0, d) E^*(0, 0, f)} \quad (\text{A.30})$$

$$\propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{i \frac{\mathbf{x}_0^2 k}{2d_{\text{eff}}}} \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) \quad (\text{A.31})$$

Proche du plan de Fourier, on pose $d = f + \delta z$, donc $1/d_{\text{eff}} = 1/d - 1/f \approx -\delta z/f^2$. Finalement, on obtient :

$$C_E \propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{-i \frac{\delta z k \mathbf{x}_0^2}{2f^2}}. \quad (\text{A.32})$$

On retrouve l'expression 5.18 du chapitre 5.

A.4.3 Corrélation tridimensionnelle aux alentours du plan de Fourier

Il est possible de combiner les résultats précédents sous la forme d'une fonction de corrélation tridimensionnelle aux alentours du plan de Fourier. Considérons le cas $\lambda = \lambda'$, $\mathbf{x}_d = \{x, y, d = f + \delta z\}$ et $\mathbf{x}'_d = \mathbf{x}_f = \{0, 0, f\}$. Alors,

$$C_E(x, y, \delta z) \propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{-ik \frac{\mathbf{x}_0^2 \delta z}{2f^2}} e^{-ik \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_d}{f}} \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) \quad (\text{A.33})$$

$$\propto \text{TF}\left[I_0(\mathbf{x}_0) e^{-ik \mathbf{x}_0^2 \delta z / 2f^2}\right]_{\frac{k \mathbf{x}_d}{f}}. \quad (\text{A.34})$$

On retrouve donc la fonction de corrélation c_{3D} de la formule 5.25 en prenant le module carré de l'expression A.34.

A.5 Corrélation d'un speckle bichromatique

Regardons maintenant les corrélations entre les champs de même intensité aux deux longueurs d'onde, mais à la même position physique. Posons $\lambda \neq \lambda'$ et $\mathbf{x}_d = \mathbf{x}'_d = \{x, y, d = f + \delta z\}$:

$$C_E(\mathbf{x}_d, \lambda, \lambda') \propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{i \frac{\mathbf{x}_0^2}{2d_{\text{eff}}} (k - k')} e^{i \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_d}{d} (k' - k)} \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{ik' \Delta\mathbf{x} \left(\frac{\mathbf{x}_d}{d} - \frac{\mathbf{x}_0}{d_{\text{eff}}} \right)}, \quad (\text{A.35})$$

et dans la limite où $D \gg r_{\text{diff}}$, on peut assimiler la fonction de corrélation $C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x})$ à une distribution infiniment fine $C_{\text{diff}}(0)\delta(\Delta\mathbf{x})$. La fonction de corrélation devient alors

$$C_E(\mathbf{x}_d, \lambda, \lambda') \propto C_{\text{diff}}(0) \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{i \frac{\mathbf{x}_0^2}{2d_{\text{eff}}} (k - k')} e^{i \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_d}{d} (k' - k)}. \quad (\text{A.36})$$

En posant $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$, on obtient

$$C_E(\mathbf{x}_d, \lambda, \lambda + \delta\lambda) \propto C_{\text{diff}}(0) \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{-ik \frac{\mathbf{x}_0^2 \delta z}{2f^2} \frac{\delta\lambda}{\lambda}} e^{-ik \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_d}{f} \frac{\delta\lambda}{\lambda}} \quad (\text{A.37})$$

$$\propto e^{-\delta\phi^2/2} \times \text{TF}\left[I_0(\mathbf{x}_0) e^{-ik \frac{\mathbf{x}_0^2 \delta z}{2f^2} \frac{\delta\lambda}{\lambda}}\right]_{\frac{k \mathbf{x}_d}{f} \frac{\delta\lambda}{\lambda}}, \quad (\text{A.38})$$

où l'on reconnaît la fonction de corrélation A.34 avec un facteur d'échelle $\lambda/\delta\lambda$ dans les trois directions de l'espace.



B. Calculs du temps de diffusion élastique

B.1 Éléments de calcul du temps de diffusion élastique à partir du développement de Born

La fonction de Green de la particule libre est donnée par

$$G_0(E, \mathbf{k}) = \frac{1}{E - k^2/2 + i0^+} = \frac{1}{E - k^2/2} - i\pi\delta(E - k^2/2) \quad (\text{B.1})$$

en utilisant la relation $1/(x + i0^+) = \text{vp}(1/x) - i\pi\delta(x)$.

En présence de désordre, la fonction de Green moyennée sur les différentes réalisations du désordre est donnée par

$$\tilde{G}(E, \mathbf{k}) = \frac{1}{E - E_{\mathbf{k}} - \bar{V} - \Sigma(E, \mathbf{k})} \quad (\text{B.2})$$

En faisant apparaître la valeur moyenne du potentiel et la self-energy. Cette dernière peut être décomposée sous la forme d'une série

$$\Sigma(E) = \Sigma^{(1)}(E) + \Sigma^{(2)}(E) + \dots, \quad (\text{B.3})$$

où l'on identifie les deux premiers termes $\Sigma^{(1)}(E) = \overline{VG_0(E)V}$ et $\Sigma^{(2)} = \overline{VG_0(E)VG_0(E)V}$ à l'aide du développement de Born 7.11.

Ces deux premiers termes de la self-energy font apparaître les fonctions de corrélation à deux et trois corps du potentiel, que l'on écrit sous la forme

$$\overline{V(\mathbf{x}_1)V(\mathbf{x}_2)} = C(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (\text{B.4})$$

$$= V_R^2 e^{-\frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2}{\sigma^2}} \quad (\text{B.5})$$

et dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{C}(\mathbf{k}) = (\pi\sigma^2)^{d/2} V_R^2 e^{-k^2\sigma^2/4} \quad (\text{B.6})$$

en dimension d .

La fonction de corrélation à trois corps est déterminée par

$$\overline{V(\mathbf{x}_1)V(\mathbf{x}_2)V(\mathbf{x}_3)} = 2V_R^3 e^{-\frac{(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_3)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{B.7})$$

$$= 2V_R^3 \gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \gamma(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\gamma(\mathbf{x}) = e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{B.9})$$

dont la transformée de Fourier est

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{k}) = (2\pi\sigma^2)^{d/2} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} \quad (\text{B.10})$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{d/2} V(\mathbf{k}) \quad (\text{B.11})$$

en dimension d quelconque et en définissant $V(\mathbf{k})$.

B.2 Calcul de la Self-Energy au premier ordre

B.2.1 Expression du premier ordre de la self-energy

Partons de l'expression du premier terme de la self-energy et évaluons-le entre deux états $|\mathbf{k}\rangle$ et $|\mathbf{k}'\rangle$:

$$\langle \mathbf{k} | \Sigma^{(1)}(E) | \mathbf{k}' \rangle = \langle \mathbf{k} | \overline{V G_0(E) V} | \mathbf{k}' \rangle \quad (\text{B.12})$$

$$= \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \langle \mathbf{k} | \mathbf{x}_1 \rangle \overline{V(\mathbf{x}_1)} \langle \mathbf{x}_1 | G_0(E) | \mathbf{x}_2 \rangle \overline{V(\mathbf{x}_2)} \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{k}' \rangle \quad (\text{B.13})$$

$$= \sum_{\mathbf{k}_1} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \langle \mathbf{k} | \mathbf{x}_1 \rangle \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{k}_1 \rangle \langle \mathbf{k}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle G_0(E, \mathbf{k}_1) \overline{V(\mathbf{x}_1)} \overline{V(\mathbf{x}_2)} \quad (\text{B.14})$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{k}_1} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 C(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) G_0(E, \mathbf{k}_1) \frac{1}{L^{2d}} e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{i\mathbf{x}_2 \mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{x}_1 \mathbf{k}} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\int d\mathbf{k}_1 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^d G_0(E, \mathbf{k}_1) \int d\Delta\mathbf{x} C(\Delta\mathbf{x}) \frac{e^{i\Delta\mathbf{x}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1)}}{L^d} \int d\mathbf{x}_1 \frac{e^{i\mathbf{x}_1(\mathbf{k}' - \mathbf{k})}}{L^d} \right) \quad (\text{B.16})$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^d} G_0(E, \mathbf{k}_1) \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\int d\Delta\mathbf{x} C(\Delta\mathbf{x}) e^{i\Delta\mathbf{x}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1)} \int d\mathbf{x}_1 \langle \mathbf{k} | \mathbf{x}_1 \rangle \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{k}' \rangle \right) \quad (\text{B.17})$$

$$= \langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^d} G_0(E, \mathbf{k}_1) \tilde{C}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1). \quad (\text{B.18})$$

où nous avons utilisé les relations de fermeture, ainsi que les ondes planes $\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = 1/L^{d/2} \times e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ dans une boîte de taille L et de dimension d . Nous avons de plus utilisé la correspondance $\sum_{\mathbf{k}} \leftrightarrow \int d\mathbf{k} (L/2\pi)^d$. Le résultat ne dépend pas de la taille de ces boîtes, dont il faut tenir

compte afin que les ondes planes $\langle \mathbf{x}|\mathbf{k} \rangle$ aient la bonne normalisation. Nous ne tiendrons plus compte de cette considération dans la suite, les résultats étant identiques.

On retrouve ainsi que la self-energy est diagonale dans l'espace des $|\mathbf{k}\rangle$, témoignant de l'invariance par translation du système, et que celle-ci est donnée par la convolution de la fonction de Green libre avec le spectre des fréquences spatiales du désordre.

B.2.2 Calcul du temps de diffusion élastique

Le temps de diffusion élastique est relié à la partie imaginaire de la self-energy :

$$\text{Im}[\Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k})] = \text{Im} \left[\int \frac{d\mathbf{k}_1}{4\pi^2} G_0(E, \mathbf{k}_1) \tilde{C}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \right] \quad (\text{B.19})$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}_1}{4\pi^2} \text{Im}[G_0(E, \mathbf{k}_1)] \tilde{C}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \quad (\text{B.20})$$

$$= -\pi \int \frac{d\mathbf{k}_1}{4\pi^2} \delta(E - E_{\mathbf{k}_1}) \tilde{C}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \quad (\text{B.21})$$

$$= -\pi V_R^2 \int \frac{d\mathbf{k}_1}{4\pi^2} \pi \sigma^2 e^{-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2 \sigma^2 / 4} \delta(E - E_{\mathbf{k}_1}) \quad (\text{B.22})$$

$$= -\frac{V_R^2 \sigma^2}{4} \int d\mathbf{k}_1 e^{-k^2 \sigma^2 / 4} e^{-k_1^2 \sigma^2 / 4} e^{k \mathbf{k}_1 \sigma^2 / 4} \delta(E - E_{\mathbf{k}_1}) \quad (\text{B.23})$$

$$= -\frac{V_R^2 \sigma^2}{4} \int dk_1 k_1 d\theta_1 e^{-k^2 \sigma^2 / 4} e^{-k_1^2 \sigma^2 / 4} e^{kk_1 \cos \theta_3} \delta(E - E_{\mathbf{k}_1}) \quad (\text{B.24})$$

$$= -\frac{\pi}{2} V_R^2 \sigma^2 \int dk_1 k_1 e^{-k^2 \sigma^2 / 4} e^{-k_1^2 \sigma^2 / 4} I_0(kk_1 \sigma^2 / 2) \delta(E - E_{\mathbf{k}_1}), \quad (\text{B.25})$$

où $I_0(x)$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0, donnée par

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{x \cos \theta} = 2\pi I_0(x) \quad \text{pour } x > 0. \quad (\text{B.26})$$

On fait maintenant l'approximation en couche $E = E_{\mathbf{k}}$, et on fait apparaître le temps de diffusion élastique

$$\frac{\hbar}{\tau_S^{\text{sf}}} = -2\text{Im}[\Sigma^{(1)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})] \quad (\text{B.27})$$

$$= \pi \frac{V_R^2}{E_\sigma} \int dk_1^2 e^{-k^2 \sigma^2 / 4} e^{-k_1^2 \sigma^2 / 4} I_0(kk_1 \sigma^2 / 2) \delta(k^2 - k_1^2) \quad (\text{B.28})$$

$$= \pi \frac{V_R^2}{E_\sigma} e^{-k^2 \sigma^2 / 2} I_0(k^2 \sigma^2 / 2). \quad (\text{B.29})$$

On retrouve ainsi l'expression de τ_S^{Born} en deux dimensions annoncée dans le chapitre 6.

B.3 Calcul de la Self-Energy au second ordre

Il est possible de déterminer différentes expressions du second ordre de la self-energy. En particulier, nous montrons deux de ces expressions, dont l'évaluation numérique donne le même résultat avec une erreur inférieure au pourcent.

B.3.1 Calcul à l'aide la représentation en impulsion

Commençons par évaluer le deuxième ordre de la self-energy dans l'espace des impulsions, entre les états $|\mathbf{k}\rangle$ et $|\mathbf{k}'\rangle$:

$$\langle \mathbf{k} | \Sigma^{(2)}(E) | \mathbf{k}' \rangle = \langle \mathbf{k} | \overline{V G_0(E) V G_0(E) V} | \mathbf{k}' \rangle \quad (\text{B.30})$$

$$= \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 \quad (\text{B.31})$$

$$\times \langle \mathbf{k} | \mathbf{x}_1 \rangle \overline{V(\mathbf{x}_1) \langle \mathbf{x}_1 | G_0(E) | \mathbf{x}_2 \rangle V(\mathbf{x}_2) \langle \mathbf{x}_2 | G_0(E) | \mathbf{x}_3 \rangle V(\mathbf{x}_3)} \langle \mathbf{x}_3 | \mathbf{k}' \rangle \\ = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 \quad (\text{B.32})$$

$$\times \overline{V(\mathbf{x}_1) V(\mathbf{x}_2) V(\mathbf{x}_3)} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}_1} e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{x}_2} e^{-i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}')\mathbf{x}_3} \\ = 2V_R^3 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 \quad (\text{B.33})$$

$$\times \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \gamma(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}_1} e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{x}_2} e^{-i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}')\mathbf{x}_3} \\ = 2V_R^3 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 d\mathbf{x}'_3 \gamma(\mathbf{x}'_1) \gamma(\mathbf{x}'_2) \gamma(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) \quad (\text{B.34})$$

$$\times e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}'_1} e^{-i(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}')\mathbf{x}'_2} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}'_3} \\ = \langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle \times 2V_R^3 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 \quad (\text{B.35})$$

$$\times \gamma(\mathbf{x}'_1) \gamma(\mathbf{x}'_2) \gamma(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}'_1} e^{-i(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}')\mathbf{x}'_2}$$

en réalisant le changement de variables $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \rightarrow \{\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_3 = \mathbf{x}_2\}$. On fait une nouvelle fois apparaître le fait que la self-energy est diagonale dans l'espace des $|\mathbf{k}\rangle$, traduisant l'invariance par translation du système.

On peut alors donner une expression simple du deuxième ordre de la self-energy

$$\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k}) = 2V_R^3 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 \gamma(\mathbf{x}'_1) \gamma(\mathbf{x}'_2) \gamma(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) \quad (\text{B.36})$$

$$\times e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}'_1} e^{-i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k})\mathbf{x}'_2} \\ = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{C}^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_2), \quad (\text{B.37})$$

qui correspond à la formule mentionnée dans le chapitre 7. Cette formule peut s'interpréter dans le cadre de la théorie des perturbations comme l'action multiple du potentiel sur l'état initial, propagé librement entre ces actions.

B.3.2 Calcul à l'aide la représentation spatiale

Il est possible d'obtenir une expression plus simple à évaluer numériquement en partant de la représentation spatiale du second ordre de la self-energy :

$$\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int d\mathbf{x} G_0(E, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) G_0(E, \mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \overline{V(\mathbf{x}_1)} V(\mathbf{x}) \overline{V(\mathbf{x}_2)} \quad (\text{B.38})$$

$$= 2V_R^3 \int d\mathbf{x} G_0(E, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) G_0(E, \mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (\text{B.39})$$

$$= 2V_R^3 \int d\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5}{(2\pi)^{5d}} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \quad (\text{B.40})$$

$$\times e^{-i\mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1-\mathbf{x})} e^{-i\mathbf{k}_2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)} e^{-i\mathbf{k}_3(\mathbf{x}_1-\mathbf{x})} e^{-i\mathbf{k}_4(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)} e^{-i\mathbf{k}_5(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)} \\ = \frac{2V_R^2}{(2\pi)^{5d}} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \quad (\text{B.41})$$

$$\times e^{-i\mathbf{x}_1(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_5)} e^{-i\mathbf{x}_2(\mathbf{k}_5-\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_2)} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)} \\ = \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{4d}} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \quad (\text{B.42})$$

$$\times e^{-i\mathbf{x}_1(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_5)} e^{-i\mathbf{x}_2(\mathbf{k}_5-\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_2)} \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \\ = \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{4d}} \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \quad (\text{B.43})$$

$$\times e^{-i(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_5)(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \\ = \Sigma^{(2)}(E, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) . \quad (\text{B.44})$$

Cette dernière expression prouve à nouveau l'invariance par translation de la self-energy.

L'expression de la self-energy dans l'espace des impulsions est alors obtenue par transformée de Fourier :

$$\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k}) = \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Sigma^{(2)}(E, \mathbf{x}) \quad (\text{B.45})$$

$$= \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{4d}} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \\ \times e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_5-\mathbf{k})} \quad (\text{B.46})$$

$$= \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{3d}} \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \\ \times \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}) \quad (\text{B.47})$$

$$= \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{3d}} \int d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_3) G_0(E, \mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) , \quad (\text{B.48})$$

et faisons le changement de variables $\mathbf{k}'_3 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_3$ et $\mathbf{k}'_4 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_4$:

$$\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k}) = \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{3d}} \int d\mathbf{k}_5 \left(\int d\mathbf{k}'_3 G_0(E, \mathbf{k}'_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}'_3) \right) \quad (B.49)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\int d\mathbf{k}'_4 G_0(E, \mathbf{k}'_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}'_4) \right) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \\ & = \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{3d}} \int d\mathbf{k}'_5 \left(\int d\mathbf{k}'_3 G_0(E, \mathbf{k}'_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3) \right) \quad (B.50) \\ & \times \left(\int d\mathbf{k}'_4 G_0(E, \mathbf{k}'_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4) \right) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}'_5) \end{aligned}$$

en faisant le changement de variables $\mathbf{k}'_5 = -\mathbf{k}_5$ et en remarquant que $\tilde{\gamma}(\mathbf{k})$ est une fonction paire.

Plaçons-nous à présent en dimension $d = 2$.

$$\text{Im}[\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k})] = \frac{2V_R^3(2\pi\sigma^2)^3}{(2\pi)^6} \quad (B.51)$$

$$\begin{aligned} & \times \int d\mathbf{k}'_5 \left(\int d\mathbf{k}'_3 \frac{V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3)}{E - k'^2_3/2} (-\pi) \int d\mathbf{k}'_4 \delta(E - k'^2_4/2) V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4) \right. \\ & \left. - \pi \int d\mathbf{k}'_3 \delta(E - k'^2_3/2) V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3) \int d\mathbf{k}'_4 \frac{V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4)}{E - k'^2_4/2} \right) V(\mathbf{k}'_5) \end{aligned}$$

$$= \frac{2V_R^3(2\pi\sigma^2)^3}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}'_5 (-2\pi) V(\mathbf{k}'_5) \quad (B.52)$$

$$\begin{aligned} & \times \underbrace{\left(\int d\mathbf{k}'_3 \frac{V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3)}{E - k'^2_3/2} \right)}_{(a)} \times \underbrace{\left(\int d\mathbf{k}'_4 \delta(E - k'^2_4/2) V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4) \right)}_{(b)} \end{aligned}$$

Calculons à présent le premier terme :

$$(a) = \int d\mathbf{k}'_2 \frac{V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3)}{E - k'^2_3/2} \quad (B.53)$$

$$= \int d\mathbf{k}'_3 \frac{1}{E - k'^2_3/2} e^{-(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3)^2 \sigma^2 / 2} \quad (B.54)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} dk'_3 k'_3 \int_0^\pi d\theta'_3 \frac{1}{E - k'^2_3/2} e^{-\sigma^2/2 \times (k'^2_3 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 - 2k'_3 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \cos \theta'_3)} \quad (B.55)$$

et en utilisant l'expression de la fonction de Bessel $\int_0^{2\pi} d\theta \exp(x \cos \theta) = 2\pi I_0(x)$ pour $x > 0$.

$$(a) = \int_{\mathbb{R}^+} dk'_3 k'_3 e^{-|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2 / 2} \frac{e^{-k'^2_3 \sigma^2 / 2}}{E - k'^2_3 / 2} 2\pi I_0(k'_3 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma^2) \quad (B.56)$$

$$= 2\pi e^{-\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon'}) \quad (B.57)$$

en faisant apparaître les énergies adimensionnées $\epsilon = E/E_\sigma = E\sigma^2$ en unités naturelles. L'énergie cinétique s'écrit $\epsilon' = E_k/E_\sigma = k'^2_3 \sigma^2 / 2$.

Calculons le second terme :

$$(b) = \int d\mathbf{k}'_4 \delta(E - k'^2_4/2) V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4) \quad (\text{B.58})$$

$$= \int d\mathbf{k}'_4 \delta(E - k'^2_4/2) e^{-(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4)\sigma^2/2} \quad (\text{B.59})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} dk'_4 k'_4 \int_0^{2\pi} d\theta'_4 \delta(E - k'^2_4/2) e^{-|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2/2} e^{-\sigma^2 k'^2_4/2} e^{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| k'_4 \cos \theta'_4} \quad (\text{B.60})$$

$$= 2\pi e^{-\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^+} dk'_4 k'_4 \delta(E - k'^2_4/2) e^{-\sigma^2 k'^2_4/2} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma^2 k'_4) \quad (\text{B.61})$$

$$= 2\pi e^{-\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \delta(\epsilon - \epsilon') e^{-\epsilon'} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon'}) \quad (\text{B.62})$$

$$= 2\pi e^{-\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2}{2}} e^{-\epsilon} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon}) \quad (\text{B.63})$$

avec $\epsilon' = k'^2_4 \sigma^2 / 2$ l'énergie cinétique adimensionnée.

La partie imaginaire de la self-energy vaut alors

$$\text{Im}[\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k})] = \frac{2V_R^3 (2\pi\sigma^2)^3}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}'_5 (-2\pi) 2\pi e^{-|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2/2} \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon'}) \quad (\text{B.64})$$

$$\begin{aligned} & \times 2\pi e^{-|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2/2} e^{-\epsilon} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon}) e^{-k'^2_5 \sigma^2/2} \\ & = -2V_R^3 \sigma^6 \int d\mathbf{k}'_5 e^{-\epsilon} e^{-|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2} e^{-k'^2_5 \sigma^2/2} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon}) \quad (\text{B.65}) \\ & \times \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon'}) \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $\mathbf{k}''_5 = \mathbf{k} - \mathbf{k}'_5$:

$$\text{Im}[\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k})] = -2V_R^3 \sigma^6 \int d\mathbf{k}''_5 e^{-\epsilon} e^{-k'^2_5 \sigma^2} e^{|\mathbf{k} - \mathbf{k}''_5|^2 \sigma^2/2} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon}) \quad (\text{B.66})$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon}) \\ & = -4\pi V_R^3 \sigma^6 e^{-\epsilon} e^{-k^2 \sigma^2/2} \int_{\mathbb{R}^+} dk''_5 k''_5 e^{-\frac{3}{2} k'^2_5 \sigma^2} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon}) \quad (\text{B.67}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^{2\pi} d\theta''_5 e^{\sigma^2 k k''_5 \cos \theta''_5} \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon}) \\ & = -4\pi V_R^3 \sigma^6 e^{-\epsilon} e^{-k^2 \sigma^2/2} \quad (\text{B.68}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\mathbb{R}^+} dk''_5 k''_5 e^{-\frac{3}{2} k'^2_5 \sigma^2} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon})^2 \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon}) \\ & = -4\pi \frac{V_R^3}{E_\sigma^2} e^{-k^2 \sigma^2} \int_{\mathbb{R}^+} dk' k' e^{-\frac{3}{2} k'^2} I_0(k' k \sigma)^2 \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{k^2 \sigma^2/2 - \epsilon'} I_0(k' \sqrt{2\epsilon'}) \quad (\text{B.69}) \end{aligned}$$

en posant $k' = k''_5 \sigma$ et en faisant l'approximation en couche $E = \hbar^2 k^2 / 2m \rightarrow \epsilon = k^2 \sigma^2 / 2$. Cette dernière expression est celle que nous avons évaluée numériquement à l'aide du principe de Cauchy pour déterminer les corrections au second ordre de τ_S^{sf} dans le chapitre 7, par

$$\frac{\hbar}{\tau_S^{\text{sf}}} = -2\text{Im} [\Sigma^{(1)}(E_k, \mathbf{k}) + \Sigma^{(2)}(E_k, \mathbf{k})] \quad (\text{B.70})$$

Bibliographie

- [1] E. Abrahams, P. Anderson, D. Licciardello, and T. Ramakrishnan. Scaling theory of localization : Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Physical Review Letters*, 42(10) :673, 1979.
- [2] E. Akkermans and G. Montambaux. *Mesoscopic physics of electrons and photons*. Cambridge university press, 2007.
- [3] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *science*, pages 198–201, 1995.
- [4] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, 109(5) :1492, 1958.
- [5] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. Solid state physics (saunders college, philadelphia, 1976). *Appendix N*, 166, 2010.
- [6] M. Barrett, J. Sauer, and M. Chapman. All-optical formation of an atomic bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, 87(1) :010404, 2001.
- [7] J.-L. Basdevant, J. Dalibard, and M. Joffre. *Mécanique quantique*. Editions Ecole Polytechnique, 2002.
- [8] N. Bender, H. Yilmaz, Y. Bromberg, and H. Cao. Customizing speckle intensity statistics. *Optica*, 5(5) :595–600, 2018.
- [9] A. Bernard. *Transport quantique d'ondes atomiques ultrafroides : localisation d'Anderson et laser à atomes guidé*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2010.
- [10] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect. Direct observation of anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*, 453 :891–894, 2008.

- [11] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbene. Quantum simulations with ultracold quantum gases. *Nature Physics*, 8(4) :267–276, 2012.
- [12] U. Bockelmann, G. Abstreiter, G. Weimann, and W. Schlapp. Single-particle and transport scattering times in narrow gaas/al_{1-x}ga_x quantum wells. *Physical Review B*, 41(11) :7864, 1990.
- [13] V. Boyer. *Condensation de Bose-Einstein avec un électroaimant à noyau ferromagnétique : stratégies de refroidissement dans des champs magnétiques intenses*. PhD thesis, Paris 11, 2000.
- [14] J.-P. Brantut. *Manipulation d'atomes froids dans des potentiels lumineux*. PhD thesis, Paris 11, 2009.
- [15] J.-P. Brantut, J.-F. Clément, M. R. de Saint Vincent, G. Varoquaux, R. A. Nyman, A. Aspect, T. Bourdel, and P. Bouyer. Light-shift tomography in an optical-dipole trap for neutral atoms. *Physical Review A*, 78(3) :031401, 2008.
- [16] E. Burt, R. Ghrist, C. Myatt, M. Holland, E. A. Cornell, and C. Wieman. Coherence, correlations, and collisions : What one learns about bose-einstein condensates from their decay. *Physical Review Letters*, 79(3) :337, 1997.
- [17] B. Canuel, L. Amand, A. Bertoldi, W. Chaibi, R. Geiger, J. Gillot, A. Landragin, M. Merzougui, I. Riou, S. Schmid, et al. The matter-wave laser interferometer gravitation antenna (miga) : New perspectives for fundamental physics and geosciences. In *E3S Web of Conferences*, volume 4, page 01004. EDP Sciences, 2014.
- [18] G. Casati, I. Guarneri, and D. Shepelyansky. Anderson transition in a one-dimensional system with three incommensurate frequencies. *Physical review letters*, 62(4) :345, 1989.
- [19] J. Chabé, G. Lemarié, B. Grémaud, D. Delande, P. Sriftgiser, and J. C. Garreau. Experimental observation of the anderson metal-insulator transition with atomic matter waves. *Physical review letters*, 101(25) :255702, 2008.
- [20] N. Cherroret, T. Karpiuk, C. A. Müller, B. Grémaud, and C. Miniatura. Coherent backscattering of ultracold matter waves : Momentum space signatures. *Physical Review A*, 85(1) :011604, 2012.
- [21] C. Cohen-Tannoudji. Atomes ultrafroids : Piegeage non dissipatif et refroidissement évaporatif. *Cours au Collège de France*, 1997, 1996.
- [22] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle. Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical review letters*, 75(22) :3969, 1995.
- [23] D. Delande and G. Orso. Mobility edge for cold atoms in laser speckle potentials. *Physical review letters*, 113(6) :060601, 2014.
- [24] V. Denechaud. *Vers une étude spectroscopique de la transition d'Anderson*. PhD thesis, Université Paris Saclay, 2018.
- [25] A. Derevianko and H. Katori. Colloquium : Physics of optical lattice clocks. *Reviews of Modern Physics*, 83(2) :331, 2011.

- [26] B. Diu, B. Roulet, C. Guthmann, and D. Lederer. *Eléments de physique statistique*. Hermann, 1989.
- [27] S. Eckel, J. G. Lee, F. Jendrzejewski, N. Murray, C. W. Clark, C. J. Lobb, W. D. Phillips, M. Edwards, and G. K. Campbell. Hysteresis in a quantized superfluid ‘atomtronic’ circuit. *Nature*, 506(7487) :200–203, 2014.
- [28] F. Evers and A. D. Mirlin. Anderson transitions. *Reviews of Modern Physics*, 80(4) :1355, 2008.
- [29] M. Fauquembergue. *Réalisation d’un dispositif de condensation de Bose-Einstein et de transport d’un échantillon cohérent d’atomes*. PhD thesis, Paris 11, 2004.
- [30] M. Filoche and S. Mayboroda. Universal mechanism for anderson and weak localization. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(37) :14761–14766, 2012.
- [31] A. Gatti, D. Magatti, and F. Ferri. Three-dimensional coherence of light speckles : theory. *Physical Review A*, 78(6) :063806, 2008.
- [32] A. Genack and N. Garcia. Observation of photon localization in a three-dimensional disordered system. *Physical review letters*, 66(16) :2064, 1991.
- [33] S. Ghosh, D. Delande, C. Miniatura, and N. Cherroret. Coherent backscattering reveals the anderson transition. *Physical Review Letters*, 115(20) :200602, 2015.
- [34] S. Ghosh, C. Miniatura, N. Cherroret, and D. Delande. Coherent forward scattering as a signature of anderson metal-insulator transitions. *Physical Review A*, 95(4) :041602, 2017.
- [35] J. W. Goodman. *Speckle phenomena in optics : theory and applications*. Roberts and Company Publishers, 2007.
- [36] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov. Optical dipole traps for neutral atoms. *arXiv preprint physics/9902072*, 1999.
- [37] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre. *Introduction to quantum optics : from the semi-classical approach to quantized light*. Cambridge university press, 2010.
- [38] C. Hainaut, I. Manai, J.-F. Clément, J. C. Garreau, P. Sriftgiser, G. Lemarié, N. Cherroret, D. Delande, and R. Chicireanu. Controlling symmetry and localization with an artificial gauge field in a disordered quantum system. *Nature communications*, 9(1) :1–9, 2018.
- [39] W. Hildebrand, A. Strybulevych, S. Skipetrov, B. Van Tiggelen, and J. Page. Observation of infinite-range intensity correlations above, at, and below the mobility edges of the 3d anderson localization transition. *Physical Review Letters*, 112(7) :073902, 2014.
- [40] H. Hu, A. Strybulevych, J. Page, S. E. Skipetrov, and B. A. van Tiggelen. Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Physics*, 4(12) :945–948, 2008.
- [41] J. Hu, A. Urvoy, Z. Vendeiro, V. Crépel, W. Chen, and V. Vuletić. Creation of a bose-condensed gas of 87rb by laser cooling. *Science*, 358(6366) :1078–1080, 2017.

- [42] C.-L. Hung, X. Zhang, N. Gemelke, and C. Chin. Accelerating evaporative cooling of atoms into bose-einstein condensation in optical traps. *Physical Review A*, 78(1) :011604, 2008.
- [43] S. L. Jacques, B. Wang, and R. Samatham. Reflectance confocal microscopy of optical phantoms. *Biomedical optics express*, 3(6) :1162–1172, 2012.
- [44] F. Jendrzejewski. *Quantum transport of ultracold atoms in disordered potentials*. PhD thesis, Paris 11, 2012.
- [45] F. Jendrzejewski, A. Bernard, K. Mueller, P. Cheinet, V. Josse, M. Piraud, L. Pezzé, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer. Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential. *Nature Physics*, 8(5) :398–403, 2012.
- [46] F. Jendrzejewski, K. Müller, J. Richard, A. Date, T. Plisson, P. Bouyer, A. Aspect, and V. Josse. Coherent backscattering of ultracold atoms. *Physical Review Letters*, 109(19) :195302, 2012.
- [47] T. Karpiuk, N. Cherroret, K. Lee, B. Grémaud, C. Müller, and C. Miniatura. Coherent forward scattering peak induced by anderson localization. *Physical review letters*, 109(19) :190601, 2012.
- [48] S. Katsumoto, F. Komori, N. Sano, and S.-i. Kobayashi. Fine tuning of metal-insulator transition in al0. 3ga0. 7as using persistent photoconductivity. *Journal of the Physical Society of Japan*, 56(7) :2259–2262, 1987.
- [49] A. Keshet. Cicero word generator technical and user manual, 2008. URL <http://akeshet.github.io/Cicero-Word-Generator/>.
- [50] A. Keshet and W. Ketterle. A distributed, graphical user interface based, computer control system for atomic physics experiments. *Review of Scientific Instruments*, 84(1) :015105, 2013.
- [51] W. Ketterle and N. Van Druten. Evaporative cooling of trapped atoms. In *Advances in atomic, molecular, and optical physics*, volume 37, pages 181–236. Elsevier, 1996.
- [52] S. Kondov, W. McGehee, J. Zirbel, and B. DeMarco. Three-dimensional anderson localization of ultracold matter. *Science*, 334(6052) :66–68, 2011.
- [53] R. Kuhn, O. Sigwarth, C. Miniatura, D. Delande, and C. Müller. Coherent matter wave transport in speckle potentials. *New Journal of Physics*, 9(6) :161, 2007.
- [54] G. Lemarié. *The Anderson transition with atomic matter waves*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Sept. 2009. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00424399>.
- [55] G. Lemarié, J. Chabé, P. Sriftgiser, J. C. Garreau, B. Grémaud, and D. Delande. Observation of the anderson metal-insulator transition with atomic matter waves : Theory and experiment. *Physical Review A*, 80(4) :043626, 2009.
- [56] G. Lemarié, B. Grémaud, and D. Delande. Universality of the anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor. *EPL (Europhysics Letters)*, 87(3) :37007, 2009.

- [57] M. Lopez, J.-F. Clément, P. Sriftgiser, J. C. Garreau, and D. Delande. Experimental test of universality of the anderson transition. *Physical Review Letters*, 108(9) : 095701, 2012.
- [58] P. Lugan, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, D. Delande, B. Grémaud, C. A. Müller, and C. Miniatura. One-dimensional anderson localization in certain correlated random potentials. *Physical Review A*, 80(2) :023605, 2009.
- [59] O. Luiten, M. Reynolds, and J. Walraven. Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas. *Physical Review A*, 53(1) :381, 1996.
- [60] D. Magatti, A. Gatti, and F. Ferri. Three-dimensional coherence of light speckles : experiment. *Physical Review A*, 79(5) :053831, 2009.
- [61] C. Martin and A. Ben-Yakar. Determination of scattering properties and damage thresholds in tissue using ultrafast laser ablation. *Journal of biomedical optics*, 21 (11) :115004, 2016.
- [62] M. Monteverde, C. Ojeda-Aristizabal, R. Weil, K. Bennaceur, M. Ferrier, S. Guéron, C. Glattli, H. Bouchiat, J. Fuchs, and D. Maslov. Transport and elastic scattering times as probes of the nature of impurity scattering in single-layer and bilayer graphene. *Physical review letters*, 104(12) :126801, 2010.
- [63] F. Moore, J. Robinson, C. Bharucha, B. Sundaram, and M. Raizen. Atom optics realization of the quantum δ -kicked rotor. *Physical Review Letters*, 75(25) :4598, 1995.
- [64] N. Mott and E. Davis. Electronic processes in non-crystalline solids, clarendon, 1979.
- [65] M. Mukhtar. *State-dependent disordered potential for studies of Anderson transition with ultracold atoms*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2019.
- [66] C. A. Müller and B. Shapiro. Comment on “three-dimensional anderson localization in variable scale disorder”. *Physical review letters*, 113(9) :099601, 2014.
- [67] K. Muller. *Coherent transport of ultracold atoms in disordered potentials : Manipulation of time-reversal symmetry in weak localization experiments*. PhD thesis, Paris 11, 2015.
- [68] K. Müller, J. Richard, V. V. Volchkov, V. Denechaud, P. Bouyer, A. Aspect, and V. Josse. Suppression and revival of weak localization through control of time-reversal symmetry. *Physical Review Letters*, 114(20) :205301, 2015.
- [69] P. Murthy, D. Kedar, T. Lompe, M. Neidig, M. Ries, A. Wenz, G. Zürn, and S. Jochim. Matter-wave fourier optics with a strongly interacting two-dimensional fermi gas. *Physical Review A*, 90(4) :043611, 2014.
- [70] H. Niederer. Magneto oscillatory conductance in n-type inverted silicon surfaces. *Japanese Journal of Applied Physics*, 13(S2) :339, 1974.
- [71] T. M. Nieuwenhuizen and M. Van Rossum. Intensity distributions of waves transmitted through a multiple scattering medium. *Physical review letters*, 74(14) :2674, 1995.

- [72] A. Obermann, E. Larose, L. Margerin, and V. Rossetto. Measuring the scattering mean free path of rayleigh waves on a volcano from spatial phase decoherence. *Geophysical Journal International*, 197(1) :435–442, 2014.
- [73] K. O’hara, M. E. Gehm, S. Granade, and J. Thomas. Scaling laws for evaporative cooling in time-dependent optical traps. *Physical Review A*, 64(5) :051403, 2001.
- [74] H. Ott. Single atom detection in ultracold quantum gases : a review of current progress. *Reports on Progress in Physics*, 79(5) :054401, 2016.
- [75] M. Paalanen, T. Rosenbaum, G. Thomas, and R. Bhatt. Critical scaling of the conductance in a disordered insulator. *Physical review letters*, 51(20) :1896, 1983.
- [76] J. H. Page, P. Sheng, H. P. Schriemer, I. Jones, X. Jing, and D. A. Weitz. Group velocity in strongly scattering media. *Science*, 271(5249) :634–637, 1996.
- [77] M. Pasek, Z. Zhao, D. Delande, and G. Orso. Phase diagram of the three-dimensional anderson model for short-range speckle potentials. *Physical Review A*, 92(5) :053618, 2015.
- [78] M. Pasek, G. Orso, and D. Delande. Anderson localization of ultracold atoms : Where is the mobility edge ? *Physical review letters*, 118(17) :170403, 2017.
- [79] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press, 2008.
- [80] S. Pilati, S. Giorgini, M. Modugno, and N. Prokof’ev. Dilute bose gas with correlated disorder : a path integral monte carlo study. *New Journal of Physics*, 12(7) :073003, 2010.
- [81] M. Piraud. *Localisation d’Anderson d’ondes de matière dans un désordre corrélé : de 1D à 3D*. PhD thesis, Paris 11, 2012.
- [82] T. Plisson, T. Bourdel, and C. A. Müller. Momentum isotropisation in random potentials. *The European Physical Journal Special Topics*, 217(1) :79–84, 2013.
- [83] T. Prat, N. Cherroret, and D. Delande. Semiclassical spectral function and density of states in speckle potentials. *Physical Review A*, 94(2) :022114, 2016.
- [84] J. Richard. *Propagation d’atomes ultra-froids en milieu désordonné-Étude dans l’espace des impulsions de phénomènes de diffusion et de localisation*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2015.
- [85] J. Richard, L.-K. Lim, V. Denechaud, V. V. Volchkov, B. Lecoutre, M. Mukhtar, F. Jendrzejewski, A. Aspect, A. Signoles, L. Sanchez-Palencia, et al. Elastic scattering time of matter waves in disordered potentials. *Physical review letters*, 122(10) :100403, 2019.
- [86] J.-F. Riou. *Etude des propriétés de propagation d’un laser à atomes*. PhD thesis, Paris 11, 2006.
- [87] G. Roati, C. D’Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio. Anderson localization of a non-interacting bose-einstein condensate. *Nature*, 453(7197) :895–898, 2008.

- [88] M. Robert-De-Saint-Vincent, J.-P. Brantut, B. Allard, T. Plisson, L. Pezzé, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, T. Bourdel, and P. Bouyer. Anisotropic 2d diffusive expansion of ultracold atoms in a disordered potential. *Physical Review Letters*, 104(22) :220602, 2010.
- [89] N. Robins, P. Altin, J. Debs, and J. Close. Atom lasers : Production, properties and prospects for precision inertial measurement. *Physics Reports*, 529(3) :265–296, 2013.
- [90] L. Sapienza, H. Thyrrstrup, S. Stobbe, P. D. Garcia, S. Smolka, and P. Lodahl. Cavity quantum electrodynamics with anderson-localized modes. *Science*, 327(5971) :1352–1355, 2010.
- [91] R. Savo, R. Pierrat, U. Najar, R. Carminati, S. Rotter, and S. Gigan. Observation of mean path length invariance in light-scattering media. *Science*, 358(6364) :765–768, 2017.
- [92] F. Scheffold, R. Lenke, R. Tweer, and G. Maret. Localization or classical diffusion of light ? *Nature*, 398(6724) :206–207, 1999.
- [93] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446(7131) :52–55, 2007.
- [94] P. Sebbah, B. Hu, A. Genack, R. Pnini, and B. Shapiro. Spatial-field correlation : the building block of mesoscopic fluctuations. *Physical review letters*, 88(12) :123901, 2002.
- [95] G. Semeghini, M. Landini, P. Castilho, S. Roy, G. Spagnolli, A. Trenkwalder, M. Fattoni, M. Inguscio, and G. Modugno. Measurement of the mobility edge for 3d anderson localization. *Nature Physics*, 11(7) :554–559, 2015.
- [96] B. Shapiro. Cold atoms in the presence of disorder. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(14) :143001, 2012.
- [97] I. Shlimak, M. Kaveh, R. Ussyshkin, V. Ginodman, and L. Resnick. Determination of the critical conductivity exponent for the metal-insulator transition at nonzero temperatures : universality of the transition. *Physical review letters*, 77(6) :1103, 1996.
- [98] A. Signoles, B. Lecoutre, J. Richard, L.-K. Lim, V. Denechaud, V. V. Volchkov, V. Angelopoulou, F. Jendrzejewski, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, et al. Ultracold atoms in disordered potentials : elastic scattering time in the strong scattering regime. *New Journal of Physics*, 21(10) :105002, 2019.
- [99] S. E. Skipetrov and I. M. Sokolov. Absence of anderson localization of light in a random ensemble of point scatterers. *Physical review letters*, 112(2) :023905, 2014.
- [100] S. E. Skipetrov, A. Minguzzi, B. A. van Tiggelen, and B. Shapiro. Anderson localization of a bose-einstein condensate in a 3d random potential. *Physical review letters*, 100(16) :165301, 2008.
- [101] K. Slevin and T. Ohtsuki. Corrections to scaling at the anderson transition. *Physical review letters*, 82(2) :382, 1999.

- [102] K. Slevin and T. Ohtsuki. Critical exponent for the anderson transition in the three-dimensional orthogonal universality class. *New Journal of Physics*, 16(1) : 015012, 2014.
- [103] J. Söding, D. Guéry-Odelin, P. Desbiolles, F. Chevy, H. Inamori, and J. Dalibard. Three-body decay of a rubidium bose-einstein condensate. *Applied physics B*, 69(4) : 257–261, 1999.
- [104] D. A. Steck. Rubidium 87 d line data, 2001.
- [105] S. Stellmer, B. Pasquiou, R. Grimm, and F. Schreck. Laser cooling to quantum degeneracy. *Physical review letters*, 110(26) :263003, 2013.
- [106] M. I. Trappe, D. Delande, and C. A. Müller. Semiclassical spectral function for matter waves in random potentials. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 48(24) :245102, 2015.
- [107] V. V. Volchkov, M. Pasek, V. Denechaud, M. Mukhtar, A. Aspect, D. Delande, and V. Josse. Measurement of spectral functions of ultracold atoms in disordered potentials. *Physical review letters*, 120(6) :060404, 2018.
- [108] J. Walraven. Elements of quantum gases : Thermodynamic and collisional properties of trapped atomic gases. *Les Houches-predoc lectures*, 2010 :207, 2010.
- [109] R. L. Weaver. Anderson localization of ultrasound. *Wave motion*, 12(2) :129–142, 1990.
- [110] R. L. Weaver. Anomalous diffusivity and localization of classical waves in disordered media : the effect of dissipation. *Physical Review B*, 47(2) :1077, 1993.
- [111] D. H. White, T. A. Haase, D. J. Brown, M. D. Hoogerland, M. S. Najafabadi, J. L. Helm, C. Gies, D. Schumayer, and D. A. Hutchinson. Observation of two-dimensional anderson localisation of ultracold atoms. *arXiv preprint arXiv :1911.04858*, 2019.
- [112] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini. Localization of light in a disordered medium. *Nature*, 390(6661) :671–673, 1997.
- [113] L. Ye, G. Cody, M. Zhou, P. Sheng, and A. N. Norris. Observation of bending wave localization and quasi mobility edge in two dimensions. *Physical review letters*, 69 (21) :3080, 1992.
- [114] A. Yedjour and B. Van Tiggelen. Diffusion and localization of cold atoms in 3d optical speckle. *The European Physical Journal D*, 59(2) :249–255, 2010.