Master Parisien Recherches Opérationnelles

Rapport de projet ECMA

École nationale des Ponts et Chaussées
2024

Baptiste Vert
Élève ingénieur

Introduction : modélisation papier

Ici, le but du projet est d'étudier un problème de tournées de véhicules robuste. Le nombre de véhicules utilisé n'est ni contraint ni pénalisant.

Il y a n villes qui doivent être visitées une et une seule fois. On travaillera avec n camions (ce nombre pourra être amené à être réduit si la taille de l'instance à résoudre est trop importante), on cherche à déterminer un ensemble de tournées permettant de visiter l'ensemble des clients tout en minimisant la durée totale des trajets, qui correspond ici à la somme des temps de trajet entre chaque paire de ville présentes dans les tournées.

Pour la modélisation du problème, on souhaite travailler avec un modèle compact pour cela on va utiliser les inégalités dites MTZ, qui permettent d'éliminer la présence de sous-tours mais en ajoutant seulement un nombre polynomial de contraintes.

On notera pour $(i, j) \in A$, $k \in [n]$, x_{ijk} la variable binaire qui vaut 1 si le véhicule k dessert la ville j en partant de la ville i. On notera pour $i, k \in [n]$, u_{ik} la variable entière qui indique le nombre de villes visitées par le véhicule k en arrivant à la ville i et en ajoutant celle-ci.

Une modélisation statique du problème de tournée de véhicules est donc :

PLNE

Objectif:

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} t_{ij} x_{ijk} \tag{1}$$

Sous contraintes:

$$\sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in [\![2; n]\!] \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in A, j\neq 1} d_j x_{ijk} \leq C, \quad \forall k \in [\![1; n]\!] \tag{3}$$

$$\sum_{(1,j)\in A} x_{1jk} \geq \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j)\in A, i\neq 1} x_{ijk}, \quad \forall k \in [\![1; n]\!] \tag{4}$$

$$\sum_{(i,1)\in A} x_{i1k} \geq \frac{1}{n} \sum_{(1,j)\in A, j\neq 1} x_{1jk}, \quad \forall k \in [\![1; n]\!] \tag{5}$$

$$x_{ijk} \leq \sum_{(l,i)\in A, l\neq i} x_{lik}, \quad \forall k, i, j \in [\![1; n]\!] \tag{6}$$

$$u_{jk} \geq u_{ik} + 1 - n(1 - x_{ijk}), \quad \forall k, j \in [\![1, n]\!], j \neq 1 \tag{7}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad k \in [\![1, n]\!] \tag{8}$$

$$u_{ik} \in \mathbb{N}, \quad \forall i, k \in [\![1, n]\!] \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Ici, chaque groupe de contraintes est associé à un véhicule sauf la première qui s'assure que chaque ville soit visitée une et une seule fois. La découpe du problème en n véhicules permet de ne travailler qu'avec des tours partant de l'entrepôt et y revenant. Autrement dit, il suffit de s'assurer que si un véhicule part desservir une ou plusieurs villes, alors il doit partir de l'entrepôt, assuré ici par la troisième contrainte, et il doit aussi y revenir, assuré ici par la quatrième contrainte. La cinquième contrainte s'assure qu'un véhicule effectue bien une tournée, en effet il ne peut desservir la ville j à partir de la ville i, que s'il était déjà en i. Pour la sixième contrainte, on pourrait supposer qu'il n'existe de toute façon pas d'arête allant d'un sommet sur lui même, il n'y aurait donc pas besoin du $l \neq i$. La dernière contrainte est une inégalité MTZ, qui permet d'interdire les sous-tours, mais qui reste polynomial.

On pourra être amené par la suite à diminuer le nombre de véhicules, si la combinatoire du problème devient trop grande.

2) Ici, on considère un problème robuste avec des incertitudes sur les distances. L'ensemble des valeurs que peuvent prendre les durées est :

$$\mathcal{U} = \left\{ \{t'_{ij} = t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t_i} + \hat{t_j}) + \delta^2_{ij}\hat{t_i}\hat{t_j}\}_{ij \in A} : \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq T, \sum_{ij \in A} \delta^2_{ij} \leq T^2, \delta^1_{ij} \in [0,1], \delta^2_{ij} \in [0,2] \forall ij \in A \right\} \tag{11}$$

avec $T \in \mathbb{N}$.

On obtient alors la modélisation robuste suivante :

MILP robuste

Objectif:

$$\min_{x_{kij}} \max_{t'_{ij} \in \mathcal{U}} \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^{n} t'_{ij} x_{ijk} \tag{12}$$

Sous contraintes:

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in [\![2; n]\!] \tag{13}$$

$$\sum_{(i,j) \in A, j \neq 1} d_j x_{ijk} \leq C, \quad \forall k \in [\![1; n]\!] \tag{14}$$

$$\sum_{(1,j) \in A} x_{1jk} \geq \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j) \in A, i \neq 1} x_{ijk}, \quad \forall k \in [\![1; n]\!] \tag{15}$$

$$\sum_{(i,1) \in A} x_{i1k} \geq \frac{1}{n} \sum_{(1,j) \in A, j \neq 1} x_{1jk}, \quad \forall k \in [\![1; n]\!] \tag{16}$$

$$x_{ijk} \leq \sum_{(l,i) \in A, l \neq i} x_{lik}, \quad \forall k, i, j \in [\![1; n]\!] \tag{17}$$

$$u_{jk} \geq u_{ik} + 1 - n(1 - x_{ijk}), \quad \forall k, j \in [\![1, n]\!], j \neq 1 \tag{18}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in A, \quad k \in [\![1, n]\!] \tag{19}$$

$$u_{ik} \in \mathbb{N}, \quad \forall i, k \in [\![1, n]\!] \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

3) Résolution par plans coupants et LazyCallback

a) Utilisation d'une variable épigraphique

MILP robuste

Objectif:

$$\min_{z, x_{ijk}} z \tag{22}$$

Sous contraintes:

$$z \geq \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^{n} t'_{ij} x_{ijk}, \quad \forall (t'_{ij})_{(i,j) \in A} \in \mathcal{U} \tag{23}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in [\![2; n]\!] \tag{24}$$

$$\sum_{(i,j) \in A, j \neq 1} d_j x_{ijk} \leq C, \quad \forall k \in [\![1; n]\!] \tag{25}$$

$$\sum_{(1,j) \in A} x_{1jk} \geq \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j) \in A, i \neq 1} x_{ijk}, \quad \forall k \in [\![1; n]\!] \tag{26}$$

$$\sum_{(i,1) \in A} x_{i1k} \geq \frac{1}{n} \sum_{(1,j) \in A, j \neq 1} x_{1jk}, \quad \forall k \in [\![1; n]\!] \tag{27}$$

$$x_{ijk} \leq \sum_{(l,i) \in A, l \neq i} x_{lik}, \quad \forall k, i, j \in [\![1; n]\!] \tag{28}$$

$$u_{jk} \geq u_{ik} + 1 - n(1 - x_{ijk}), \quad \forall k, j \in [\![1, n]\!], j \neq 1 \tag{29}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in A, \quad k \in [\![1, n]\!] \tag{30}$$

$$u_{ik} \in \mathbb{N}, \quad \forall i, k \in [\![1, n]\!] \tag{31}$$

$$z \geq 0 \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

b) Soit $\mathcal{U}^*$ l'ensemble utilisé initialement dans le problème maître, ici on construira cet ensemble à travers le programme linéaire suivant :

Objectif:

$$\max_{\delta_{ij}^1, \delta_{ij}^2} \sum_{(i,j) \in A} (t_{ij} + \delta_{ij}^1 (\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^2 \hat{t}_i \hat{t}_j) \tag{34}$$

Sous contraintes:

$$\sum_{(i,j) \in A}^{n} \delta_{ij}^1 \leq T \tag{35}$$

$$\sum_{(i,j) \in A}^{n} \delta_{ij}^2 \leq T^2 \tag{36}$$

$$0 \leq \delta_{ij}^1 \leq 1, \quad \forall (i,j) \in A \tag{37}$$

$$0 \leq \delta_{ij}^2 \leq 2, \quad \forall (i,j) \in A \tag{38}$$

$$\tag{39}$$

c) Le sous-problème nécessaire à la résolution du problème par plans coupants est le suivant :

Objectif:

$$\max_{\delta^1_{ij},\delta^2_{ij}} \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} (t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j)x^*_{ijk} \tag{40}$$

Sous contraintes:

$$\sum_{(i,j)\in A}^{n} \delta^1_{ij} \leq T \tag{41}$$

$$\sum_{(i,j)\in A}^{n} \delta^2_{ij} \leq T^2 \tag{42}$$

$$0 \leq \delta^1_{ij} \leq 1, \quad \forall (i,j) \in A \tag{43}$$

$$0 \leq \delta^2_{ij} \leq 2, \quad \forall (i,j) \in A \tag{44}$$

$$\tag{45}$$

d) Pour qu'une solution $(z^*, (x^*_{ijk})_{(i,j)\in A, 1\leq k\leq n})$ du problème maître soit optimale, il faut que :

$$z^* = \max_{(t'_{ij})_{(i,j)\in A}\in\mathcal{U}} \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} t'_{ij}x^*_{ijk} \tag{46}$$

e) Les coupes ajoutées par ce sous-problème sont de la forme :

$$z \geq \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} t^*_{ij}x^*_{ijk} \tag{47}$$

où $(t^*_{ij})_{(i,j)\in A}$ représente la solution optimale en résolvant le sous-problème avec la solution $(x^*_{ijk})_{(i,j)\in A, 1\leq k\leq n}$ du problème maître précédent.

4) Résolution par dualisation
a)

$$\begin{aligned} &\min_{x_{ijk}} \max_{\delta^1_{ij},\delta^2_{ij}} \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} (t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j)x_{ijk} \\ =& \min_{x_{ijk}} \left(\sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk}t_{ij} + \max_{\delta^1_{ij},\delta^2_{ij}} \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk}(\delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j) \right) \end{aligned} \tag{48}$$

b)Le problème interne lié aux variables $\delta^1_{ij}, \delta^2_{ij}$ est le suivant :
Objectif:

$$\max_{\delta^1_{ij},\delta^2_{ij}} \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} (t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j)x^*_{ijk} \tag{49}$$

Sous contraintes:

$$\sum_{(i,j)\in A} \delta^1_{ij} \leq T \tag{50}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2 \tag{51}$$

$$0 \leq \delta^1_{ij} \leq 1, \quad \forall (i,j) \in A \tag{52}$$

$$0 \leq \delta^2_{ij} \leq 2, \quad \forall (i,j) \in A \tag{53}$$

$$\tag{54}$$

c) Le dual du problème précédent est :

Objectif:

$$\min_{y_{1,T},y_{2,T},y_{1,ij},y_{2,ij}} Ty_{1,T} + T^2 y_{2,T} + \sum_{(i,j)\in A} (y_{1,ij} + 2y_{2,ij}) \tag{55}$$

Sous contraintes:

$$y_{1,T} + y_{1,ij} \geq (\hat{t_i} + \hat{t_j}) \sum_{k=1}^{n} x_{ijk}, \quad \forall (i,j) \in A \tag{56}$$

$$y_{2,T} + y_{2,ij} \geq \hat{t_i}\hat{t_j} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk}, \quad \forall (i,j) \in A \tag{57}$$

$$y_{1,T}, y_{2,T} \geq 0 \tag{58}$$

$$y_{1,ij}, y_{2,ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A \tag{59}$$

$$\tag{60}$$

On obtient alors le programme mixte en nombres entiers suivant :

Objectif:

$$\min_{x_{ijk},y_{1,T},y_{2,T},y_{1,ij},y_{2,ij}} \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} t_{ij} + Ty_{1,T} + T^2 y_{2,T} + \sum_{(i,j)\in A} (y_{1,ij} + 2y_{2,ij}) \tag{61}$$

Sous contraintes:

$$\sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in [\![2;n]\!] \tag{62}$$

$$\sum_{(i,j)\in A, j\neq 1} d_j x_{ijk} \leq C, \quad \forall k \in [\![1;n]\!] \tag{63}$$

$$\sum_{(1,j)\in A} x_{1jk} \geq \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j)\in A, i\neq 1} x_{ijk}, \quad \forall k \in [\![1;n]\!] \tag{64}$$

$$\sum_{(i,1)\in A} x_{i1k} \geq \frac{1}{n} \sum_{(1,j)\in A, j\neq 1} x_{1jk}, \quad \forall k \in [\![1;n]\!] \tag{65}$$

$$\tag{66}$$

$$x_{ijk} \leq \sum_{l=1, l \neq i}^{n} x_{lik}, \quad \forall k, i, j \in [\![1; n]\!] \tag{67}$$

$$u_{jk} \geq u_{ik} + 1 - n(1 - x_{ijk}), \quad \forall k, j \in [\![1, n]\!], j \neq 1 \tag{68}$$

$$y_{1,T} + y_{1,ij} \geq (\hat{t_i} + \hat{t_j}) \sum_{k=1}^{n} x_{ijk}, \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!] \tag{69}$$

$$y_{2,T} + y_{2,ij} \geq \hat{t_i} \hat{t_j} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk}, \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!] \tag{70}$$

$$y_{1,T}, y_{2,T} \geq 0 \tag{71}$$

$$y_{1,ij}, y_{2,ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!] \tag{72}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j, k \in [\![1, n]\!] \tag{73}$$

$$u_{ik} \in \mathbb{N}, \quad \forall i, k \in [\![1, n]\!] \tag{74}$$

$$\tag{75}$$